



**QUADERNO DI APPUNTI
DI ELETTROTECNICA**

**ESERCIZI SUI CIRCUITI
ELETTRICI**

**ANTONINO LAUDANI
FRANCESCO RIGANTI
FULGINEI**

EP

Esercizi
sui circuiti elettrici
Antonino Laudani
Francesco Riganti Fulginei

Quaderno di Appunti di Elettrotecnica

INDICE

1	Prefazione	1
2	Reti resistive	2
2.1	Esercizi svolti	2
2.2	Esercizi proposti	6
3	Reti dinamiche del primo ordine	14
3.1	Esercizi svolti	14
3.2	Esercizi proposti	23
4	Reti dinamiche del secondo ordine	28
4.1	Esercizi svolti	28
4.2	Esercizi proposti	37
5	Reti in regime permanente sinusoidale (prima parte)	44
5.1	Esercizi svolti	44
5.2	Esercizi proposti	54
6	Reti in regime permanente sinusoidale (seconda parte)	62
6.1	Esercizi svolti	62
6.2	Esercizi proposti	69
	BIBLIOGRAFIA	78

Edizioni Pigreco, 2016

Pigreco Soc. Coop.
via della Penitenza, 37
00165 Roma

info@edizionipigreco.it
www.edizionipigreco.it

Tutti i diritti riservati

ISBN 978-88-88832-32-6

1 Prefazione

Questo volume raccoglie i testi e lo svolgimento di numerosi esercizi presentati dagli stessi autori durante i corsi di “Fondamenti di Elettrotecnica” della Laurea triennale in Ingegneria Elettronica ed “Elettrotecnica ed Elettronica” della Laurea triennale in Ingegneria Informatica dell’Università degli studi Roma Tre. A essi si aggiunge una selezione di temi di esami proposti negli appelli degli ultimi anni. Il presente lavoro è pensato per fornire un supporto allo studio che serva soprattutto a evidenziare l’approccio pratico all’analisi dei circuiti, a fornire gli strumenti idonei per superare con successo l’esame e soprattutto a preparare al meglio lo studente per i successivi corsi. Il volume affronta esclusivamente l’analisi di reti lineari tempo-invarianti, suddividendo i problemi in quattro classi principali: reti puramente resistive, reti dinamiche del primo ordine, reti dinamiche del secondo ordine e reti in regime permanente sinusoidale. In quest’ultima classe verranno considerati anche problemi tipici dell’Elettrotecnica come lo studio e il rifasamento di sistemi trifase simmetrici ed equilibrati. Infine, ma non da ultimo, si desidera ringraziare i professori Alessandro Salvini e Salvatore Coco per i preziosi e fondamentali insegnamenti umani e scientifici, di cui gli autori hanno avuto la fortuna e il privilegio di fare tesoro.

Roma, 30 Settembre 2016

Antonino Laudani e Francesco Riganti Fulginei

2 Reti resistive

2.1 Esercizi svolti

Esercizio 1 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 26 gennaio 2016)

Nel circuito di figura 1, calcolare la potenza erogata dai generatori indipendenti.

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega, R_4 = N_C\Omega, \mu = 2, V_{g1} = 10V, I_{g2} = 2A.^1$$

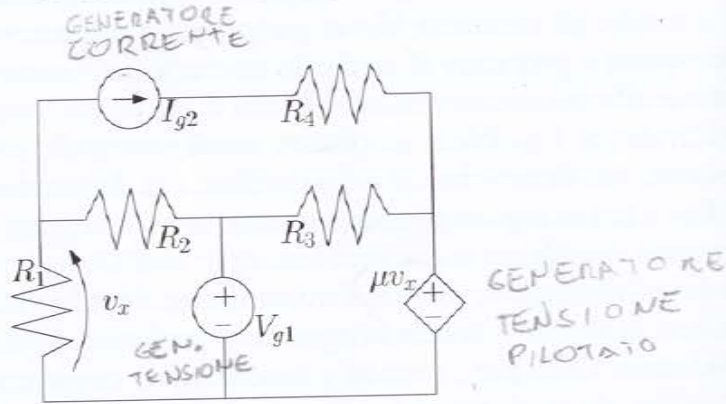


Figura 1

Si osservi che il circuito contiene un generatore indipendente di tensione, un generatore indipendente di corrente in serie ad un resistore, ed un generatore di tensione pilotato in tensione e complessivamente presenta 3 anelli e 4 nodi principali.

Si noti che scegliendo come nodo di riferimento il nodo "0" in figura 2, grazie alla posizione del generatore pilotato, si ha la possibilità di esprimere tutte le grandezze una volta determinato il valore del potenziale sul nodo "1": infatti questo coincide con v_x , mentre $e_2 = V_{g1}$ e $e_3 = \mu v_x$. Scriviamo pertanto la LKC al nodo "1" (positive le correnti

LEGGI DI
KIRKOFF

¹ In questo esercizio N_C sta per il numero di caratteri del cognome.

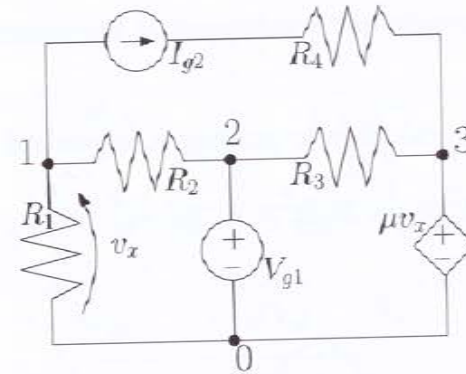


Figura 2: Scelta potenziali di nodo

entranti):

$$\frac{0 - e_1}{R_1} + \frac{V_{g1} - e_1}{R_2} - I_{g2} = 0 \quad (1)$$

da cui, numericamente,

$$e_1 = v_x = \frac{1}{2}(V_{g1} - I_{g2}) = 0.5 \cdot (10 - 2) = 4V \quad (2)$$

A questo punto è subito possibile calcolare la corrente nel generatore indipendente di tensione $I_{V_{g1}}$ (convenzione del generatore), come

$$I_{V_{g1}} = \frac{V_{g1} - v_x}{R_2} + \frac{V_{g1} - \mu v_x}{R_3} = (10 - 4) + (10 - 8) = 8A \quad (3)$$

da cui, la potenza erogata da V_{g1} vale $P_{V_{g1}} = V_{g1} \cdot I_{V_{g1}} = 10 \cdot 8 = 80W$. In maniera altrettanto semplice è possibile calcolare la tensione sul generatore indipendente di corrente $V_{I_{g2}}$ (convenzione del generatore) come

$$V_{I_{g2}} = R_4 I_{g2} + \mu v_x - v_x = N_C \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 4 = 4 + N_C \cdot 2V \quad (4)$$

da cui, la potenza erogata da I_{g2} vale $P_{I_{g2}} = I_{g2} \cdot V_{I_{g2}} = 2 \cdot (4 + N_C \cdot 2) = 8 + 4 \cdot N_C W$.

Esercizio 2 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 12 febbraio 2016)

Nel circuito di figura 3, calcolare le potenze dissipate dai resistori R_1 , R_2 , R_3 ed R_x .

$R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $R_x = N_5\Omega$, $g = 2S$, $V_{g1} = 9V$, $V_{g2} = 10V$, $V_{g3} = N_6V$.¹

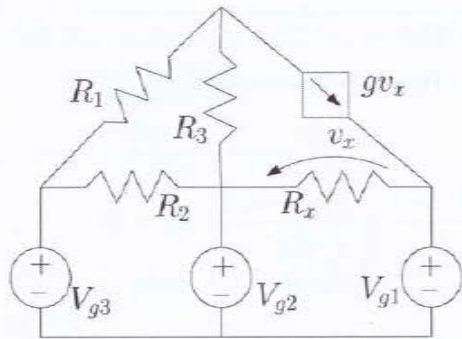


Figura 3

Si osservi che il circuito contiene tre generatori indipendenti di tensione, un generatore di corrente pilotato in tensione, e 4 resistori lineari, per un numero complessivo di 4 anelli e 5 nodi principali.

Si noti che scegliendo come nodo di riferimento il nodo "0" in figura 4, grazie alla disposizione dei generatori indipendenti, anche i nodi "1", "2" e "3" risultano a potenziale fissato: in particolare $e_1 = V_{g3}$, $e_2 = V_{g2}$ ed $e_3 = V_{g1}$. Non solo, ma anche la tensione di comando del generatore pilotato è fissata, in quanto $v_x = e_2 - e_3 = V_{g2} - V_{g1} = 1V$. L'unico potenziale incognito è quindi quello relativo al nodo "4", che si ottiene scrivendo la LKC al nodo stesso (positive le correnti entranti):

$$\frac{e_1 - e_4}{R_1} + \frac{e_2 - e_4}{R_3} - g(e_2 - e_3) = 0 \quad (5)$$

¹ In questo esercizio N_5 e N_6 stanno rispettivamente per la quinta e la sesta cifra del proprio numero di matricola (+1 se zero)

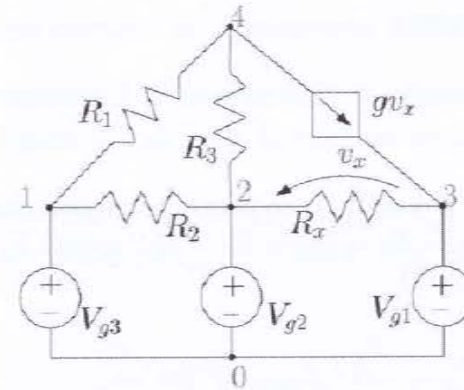


Figura 4: Scelta potenziali di nodo

da cui, numericamente,

$$e_4 = \frac{1}{2} (V_{g3} + V_{g2} - 2(V_{g2} - V_{g1})) = \frac{1}{2} \cdot (N_6 + 10 - 2) = N_6/2 + 4V \quad (6)$$

A questo punto è subito possibile calcolare la potenze dissipate sui resistori, notando che $p = v \cdot i = v^2/R$, ossia

$$P_{R_1} = \frac{(e_4 - e_1)^2}{R_1} = (N_6/2 + 4 - N_6)^2 = (4 - N_6/2)^2 W \quad (7)$$

$$P_{R_2} = \frac{(e_1 - e_2)^2}{R_2} = (N_6 - 10)^2 = (N_6 - 10)^2 W \quad (8)$$

$$P_{R_3} = \frac{(e_4 - e_2)^2}{R_3} = (N_6/2 + 4 - 10)^2 = (N_6/2 - 6)^2 W \quad (9)$$

$$P_{R_x} = \frac{(e_2 - e_3)^2}{R_x} = \frac{(10 - 9)^2}{N_5} = \frac{1}{N_5} W \quad (10)$$

2.2 Esercizi proposti

Esercizio 3 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 24 giugno 2016)

Nel circuito di figura 5, calcolare la potenza erogata dal generatore indipendente. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$, $\mu = 2$, $V_{g1} = N_M V$.¹ [Soluzione: $P_{V_{g1}} = 12.5W$.]

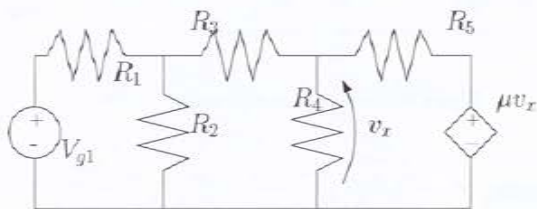


Figura 5

Esercizio 4 (dal compito di "Elettrotecnica ed Elettronica" del 9 settembre 2016)

Nel circuito di figura 6, calcolare la tensione v_x e la potenza P_{R^*} dissipata dalla resistenza R^* . Tutte le resistenze hanno valore pari a 0.5Ω , $I_g = 1A$. [Soluzione: $v_x = -1/3V$, $P_{R^*} = 1/18W$]

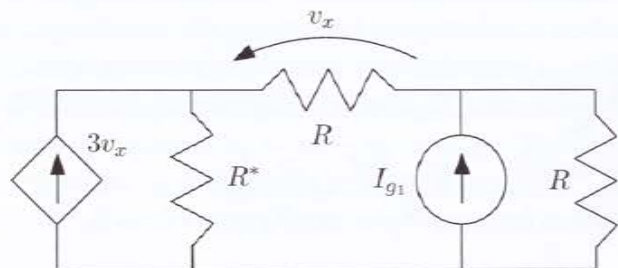


Figura 6

¹ In questo esercizio N_M è l'ultima cifra del proprio numero di matricola (+1 se zero)

Esercizio 5 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 14 Luglio 2016)

Nel circuito di figura 7, calcolare la potenza erogata dai generatori indipendenti.

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$, $V_{g1} = V_{g2} = 10V$, $g = 5S$. [Soluzione: $P_{V_{g1}} = 300W$, $P_{V_{g2}} = -200W$; V_{g2} assorbe e non eroga potenza]

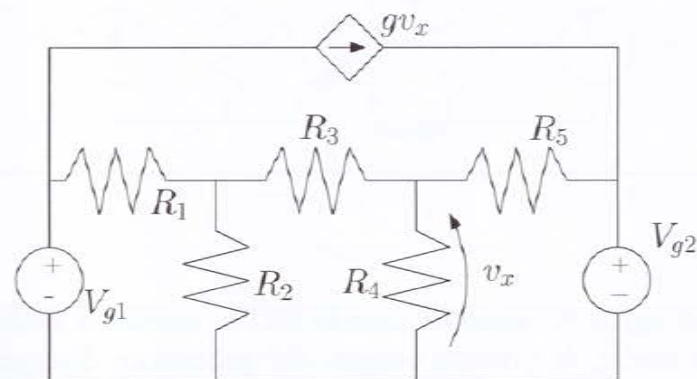


Figura 7

Esercizio 6

Nel circuito di figura 8, calcolare la potenza erogata da ciascun generatore indipendente.

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$, $V_{g1} = 2V$, $V_{g2} = 10V$. [Soluzione: $P_{V_{g1}} = 110W$, $P_{V_{g2}} = -20W$; V_{g2} quindi assorbe e non eroga potenza]

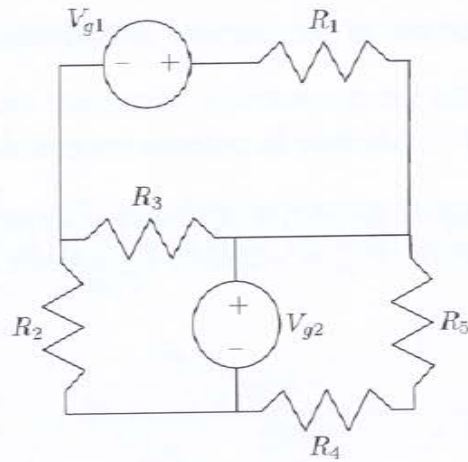


Figura 8

Esercizio 7

Nel circuito di figura 9, calcolare, usando sia i potenziali di nodo sia le correnti di anello, la potenza erogata dal generatore di corrente I_{g2} . $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$, $V_{g1} = 10V$, $I_{g2} = 1A$. [Soluzione: $P_{I_g} = 18.6W$].

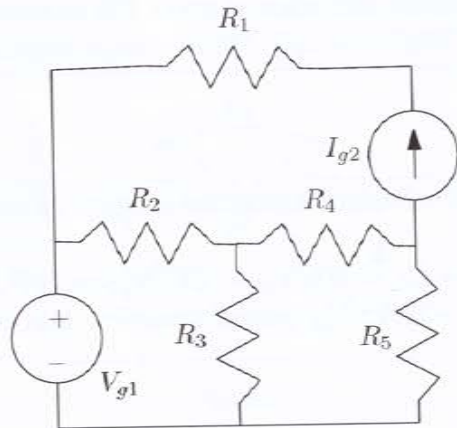


Figura 9

Esercizio 8

Nel circuito di figura 10, calcolare la potenza dissipata in ciascun resistore. $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 1/2\Omega$, $R_3 = 1\Omega$, $R_4 = 1/2\Omega$, $a = n_1/n_2 = 10$, $V_{g1} = 10V$, $I_{g2} = 1A$.

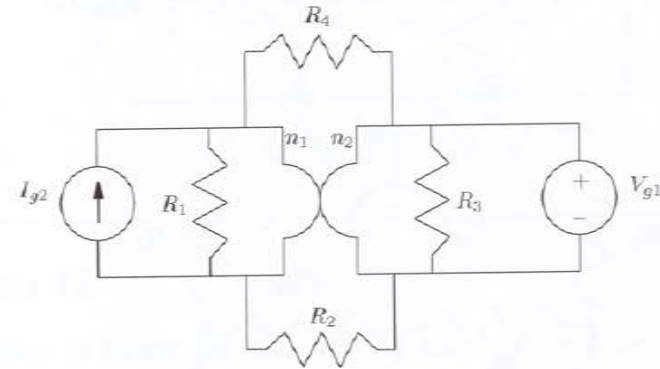


Figura 10

Esercizio 9

Nel circuito di figura 11, calcolare la potenza dissipata nel resistore R_2 . $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 1\Omega$, $R_3 = 1/2\Omega$, $g = 1S$, $V_{g1} = 10V$, $I_{g2} = 1A$. [Soluzione: $P_{R_2} = 9W$].

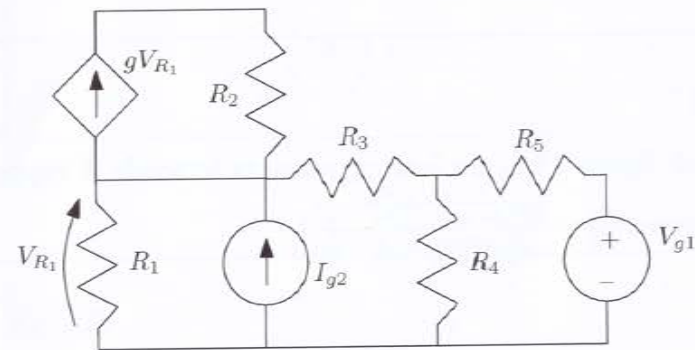


Figura 11

Esercizio 10

Nel circuito di figura 12, calcolare, usando sia i potenziali di nodo sia le correnti di anello, la potenza erogata dal generatore di tensione. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = 3/2\Omega$, $R_9 = R_{10} = R_{11} = 3\Omega$, $V_g = 10V$. [Soluzione: $P_{V_g} = \frac{100}{2.8125} W$]

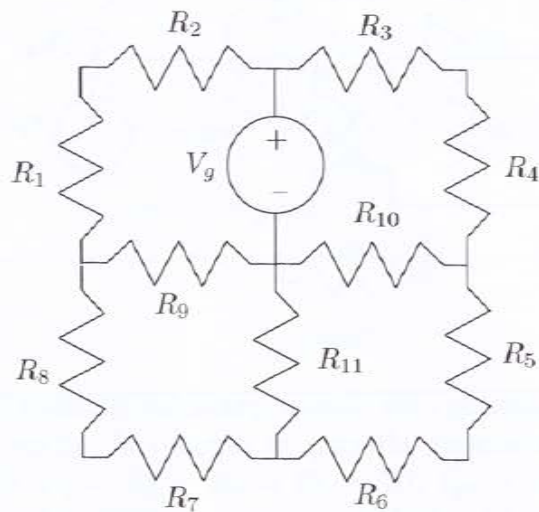


Figura 12

Esercizio 11

Nel circuito di figura 13, calcolare in maniera letterale il rapporto V_E/V_s . [Soluzione: $\frac{V_E}{V_s} = \frac{(1+g_m r_\pi)R_B}{R_S \parallel R_B + r_\pi + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_O}}$].

$$\frac{V_E}{V_s} = \frac{(1+g_m r_\pi)R_B}{R_S \parallel R_B + r_\pi + \frac{1}{R_E} + \frac{1}{R_O}}$$

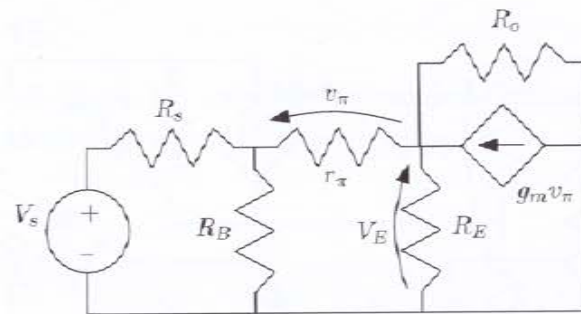


Figura 13

Esercizio 12

Nel circuito di figura 14, calcolare in maniera letterale il rapporto V_C/I_s .

