

Alessandro Falaschi

# *Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione*



Giugno 2019  
Edizione 1.7

*Complimentary copy*

*TeoriadeiSegnali.it*

# Prefazione

L'IDEA di autoprodotto questo testo trae origine da una sorta di desiderio di rivalsa nei riguardi delle fotocopie di appunti scritti a mano su cui da studente preparavo gli esami; con il passare degli anni dalla sua prima edizione, mi avvedo sempre più di aver iniziato un percorso *interminabile*. Incurante di ciò, un po' alla volta ho continuato a migliorare la qualità del testo e ad integrare nuovi argomenti, incoraggiato dal buon successo di lettori riscosso grazie alla sua permanenza on-line, ed a distanza di più di quindici anni dall'inizio dell'avventura, annuncio il rilascio dell'edizione 1.7.

Gli aspetti che vengono affrontati abbracciano un ampio ventaglio di tematiche inerenti le *telecomunicazioni*, il collante nascosto che definisce gli algoritmi implementati da programmi, a loro volta eseguiti mediante circuiti elettronici: tutti protagonisti assoluti della nostra vita e della nostra società *dell'informazione*. Lo sviluppo della trattazione, che nelle prime edizioni era orientato ad un approccio *bottom-up* collegando strettamente gli aspetti teorici con le rispettive applicazioni pratiche, si è via via strutturato ed riorganizzato, raggruppando tra loro argomenti affini secondo la sequenza logica sperimentata attraverso i cicli didattici che ne hanno accompagnato la stesura.

La forma espositiva è tuttora articolata su due livelli, con le numerose note ed appendici dove vengono svolti i passaggi ed affrontate le osservazioni, mentre il testo principale tenta di mantenere il *filo logico* del ragionamento complessivo. Si fa uso sistematico di rimandi e collegamenti che letteralmente *attraversano* l'intero testo, consentendo di *ricucire assieme* argomenti correlati ed interdipendenti, in modo particolarmente interattivo nel caso del formato PDF *navigabile*. Sono inoltre presenti *numerosissime illustrazioni*, che mostrano sia gli schemi (circuituali e simbolici) dei dispositivi discussi, sia l'andamento delle curve di prestazione o di altre grandezze in funzione del tempo, della frequenza, o dei parametri di sistema. Sono poi presenti svariati rimandi a contenuti on-line per gli argomenti solo in parte accennati, principalmente verso *Wikipedia*, da cui il lettore interessato può iniziare un percorso di approfondimento.

Giustamente ci si può chiedere: ma con tutti gli ottimi testi che già esistono su questi argomenti, che bisogno c'era di un ulteriore lavoro? A parte che quando iniziai a scrivere, alcuni testi in italiano ora disponibili non erano ancora usciti, ritengo che il mio lavoro abbia prodotto un risultato con diversi aspetti di originalità. Il più appariscente è probabilmente la *disponibilità gratuita* in formato elettronico, che ha di fatto reso il testo un riferimento comune a tutta la comunità italoфона, e che ne permette la facile consultazione e navigabilità. Il secondo aspetto distintivo è la *varietà di argomenti* presenti, trattati in modo omogeneo e interdipendente, come difficilmente si riesce a fare in ambito universitario, a causa del livello di frammenta-

## Prefazione all'edizione 1.7

Con l'avvicinarsi della *maggiore età*<sup>5</sup>, ho fortemente avvertito la necessità di elevare il tono e l'autorevolezza che il testo si è conquistato nel corso degli anni, mantenendo allo stesso tempo tutte le caratteristiche di originalità che lo contraddistinguono. Ho quindi lavorato secondo due direttive: da un lato, ho introdotto in modo diffuso un livello di *narrazione*, una sorta di voce fuori campo che accompagna il lettore tra i diversi argomenti ed approfondimenti, nel tentativo di stimolare la consapevolezza del contesto in cui collocare i contenuti, essendomi sempre ribellato ai libri che si sviluppano sulla base di dogmi e assiomi, fornendo risultati che non si riesce a collocare in un ragionamento più ampio e strutturato.

D'altro canto, in questa revisione molti dei contenuti già presenti sono stati decisamente rivoluzionati, ed in diversi casi riscritti alterandone l'ordine espositivo oppure approfondendo aspetti prima considerati accessori. In questa fase mi sono sorpreso per tutte le volte che ho dovuto operare a livello puramente grammaticale, nei casi in cui frasi dal soggetto implicito, troppo lunghe, o di tipo retorico<sup>6</sup> piuttosto che logico, rischiavano di fare confusione anziché chiarire gli aspetti da esse descritti. Così facendo sono anche riuscito a rimuovere alcune *balle* che erano presenti da lunga data, alcune ereditate ed altre frutto della mia fantasia, l'importante è averle eliminate :-)