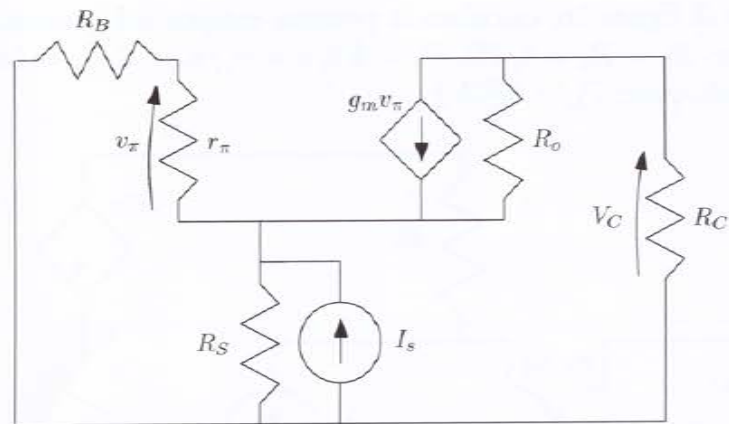


Figura 14

Esercizio 13

Nel circuito di figura 15, calcolare in maniera letterale il rapporto V_C/V_s .

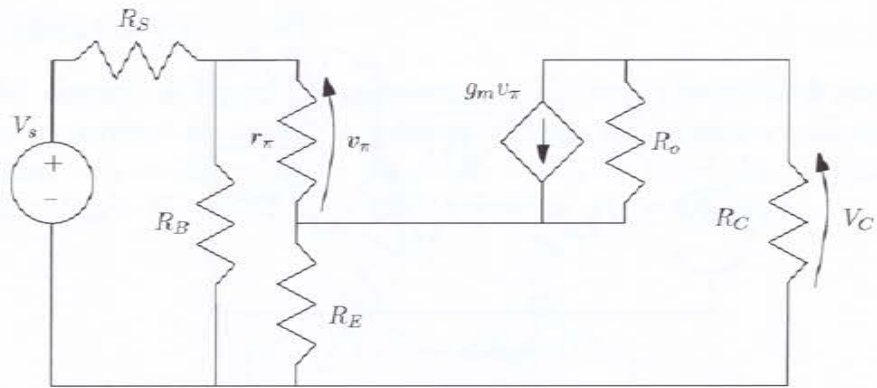


Figura 15

Esercizio 14

Nel circuito di figura 16, calcolare la potenza erogata dal generatore indipendente. $R_1 = R_2 = 1/2\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $a = n_1/n_2 = 2$, $I_g = 10A$, $\mu = 1/2$. [Soluzione: $P_{I_g} = \frac{400}{9}W$]

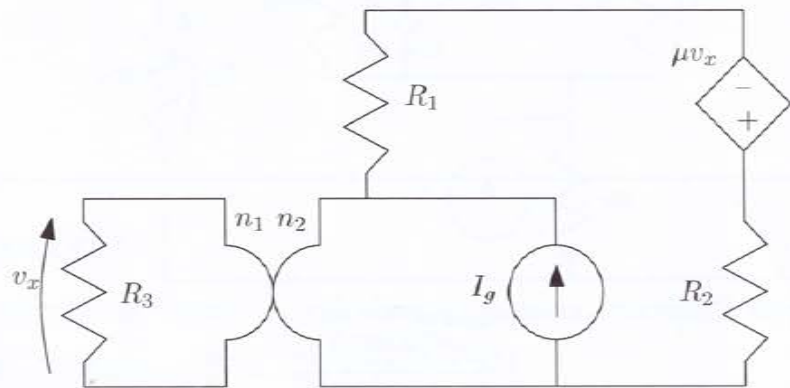


Figura 16

Esercizio 15

Nel circuito di figura 17, calcolare in maniera letterale il rapporto V_C/V_s . [Soluzione: $\frac{V_C}{V_s} = -g_m R_o || R_C \frac{r_\pi || R_B}{R_S + R_B || r_\pi}$]

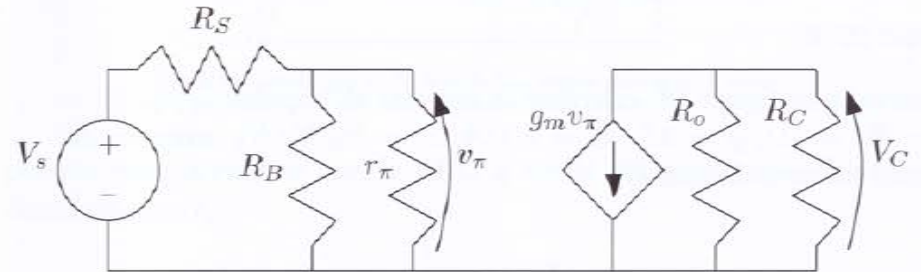


Figura 17

3 Reti dinamiche del primo ordine

3.1 Esercizi svolti

Esercizio 16 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 26 gennaio 2016)

Nel circuito di figura 18, calcolare la risposta all'impulso $i_L(t)$. $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $g = 3S$, $I_s = \delta(t)A$, $L = N_N H$. (N_N numero dei caratteri del proprio nome)

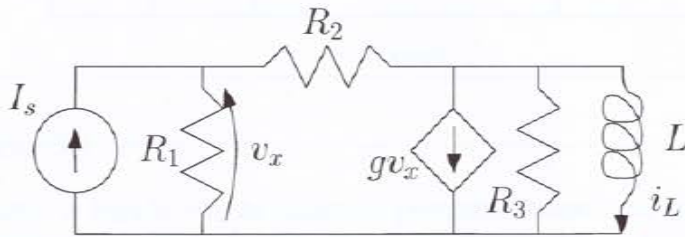


Figura 18

Per calcolare la risposta all'impulso basta notare che essa ha la forma:

$$i_L(t) = i_L(0^+)e^{-\frac{R_{eq}t}{L}}u(t) \quad (11)$$

dove R_{eq} è la resistenza equivalente 'vista' dall'induttore, e $i_L(0^+) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} v_L(t)dt$.

Per determinare la resistenza equivalente facciamo uso del circuito in fig. 19. Evidentemente la tensione v_x si può subito calcolare tramite la formula del partitore di tensione

$$v_x = \frac{R_1}{R_1 + R_2}v_p \quad (12)$$

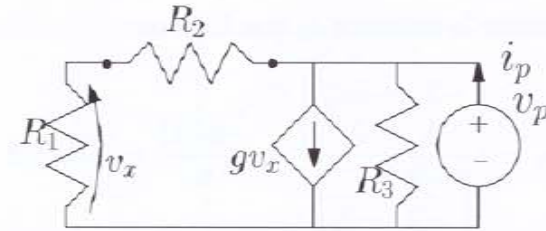


Figura 19: Circuito per il calcolo della R_{eq} tramite generatore di prova

per cui semplicemente con la LKC al nodo del generatore di prova determiniamo i_p

$$\begin{aligned} i_p &= v_p/R_3 + gv_x + v_p/(R_1 + R_2) = \\ &= v_p \cdot \left[\frac{1}{R_3} + g \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_2 + R_1} \right] = \\ &= v_p \cdot [1 + 3/2 + 1/2] = 3v_p \end{aligned} \quad (13)$$

ossia $R_{eq} = v_p/i_p = 1/3\Omega$. Per il calcolo della $v_L(t)$ per $t = 0$, notiamo che l'induttore si comporta come un generatore di corrente con corrente nulla, ossia come un circuito aperto. Pertanto il circuito da analizzare è quello di fig. 20. Si noti che la tensione $v_L(0)$ cercata coincide con la

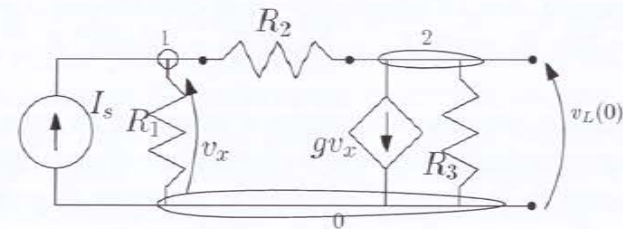


Figura 20: Circuito per il calcolo della $v_L(0)$.

e_2 , mentre $v_x = e_1$. Scriviamo il sistema di due equazioni ai nodi:

$$\begin{cases} LKC \text{ nodo 1} : I_s - e_1/R_1 + (e_2 - e_1)/R_2 = 0 \\ LKC \text{ nodo 2} : (e_1 - e_2)/R_2 - ge_1 - e_2/R_3 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Calcoliamo direttamente la tensione e_2 con Cramer:

$$v_L(0) = e_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -\delta(t) \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-2\delta(t)}{6} = -\delta(t)/3 \quad (15)$$

A questo punto si può passare al calcolo della $i_L(0^+)$ che risulta:

$$i_L(0^+) = -\frac{1}{3L} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = -\frac{1}{3L} \quad (16)$$

ossia la risposta all'impulso cercata è

$$i_L(t) = -\frac{1}{3L} e^{-\frac{t}{3L}} u(t) = -\frac{1}{3N_N} e^{-\frac{t}{3N_N}} u(t) \quad (17)$$

Esercizio 17 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 12 febbraio 2016)

Nel circuito di figura 21, calcolare l'andamento temporale della $v_C(t)$ per $t > 0$ assumendo che all'istante $t = 0$ il circuito sia a regime. $R_1 = R_2 = R_4 = 2\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $I_{g1} = N_5 A$, $I_{g2} = N_6 u(t) A$, $C = 1/3 F^1$.

Il circuito presenta un unico elemento a memoria (il condensatore) quindi la risoluzione può farsi attraverso la costruzione di un equivalente alla Thevenin ai capi dello stesso. Del resto la presenza di generatori costanti ed a gradino suggerisce che l'andamento temporale della tensione sul condensatore $v_C(t)$ per $t > 0$ sarà:

$$v_C(t) = (v_C(0) - v_C(\infty)) e^{-\frac{t}{R_{th}C}} + v_C(\infty) \quad (18)$$

dove $v_C(0)$ è la tensione sul condensatore all'istante $t = 0$, $v_C(\infty)$ è la tensione che il condensatore assume a regime, e R_{th} è la resistenza alla Thevenin vista dal condensatore.

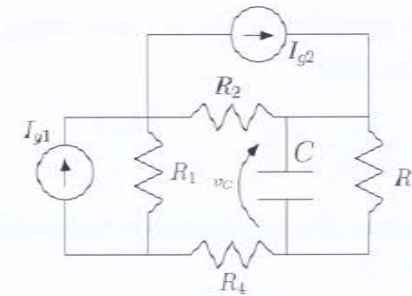


Figura 21

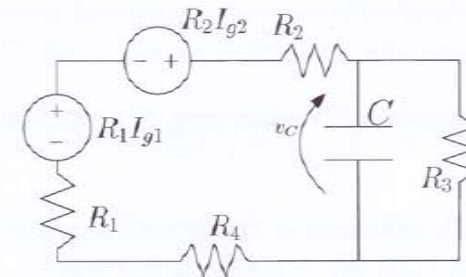


Figura 22: Circuito leggermente modificato per il calcolo della R_{eq} , della $v_C(0)$ e della $v_C(\infty)$

Una semplice elaborazione del circuito, che prevede la sostituzione dei due gruppi alla Norton (I_{g1}, R_1) e (I_{g2}, R_2) nei corrispettivi equivalenti alla Thevenin ($R_1 I_{g1}, R_1$) ($R_2 I_{g2}, R_2$), permette di ottenere il circuito di fig. 22. A questo punto è facile ottenere i valori di $v_C(0)$ e $v_C(\infty)$ in quanto basta sostituire il condensatore con un circuito aperto e considerare che per $t = 0$ è attivo solo il generatore $R_1 I_{g1}$, mentre per $t \rightarrow \infty$ sono attivi entrambi i generatori, che di conseguenza si sommano. Applicando la formula del partitore di tensione si trova:

$$v_C(0) = v_{R_3}(0) = \frac{R_3 R_1 I_{g1}}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{12 N_5}{12} = N_5 V \quad (19)$$

$$v_C(\infty) = v_{R_3}(\infty) = \frac{R_3 (R_1 I_{g1} + R_2 I_{g2})}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = \frac{12 N_5 + 12 N_6}{12} = N_5 + N_6 V \quad (20)$$

¹ N_5 e N_6 sono la quinta e la sesta cifra del numero di matricola

In maniera estremamente semplice la R_{th} si trova come il parallelo tra R_3 e la serie $R_1 + R_2 + R_4$ ossia

$$R_{th} = \frac{R_3 (R_1 + R_2 + R_4)}{R_3 + R_1 + R_2 + R_4} = \frac{6 \cdot 6}{6 + 2 + 2 + 2} = 3\Omega \quad (21)$$

Quindi in definitiva abbiamo che l'andamento temporale di $v_C(t)$ per $t > 0$ è ($R_{th}C = 3 \cdot 1/3 = 1$)

$$v_C(t) = (N_5 - N_5 - N_6) e^{-t} + N_5 + N_6 = N_5 + N_6 (1 - e^{-t}) \text{ V} \quad (22)$$

Esercizio 18 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 24 giugno 2016)

Nel circuito di figura 23, calcolare la risposta all'impulso $i_L(t)$. $R_1 = R_x = 1\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $g = 1/2S$, $V_s = \delta(t)V$, $L = N_N H$.

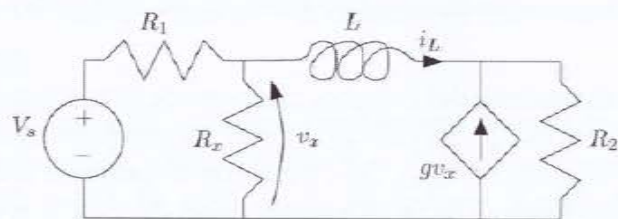


Figura 23

Per calcolare la risposta all'impulso anche in questo caso basta notare che essa ha la forma:

$$i_L(t) = i_L(0^+) e^{-\frac{R_{eq}t}{L}} u(t) \quad (23)$$

dove R_{eq} è la resistenza equivalente "vista" dall'induttore, e $i_L(0^+) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} v_L(t) dt$.

Per determinare la resistenza equivalente facciamo uso del circuito in fig. 24. Considerando che la corrente I_p attraversando i due resistori in

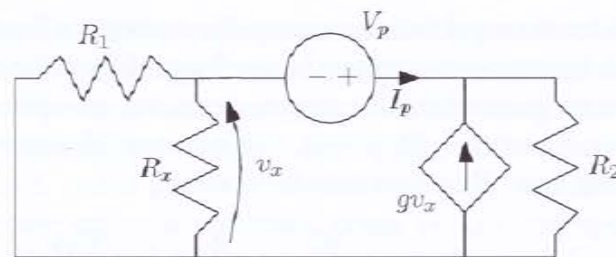


Figura 24

parallelo determina la tensione $v_x = -(R_1 || R_x) I_p$ è possibile scrivere la seguente LKT che ci permette di valutare la relazione tra V_p e I_p :

$$V_p = R_2 (I_p + g v_x) + (R_1 || R_x) I_p = R_2 \left(1 - g (R_1 || R_x) + \frac{R_1 || R_x}{R_2} \right) I_p \quad (24)$$

ossia

$$V_p = 1 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) I_p = \frac{5}{4} I_p \quad (25)$$

quindi la R_{eq} vista dall'induttore è pari a $\frac{5}{4}\Omega$.

Per quanto riguarda il calcolo della tensione a vuoto v_L all'istante $t = 0$ è utile riferirsi al circuito in fig. 25

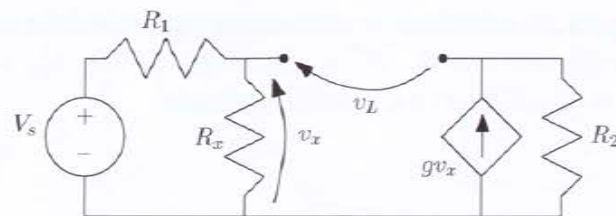


Figura 25

La tensione v_x anche in questo caso si calcola immediatamente tramite il partitore di tensione e risulta

$$v_x = \frac{R_x}{R_x + R_1} V_s = \frac{\delta(t)}{2} \quad (26)$$

A questo punto la tensione sul circuito aperto che sostituisce l'induttore è (ricordiamo che istantaneamente per la sua legge di lato l'induttore si comporta come un generatore di corrente costante, ma visto che in questo caso la sua corrente $i_L(0^-) = 0$, il generatore di corrente ha corrente nulla, ossia equivale ad un circuito aperto):

$$v_L(0) = v_x - R_2 \cdot g \cdot v_x = \left(1 - 1 \cdot \frac{1}{2}\right) v_x = \frac{\delta(t)}{4} \quad (27)$$

A questo punto si può passare al calcolo della $i_L(0^+)$ che risulta:

$$i_L(0^+) = \frac{1}{4L} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = \frac{1}{4L} \quad (28)$$

ossia la risposta all'impulso cercata è

$$i_L(t) = \frac{1}{4L} e^{-\frac{5t}{4L}} u(t) = \frac{1}{4N_N} e^{-\frac{5t}{4N_N}} u(t) \quad (29)$$

Esercizio 19 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 14 luglio 2016)

Nel circuito di figura 26, calcolare l'andamento temporale della tensione sul capacitore $v_C(t)$ per $t > 0$. $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $V_{g1} = 10V$, $I_{g2} = 5u(t)A$, $C = N_M F \cdot (u(t))$ è il gradino unitario).