Questa edizione viene resa disponibile in corrispondenza della *fine* del corso (al secondo semestre) in modo da includere anche le ulteriori revisioni occorse durante la preparazione delle lezioni. Tutta l'attenzione è stata rivolta alla prima parte che ha subito importanti sviluppi, sia nei termini sopra espressi, sia per quanto riguarda alcuni nuovi ambiti culturali introdotti, come lo spazio dei segnali, la statistica, ed i filtri numerici. Altre parti sono state rivisitate ed approfondite, come accaduto per il teorema del campionamento, l'involuppo complesso, le tecniche di demodulazione, e la distorsione lineare per segnali modulati, per un totale di circa *sessanta* nuove pagine. Poi ho dovuto mettere un punto, e procedere al rilascio di questa edizione, anche se vedo già tracciata la strada per la prossima: rendere più stringente il passaggio dal mondo analogico a quello digitale, visto che qualunque ricevitore moderno, dal telefono al WiFi alla tivù, svolge tutte le operazioni sulla base dei soli dati campionati.

## Note di rilascio

L'elenco che segue *riassume* le novità in cui l'edizione 1.7 differisce rispetto alla 1.6, raccontate per esteso presso <https://teoriadeisignali.it/libro/NEWS.txt>. Oltre, come sempre, alla miriade di altri aggiustamenti e precisazioni.

- Completamente revisionato e riscritto il primo capitolo *Una visione di insieme*, forse il più importante per dare al lettore una idea della qualità delle pagine che seguono. Era inverocondo che fosse *fermo* da 15 anni! - Aggiunte definizioni, figure e tabelle, alterato l'ordine espositivo. Nuova sottosezione sulle operazioni che erano date per scontate come traslazione e scalatura, la combinazione di segnali per somma e prodotto ed il grafico risultante, ed i segnali di uso frequente. Approfondimento sull'esponenziale complesso come prolungamento analitico;
- nel titolo del secondo capitolo oltre a *Serie di Fourier* è ora citato anche lo *Spazio dei Segnali*, avendo incluso una nuova sezione che approfondisce i concetti di spazio lineare, normato e prodotto interno, estesi al caso di spazi ad infinite dimensioni come quello dei segnali periodici, di energia e di potenza, ed applicabili ad un qualunque operatore

<sup>5</sup>La prima edizione pubblica risale al 2001.

<sup>6</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Figura\\_retorica](https://it.wikipedia.org/wiki/Figura_retorica)

funzionale lineare. Approfondita inoltre la genesi della formula di Eulero, chiarita la nota sulle armoniche in senso musicale, riviste le figure sui coefficienti di Fourier come fasori e sullo spettro di un'onda rettangolare, e migliorati diversi passaggi del testo;

- il terzo capitolo accoglie nel titolo oltre a *Trasformata di Fourier* anche la parola *convoluzione*. Vengono aggiunti diversi nuovi paragrafi per separare i concetti affrontati, e si fa riferimento allo spazio dei segnali a proposito di energia mutua, Parseval e densità di energia. Unificata la sezione sull'impulso matematico con tutte le relative proprietà ed applicazioni, resa la proprietà di setacciamento direttamente usabile per la convoluzione, per la quale si puntualizza il ruolo di calcolare un valore dell'uscita. Esplicitato che se un fattore di un prodotto nel tempo è un coseno allora si parla di modulazione, ovvero di finestrazione se il fattore ha durata limitata. Rivisto il treno di impulsi, inserendo titoli per la sua definizione, la relativa serie e trasformata di Fourier, l'applicazione ad un segnale periodico, e la generalizzazione della somma di Poisson. Eliminata la trattazione confusa della trasformata di costante, e dimostrato che gli esponenziali complessi sono un base ortonormale, ma nello spazio dei segnali di potenza;
- l'inizio del capitolo su *Campionamento, quantizzazione ed elaborazione numerica* vede invertito l'ordine espositivo, eseguendo ora prima l'analisi nel tempo, e quindi la verifica in frequenza, e facendo notare (con l'ausilio di una figura) che  $X^*(f)$  ha un guadagno pari a  $f_c$ , rimosso dal filtro di restituzione. Introdotta la conversione A/D a rampa lineare e D/A a resistenze pesate subito prima della quantizzazione, che può prevedere anche uno stadio di codifica binaria come per il PCM. La codifica lineare viene affrontata ex-novo, eliminando vecchie figure per introdurne una nuova con  $Q(x)$  di tipo *mid-rise* ed  $L$  pari, utile per rivedere il calcolo dell' $SNR_q$ . Aggiunto schema grafico con le relazioni tra DTFT, DFT e trasformata zeta, e figura per l'overlap and add. Nuova sezione sul sottocampionamento, tutto sommato semplice, anche grazie ad una costruzione grafica originale per illustrare la periodizzazione come somma di repliche traslate;
- per quanto riguarda *Probabilità, processi, e statistica* si è dato impulso alla terza, aggiungendo la valutazione dell'intervallo di confidenza per la stima di media nei casi di varianza nota o stimata, introducendo la nozione di percentile, ed arrivando alla  $t$  di Student. Si passa quindi all'intervallo di confidenza per una frazione ed alla necessaria dimensione campionaria, per poi affrontare il test chi quadro e la verifica di distribuzione. Completa questa parte un accenno alla stima di forma d'onda, ed alla tecnica di media delle ripetizioni.
- la parte su *Densità spettrale e filtraggio* presenta molti piccoli aggiustamenti, sia di natura estetico-funzionale che chiarificatrice ed organizzativa, come anche da punto di vista dei rimandi interni. Aggiunto il caso dell'autocorrelazione che non si azzerà all'infinito per segnali a media non nulla, ed il corrispondente impulso nell'origine dello spettro di densità di potenza. Rimossa un balla: non è per niente detto che un segnale filtrato passa basso si gaussianizzi. Aggiunto elenco delle possibili combinazioni di segnali certi ed aleatori, e la dimostrazione informale del risultato per la densità di probabilità della somma di processi, ed una più formale per quella del prodotto. Introdotti il filtro a pettine e quelli a media mobile uniforme ed esponenziale, aggiunta dimostrazione della trasformata dell'esponenziale. Spostato il filtro adattato a fine capitolo e semplificata la notazione. Corretti conti e figura per la densità spettrale dell'onda PAM. Aggiunta una nuova parte su architettura e sintesi di filtri numerici: campionamento della risposta impulsiva, trasformata zeta, espressione generale dei filtri FIR ed IIR e relativa  $H(z)$ , architettura in forma diretta e forma canonica. Sintesi di un filtro IIR a partire da un filtro analogico mappando piano  $s$  e piano  $z$  per realizzare l'invarianza della risposta impulsiva.