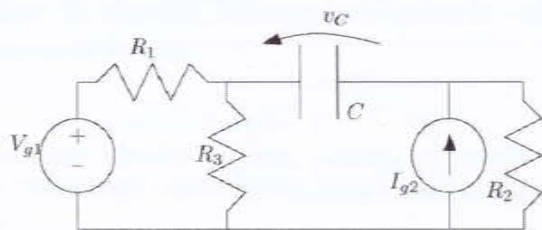


Figura 26

In questo circuito si noti la presenza di due generatori indipendenti (uno costante ed uno a gradino). Questo comporta due diversi circuiti da analizzare per $t < 0$ e per $t \geq 0$. Essendo interessati alla risposta per $t > 0$ possiamo comunque considerare solo la soluzione a regime costante della parte per $t < 0$, ossia quando il capacitore ormai completamente carico si comporta come un circuito aperto. Questo ci permette di determinare la condizione $v_C(0)$ facendo riferimento al circuito in fig. 27:

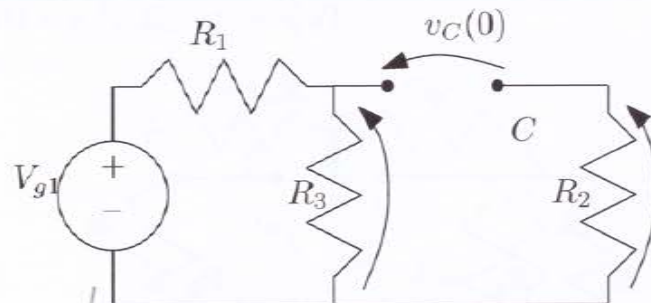


Figura 27

$$v_C(0) = v_{R_3} - v_{R_2} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} V_{g1} - 0 = 5V \quad (30)$$

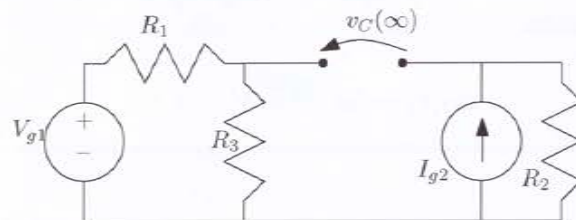


Figura 28

Con procedimento analogo e facendo riferimento stavolta alla figura 28, è possibile calcolare la tensione sul capacitore per $t \rightarrow +\infty$, $v_C(\infty)$.

$$v_C(\infty) = v_{R_3} - v_{R_2} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} V_{g1} - R_2 I_{g2} = 5 - 5 = 0V \quad (31)$$

Essendo il circuito del primo ordine basta la conoscenza di queste due grandezze e della costante di tempo τ_{RC} per scrivere l'andamento nel tempo della tensione sul capacitore:

$$v_C(t) = (v_C(0) - v_C(\infty)) e^{-\frac{t}{\tau_{RC}}} + v_C(\infty) \quad (32)$$

Per determinare la costante di tempo, conoscendo $C = N_M F$, bisogna calcolare la resistenza vista ai capi del capacitore quando sono stati spenti i generatori indipendenti, ossia fare riferimento al circuito in fig. 29.

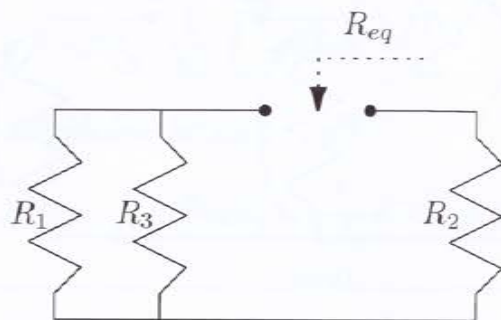


Figura 29

Risulta immediato notare che $R_{eq} = R_1 || R_3 + R_2 = 1/2 + 1 = 3/2 \Omega$. Quindi per $t > 0$ si ha

$$v_C(t) = 5e^{-\frac{2t}{3N_M}} \quad (33)$$

3.2 Esercizi proposti

Esercizio 20

Nel circuito di figura 30, calcolare l'andamento della corrente nell'induttore per $t > 0$ e l'energia immagazzinata a regime, ipotizzando nulla l'energia iniziale (ossia all'istante $t = 0$) immagazzinata nel circuito. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_8 = 1/2 \Omega$, $R_6 = R_7 = R_9 = R_{10} = 1 \Omega$, $L = 1H$, $V_g = 10V$. [Soluzione: $i_L(t) = 5(1 - e^{-t})$, $E_L(\infty) = \frac{25}{2} J$]

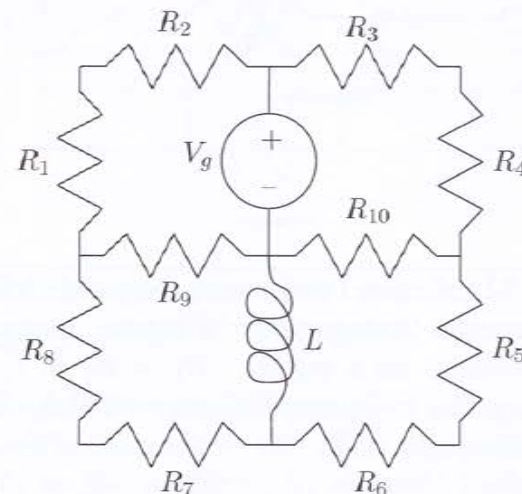


Figura 30

Esercizio 21

Nel circuito di figura 31, calcolare l'andamento della corrente nell'induttore per $t > 0$, ipotizzando che all'istante $t = 0$ il circuito sia a regime. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1 \Omega$, $L = 1H$, $V_{g1} = 10V$, $V_{g2} = u(t)V$.¹ [Soluzione: $i_L(t) = \frac{5}{6}e^{-\frac{7}{6}t} + \frac{35}{6}$]

¹ Si ricordi che $u(t)$ è il gradino unitario.

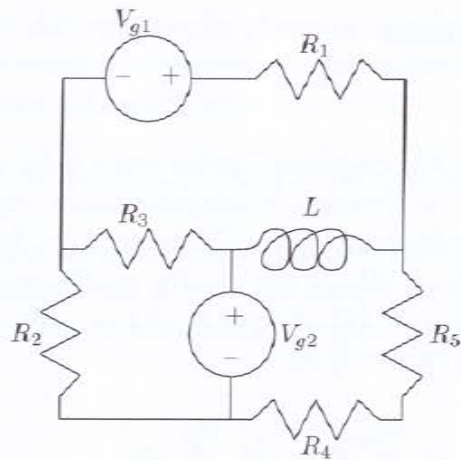


Figura 31

Esercizio 22

Nel circuito di figura 32, calcolare l'andamento temporale della tensione $v_C(t)$ per $t > 0$ e l'energia immagazzinata a regime, ipotizzando che all'istante $t = 0$ il circuito sia a regime. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$, $C = 1F$, $g = 1S$, $V_{g1} = 10V$, $i_{g2} = u(t)A$. [Soluzione: $v_C(t) = e^{-\frac{2t}{3}} + 4V$, $E_C(\infty) = 8J$]

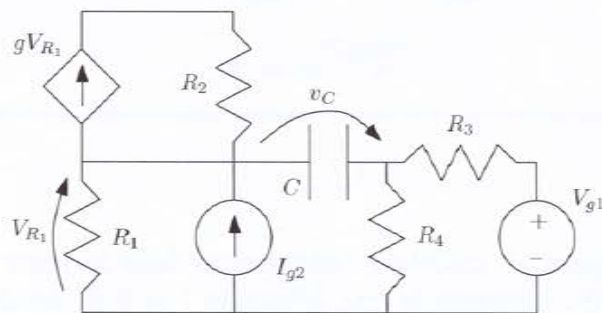


Figura 32

Esercizio 23

Nel circuito di figura 33, calcolare la risposta all'impulso relativa alla corrente $i_L(t)$. $L = 1H$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 1/2\Omega$, $R_3 = 1\Omega$, $R_4 = 1/2\Omega$, $a = n_1/n_2 = 10$, $I_{g2} = \delta(t)A$.¹

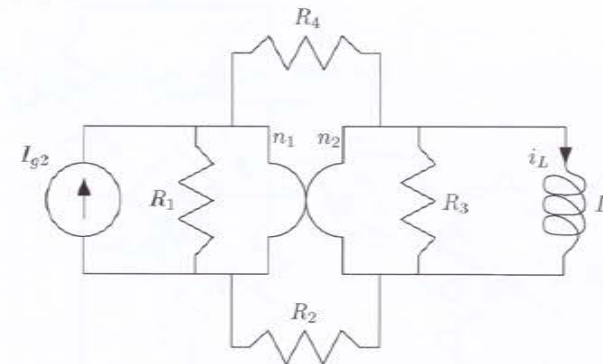


Figura 33

Esercizio 24

Nel circuito di figura 34, calcolare la risposta all'impulso relativa alla corrente $i_L(t)$ nell'induttore $L = 1H$, $R_B = R_o = 10k\Omega$, $r_\pi = 1000\Omega$, $g_m = 0.1S$, $R_S = R_C = 1000\Omega$, $V_s = \delta(t)V$ [Soluzione: $i_L(t) = -\frac{10000}{231}e^{-\frac{10}{11}10^3t}$]

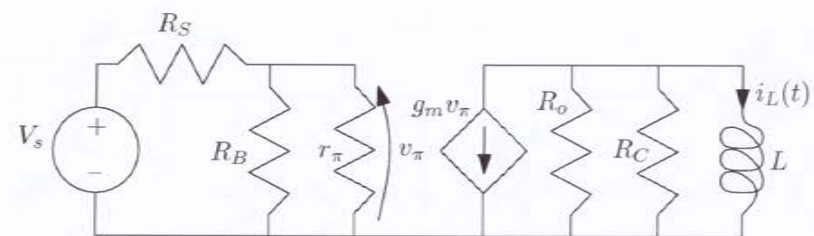


Figura 34

¹ Si ricordi che $\delta(t)$ è l'impulso.

Esercizio 25

Nel circuito di figura 35, calcolare la risposta all'impulso relativa alla tensione $v_c(t)$ sul capacitore. $R_B = 10k\Omega$, $r_\pi = 1000\Omega$, $g_m = 0.1S$, $R_S = R_E = R_L = 1000\Omega$, $C = 1F$, $V_s = \delta(t)V$.

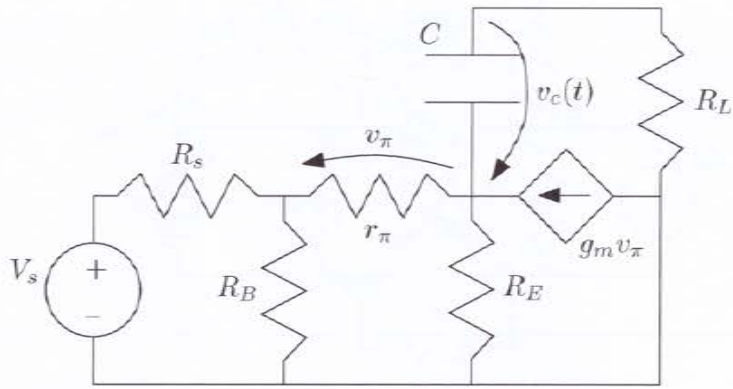


Figura 35

Esercizio 26

Nel circuito di figura 36, calcolare la risposta all'impulso relativa alla tensione $v_c(t)$. $C = 100\mu F$, $R_B = R_o = 10k\Omega$, $r_\pi = 1000\Omega$, $g_m = 0.1S$, $R_S = R_C = R_L = 1000\Omega$, $V_s = \delta(t)V$

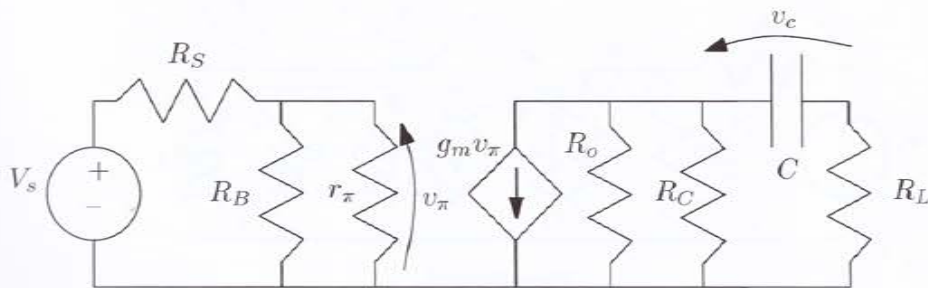


Figura 36

Esercizio 27

Nel circuito in figura 37, calcolare l'andamento della tensione sul capacitore per $t > 0$, ipotizzando l'energia immagazzinata nel capacitore all'istante $t = 0$ pari a $0.5 J$. $C = 1F$, $R_B = R_o = 1k\Omega$, $r_\pi = 1000\Omega$, $g_m = 0.1S$, $R_S = 1000\Omega$, $I_s = \delta(t)A$

[Soluzione: $v_C(t) = (1 + \frac{1}{105}) e^{-\frac{t}{52500}} V$]

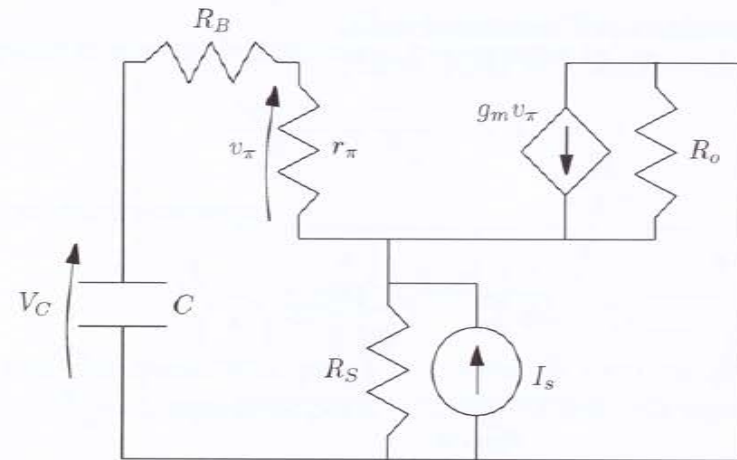


Figura 37

4 Reti dinamiche del secondo ordine

4.1 Esercizi svolti

Esercizio 28 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 26 gennaio 2016)

Nel circuito di figura 38, calcolare l'andamento temporale della tensione v_L , sapendo che all'istante $t=0$ la tensione sul condensatore vale 1 V e l'energia immagazzinata nell'induttore è nulla.

$$R_1 = R_2 = 1\Omega, I_g = N_C A, L = 1H, C = 1F.$$

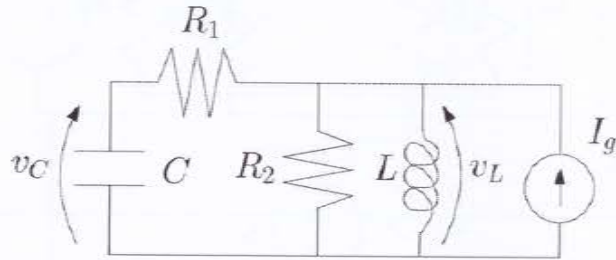


Figura 38

Dovendo determinare la $v_L(t)$ per $t > 0$ in questo circuito del secondo ordine, in cui il condensatore e l'induttore non sono connessi né in serie né in parallelo, è conveniente fare uso delle equazioni di stato per ricavare $i_L(t)$. v_L viene poi calcolata usando la legge di lato dell'induttore $v_L = L \frac{di_L(t)}{dt}$. Per ricavare le equazioni di stato procediamo immaginando di conoscere $v_C(t)$ ed $i_L(t)$ e sostituiamo il condensatore e l'induttore rispettivamente con un generatore di tensione indipendente ed un generatore di corrente indipendente, come rappresentato in fig. 39.

Essendo questo circuito "sostitutivo" puramente resistivo possiamo procedere senza difficoltà alla scrittura delle equazioni ai nodi, anzi all'unico nodo incognito "1" (potenziale $e_1 = v_L$), in quanto lo scopo

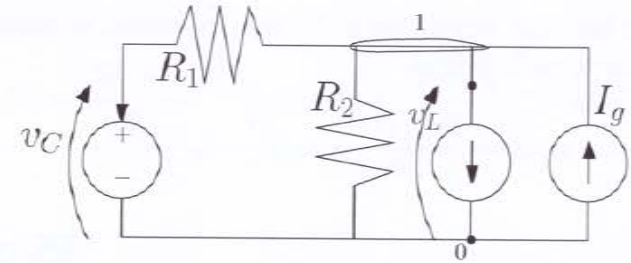


Figura 39: Circuito per la determinazione delle equazioni di stato.

è quello di ricavare la tensione v_L e la corrente i_C ¹:

$$\frac{v_C - e_1}{R_1} + \frac{-e_1}{R_2} - i_L + I_g = 0 \quad (34)$$

da cui, numericamente,

$$v_L = e_1 = \frac{v_C - i_L + I_g}{2} \quad (35)$$

Si noti che questa è la prima equazione di stato cercata visto che $v_L = L \frac{di_L(t)}{dt}$. L'equazione per $i_C = C \frac{dv_C(t)}{dt}$ è invece la seguente

$$i_C = \frac{e_1 - v_C}{R_1} = \frac{v_C - i_L + I_g}{2} - v_C = \frac{-v_C - i_L + I_g}{2} \quad (36)$$

per cui abbiamo (sostituendo i valori numerici di C e L) le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \frac{dv_C(t)}{dt} = -v_C(t)/2 - i_L(t)/2 + I_g/2 \\ \frac{di_L(t)}{dt} = v_C(t)/2 - i_L(t)/2 + I_g/2 \end{cases} \quad (37)$$

Sebbene si possa procedere risolvendo direttamente il sistema delle equazioni di stato a partire dalle condizioni iniziali date ($v_C(0) = 1V$ e $i_L(0) = 0A$), preferiamo ricavare l'equazione differenziale nella sola

¹ Si ricordi che bisogna comunque usare le convenzioni degli utilizzatori su L e C, nonostante al momento siano rappresentati come generatori

² Questa seconda dovuta all'energia nulla nell'induttore

variabile i_L . Per fare ciò ricaviamo $v_C(t)$ dalla seconda equazione di stato e la sostituiamo nella prima.

$$v_C(t) = 2 \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) - I_g \quad (38)$$

per cui

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[2 \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) - I_g \right] = \\ = - \left[2 \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) - I_g \right] / 2 - i_L(t) / 2 + I_g / 2 \end{aligned} \quad (39)$$

che riordinata diventa

$$2 \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2 \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = I_g \quad (40)$$

Abbiamo pertanto il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2 \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2 \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = I_g \\ \frac{di_L(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = v_C(0)/2 - i_L(0)/2 + I_g/2 = 1/2 + N_C/2 \\ i_L(0^+) = 0A \end{cases} \quad (41)$$

Il polinomio caratteristico $2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ ha radici $\lambda_{1,2} = -1/2 \pm j1/2$ complesse e coniugate e quindi la soluzione di tale problema è del tipo

$$i_L(t) = K_1 e^{-t/2} \cos(t/2) + K_2 e^{-t/2} \sin(t/2) + I_{par} \quad (42)$$

dove $I_{par} = I_g = N_C$, mentre K_1 e K_2 si determineranno sostituendo le condizioni iniziali. In particolare $i_L(0) = K_1 + N_C = 0$ implica $K_1 = -N_C$, mentre la condizione sulla derivata è

$$\frac{di_L(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = K_1 \left(-\frac{1}{2} \right) + K_2 \frac{1}{2} = N_C/2 + K_2/2 = N_C/2 + 1/2 \quad (43)$$

da cui $K_2 = 1$, ossia la soluzione completa è

$$i_L(t) = N_C(1 - e^{-t/2} \cos(t/2)) + e^{-t/2} \sin(t/2) \quad (44)$$

per cui

$$v_L(t) = \frac{N_C + 1}{2} e^{-t/2} \cos(t/2) + \frac{N_C - 1}{2} e^{-t/2} \sin(t/2) \quad (45)$$

Esercizio 29

Nel circuito di figura 40, calcolare la risposta al gradino di ampiezza N_5 relativa alla corrente $i_L(t)$

$R_1 = 2\Omega, R_2 = 1\Omega, g = 1/2 S, I_g = N_5 u(t) A, L = 1H, C = 1F.$

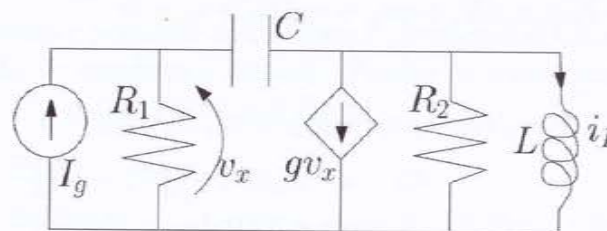


Figura 40

L'esercizio richiede il calcolo della risposta al gradino di ampiezza N_5 . Essendo il collegamento tra i due elementi a memoria né in serie né in parallelo, ricorriamo alle equazioni di stato per la scrittura dell'equazione differenziale in $i_L(t)$. Prendiamo quindi in esame il circuito in fig. 41, in cui abbiamo sostituito il capacitore con un generatore di tensione ideale $v_C(t)$ e l'induttore con un generatore di corrente ideale $i_L(t)$.