va, la mappa di poli e zeri, l'equivalenza tra equazioni differenziali ed alle differenze, e la trasformazione bilineare.

- il capitolo su *Distorsione e rumore* presenta poche novità, ma buone. Spiegato meglio il cambio di unità di misura in dB, osservato che l'orecchio È SENSIBILE alla distorsione di fase (ma non lo è per segnali periodici), notato che la potenza disponibile di rumore è sempre bianca, mentre quella di segnale non è detto. Corretta una falsa credenza:  $T_0$  è pari a 300 °Kelvin e non 290, pari a 27 °Celsius e non 17!
- per quanto riguarda la *Trasmissione dati in banda base* sono state aggiunte le figure di forma d'onda e densità spettrale per segnali RZ, NRZ e multilivello, per la scelta dell'impulso dati e per illustrare il filtro a coseno rialzato; sono cambiati alcuni titoli ed introdotti nuovi paragrafi, discussa l'alternativa se equalizzare in trasmissione od in ricezione. Uniformato il simbolo  $\lambda$  della soglia di decisione con i casi di decisione statistica e filtro adattato; migliorata la distinzione tra parametri di sistema ( $\mathcal{P}_R$ ,  $N_0/2$  e  $f_b$ ) e di trasmissione ( $L$  e  $\gamma$ ) ai fini della definizione di  $E_b/N_0$ . Spostato il ricevitore ottimo, dall'appendice a subito dopo la  $P_e^{bit}$ , approfondito il ragionamento sulla correlazione del rumore filtrato ovvero sulla sua predicibilità. Approfondita l'approssimazione della d.d.p. di Bernoulli per la probabilità di più errori nella stessa parola ed aggiunte tre figure; suddivisa l'esposizione del codice a blocchi in più paragrafi con titolo, chiarito il concetto di prob. residua di errore, approfondito il compromesso banda-potenza, anche per quanto riguarda la codifica.
- l'ordine espositivo dei *Segnali modulati* è stato alterato, dando maggiore evidenza ad alcune definizioni, anticipando qui la demodulazione in fase e quadratura e rimandando l'approfondimento della trasformata di Hilbert ad una appendice, che viene ora associata alla parte immaginaria di  $\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t}$  mentre il segnale modulato ne è la parte reale. Il segnale analitico è ora definito a partire dall'analogia tra fasore e involuppo complesso in modo da individuare subito  $x^+(t)$  e  $x^-(t)$  messe facilmente in relazione con  $x(t)$  e  $\hat{x}(t)$ . Il risultato del calcolo di  $\mathcal{P}_{x_c}(f)$  e  $\mathcal{P}_{x_s}(f)$  svolto in appendice anche per processi viene riportato subito, assieme alla figura. Riorganizzata la trattazione del filtro di Hilbert.
- in *Modulazione (e ritorno) per segnali analogici*, dopo aver descritto meglio l'indice di modulazione di segnali a portante intera, ed aver accennato al metodo di Weaver per generare un segnale a banda laterale unica, si affronta la demodulazione, innanzitutto omodina (*conversione diretta, zero-IF*), spiegando meglio l'ambiguità di segno della portante ricostruita con il metodo della *quadratura*; rimossa la palla che si possa utilizzare un demodulatore di involuppo con i segnali a banda laterale unica, neanche per sogno. La parte *sull'eterodina* subisce una revisione profonda, con una introduzione storica che parte dalla *radiotelegrafia* con una nuova figura, e dopo aver definito i problemi di *zero-IF* come la *deriva* della portante (all'epoca valvolare) ed il suo *rientro* nel mixer che provoca una componente continua, rimuove una seconda palla: *supereterodina* non significa  $f_e > f_0$ , ma che  $f_M$  è *sopra* la banda audio. Nuova figura con la sintonia eterodina per due diverse stazioni, migliorata la logica della scelta  $f_e > f_0$ ; accennato alla standardizzazione di  $f_M$  per le bande adibite al *broadcast*, migliorato l'elenco dei vantaggi, e citato il caso della conversione multipla. Aggiunto cenno al campionamento IQ. Nuova appendice sulle soluzioni di mo-demodulazione: a riguardo del *mixer* si approfondisce lo studio della modalità *switching*, e citato il diodo come esempio di mixer *non lineare*; descritta quindi la *sintesi di frequenza* con PLL ed oscillatore a cristallo, e descritto tramite figura il *comparatore di fase* tra onde quadre.