Essendo questo circuito "sostitutivo" puramente resistivo possiamo procedere senza difficoltà alla scrittura delle equazioni ai nodi (essendo presenti molti anelli), ricordando che il nostro fine è quello di ricavare la tensione v_L e la corrente i_C ¹. Considerando che $v_x = v_C + v_L$ è

¹ Si ricordi che bisogna comunque usare le convenzioni degli utilizzatori su L e C , nonostante al momento siano rappresentati come generatori

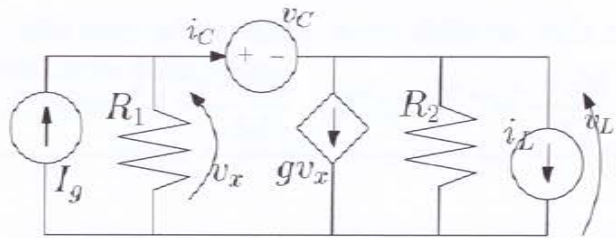


Figura 41: Circuito per la determinazione delle equazioni di stato.

possibile scrivere la LKC al nodo in basso (questo è l'unico sui cui non incide un generatore di tensione):

$$-I_g + v_x/R_1 + gv_x + v_L/R_2 + i_L = 0 \quad (46)$$

ossia

$$-I_g + v_C/R_1 + v_L/R_1 + gv_C + gv_L + v_L/R_2 + i_L = 0 \quad (47)$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{di_L(t)}{dt} = v_L(t) &= -\frac{i_L + (g + 1/R_1)v_C - I_g}{1/R_1 + 1/R_2 + g} = \\ &= -i_L/2 - v_C/2 + I_g/2 \end{aligned} \quad (48)$$

da cui

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -i_L - v_C + I_g \quad (49)$$

che è la prima equazione di stato cercata. La seconda equazione si ricava da una LKC che coinvolge la corrente i_C :

$$\begin{aligned} \frac{dv_C(t)}{dt} = i_C(t) &= -v_x/R_1 + I_g \\ &= -v_C/2 - \frac{1}{2}(-i_L/2 - v_C/2 + I_g/2) + I_g = \\ &= -v_C/4 + i_L/4 + 3I_g/4 \end{aligned} \quad (50)$$

da cui la seconda equazione di stato

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = -v_C + i_L + 3I_g \quad (51)$$

Ricaviamo $v_C(t)$ dalla prima delle due, $v_C(t) = -i_L(t) - \frac{di_L(t)}{dt} + I_g$, e sostituiamo nella seconda

$$\frac{d}{dt} \left(-i_L(t) - \frac{di_L(t)}{dt} + I_g \right) = - \left(-i_L(t) - \frac{di_L(t)}{dt} + I_g \right) + i_L + 3I_g \quad (52)$$

da cui

$$-\frac{di_L(t)}{dt} - \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \frac{dI_g}{dt} = i_L(t) + \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) + 2I_g \quad (53)$$

$$\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + 2\frac{di_L(t)}{dt} + 2i_L(t) = -2I_g + \frac{dI_g}{dt} \quad (54)$$

A questo punto è possibile completare il problema di Cauchy per $t > 0$ aggiungendo le condizioni iniziali. Poichè lo stato iniziale era zero avremo $v_C(0^+) = 0$ e $i_L(0^+) = 0$ da cui

$$\begin{cases} \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + 2\frac{di_L(t)}{dt} + 2i_L(t) = -2N_5 \\ \frac{di_L(t)}{dt}(0^+) = -i_L(0^+) - v_C(0^+) + I_g(0^+) = N_5 \\ i_L(0^+) = 0 \end{cases} \quad (55)$$

Il polinomio caratteristico sarà $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ che ha radici complesse e coniugate pari a $\lambda_{1,2} = -1 \pm j1$. Considerando che la soluzione particolare sarà del tipo $I_P = -N_5$ avremo la soluzione completa pari a

$$i_L(t) = K_1 e^{-t} \cos(t) + K_2 e^{-t} \sin(t) - N_5 \quad (56)$$

da cui, sostituendo le condizioni iniziali troviamo:

$$\begin{cases} i_L(0^+) = 0 = K_1 - N_5 \\ \frac{di_L(t)}{dt}(0^+) = N_5 = -K_1 + K_2 = N_5 \end{cases} \quad (57)$$

da cui, numericamente, $K_1 = N_5$ e $K_2 = 2N_5$, ossia

$$i_L(t) = N_5 (e^{-t} \cos(t) + 2e^{-t} \sin(t) - 1) \text{ A} \quad (58)$$

Esercizio 30 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 24 giugno 2016)

Nel circuito di figura 42, calcolare l'andamento temporale della tensione $v_C(t)$ per $t > 0$, sapendo che all'istante $t=0$ il circuito si trova a stato zero.

$$R_1 = R_2 = 1\Omega, V_g = N_N V, L = 1H, C = 1F, a = n_1/n_2 = 2.$$

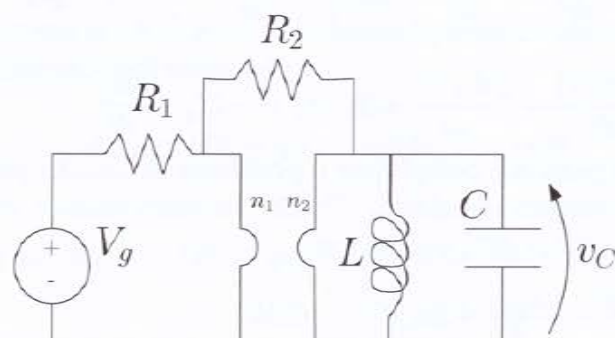


Figura 42

In questo circuito del secondo ordine si può immediatamente notare che il capacitore C e l'induttore L si trovano connessi in parallelo. Di conseguenza il problema può ricondursi alla soluzione di un RLC parallelo dopo aver trasformato la rete vista ai capi del parallelo $C - L$ in un equivalente alla Norton. Per calcolare la corrente di cortocircuito I_{Norton} basta riferirsi alla rete in fig. 43. Essendo il secondario del trasformatore cortocircuitato $v_2 = 0$ e quindi $v_1 = \frac{n_1}{n_2} v_2 = 0$. Risulta pure $V_{R_2} = v_1 - v_2 = 0$ e quindi al primario del trasformatore si ha $i_1 = \frac{V_g}{R_1}$. In definitiva

$$I_{Norton} = -i_2 = -\left(-\frac{n_2}{n_1} i_1\right) = \frac{N_N}{2} \quad (59)$$

Per quanto riguarda il calcolo della R_{Norton} bisogna riferirsi invece al circuito di fig. 44. Vista la presenza del trasformatore si rende necessario

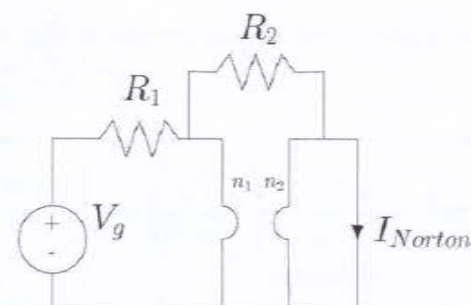


Figura 43

l'uso di un generatore di prova. È più conveniente scegliere come generatore di prova un generatore di tensione, in quanto collegandosi direttamente al secondario del trasformatore ne fissa la tensione, $v_2 = V_p$; questo implica anche che $v_1 = 2v_2 = 2V_p$ ed infine $v_{R_2} = v_1 - v_2 = 2V_p - V_p = V_p$. Visto che sono note tutte le tensioni è possibile scrivere le relative correnti di lato:

$$i_{R_1} = \frac{v_1}{R_1} = \frac{2V_p}{R_1} = 2V_p \quad (60)$$

$$i_{R_2} = \frac{V_p}{R_2} = V_p \quad (61)$$

$$i_1 = -i_{R_1} - i_{R_2} = -3V_p \quad (62)$$

$$i_2 = -\frac{n_2}{n_1} i_1 = \frac{3}{2} V_p \quad (63)$$

$$I_p = i_2 - i_{R_2} = \frac{3}{2} V_p - V_p = V_p/2 \quad (64)$$

e quindi $R_{Norton} = V_p/I_p = 2\Omega$.

Il problema è adesso descritto dal circuito equivalente $R - L - C$ parallelo di figura 45. Per tale circuito è immediato scrivere il problema di Cauchy risolvibile in $i_L(t)$:

$$\begin{cases} LC \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{L}{R_{Norton}} \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = I_{Norton} \\ \frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{v_L(0^+)}{L} = \frac{v_C(0^+)}{L} = 0 \\ i_L(0^+) = 0 \end{cases} \quad (65)$$

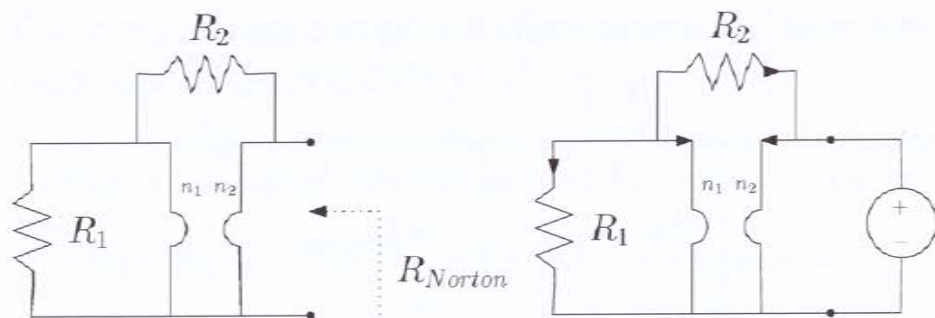


Figura 44

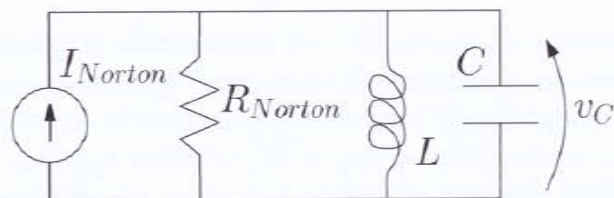


Figura 45

Il polinomio caratteristico sarà quindi $2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ e le frequenze naturali complesse e coniugate

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16}}{4} = -\frac{1}{4} \pm j \frac{\sqrt{15}}{4} \quad (66)$$

La soluzione avrà quindi espressione:

$$i_L(t) = K_1 e^{-\frac{t}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) + K_2 e^{-\frac{t}{4}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) + \frac{N_N}{2} \quad (67)$$

Per determinare K_1 e K_2 basta sostituire le condizioni iniziali: $i_L(0^+) = 0$ implica $K_1 + N_N/2 = 0$ ossia $K_1 = -N_N/2$; $\frac{di_L}{dt}|_{(0^+)} = 0$ implica $-K_1/4 + \sqrt{15}K_2/4 = 0$, ossia $K_2 = K_1/\sqrt{15} = -\frac{N_N}{2\sqrt{15}}$. La soluzione

richiesta dall'esercizio si otterrà infine derivando l'espressione trovata

$$\begin{aligned} v_C(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[-\frac{N_N}{2} e^{-\frac{t}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) - \frac{N_N}{2\sqrt{15}} e^{-\frac{t}{4}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) \right] \quad (68) \end{aligned}$$

I restanti calcoli li lasciamo al lettore sicuri che sappia come procedere.

4.2 Esercizi proposti

Esercizio 31 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 14 Luglio 2016)

Nel circuito di figura 46, calcolare l'andamento temporale della tensione $v_C(t)$ per $t > 0$, sapendo che all'istante $t=0$ il circuito si trova a stato zero.

$R = 1\Omega$, $V_g = N_N V$, $L = 1H$, $C = 1F$, $a = n_1/n_2 = 1/2$.

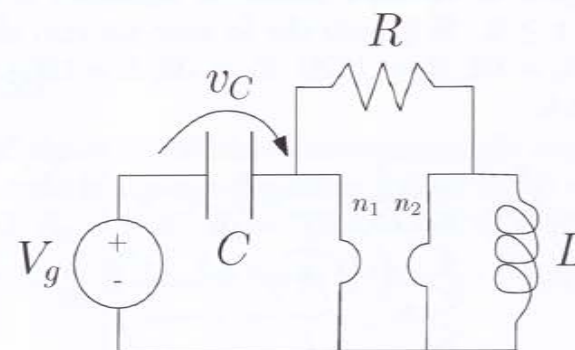


Figura 46

Esercizio 32

Nel circuito di figura 47, calcolare l'andamento della tensione $v_c(t)$ per $t \geq 0$, supponendo che all'istante $t = 0$ l'energia immagazzinata nel circuito sia nulla. $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $R_3 = R_4 = 1/4\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$, $V_{g1} = 5V$, $I_{g2} = 1A$. [Soluzione: $v_c(t) = 2 - 2e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) V$]

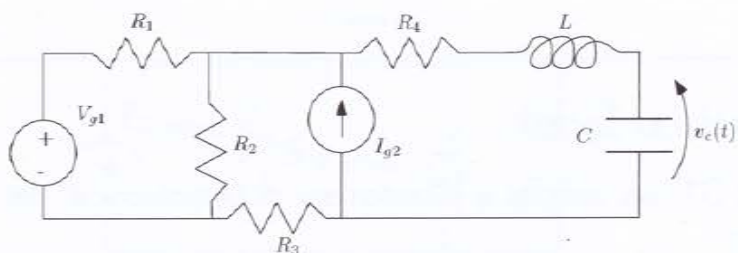


Figura 47

Esercizio 33

Nel circuito di figura 48 calcolare usando le equazioni di stato la tensione $v_c(t)$ per $t \geq 0$. Si ipotizzi che lo stato sia zero all'istante $t = 0$. $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 1/2\Omega$, $R_4 = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$, $V_{g1} = 10V$, $I_{g2} = 1A$.

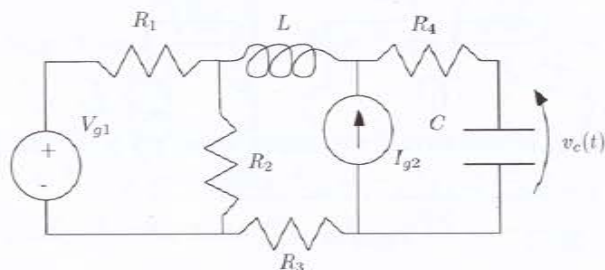


Figura 48

Esercizio 34

Nel circuito di figura 49, calcolare l'andamento della tensione $v_c(t)$ per $t \geq 0$, assumendo che all'istante $t = 0$ l'energia immagazzinata nel circuito sia nulla. $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = R_5 = 3\Omega$, $L = 1H$, $C = 1/2F$, $V_{g1} = 10V$, $I_{g2} = 5A$. [Soluzione: $v_c(t) = 25/2 + 25/2e^{-2t} - 25e^{-t} V$]

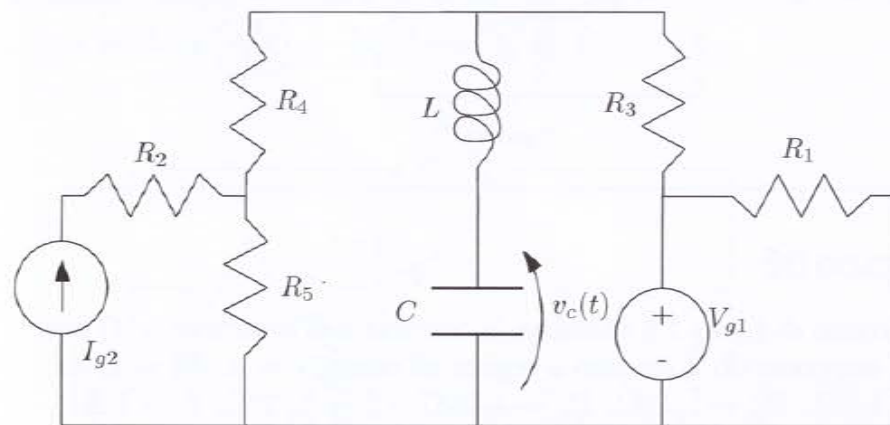


Figura 49

Esercizio 35

Nel circuito di figura 50, calcolare l'andamento della tensione $v_c(t)$ per $t \geq 0$, assumendo le seguenti condizioni iniziali: $v_c(0) = 1V$, $i_L(0) = 0A$. $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 1/2\Omega$, $R_3 = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$, $V_{g1} = 10V$. [Soluzione: $v_c(t) = \frac{d}{dt} \left[5 - 5e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{7}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right] V$]

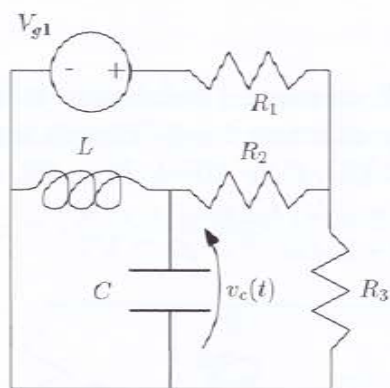


Figura 50

Esercizio 36

Nel circuito di figura 51, calcolare la corrente nell'induttore $i_L(t)$ per $t \geq 0$, supponendo il circuito a regime all'istante $t = 0$. $R_1 = 1/5\Omega$, $R_2 = 1/5\Omega$, $R_3 = 1/30\Omega$, $R_4 = 1/30\Omega$, $r_m = 1/30\Omega$, $L = 1/6H$, $C = 1F$, $V_{g1} = 5V$, $I_{g2} = u(t)A$.

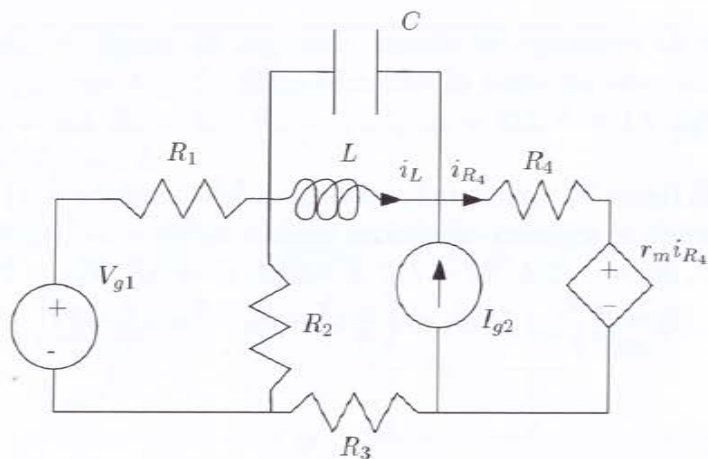


Figura 51

Esercizio 37

Nel circuito di figura 52, calcolare la tensione $v_c(t)$ per $t \geq 0$, supponendo a regime il circuito nell'istante $t = 0$ in cui l'interruttore si chiude. Determinare inoltre l'energia immagazzinata in ciascun componente a memoria all'istante $t = 0$ e per $t \rightarrow +\infty$. $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$, $V_{g1} = 4V$, $I_{g2} = 1A$.

[Soluzione: $E_C(0) = 8J$, $E_L(0) = \frac{1}{2}J$, $E_C(\infty) = 0J$, $E_L(\infty) = 8J$, $v_c(t) = 4e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) V$]

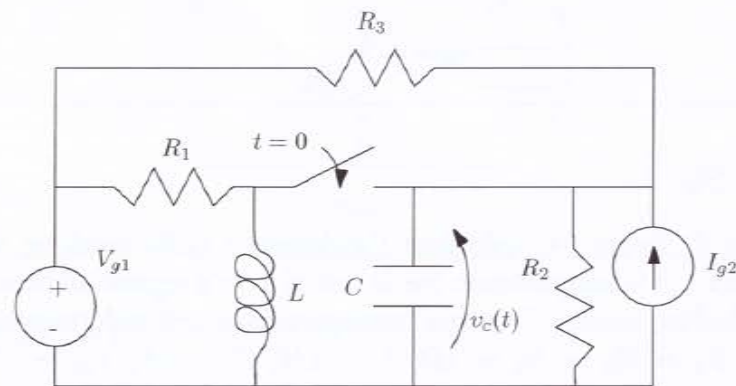


Figura 52

Esercizio 38

Nel circuito di figura 53, calcolare l'andamento della tensione $v_c(t)$ per $t \geq 0$, supponendo che all'istante $t = 0$ il circuito si trovi a regime. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$, $V_{g1} = 8u(t)V$, $I_{g2} = 2A$.

[Soluzione: $v_c(t) = 4 - 4e^{-t} - 4te^{-t} V$]

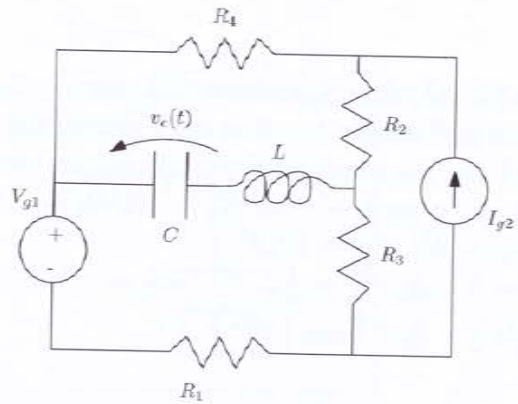


Figura 53

Esercizio 39

Nel circuito di figura 54, calcolare l'andamento della tensione sul condensatore per $t > 0$, supponendo che la rete si trovi a regime all'istante $t = 0$. Calcolare inoltre l'energia immagazzinata nell'induttore per $t \rightarrow +\infty$. $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$, $V_{g1} = 1V$, $I_{g2} = u(t)A$.

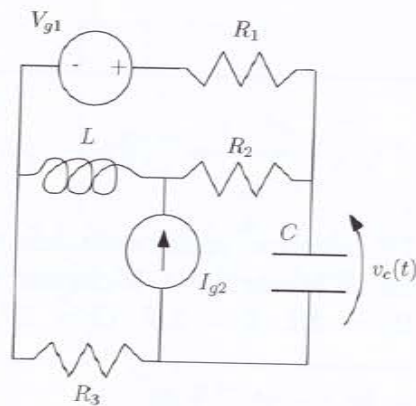


Figura 54

Esercizio 40

Nel circuito di figura 55, calcolare la risposta all'impulso relativa alla tensione $v_c(t)$. $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $L = 1H$, $C = 1F$, $V_{g1} = \delta(t)V$.

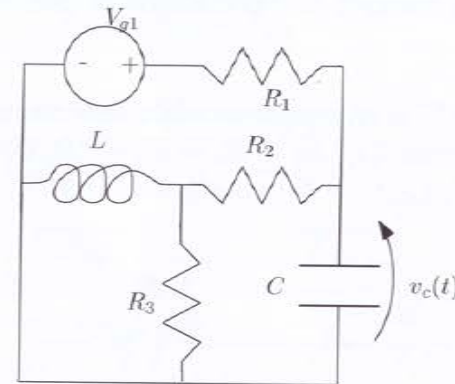


Figura 55

Esercizio 41

Nel circuito di figura 56, calcolare la corrente nell'induttore $i_L(t)$ per $t \geq 0$, supponendo che all'istante iniziale $t = 0$ l'energia immagazzinata nei componenti a memoria sia nulla. $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $a = n_1/n_2 = 1$, $L = 1H$, $C = 1F$, $V_{g1} = 2V$, $I_{g2} = 1/2A$.

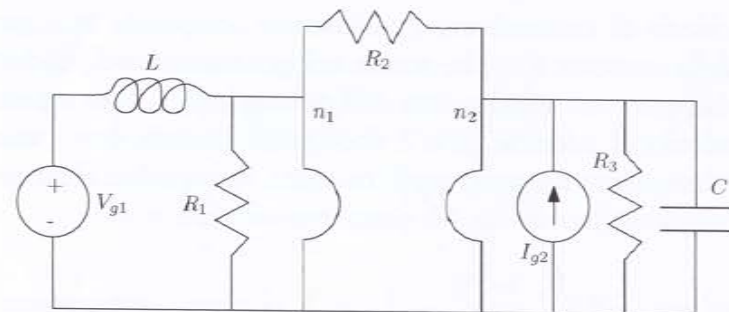


Figura 56

5 Reti in regime permanente sinusoidale (prima parte)

5.1 Esercizi svolti

Esercizio 42 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 26 gennaio 2016)

Nel circuito di figura 57 in regime sinusoidale, determinare l'andamento temporale della corrente $i(t)$. $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$, $V_{g1}(t) = N_C \cos(t)V$, $I_{g2}(t) = N_C \cdot \cos(t + \pi/2)A$.

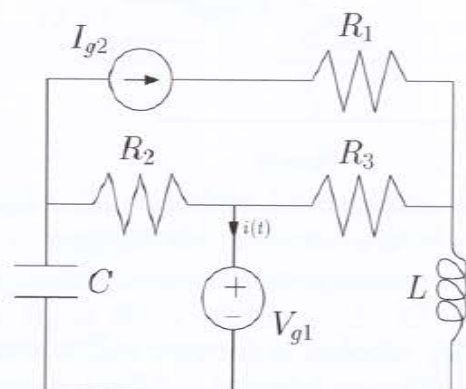


Figura 57

Il testo chiede di determinare l'andamento temporale in regime sinusoidale della corrente $i(t)$ che scorre nel generatore indipendente di tensione (seppur con riferimento dell'utilizzatore). Non essendo richiesto il calcolo di potenze, non è necessario lavorare con i valori efficaci e di conseguenza useremo quelli massimi. Riferendoci al circuito trasformato rappresentato in fig. 58, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{g1} &= N_C \\ \bar{I}_{g2} &= N_C e^{j\frac{\pi}{2}} = jN_C \end{aligned} \quad (69)$$

$$\omega = 1 \text{ rad/s}$$

$$Z_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j$$

$$Z_L = j\omega L = j$$

$$Z_{R1} = Z_{R2} = Z_{R3} = 1$$

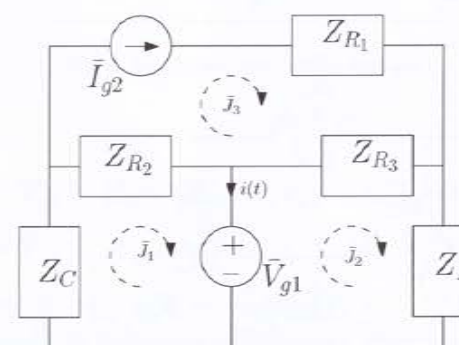


Figura 58

A questo punto è semplice risolvere il problema con il metodo agli anelli. Infatti si possono scrivere due equazioni indipendenti ciascuna in una sola incognita ($\bar{J}_3 = \bar{I}_{g2}$):

$$\begin{cases} Z_C \bar{J}_1 + Z_{R2} (\bar{J}_1 - \bar{I}_{g2}) + \bar{V}_{g1} = 0 \\ Z_{R3} (\bar{J}_2 - \bar{I}_{g2}) - \bar{V}_{g1} + Z_L \bar{J}_2 = 0 \end{cases} \quad (70)$$

da cui

$$\bar{J}_1 = \frac{Z_{R2} \bar{I}_{g2} - \bar{V}_{g1}}{Z_{R2} + Z_C} = \frac{jN_C - N_C}{1 - j} = -N_C \quad (71)$$

$$\bar{J}_2 = \frac{Z_{R3} \bar{I}_{g2} + \bar{V}_{g1}}{Z_{R3} + Z_L} = \frac{jN_C + N_C}{1 + j} = N_C \quad (72)$$

e di conseguenza, essendo $\bar{I} = \bar{J}_1 - \bar{J}_2 = -2N_C$, risulta $i(t) = -2N_C \cos(t) A$.

Esercizio 43 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 12 febbraio 2016)

Nel circuito di figura 59 in regime sinusoidale, determinare l'andamento temporale della tensione $v_C(t)$, nonché la potenza istantanea dissipata dalla resistenza R_1 . $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$, $V_{g1}(t) = N_5 \cos(t) V$, $V_{g2}(t) = N_6 \cdot \cos(t + \pi/2) V$.

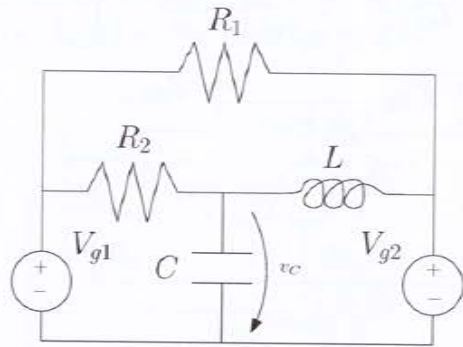


Figura 59

Il circuito in regime sinusoidale del quesito si presta ad una semplice risoluzione mediante il metodo dei potenziali di nodo. Infatti, riferendoci alla figura 60, in cui abbiamo sostituito le impedenze alle corrispettive resistenze, induttanza e capacità, è immediato notare che solo il nodo "3" è incognito, in quanto assumendo il nodo "0" come riferimento avremo $\bar{E}_1 = \bar{V}_{g1} = N_5$ e $\bar{E}_2 = \bar{V}_{g2} = N_6 e^{j\pi/2} = jN_6$ ¹

La scrittura della LKC al nodo "3" permette di ricavare \bar{E}_3 ($\bar{V}_C = -\bar{E}_3$):

$$\frac{\bar{V}_{g1} - \bar{E}_3}{1} + \frac{-\bar{E}_3}{-j} + \frac{\bar{V}_{g2} - \bar{E}_3}{j} = 0 \quad (73)$$

¹ Stiamo usando i valori massimi in quanto non siamo interessati al calcolo di potenze attive e reattive, ma potenze istantanee, ossia nel dominio del tempo.

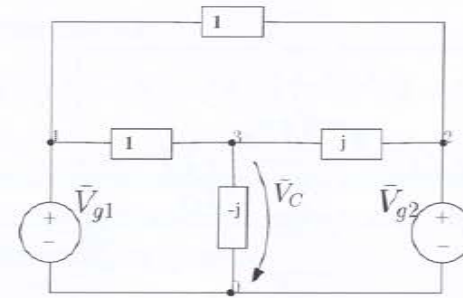


Figura 60: Circuito per l'analisi fasoriale

ossia

$$\bar{V}_{g1} - \bar{E}_3 - j\bar{E}_3 - j\bar{V}_{g2} + j\bar{E}_3 = 0 \quad (74)$$

$$\bar{E}_3 = \bar{V}_{g1} - j\bar{V}_{g2} = N_5 - j \cdot (jN_6) = N_5 + N_6 \quad (75)$$

Di conseguenza $v_C(t) = -(N_5 + N_6)\cos(t) V$.

Per quanto riguarda la potenza istantanea dissipata da R_1 , questa si può determinare immediatamente considerando che la tensione ai suoi capi è nota¹

$$p_{R_1}(t) = \frac{v_{R_1}^2(t)}{R_1} = (N_5 \cos(t) - N_6 \cos(t + \pi/2))^2 W \quad (76)$$

Esercizio 44 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 26 gennaio 2016)

Nel circuito di figura 61 in regime sinusoidale, calcolare la potenza attiva e reattiva erogata dai generatori indipendenti. Verificare inoltre il teorema di Boucherot. $R = 1\Omega$, $C = 1F$, $L_1 = L_2 = 1H$, $M = 1H$, $I_{g1} = I_{g2} = N_N \sin(t) A$.

¹ Si noti che $(N_5 \cos(t) - N_6 \cos(t + \pi/2)) = \Re(N_5 e^{jt} - jN_6 e^{jt}) = \Re(e^{jt} \sqrt{N_5^2 + N_6^2} e^{j \arctan(-N_6/N_5)}) = \sqrt{N_5^2 + N_6^2} \cos(t - \arctan(N_6/N_5))$.

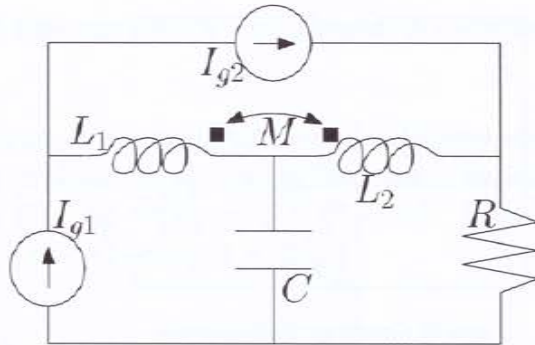


Figura 61

Si osservi che, sia per la presenza di generatori di corrente indipendenti in ogni anello (che determinano la corrente dell'anello stesso) sia per la presenza di induttori mutuamente accoppiati, il metodo preferibile per la soluzione è quello delle correnti di anello. Riferendoci alla figura 62 osserviamo quindi che l'unica corrente di anello incognita è \bar{J}_3 , mentre $\bar{J}_1 = \bar{I}_{g1} = N_N/\sqrt{2}$ e $\bar{J}_2 = \bar{I}_{g2} = N_N/\sqrt{2}$ (stiamo usando i valori efficaci); si noti ulteriormente che $\bar{J}_1 = \bar{J}_2$.

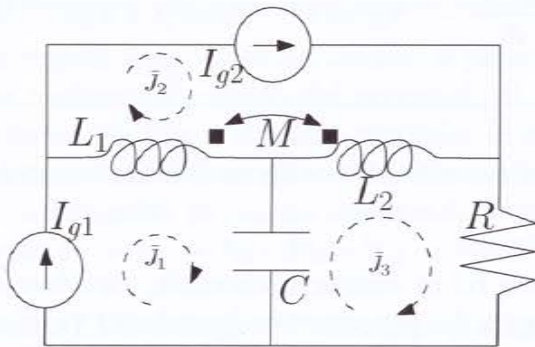


Figura 62: Riferimenti correnti agli anelli.

Per determinare \bar{J}_3 basta scrivere la LKT relativa all'anello 3:

$$-j\frac{1}{\omega C}(\bar{J}_3 - \bar{J}_1) + j\omega L_2(\bar{J}_3 - \bar{J}_2) - j\omega M(\bar{J}_1 - \bar{J}_2) + R\bar{J}_3 = 0 \quad (77)$$

che numericamente diventa

$$-j\bar{J}_3 + jN_N/\sqrt{2} + j\bar{J}_3 - jN_N/\sqrt{2} - j(N_N/\sqrt{2} - N_N/\sqrt{2}) + 1\bar{J}_3 = 0 \quad (78)$$

ossia $\bar{J}_3 = 0$. Per il calcolo della potenza complessa (attiva e reattiva) erogata dai generatori indipendenti basta notare che le tensioni $\bar{V}_{I_{g1}}$ e $\bar{V}_{I_{g2}}$ sono entrambe nulle, in quanto:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{I_{g1}} &= j\omega L_1(\bar{I}_{g1} - \bar{I}_{g2}) - j\omega M(\bar{J}_3 - \bar{I}_{g2}) - j\frac{1}{\omega C}(\bar{I}_{g1} - \bar{J}_3) \\ &= j(N_N/\sqrt{2} - N_N/\sqrt{2}) + jN_N/\sqrt{2} - jN_N/\sqrt{2} = 0 \end{aligned} \quad (79)$$

da cui $\bar{A}_{I_{g1}} = 0VA$, ed analogamente

$$\bar{V}_{I_{g2}} = j\omega L_2(\bar{I}_{g2} - \bar{J}_3) + j\omega M(\bar{I}_{g1} - \bar{I}_{g2}) + \quad (80)$$

$$\begin{aligned} &+ j\omega L_1(\bar{I}_{g2} - \bar{I}_{g1}) + j\omega M(\bar{J}_3 - \bar{I}_{g2}) \\ &= j(N_N/\sqrt{2} - 0) + j(N_N/\sqrt{2} - N_N/\sqrt{2}) + \\ &+ j(N_N/\sqrt{2} - N_N/\sqrt{2}) + j(0 - N_N/\sqrt{2}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (81)$$

da cui $\bar{A}_{I_{g2}} = 0VA$.

Per verificare Boucherot, basta notare che

$$\begin{aligned} \bar{A}_{I_{g1}} &= 0 \\ \bar{A}_{I_{g2}} &= 0 \\ \bar{A}_R &= P_R = R \cdot |\bar{J}_3|^2 = 0 \\ \bar{A}_{L_1 L_2} &= \bar{V}_{L_1} \cdot \bar{I}_{L_1}^* + \bar{V}_{L_2} \cdot \bar{I}_{L_2}^* = \\ &= [j\omega L_2(\bar{I}_{g2} - \bar{J}_3) + j\omega M(\bar{I}_{g1} - \bar{I}_{g2})] \cdot \bar{I}_{g2}^* = \\ &= j\omega L_2 \bar{I}_{g2} \cdot \bar{I}_{g2}^* = j|\bar{I}_{g2}|^2 \Rightarrow Q_{L_1 L_2} = \frac{N_N^2}{2} VAR \\ \bar{A}_C &= -j\frac{1}{\omega C} |\bar{I}_{g2} - \bar{J}_3|^2 \Rightarrow Q_C = -\frac{N_N^2}{2} VAR \end{aligned}$$

Esercizio 45 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 12 febbraio 2016)

Nel circuito di figura 63 in regime sinusoidale, calcolare la potenza attiva e reattiva erogata dai generatori indipendenti. Verificare inoltre il teorema di Boucherot. $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 1H$, $M = 1H$, $V_{g1} = N_5\sqrt{2}\sin(t)$ A, $I_{g2} = 2\sin(t + \pi/4)$ A.