- creato il nuovo capitolo *Distorsione per segnali modulati* che riunisce aspetti prima affrontati in modo frammentario. Dopo avere introdotto il passa basso *equivalente* ad un passa banda ed aver mostrato il fenomeno *dell'intermodulazione* tra c.a di b.f., viene evidenziato che è comunque possibile effettuare una equalizzazione, purché in forma *complessa*, con filtri numerici fisicamente *non* realizzabili. Vengono quindi affrontate le condizioni perfette che non comportano intermodulazione, e colte le sottili sfumature: un canale passa banda ideale non produce alterazioni, un equivalente passa basso perfetto introduce un ritardo (*di gruppo*) sulle c.a. di b.f., un passa banda perfetto introduce un ritardo sia sulle c.a. di b.f. che sulla portante, ovvero una rotazione che dipende dal ritardo *di fase*; mentre per un segnale a banda stretta, c'è solo la rotazione. La visione unitaria è fornita dalla *approssimazione* che conduce alla definizione di ritardo di gruppo e di fase, dopo la quale è più facile enunciare il risultato del tutto generale: per evitare intermodulazione serve  $\underline{h}(t)$  reale e dunque  $\underline{H}(f)$  Hermitiano, a meno di una fase a gradino, o rotazione di portante. Seguono gli approfondimenti su come i tipi di modulazione (sia di ampiezza che angolare) rispondono alla possibile distorsione lineare. Per quanto riguarda la distorsione *non* lineare, si è aggiunto l'accento alla possibilità di eseguire una *predistorsione* del segnale da trasmettere, illustrata da una nuova figura.
- nelle *Prestazioni delle trasmissioni modulate* si pone subito in evidenza il concetto di  $SNR_0$  di riferimento, con una riorganizzazione dei calcoli per i casi di demodulazione AM. Rivista la struttura espositiva per la detezione incoerente di sinusoidi, evidenziato il compromesso tra intervallo di ricerca e prob. di errore, definito il criterio ML come rapporto, indicato come calcolare la soglia; aggiunti gli aspetti di decisione Bayesiana e di costo delle decisioni.
- in *Teoria dell'informazione e codifica* si è chiarito il concetto di ridondanza e formalizzata la sua relazione con l'efficienza di codifica; inserito qualche passaggio che non era del tutto evidente, corretto per l'ennesima volta l'esercizio sul codice di Huffman, aggiunto esercizio che calcola l'efficienza, riscritte le note su Huffman adattivo. Aggiunta dimostrazione che aumentando la dimensione del blocco di codifica si aumenta l'efficienza avvicinando  $\bar{N}$  a  $H_s$ , aggiunta figura e nota riassuntiva. Semplificata la codifica predittiva e realizzata una figura che illustra l'architettura di un predittore binario di primo ordine. Miglioramenti al BSC, completata la figura, e cambiata la notazione dei rapporti ML e MAP. Evidenziata la relazione tra tasso di codifica di canale, velocità binaria, ed  $E_b/N_0$ , approfondita quella tra distanza di Hamming, distanza minima e capacità correttiva. Aggiunta figura del cubo del codebook per il codice a ripetizione 3:1, aggiunta spiegazione di come le righe della matrice generatrice  $\mathbf{G}$  di un codice lineare siano pari alle codeword associate ai vettori della base dello spazio di segnale da proteggere. Migliorata la trattazione per il codice di Hamming, in relazione alla struttura delle codeword ed a quella della matrice di controllo  $\mathbf{H}$ , semplificata la spiegazione della correzione basata sulla sindrome; aggiunto esercizio sulla  $P_e$  residua.