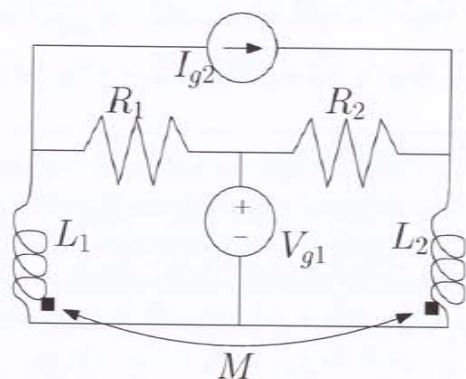


Figura 63

Essendo il circuito in regime sinusoidale utilizzeremo i fasori. Nel caso specifico avremo $\omega = 1\text{rad/s}$ ed utilizzando i valori efficaci avremo: $\bar{V}_{g1} = N_5$ e $\bar{I}_{g2} = 2\frac{e^{j\pi/4}}{\sqrt{2}} = 2\frac{\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} = 1 + j$. La presenza degli induttori mutuamente accoppiati suggerisce l'utilizzo di un approccio alle correnti agli anelli $[\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3]$ (vedi fig. 64). Del resto la presenza di un generatore indipendente di corrente nell'anello 3 ci permette di ridurre di una le incognite effettive ($\bar{J}_3 = I_{g2}$).

Scriviamo pertanto le due LKT agli anelli 1 e 2:

$$\begin{cases} \text{LKT anello 1: } j\omega L_1 \bar{J}_1 - j\omega M \bar{J}_2 + R_1(\bar{J}_1 - \bar{I}_{g2}) + \bar{V}_{g1} = 0 \\ \text{LKT anello 2: } -\bar{V}_{g1} + R_2(\bar{J}_2 - \bar{I}_{g2}) + j\omega L_2 \bar{J}_2 - j\omega M \bar{J}_1 = 0 \end{cases} \quad (82)$$

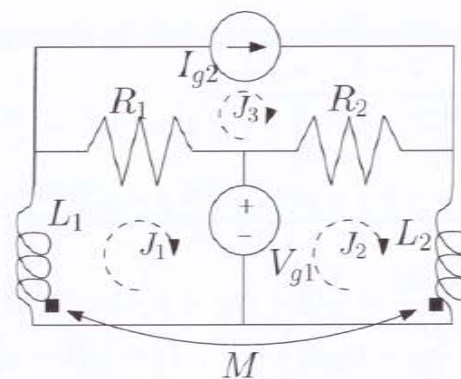


Figura 64: Riferimenti correnti agli anelli.

ossia numericamente

$$\begin{cases} (1 + j)\bar{J}_1 - j\bar{J}_2 = -N_5 + 1 + j \\ -j\bar{J}_1 + (1 + j)\bar{J}_2 = N_5 + 1 + j \end{cases} \quad (83)$$

Applicando Cramer

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} (1 - N_5) + j & -j \\ (1 + N_5) + j & 1 + j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + j & -j \\ -j & 1 + j \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{(1 - N_5 + j) \cdot (1 + j) + j \cdot (1 + N_5 + j)}{(1 + j) \cdot (1 + j) + 1} = \\ &= \frac{1 - N_5 + j + j - jN_5 - 1 + j + jN_5 - 1}{1 + 2j - 1 + 1} = \frac{-(1 + N_5) + 3j}{1 + 2j} = \\ &= \frac{1}{5}(5 - N_5) + j\frac{1}{5}(5 + 2N_5) = 1 + j - \frac{N_5}{5} + j\frac{2N_5}{5} \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1+j & (1-N_5)+j \\ -j & (1+N_5)+j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+j & -j \\ -j & 1+j \end{vmatrix}} = \\ &= \frac{1+N_5+j+j+jN_5-1+j-jN_5-1}{1+2j} = \\ &= \frac{N_5-1+3j}{1+2j} = \frac{1}{5}(5+N_5) + j\frac{1}{5}(5-2N_5) = \\ &= 1+j + \frac{N_5}{5} - j\frac{2N_5}{5} \end{aligned} \quad (85)$$

A questo punto per il calcolo della potenza complessa (attiva e reattiva) erogata dal V_{g1} abbiamo

$$\bar{A}_{V_{g1}} = \bar{V}_{g1} \cdot (\bar{J}_2 - \bar{J}_1)^* \quad (86)$$

$$\begin{aligned} &= N_5 \cdot \left[1+j + \frac{N_5}{5} - j\frac{2N_5}{5} - \left(1+j - \frac{N_5}{5} + j\frac{2N_5}{5} \right) \right]^* = \\ &= N_5 \left(\frac{2N_5}{5} - j\frac{4N_5}{5} \right)^* = \frac{2N_5^2}{5} + j\frac{4N_5^2}{5} \end{aligned} \quad (87)$$

ossia $P_{V_{g1}} = \frac{2N_5^2}{5} W$ e $Q_{V_{g1}} = \frac{4N_5^2}{5} VAR$. Mentre la potenza sul generatore di corrente sarà data da:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{I_{g2}} &= \bar{V}_{I_{g2}} \cdot \bar{I}_{g2}^* = [R_2(\bar{I}_{g2} - \bar{J}_2) + R_1(\bar{I}_{g2} - \bar{J}_1)] \cdot \bar{I}_{g2}^* = \\ &= (R_1 + R_2) |I_{g2}|^2 - (R_2\bar{J}_2 + R_1\bar{J}_1) \cdot \bar{I}_{g2}^* = \\ &= 2 \cdot 2 - \left(1+j - \frac{N_5}{5} + j\frac{2N_5}{5} + 1+j + \frac{N_5}{5} - j\frac{2N_5}{5} \right) \cdot (1-j) = \\ &= 4 + (2+2j)(1-j) = 4 - 2(1+j)(1-j) = 0 W \end{aligned} \quad (88)$$

Per quanto riguarda gli altri componenti abbiamo

$$\begin{aligned} P_{R_1} &= R_1 |\bar{I}_{g2} - \bar{J}_1|^2 = \left| 1+j - \left(1+j - \frac{N_5}{5} + j\frac{2N_5}{5} \right) \right|^2 \\ &= \frac{N_5^2 + 4N_5^2}{25} W = \frac{N_5^2}{5} W \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} P_{R_2} &= R_2 |\bar{I}_{g2} - \bar{J}_2|^2 = \left| 1+j - \left(1+j + \frac{N_5}{5} - j\frac{2N_5}{5} \right) \right|^2 = \\ &= \frac{N_5^2 + 4N_5^2}{25} W = \frac{N_5^2}{5} W \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} A_{L_1 L_2} &= \bar{V}_{L_1} \bar{J}_1 + \bar{V}_{L_2} \bar{J}_2 = (j\bar{J}_1 - j\bar{J}_2) \cdot \bar{J}_1^* + (j\bar{J}_2 - j\bar{J}_1) \cdot \bar{J}_2^* = \\ &= j|\bar{J}_1|^2 + j|\bar{J}_2|^2 - j\bar{J}_2 \cdot \bar{J}_1^* - j\bar{J}_1 \cdot \bar{J}_2^* = \\ &= j \left(2 + \frac{2N_5}{5} + \frac{N_5^2}{5} \right) + j \left(2 - \frac{2N_5}{5} + \frac{N_5^2}{5} \right) - j \left(4 - \frac{10N_5^2}{25} \right) = \\ &= j \left(\frac{2}{5} N_5^2 + \frac{2}{5} N_5^2 \right) = j\frac{4N_5^2}{5} \Rightarrow Q_{L_1 L_2} = \frac{4N_5^2}{5} VAR \end{aligned} \quad (91)$$

È immediato verificare il teorema di Boucherot.

5.2 Esercizi proposti

Esercizio 46 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica del 24 giugno 2016)

Nel circuito di figura 65 in regime sinusoidale, calcolare la potenza attiva e reattiva erogata dai generatori indipendenti. Verificare inoltre il teorema di Boucherot. $R = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 1H$, $M = 1H$, $I_{g1} = I_{g2} = N_N \sin(t)A$.

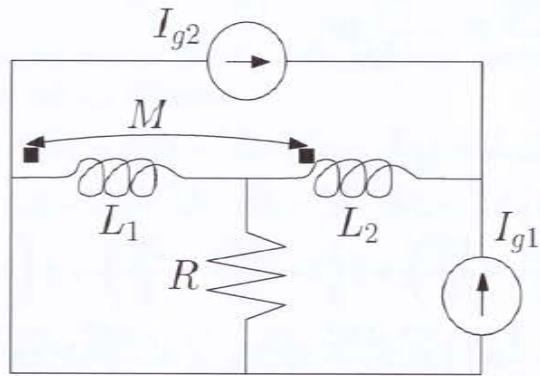


Figura 65

Esercizio 47 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 14 luglio 2016)

Nel circuito di figura 66 in regime sinusoidale, calcolare la potenza attiva e reattiva erogata dai generatori indipendenti. Verificare inoltre il teorema di Boucherot. $R = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 1H$, $M = 1H$, $I_{g1} = I_{g2} = N_N \sin(t)A$.

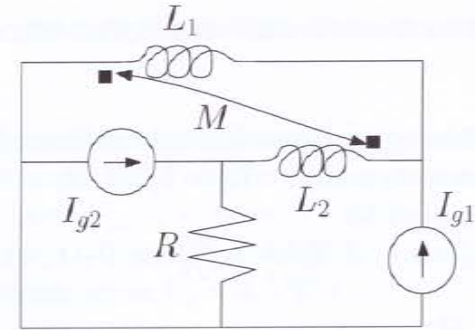


Figura 66

Esercizio 48 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 24 giugno 2016)

Nel circuito di figura 67 in regime sinusoidale, determinare l'andamento temporale della corrente $i(t)$. $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$, $V_{g1}(t) = N_M \cos(t)V$, $V_{g2}(t) = N_N \cdot \cos(t + \pi/2)V$.

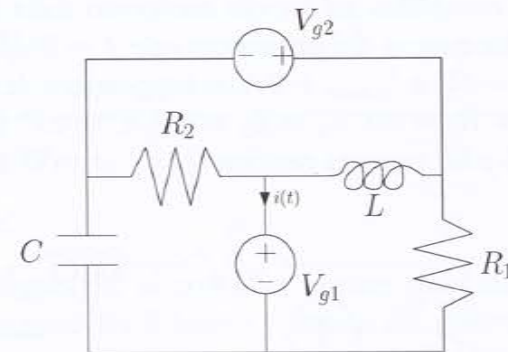


Figura 67

Esercizio 49 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 14 luglio 2016)

Nel circuito di figura 68 in regime sinusoidale, determinare l'andamento temporale delle correnti $i_L(t)$ ed $i_C(t)$. $R_1 = 1/2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $C = 1F$, $L = 1/2H$, $V_g(t) = N_M \cos(t)V$.

[Soluzione: $i_L(t) = N_M \cos(t)$ A, $i_C(t) = \frac{N_M}{\sqrt{2}} \cos(t + \pi/4)$ A]

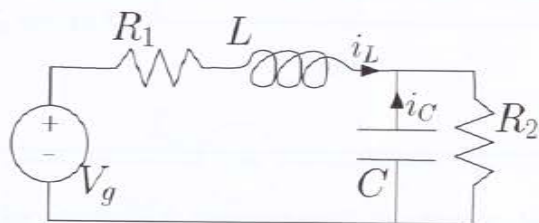


Figura 68

Esercizio 50

Il circuito di figura 69 si trova in regime permanente sinusoidale. Calcolare la potenza complessa sul bipolo composto dalla serie di R_1 e L_2 sapendo che la frequenza dei generatori vale $f = 50Hz$ e i valori di picco sono $V_{g,max} = 5V$ e $I_{g,max} = 2A$ (si suppongano le fasi nulle). Inoltre si ha che $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 2H$, $C = 1F$. [Soluzione: potenza attiva $P_a = 5 \mu W$, potenza reattiva $Q = 3.18 mW$]

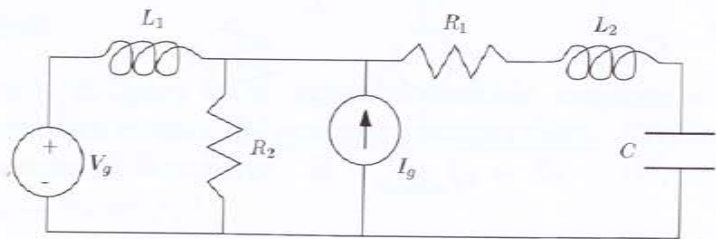


Figura 69

Esercizio 51 (dal compito di "Elettrotecnica ed Elettronica" del 22 febbraio 2016)

Nel circuito di figura 70 in regime sinusoidale, determinare l'andamento temporale della corrente e il valore della potenza attiva erogate dal generatore di tensione $V_{g1}(t) = 3\cos(\omega t)$. Le resistenze hanno tutte lo stesso valore pari a 1Ω , $C = 2F$, $L = 8H$, $\omega = 0.25$ rad/s. [Soluzione: $i = 3\cos(\omega t)$, potenza attiva $P_a = 4.5 W$]

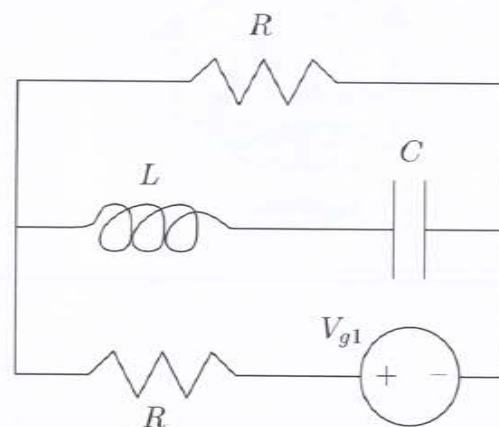


Figura 70

Esercizio 52

Il circuito in figura 71 si trova in regime permanente sinusoidale. Calcolare il rapporto tra il fasore corrente del generatore di tensione e il fasore tensione del generatore di corrente, \bar{I}/\bar{V} , sapendo che la frequenza dei generatori vale $f = 50Hz$ e i valori di picco dei generatori sono $V_{g,max} = 10V$ e $I_{g,max} = 1A$ (si suppongano le fasi nulle). Inoltre si ha che $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 2H$, $C = 1F$.

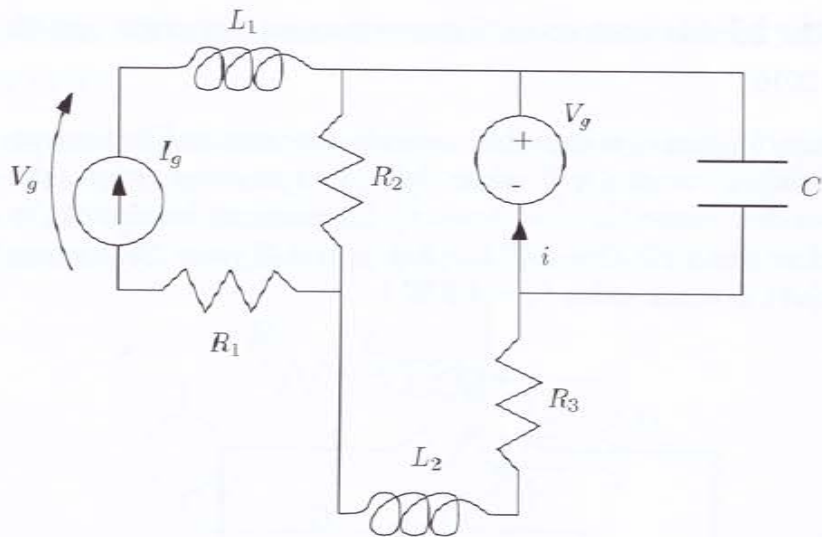


Figura 71

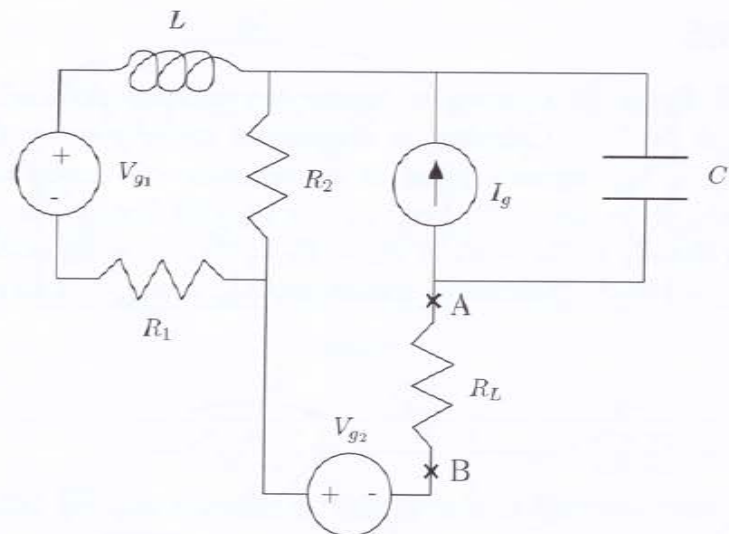


Figura 72

Esercizio 53

Il circuito di figura 72 si trova in regime permanente sinusoidale. Determinare: 1) il circuito equivalente Thevenin che il carico R_L 'vede' tra i punti A e B; 2) la corrente $i(t)$ che scorre sul carico R_L . La pulsazione dei generatori vale $\omega = 1 \text{ rad/s}$ e i valori di picco dei generatori sono $V_{g1,max} = 10V$, $V_{g2,max} = 5V$, $I_{g,max} = 2A$ (si suppongano le fasi nulle). Inoltre si ha che $C = 1F$, $R_1 = 1\Omega$, $R_L = 2\Omega$, $L = 1H$.

Esercizio 54

Il circuito di figura 73 si trova in regime permanente sinusoidale. Calcolare la potenza assorbita dal carico R_L sapendo che la frequenza del generatore vale $f = 50 \text{ Hz}$ e il valore di picco del generatore indipendente di tensione $V_{s,max} = 5V$ (si supponga la fase nulla). Inoltre si ha che $g_m = 0.5S$, $C = 100\mu F$, $R_o = 10k\Omega$, $r_\pi = 4000\Omega$, $L = 1H$, $R_s = 1\Omega$, $R_L = 10\Omega$.