Un sentito grazie a tutti coloro che mi hanno incoraggiato a continuare, ed *io continuerò!*

*Alessandro Falaschi, Giugno 2019*

# Indice

## Prefazione

Istruzioni per l'uso . . . . .	ii
Prefazione all'edizione 1.7 . . . . .	iii
Note di rilascio . . . . .	iii

## 1 Una visione di insieme

1.1 Trasmissione dei segnali e dell'informazione . . . . .	1
1.2 Segnali analogici e numerici . . . . .	2
1.2.1 Segnale analogico . . . . .	3
1.2.1.1 Rappresentazione frequenziale dei segnali analogici . . . . .	4
1.2.1.2 Transito dei segnali attraverso sistemi fisici . . . . .	4
1.2.2 Trasmissione numerica . . . . .	5
1.3 Segnali aleatori . . . . .	8
1.3.1 Calcolo delle probabilità e statistica . . . . .	8
1.3.1.1 Autocorrelazione e densità di potenza . . . . .	8
1.3.1.2 Teoria del traffico . . . . .	9
1.4 Sistemi di telecomunicazione . . . . .	9
1.5 Segnali e sistemi . . . . .	12
1.5.1 Caratteristiche dei segnali . . . . .	12
1.5.1.1 Spettro di segnale . . . . .	16
1.5.2 Operazioni sui segnali . . . . .	16
1.5.2.1 Combinazione di segnali . . . . .	17
1.5.3 Segnali di uso frequente . . . . .	18
1.5.4 Caratteristiche dei sistemi . . . . .	21

## I Teoria dei segnali

### Prefazione

### 2 Serie di Fourier e spazio dei segnali

2.1 Prerequisiti trigonometrici . . . . .	29
2.1.1 Numeri complessi . . . . .	29
2.1.2 Formula di Eulero . . . . .	30
2.1.3 Fasore . . . . .	31
2.2 Serie di Fourier . . . . .	32
2.2.1 Serie di Fourier per segnali reali . . . . .	33
2.2.1.1 Simmetria coniugata o Hermitiana . . . . .	33
2.2.1.2 Interpretazione dei coefficienti di Fourier come fasori . . . . .	34

2.2.1.3 Serie trigonometrica . . . . .	35
2.2.1.4 Serie di Fourier di un'onda rettangolare . . . . .	35
2.2.2 Serie di Fourier troncata . . . . .	37
2.3 Teorema di Parseval . . . . .	38
2.4 Spazio dei segnali . . . . .	40
2.4.1 Spazio metrico . . . . .	40
2.4.2 Spazio lineare . . . . .	41
2.4.3 Spazio prodotto interno e di Hilbert . . . . .	42
2.4.4 Spazi a dimensionalità infinita . . . . .	45
2.4.4.1 Spazio dei segnali periodici . . . . .	45
2.4.4.2 Spazio dei segnali di energia e di potenza . . . . .	46
2.4.4.3 Spazio dei funzionali lineari definiti da un prodotto interno . . . . .	47
2.5 Appendici . . . . .	49
2.5.1 Convergenza della serie di Fourier . . . . .	49
2.5.1.1 Ri-definizione dei coefficienti di Fourier . . . . .	50
2.5.2 Sviluppo in serie per alcuni segnali . . . . .	50

## 3 Trasformata di Fourier e convoluzione

3.1 Dalla serie alla trasformata . . . . .	53
3.2 Energia mutua, Parseval e densità di energia . . . . .	55
3.3 Prime proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	56
3.4 Impulso matematico . . . . .	59
3.4.1 Risposta impulsiva . . . . .	61
3.4.2 Integrale di convoluzione . . . . .	62
3.4.3 Risposta impulsiva come funzione memoria . . . . .	63
3.4.4 Convoluzione con l'impulso traslato . . . . .	63
3.5 Moltiplicazione in frequenza e nel tempo . . . . .	64
3.5.1 Moltiplicazione in frequenza ( <i>filtraggio</i> ) . . . . .	64
3.5.2 Moltiplicazione nel tempo ( <i>modulazione e finestrazione</i> ) . . . . .	66
3.6 Derivazione ed integrazione nel tempo . . . . .	67
3.7 Treno di impulsi . . . . .	69
3.8 Appendici . . . . .	71
3.8.1 Grafico della trasformata di un rettangolo ritardato . . . . .	71
3.8.2 Quanti sono i possibili modi di calcolare una trasformata? . . . . .	72
3.8.3 Finestratura e stima spettrale . . . . .	72
3.8.4 Gli esponenziali complessi come base ortogonale . . . . .	74
3.8.5 Trasformata di un gradino . . . . .	75
3.8.6 Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	76
3.8.7 Trasformate di segnali . . . . .	76

## 4 Campionamento, quantizzazione ed elaborazione numerica

4.1 Teorema del campionamento . . . . .	77
4.1.1 Aliasing . . . . .	79
4.1.2 Generalizzazione del filtro di restituzione . . . . .	80
4.1.3 Ortogonalità delle funzioni sinc . . . . .	80
4.1.4 Approssimazione degli impulsi . . . . .	80
4.1.5 Conversione A/D e D/A . . . . .	81
4.2 Quantizzazione e codifica binaria . . . . .	83
4.2.1 Quantizzazione uniforme . . . . .	83
4.2.1.1 SNR di quantizzazione . . . . .	84
4.2.2 Quantizzazione non uniforme . . . . .	85
4.3 Trasformata di Fourier di sequenze . . . . .	87
4.4 Trasformata discreta di Fourier . . . . .	88

4.4.1	Relazione tra DTFT, DFT e trasformata zeta . . . . .	91	5.6.6	Stima di forma d'onda . . . . .	131
4.4.2	Fast Fourier Transform . . . . .	93	5.7	Appendice . . . . .	132
4.4.3	Relazione tra DFT e DCT . . . . .	94	5.7.1	Matrice di covarianza e forma quadratica associata . . . . .	132
4.5	Filtraggio numerico via DFT . . . . .	95	<b>6</b>	<b>Densità spettrale e filtraggio</b> . . . . .	<b>135</b>
4.5.1	Convoluzione discreta . . . . .	95	6.1	Correlazione, covarianza e autocorrelazione . . . . .	135
4.5.2	Convoluzione circolare . . . . .	96	6.1.1	Correlazione tra variabili aleatorie . . . . .	136
4.5.3	Convoluzione tra sequenze di durata finita via DFT . . . . .	96	6.1.2	Indipendenza statistica, covarianza e incorrelazione . . . . .	137
4.5.4	Convoluzione di segnali via DFT . . . . .	97	6.1.3	Correlazione di processo stazionario ergodico . . . . .	138
4.6	Riassumendo . . . . .	98	6.1.4	Autocorrelazione e intercorrelazione . . . . .	139
4.6.1	Le frequenze della DFT . . . . .	98	6.1.4.1	Proprietà dell'autocorrelazione . . . . .	140
4.6.2	Le ampiezze della DFT . . . . .	98	6.2	Spettro di densità di potenza . . . . .	141
4.7	Sottocampionamento . . . . .	99	6.2.1	Teorema di Wiener . . . . .	141
<b>5</b>	<b>Probabilità, processi, e statistica</b> . . . . .	<b>101</b>	6.2.2	Segnale periodico . . . . .	143
5.1	Teoria delle probabilità . . . . .	101	6.2.3	Processo armonico . . . . .	143
5.1.1	Assiomi delle probabilità . . . . .	101	6.2.4	Processo gaussiano bianco limitato in banda . . . . .	144
5.1.2	Teoremi di base . . . . .	102	6.2.5	Processo di segnale dati . . . . .	144
5.1.3	Probabilità congiunta, condizionata e marginale . . . . .	102	6.3	Stima spettrale . . . . .	145
5.1.4	Probabilità a priori e a posteriori, teorema di Bayes . . . . .	103	6.3.1	Periodogramma . . . . .	145
5.1.5	Indipendenza statistica . . . . .	104	6.4	Filtraggio di segnali e processi . . . . .	147
5.2	Variabili aleatorie . . . . .	104	6.4.1	Densità spettrale in uscita da un filtro . . . . .	148
5.2.1	Densità di probabilità e funzione di distribuzione . . . . .	104	6.4.2	Caratteristiche statistiche in uscita da un filtro . . . . .	150
5.2.2	Valore atteso, momento e momento centrato . . . . .	106	6.5	Operazioni elementari sui segnali . . . . .	151
5.2.3	Variabile aleatoria a distribuzione uniforme . . . . .	107	6.5.1	Ritardo . . . . .	151
5.2.4	Variabile aleatoria gaussiana e funzione $erfc\{\cdot\}$ . . . . .	107	6.5.2	Somma tra segnali aleatori . . . . .	152
5.2.5	Altre variabili aleatorie . . . . .	109	6.5.3	Prodotto tra segnali aleatori . . . . .	153
5.2.6	Variabile aleatoria multivariata . . . . .	109	6.5.4	Stima della autocorrelazione . . . . .	154
5.2.7	Funzione caratteristica e somma di v.a. indipendenti . . . . .	110	6.6	Filtri digitali . . . . .	154
5.3	Processi stazionari ed ergodici . . . . .	111	6.6.1	Filtro trasversale . . . . .	155
5.3.1	Momento come media di insieme . . . . .	112	6.6.2	Realizzazione numerica del filtro trasversale . . . . .	156
5.3.2	Media temporale . . . . .	112	6.6.3	Filtro trasversale del primo ordine . . . . .	157
5.3.3	Media temporale calcolata come media di insieme . . . . .	113	6.6.4	Filtro a risposta impulsiva <i>infinita</i> del primo ordine . . . . .	158
5.3.4	Processo stazionario . . . . .	113	6.7	Filtri analogici . . . . .	160
5.3.5	Processo stazionario ed ergodico . . . . .	113	6.7.1	Filtro analogico ad un polo . . . . .	161
5.3.6	Riassumendo . . . . .	114	6.8	Filtro adattato . . . . .	163
5.3.7	Processo ad aleatorietà parametrica . . . . .	115	6.8.1	Segnalazione antipodale . . . . .	168
5.4	Trasformazione di variabile aleatoria e cambio di variabili . . . . .	116	6.8.2	Segnalazione ortogonale . . . . .	168
5.4.1	Caso unidimensionale . . . . .	116	6.9	Appendici . . . . .	169
5.4.2	Caso multidimensionale . . . . .	118	6.9.1	Coefficiente di correlazione . . . . .	169
5.5	Gaussiana multidimensionale . . . . .	119	6.9.2	Teorema di Wiener per processi . . . . .	170
5.5.1	Indipendenza statistica per v.a. gaussiane incorrelate . . . . .	120	6.9.3	Densità spettrale per onda PAM . . . . .	171
5.5.2	Trasformazione lineare di v.a. gaussiane . . . . .	121	6.9.4	Autocorrelazione di un processo in uscita da un filtro . . . . .	175
5.5.3	Processo gaussiano . . . . .	121	6.9.5	Filtri numerici . . . . .	176
5.6	Elementi di statistica . . . . .	122	6.9.5.1	Campionamento della risposta impulsiva . . . . .	176
5.6.1	Test di verifica di ipotesi . . . . .	122	6.9.5.2	Trasformata zeta e filtraggio . . . . .	176
5.6.2	Funzione di verosimiglianza . . . . .	123	6.9.5.3	Filtri a risposta impulsiva finita . . . . .	177
5.6.2.1	Decisione di massima verosimiglianza . . . . .	123	6.9.5.4	Risposta impulsiva infinita . . . . .	177
5.6.3	Stima di parametro . . . . .	123	6.9.5.5	Sintesi di un filtro IIR a partire da un filtro analogico . . . . .	179
5.6.3.1	Stima di massima verosimiglianza . . . . .	124	6.9.6	Grafici di esempio . . . . .	181
5.6.4	Stima di intervallo . . . . .	126			
5.6.4.1	Intervallo di confidenza per una frazione . . . . .	129			
5.6.5	Test chi quadro e verifica di distribuzione . . . . .	130			