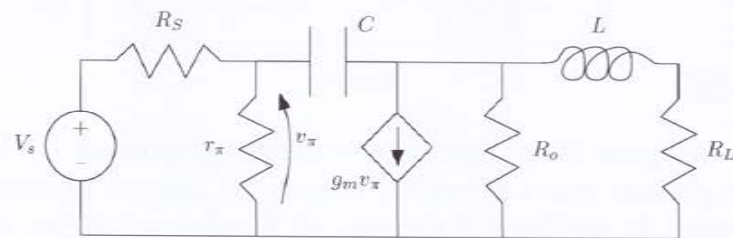


Figura 73

Esercizio 55

Il circuito di figura 74 si trova in regime permanente sinusoidale a frequenza di 50 Hz. Calcolare lo sfasamento tra le correnti dei generatori V_{g1} e V_{g2} (ognuna presa in convenzione dei generatori) sapendo che $V_{g1}(t) = \cos(t + \pi/4)$ e $V_{g2}(t) = V_{g3}(t) = 2\cos(t - \pi/2)$. Inoltre si ha che $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$, $L_1 = L_2 = 2H$, $C_1 = 1F$, $C_2 = 10mF$. [Soluzione: sfasamento $\phi_{I_{g1}} - \phi_{I_{g2}} = 4.45 \text{ rad}$]

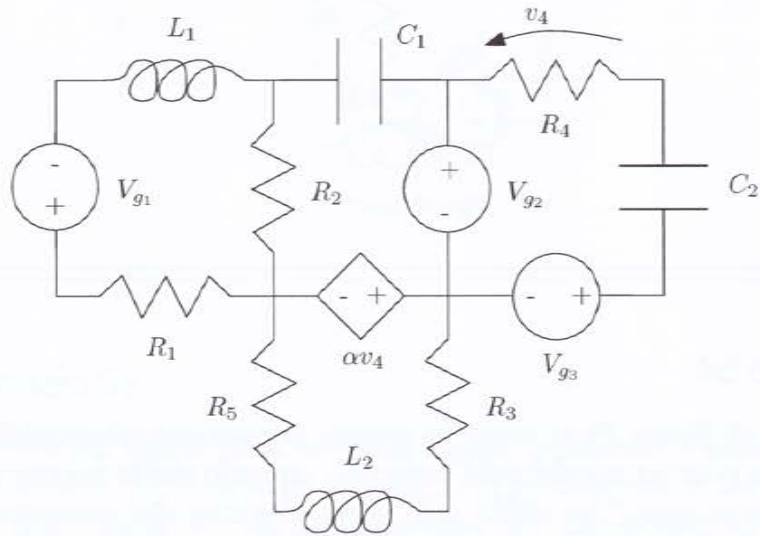


Figura 74

Esercizio 56

Nel circuito di figura 75 in regime permanente sinusoidale: 1) determinare la potenza attiva e reattiva erogata da ciascun generatore indipendente; 2) verificare il teorema di Boucherot. $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $L_1 = L_2 = 2H$, $M = 1H$, $C = 1F$, $I_{g1}(t) = 3\sin(t)A$, $I_{g2}(t) = 2\cos(t - \pi/2)A$.

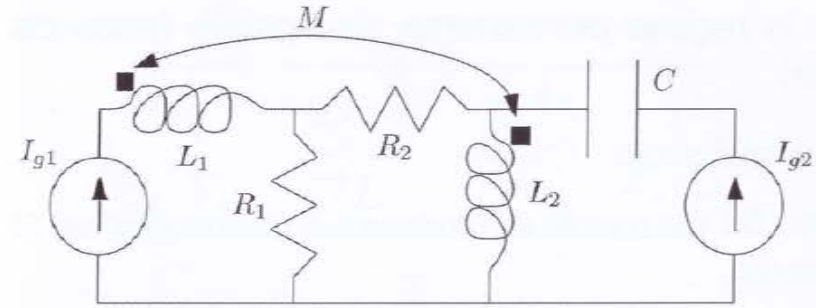


Figura 75

Esercizio 57 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 24 giugno 2016)

Nel circuito di figura 76, calcolare il valore della capacità C che rende nulla la potenza reattiva erogata dal generatore indipendente, nonché il valore della potenza attiva erogata in queste condizioni. $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $L = 1/2H$, $V_g(t) = N_M \cos(t)V$. [Soluzione: $C = 1F$]

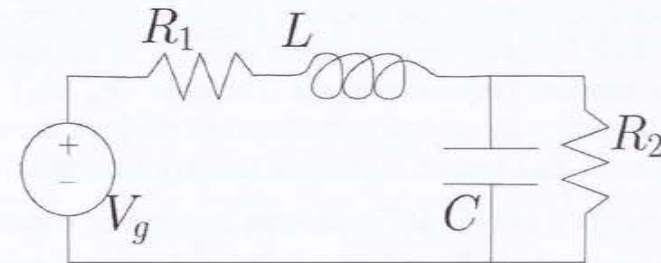


Figura 76

6 Reti in regime permanente sinusoidale (seconda parte)

6.1 Esercizi svolti

Esercizio 58 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 26 gennaio 2016)

Nel circuito di figura 77, calcolare il valore dell'impedenza di carico Z_L affinché sia massimo il trasferimento di potenza, nonché il valore della suddetta potenza. $R = r_x = 1\Omega$, $X_C = -1\Omega$, $X_L = 2\Omega$, $\bar{V}_g = N_N \angle 0V$.

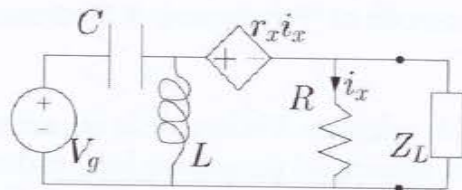


Figura 77

Non essendo diversamente specificato è possibile assumere che il fasore della tensione \bar{V}_g sia espresso in valore efficace. Di conseguenza sarà necessario ricavare l'equivalente alla Thevenin (\bar{V}_{th} , Z_{th}) visto dall'impedenza di carico Z_L ed una volta fatto ciò risulterà $Z_L = Z_{th}^*$ (ossia il coniugato di Z_{th}) mentre la potenza sul carico risulterà $P_L = \frac{|\bar{V}_{th}|^2}{4\Re(Z_{th})}$. Il circuito per il calcolo dell'impedenza equivalente è mostrato in fig. 78, dove viene anche indicata l'impedenza equivalente al parallelo tra Z_C e Z_L .

La corrente i_x è immediatamente determinabile e vale $i_x = v_p/R$. A questo punto anche la tensione $r_x \cdot i_x = r_x v_p/R = v_p$, per cui la corrente sull'impedenza equivalente $Z_C || Z_L = -2j$ vale $I = 2v_p/(-2j) = jv_p$. A questo punto è possibile scrivere la i_p come segue

$$i_p = v_p/R + jv_p \quad (92)$$

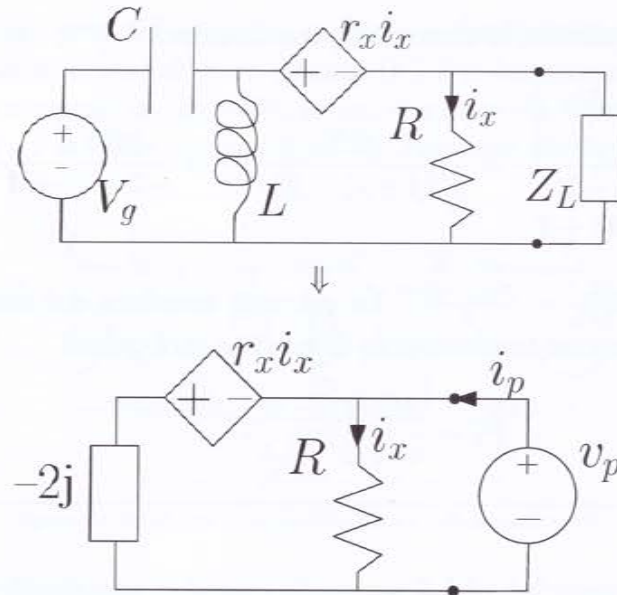


Figura 78: Circuito per il calcolo della Z_{th} e semplificazione del parallelo tra Z_C e Z_L .

da cui immediatamente $Z_{th} = \frac{v_p}{i_p} = \frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2}$, e, di conseguenza la Z_L che assicura il massimo trasferimento di potenza risulta $Z_L = \frac{1+j}{2}$. Passiamo ora al calcolo della V_{th} . Si consideri il circuito in fig. 79. Si possono scrivere le seguenti due LKT agli anelli (si noti che $i_x = \bar{J}_2$, e che $V_{th} = R \cdot \bar{J}_2$):

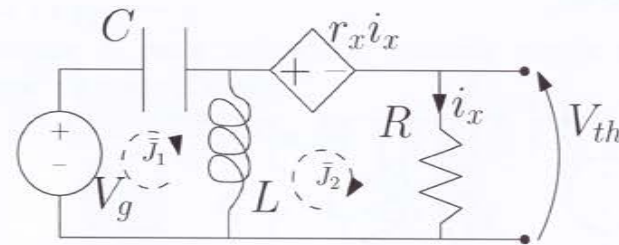


Figura 79: Circuito per il calcolo della V_{th}

$$\begin{cases} \text{LKT anello 1: } -V_g + jX_C \bar{J}_1 + jX_L(\bar{J}_1 - \bar{J}_2) = 0 \\ \text{LKT anello 2: } jX_L(\bar{J}_2 - \bar{J}_1) + r_x \bar{J}_2 + R\bar{J}_2 = 0 \end{cases} \quad (93)$$

Calcoliamo direttamente la corrente \bar{J}_2 con Cramer:

$$\bar{J}_2 = \frac{\begin{vmatrix} +j & N_N \\ -2j & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} j & -2j \\ -2j & 2j+2 \end{vmatrix}} = \frac{j2N_N}{j(2j+2) - 2j \cdot 2j} = \frac{2N_N}{-2+2j+4} \quad (94)$$

da cui $V_{th} = R \frac{N_N}{1+j} = \frac{N_N(1-j)}{2}$. La potenza assorbita dal carico in condizioni di massimo trasferimento di potenza sarà quindi

$$P_L = \frac{N_N^2/2}{4 \cdot 1/2} = \frac{N_N^2}{4} \quad (95)$$

Esercizio 59 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 12 Febbraio 2016)

Nel circuito di figura 80, calcolare la matrice delle ammettenze $[Y]$ del circuito nel riquadro. Inoltre determinare il valore dell'impedenza di carico Z_L affinché sia massimo il trasferimento di potenza, nonché il valore della suddetta potenza. $R = 1\Omega$, $X_C = -1\Omega$, $X_L = 1\Omega$, $n_1/n_2 = 1$, $\bar{V}_g = N_5 + jN_6V$. (N_5 e N_6 sono la quinta e la sesta cifra del numero di matricola).

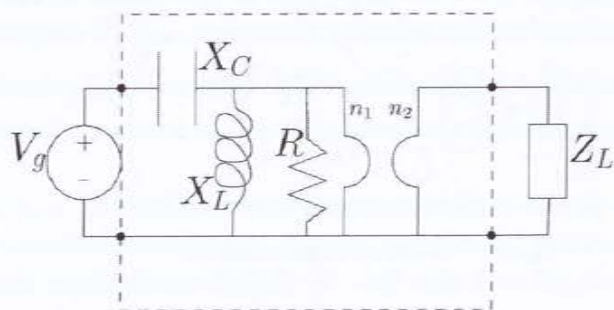


Figura 80

La prima parte dell'esercizio prevede la determinazione della matrice delle ammettenze di corto circuito $[Y]$. Per fare questo riferiamoci al circuito mostrato in figura 81, in cui ricaviamo la dipendenza delle correnti \bar{I}_1 ed \bar{I}_2 dalle tensioni \bar{V}_1 e \bar{V}_2 . Notiamo che la presenza del

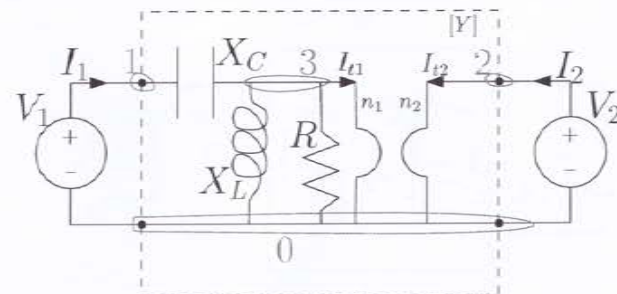


Figura 81: Circuito per il calcolo della matrice delle ammettenze $[Y]$.

generatore di tensione collegato alla porta 2 del trasformatore fa sì che entrambe le tensioni del trasformatore siano fissate, il che permette di ricavare immediatamente il valore della corrente \bar{I}_1 , in quanto i potenziali dei nodi risultano tutti noti ($\bar{E}_1 = \bar{V}_1$, $\bar{E}_2 = \bar{V}_2$, $\bar{E}_3 = \frac{n_1}{n_2}\bar{V}_2 = \bar{V}_2$).

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_3}{jX_C} = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{-j} = j\bar{V}_1 - j\bar{V}_2 \quad (96)$$

da cui $y_{11} = j$ e $y_{12} = -j$.

Per determinare \bar{I}_2 basta notare che coincide con la corrente del trasformatore alla porta 2, ossia

$$\bar{I}_2 = I_{t2} = -\frac{n_2}{n_1}I_{t1} = -\left(\frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_3}{jX_C} - \frac{\bar{E}_3 - \bar{E}_3}{jX_L} - \frac{\bar{E}_3}{R}\right) = \frac{\bar{V}_1}{j} + \frac{\bar{V}_2}{-j} + \frac{\bar{V}_2}{j} + \frac{\bar{V}_2}{1} \text{ ossia}$$

$$\bar{I}_2 = -j\bar{V}_1 + \bar{V}_2 \quad (97)$$

da cui $y_{21} = -j$ e $y_{22} = 1$.

La matrice $[Y]$ cercata alla pulsazione $\omega = 1$ è pertanto

$$Y = \begin{bmatrix} j & -j \\ -j & 1 \end{bmatrix} \quad (98)$$

Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio, svogliamo farlo facendo uso del risultato ottenuto prima, ossia partiamo dalla conoscenza della matrice $[Y]$. Possiamo riferirci al circuito in fig. 82, dove il doppio bipolo è stato disegnato come un unico blocco.

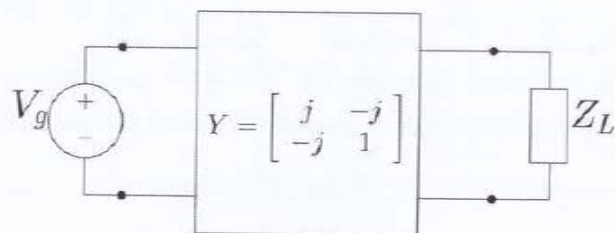


Figura 82: Circuito per il calcolo della V_{th} e della Z_{th} .

Notiamo subito che la Z_{th} cercata non è altro che l'impedenza alla porta due quando la porta 1 è cortocircuitata, ossia $Z_{th} = \frac{1}{y_{22}} = 1\Omega$. Notiamo a questo punto che, essendo Z_{th} puramente resistiva, anche Z_L dovrà esserlo, perché si abbia il massimo trasferimento di potenza, anzi sarà $Z_L = Z_{th} = 1\Omega$. Per quanto riguarda la \bar{V}_{th} , questa è la tensione alla porta 2 quando quest'ultima è aperta ed alla porta 1 è collegato \bar{V}_g , ossia

$$\bar{I}_2 = 0 = y_{21}\bar{V}_g + y_{22}\bar{V}_{th} \quad (99)$$

da cui

$$\bar{V}_{th} = -\frac{y_{21}}{y_{22}}\bar{V}_g = -j(N_5 + jN_6) = N_6 - jN_5 \quad (100)$$

La massima potenza trasferita sarà quindi (assumendo che \bar{V}_g espresso in valore efficace) $P_L = \frac{N_5^2 + N_6^2}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4}(N_5^2 + N_6^2)$ W.

Esercizio 60 (dal compito di "Fondamenti di Elettrotecnica" del 14 luglio 2016)

Nel circuito di figura 83, calcolare il valore della impedenza Z_L affinché sia massimo il trasferimento di potenza su di essa, nonché la potenza

assorbita da Z_L in queste condizioni. $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$, $V_{g1}(t) = N_M \cos(t)V$.

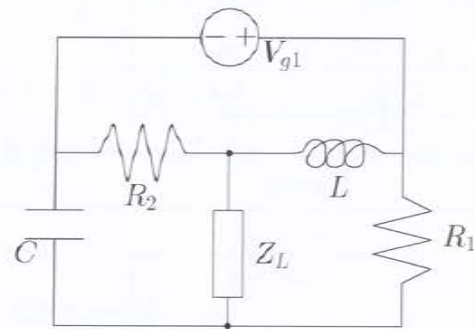


Figura 83

La risoluzione di questo esercizio richiede il calcolo dell'equivalente di Thevenin (\bar{V}_{Th} , Z_{Th}) ai capi dell'impedenza incognita Z_L . Una volta determinato questo circuito equivalente il massimo trasferimento si avrà per $Z_L = Z_{Th}^*$. Per il calcolo della Z_{Th} facciamo riferimento alla figura 84. Da questa si può notare la presenza del nodo "c" che permette di semplificare notevolmente il circuito e di ridisegnarlo come in figura 85.

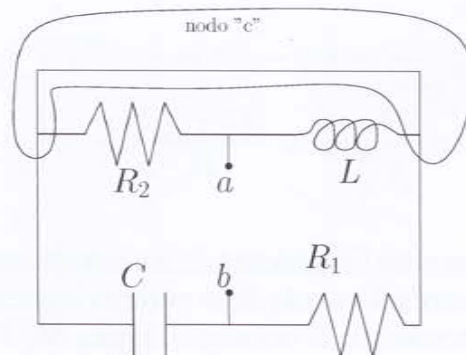


Figura 84

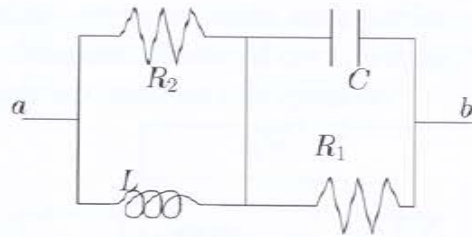


Figura 85

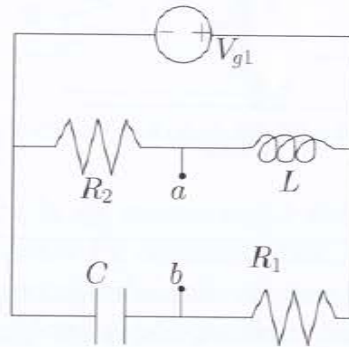


Figura 86

A questo punto l'induttore si trova in parallelo alla resistenza R_2 e la capacità alla resistenza R_1 , e questi gruppi sono a loro volta in serie tra loro ($\omega = 1 \text{ rad/s}$):

$$Z_{Th} = j\omega L \parallel R_2 + R_1 \parallel \frac{1}{j\omega C} = 1 \parallel j - j \parallel 1 =$$

$$= \frac{j}{1+j} - \frac{j}{1-j} = \frac{j(1-j)}{2} - \frac{j(1+j)}{2} = \frac{j}{2} + \frac{1}{2} - \frac{j}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

(101)

Essendo Z_{Th} puramente reale l'impedenza Z_L sarà anch'essa reale e pari ad 1Ω . Per quanto riguarda il calcolo della potenza trasferita in queste condizioni facciamo riferimento al circuito in figura 86. Per il calcolo della tensione \bar{V}_{Th} , tra i morsetti "a" e "b" basta applicare due volte il partitore di tensione:

$$\bar{V}_{Th} = \bar{V}_{R_2} - \bar{V}_C = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} \bar{V}_{g1} - \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R_1} \bar{V}_{g1} =$$

(102)

$$= \frac{1}{1+j} - \frac{-j}{1-j} = \frac{1-j}{2} - \frac{-j(1+j)}{2} = 0$$

(103)

Di conseguenza la potenza trasferita in questo caso sarà nulla.