<b>7</b>	<b>Distorsione e rumore</b>	<b>183</b>	8.6	Protocolli a richiesta automatica . . . . .	234
7.1	Misure di potenza in decibel . . . . .	184	8.6.1	Send and wait . . . . .	234
7.2	Distorsione lineare . . . . .	187	8.6.2	Continuous RQ . . . . .	235
7.2.1	Distorsione di ampiezza . . . . .	188	8.6.2.1	Go back N . . . . .	235
7.2.2	Distorsione di fase . . . . .	188	8.6.2.2	Selective repeat . . . . .	236
7.2.3	Effetto della distorsione lineare sui segnali	190	8.6.2.3	Efficienza dei protocolli a richiesta automatica . . . . .	236
7.3	Distorsione di non linearità . . . . .	191	8.6.3	Controllo di flusso . . . . .	237
7.3.1	Ingresso sinusoidale . . . . .	192	8.6.3.1	Round trip time . . . . .	238
7.3.2	Ingresso aleatorio . . . . .	193	8.6.3.2	Finestra scorrevole . . . . .	238
7.4	Disturbi additivi . . . . .	194	8.6.3.3	Numero di sequenza . . . . .	239
7.4.1	Valutazione dell' $SNR$ dovuto a diverse fonti di disturbo . . . . .	195	8.7	Sincronizzazione dati . . . . .	239
7.4.2	Rumore gaussiano . . . . .	195	8.7.1	Trasmissione asincrona . . . . .	240
7.4.2.1	Rumore termico nei bipoli passivi . .	195	8.7.2	Trasmissione sincrona . . . . .	241
7.4.2.2	Rumore termico di un generatore di segnale . . . . .	196	8.7.2.1	Sincronizzazione di simbolo . . . . .	241
7.5	Appendice . . . . .	197	8.7.2.2	Sincronizzazione di parola e di trama	242
7.5.1	Densità di potenza del rumore gaussiano attraverso una non linearità . . . . .	197	8.8	Appendici . . . . .	243
<b>8</b>	<b>Trasmissione dati in banda base</b>	<b>199</b>	8.8.1	Potenza di un segnale dati . . . . .	246
8.1	Trasmissione su canale numerico . . . . .	199	8.8.2	Codifica di carattere . . . . .	247
8.1.1	Trasmissione numerica di banda base . .	199	8.8.2.1	Codifica UNICODE . . . . .	247
8.1.2	Codifica di linea e segnale dati . . . . .	201	<b>9</b>	<b>Segnali modulati</b>	<b>249</b>
8.1.2.1	Segnale binario e onda rettangolare . .	201	9.1	Contesti applicativi e prime definizioni . . .	249
8.1.2.2	Distorsione lineare e interferenza intersimbolica . . . . .	202	9.1.1	Multiplicazione a divisione di frequenza o <i>FDM</i> . . . . .	250
8.1.2.3	Diagramma ad occhio . . . . .	202	9.1.1.1	Collegamenti punto-multipunto . . . . .	250
8.1.2.4	Trasmissione multilivello . . . . .	203	9.1.1.2	Collegamenti punto-punto . . . . .	250
8.2	Scelta dell'impulso dati . . . . .	204	9.1.1.3	Accesso multiplo . . . . .	250
8.2.1	Codici di linea a banda infinita . . . . .	205	9.1.2	Canale telefonico . . . . .	251
8.2.2	Segnale dati limitato in banda . . . . .	207	9.1.3	Antenne e lunghezza d'onda . . . . .	252
8.2.2.1	Requisiti per l'impulso di trasmissione	207	9.1.4	Banda di segnale . . . . .	252
8.2.2.2	Criterio di Nyquist per l'assenza di ISI	209	9.2	Rappresentazione dei segnali modulati . . .	253
8.2.2.3	Filtro a coseno rialzato . . . . .	210	9.2.1	Inviluppo complesso . . . . .	253
8.3	Equalizzazione . . . . .	212	9.2.2	Modulazione di ampiezza, di fase e di frequenza . . . . .	254
8.4	Probabilità di errore nelle trasmissioni di banda base . . . . .	213	9.2.3	Componenti analogiche di bassa frequenza	255
8.4.1	Banda di ricezione e dinamica del rumore	213	9.2.4	Demodulazione in fase e quadratura . . .	255
8.4.2	Dinamica del segnale e decisione a massima verosimiglianza . . . . .	214	9.2.5	Trasformata di Hilbert . . . . .	256
8.4.3	Probabilità dell'errore gaussiano . . . . .	215	9.2.6	Segnale analitico . . . . .	258
8.4.4	Parametri di sistema e di trasmissione . .	216	9.2.7	Densità spettrale di segnali passa-banda .	259
8.4.5	Probabilità di errore per simbolo . . . . .	217	9.2.8	Schema delle trasformazioni . . . . .	260
8.4.6	Relazione con il filtro adattato . . . . .	218	9.3	Densità spettrale delle componenti analogiche di processi . . . . .	261
8.4.7	Compromesso banda - potenza . . . . .	218	9.4	Appendici . . . . .	263
8.4.8	Diagramma ad occhio in presenza di rumore . . . . .	219	9.4.1	Filtro di Hilbert . . . . .	263
8.4.9	Valutazione della $P_e$ per bit . . . . .	219	9.4.2	Trasformata di Hilbert di un segnale modulato . . . . .	264
8.4.9.1	Codice di Gray . . . . .	220	9.4.3	Trasmissione a banda laterale unica . . .	265
8.4.9.2	Probabilità di errore per bit . . . . .	221	9.4.4	Processi passa banda . . . . .	266
8.4.10	Ricevitore ottimo . . . . .	222	9.4.4.1	Conclusioni . . . . .	268
8.5	Gestione degli errori di trasmissione . . . .	224	9.4.4.2	Processo gaussiano bianco limitato in banda . . . . .	268
8.5.1	Controllo di errore . . . . .	225	9.4.5	Autocorrelazione di processi passa-banda	268
8.5.1.1	Errori su parole . . . . .	225			
8.5.2	Correzione di errore e codifica di canale . .	227			
8.5.2.1	Codice a blocchi . . . . .	227			
8.5.2.2	Codice a ripetizione n:1 . . . . .	229			
8.5.2.3	Errori a burst ed interleaving . . . . .	230			
8.5.3	Detezione di errore . . . . .	230			
8.5.3.1	Controllo di parità . . . . .	230			
8.5.3.2	Somma di controllo o <i>checksum</i> . . . . .	231			
8.5.3.3	Codice polinomiale e CRC . . . . .	231			