6.2 Esercizi proposti

Esercizio 61

Il circuito di figura 87 si trova in regime permanente sinusoidale. Determinare il valore dell'impedenza Z_L affinché questa assorba la massima potenza possibile dal circuito. La pulsazione vale $\omega = 1 \text{ rad/s}$ e i valori di picco dei generatori sono $V_{g,max} = 1 \text{ V}$ e $I_{g,max} = 0,25 \text{ A}$ (si suppongano le fasi nulle). Inoltre si ha che $R_1 = R_2 = R_3 = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \text{ F}$.

[Soluzione: $Z_L = \frac{68+21j}{25}$]

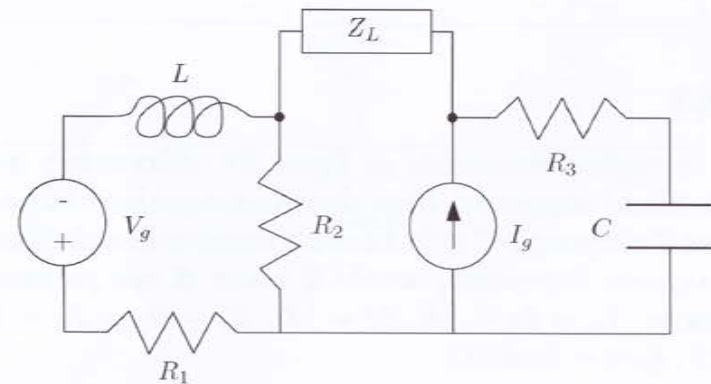


Figura 87

Esercizio 62

Il circuito di figura 88 si trova in regime permanente sinusoidale. Determinare il valore dell'induttanza L e della resistenza R_1 affinché l'impedenza Z_L assorba la massima potenza possibile dal circuito. La frequenza vale $f = 50\text{Hz}$ e i valori di picco dei generatori sono $V_{g,max} = 10\text{V}$ e $I_{g,max} = 1\text{A}$ (si suppongano le fasi nulle). Inoltre si ha che $R_2 = R_3 = 2\Omega$, $C = 1\text{F}$.

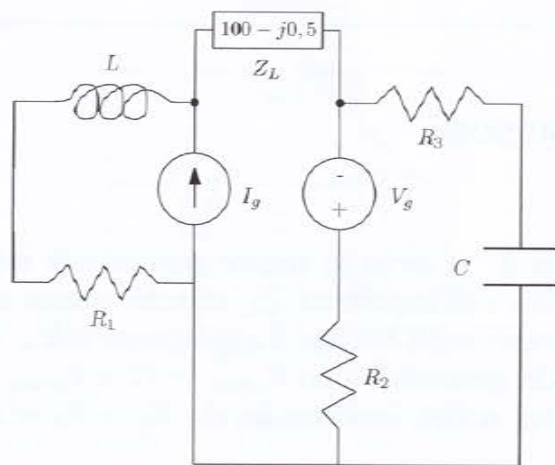


Figura 88

Esercizio 63

Nel circuito in regime sinusoidale di figura 89, determinare: a) la matrice ibrida $[H]$ del doppio bipolo racchiuso nel riquadro; b) il valore dell'impedenza Z alla porta 2-2' affinché risulti massimo il trasferimento di potenza su questa impedenza, nonché il valore di tale potenza in questa condizione. $L_1 = L_2 = 2\text{H}$, $M = 1\text{H}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $\mu = 2$, $C = 1\text{F}$, $I_g(t) = 2\sin(t)\text{A}$.

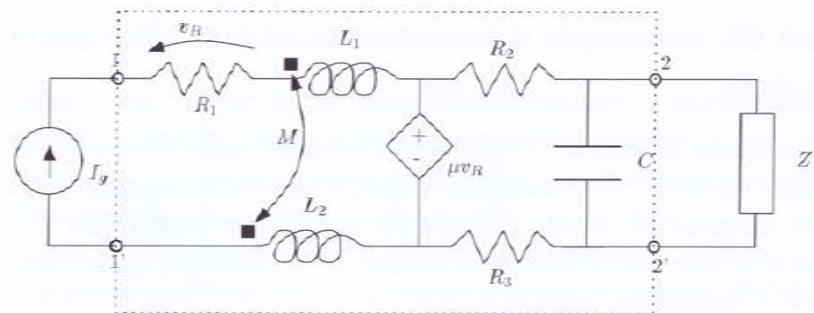


Figura 89

Esercizio 64

Nel circuito in regime sinusoidale di figura 90, determinare: a) la matrice di circuito aperto $[Z]$ del doppio bipolo racchiuso nel riquadro; b) il valore dell'impedenza Z_S affinché risulti massimo il trasferimento di potenza sull'impedenza Z_L vista alla porta 1-1'. $X_{L1} = X_{L2} = 1\Omega$, $X_M = 1\omega$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = R_3 = 1\Omega$, $\alpha = 1$, $V_g = 10\sin(t)\text{A}$.

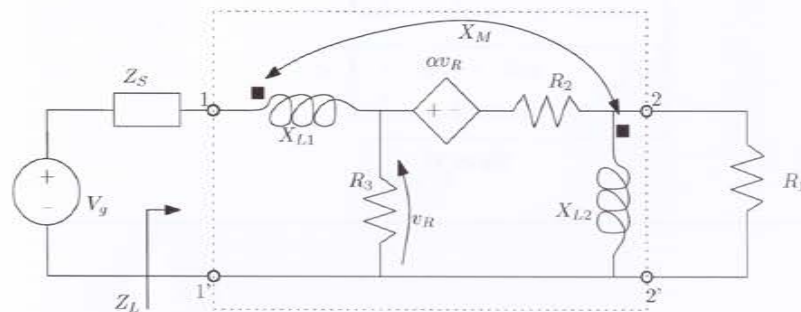


Figura 90

Esercizio 65 (dal compito di "Elettrotecnica ed Elettronica" del 17 dicembre 2015)

Nel sistema trifase di figura 91, calcolare il modulo della corrente i sul condensatore centrale. Il generatore trifase è costituito da una terna simmetrica inversa con valore efficace della tensione pari a 220 V e pulsazione $\omega = 314$ rad/s. Inoltre si ha che $R_1 = 100\text{m}\Omega$, $R_2 = 1\text{k}\Omega$, $C = \frac{10}{314}\mu\text{F}$. [Soluzione: 2200 A]

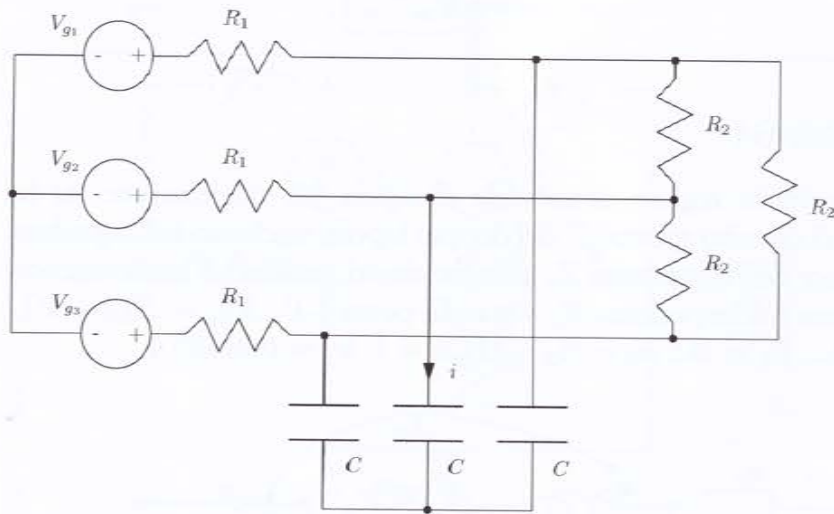


Figura 91

Esercizio 66

Il sistema trifase simmetrico di figura 92 è alimentato da una terna diretta di tensioni. Sapendo che il valore efficace della corrente i è pari a 5 A, determinare: 1) la tensione stellata sul taglio T; 2) la potenza complessa assorbita a valle del taglio T. $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 0.1\text{k}\Omega$, $X_L = 5\Omega$, $X_C = -30\Omega$. [Soluzione: valore efficace della tensione stellata 57.8 V, potenza attiva assorbita 150 W, potenza reattiva assorbita -247 VAR]

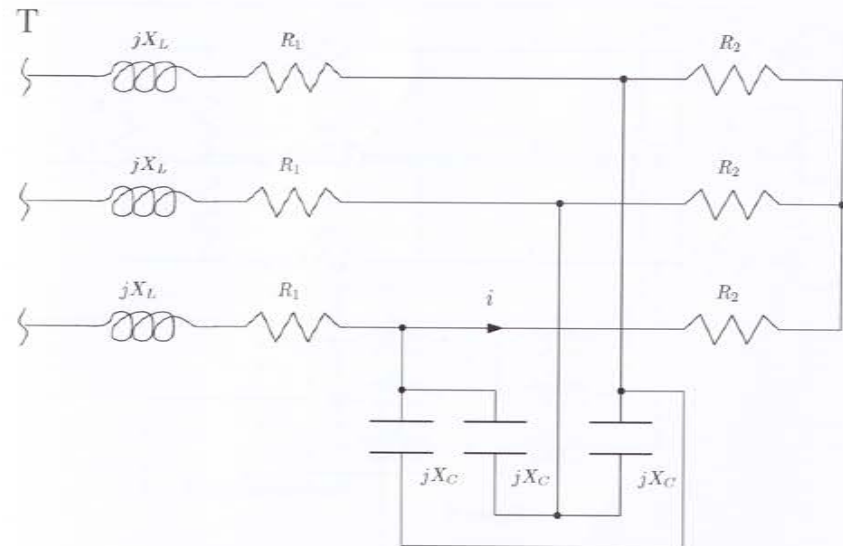


Figura 92

Esercizio 67

Nel sistema trifase simmetrico di figura 93, determinare l'espressione della tensione v sul resistore R_3 a cavallo tra la linea 1 e la linea 3. Il generatore trifase è costituito da una terna simmetrica inversa di valore efficace $V_{g,eff} = 220V$ e frequenza $f = 50Hz$. Inoltre si ha che $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 1,8k\Omega$, $L_1 = 50mH$, $L_2 = 300mH$. [Soluzione: $v = 172.62\cos(\omega t)$]

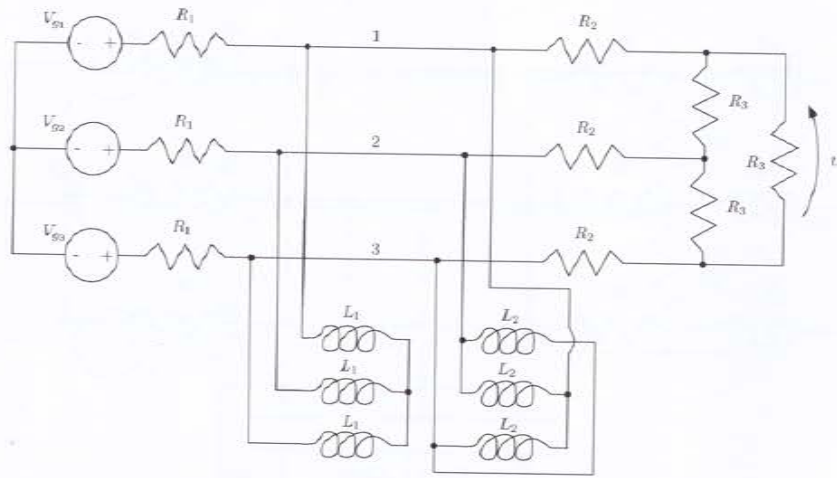


Figura 93

Esercizio 68 (dal compito di "Elettrotecnica ed Elettronica" del 22 febbraio 2016)

Nel sistema trifase di figura 94, progettare un banco di condensatori per rifasare (idealmente $\cos(\Phi_F) = 1.0$) il carico indicato nel circuito. La frequenza è pari a $50Hz$ e inoltre $Z_L = 27 + j36\Omega$. [Soluzione: banco di condensatori a stella con $C = 170\mu F$]

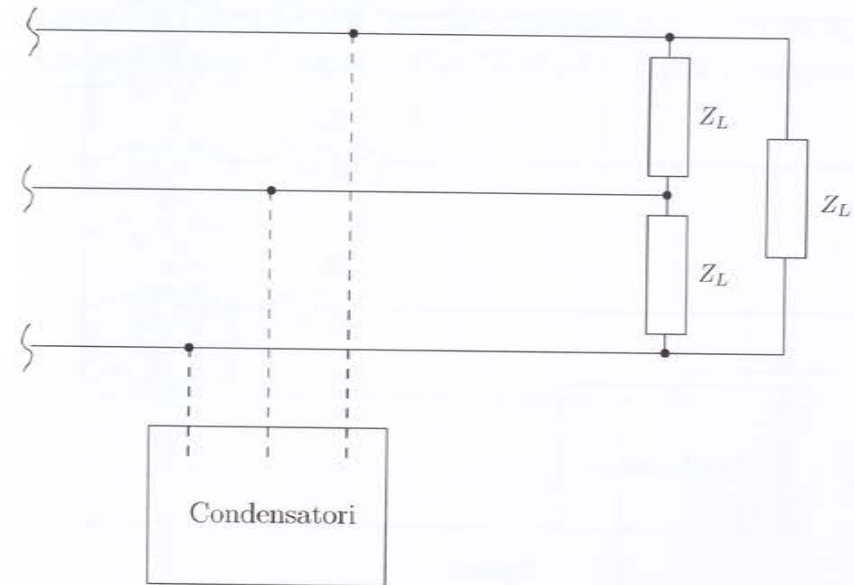


Figura 94

Esercizio 69

Nel sistema trifase di figura 95, progettare un banco di condensatori per rifasare (idealmente $\cos(\Phi_F) = 1.0$) il carico indicato nel circuito. La frequenza è pari a 50Hz e inoltre $R_1 = 150\Omega$, $R_2 = 200\Omega$, $L = 800\text{mH}$.
 [Soluzione: banco di condensatori a stella con $C = 2.91\ \mu\text{F}$]

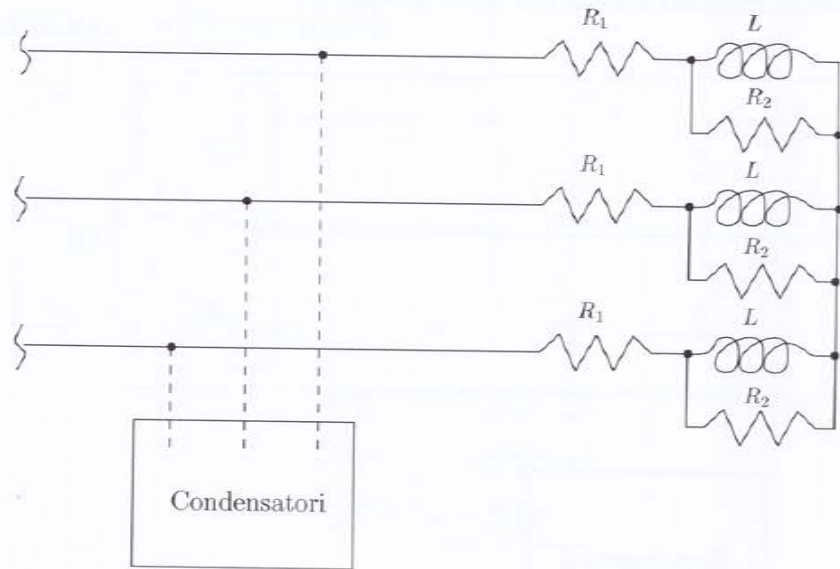


Figura 95

Esercizio 70

Una terna simmetrica diretta, con valore della tensione concatenata $V = 380\text{V}$, alimenta il sistema trifase di figura 96. Calcolare i valori delle potenze visualizzate nei wattmetri W_1 e W_2 e il valore efficace della corrente i . Rifasare, inoltre, il carico trifase al taglio T con un fattore di potenza pari a 0.9. Dati: $P = 10\text{kW}$, $Q = 7\text{kVAR}$, $R = 1\text{k}\Omega$, $f = 50\text{Hz}$.

[Soluzione: $W_1 = 3.20\text{kW}$, $W_2 = 7.23\text{kW}$, $I_{eff} = 19.09\text{A}$, tre condensatori ognuno di capacità $C = 14.40\ \mu\text{F}$, montati a triangolo sul taglio T]

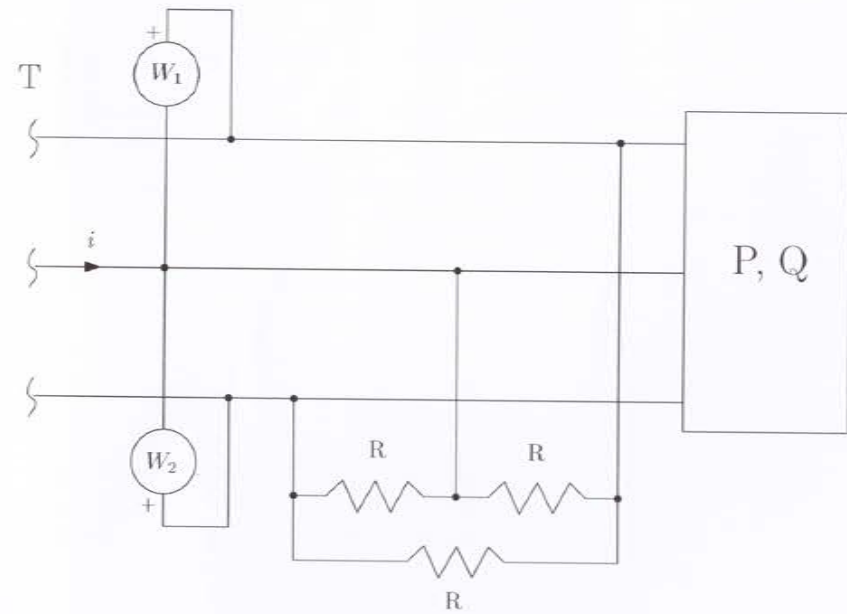


Figura 96

EDIZIONE
1. Massimo M. ...
2. Massimo M. ...
3. Massimo M. ...

QA

Antonino Laudani è Ricercatore del SSD Elettrotecnica presso il Dip. di Ingegneria dell'Università degli Studi Roma Tre dal 2011. Nell'Ateneo romano ha tenuto in passato i corsi di "Circuiti e sistemi elettrici" e "Sicurezza elettrica" nella Laurea Magistrale in Ing. Elettronica. Attualmente è titolare dei corsi di "Fondamenti di Elettrotecnica" e "Circuiti" per la Laurea in Ing. Elettronica.

Francesco Riganti Fulginei è professore associato presso il Dipartimento di Ingegneria dell'Università degli studi Roma Tre, sezione di Elettronica. Ha svolto e svolge corsi quali "Elettrotecnica", "Elettrotecnica ed Elettronica", "Ottimizzazione di circuiti e calcolo scientifico" e "Geometria" nello stesso dipartimento. È autore di numerose pubblicazioni scientifiche internazionali.

€ 10,00



Digitized By P.B.P.

9 788888 832326