<b>10</b>	<b>Modulazione (e ritorno) di segnali analogici</b>	<b>271</b>	11.2.1	Potenza di segnale e di rumore dopo demodulazione ed SNR . . . . .	305
10.1	Modulazione di ampiezza - AM . . . . .	271	11.2.1.1	Modulazione BLD-PS . . . . .	305
10.1.1	Banda laterale doppia - BLD . . . . .	272	11.2.1.2	Modulazione BLU-PS . . . . .	305
10.1.1.1	Portante soppressa - PS . . . . .	272	11.2.1.3	Modulazione BLD-PI . . . . .	306
10.1.1.2	Portante intera - PI . . . . .	273	11.3	Detezione di sinusoide nel rumore . . . . .	307
10.1.1.3	Portante parzialmente soppressa - PPS . . . . .	273	11.3.1	Descrizione statistica del modulo dell'involuppo complesso . . . . .	307
10.1.1.4	Efficienza energetica per portante intera e PPS . . . . .	274	11.3.2	Detezione incoerente di sinusoide nel rumore . . . . .	310
10.1.2	Banda laterale unica - BLU . . . . .	274	11.4	Prestazioni della modulazione di frequenza . . . . .	313
10.1.2.1	Generazione di segnali BLU . . . . .	275	11.4.1	Rumore dopo demodulazione FM . . . . .	313
10.1.3	Banda laterale ridotta - BLR . . . . .	275	11.4.2	Caso di basso rumore . . . . .	314
10.1.4	Potenza di un segnale AM . . . . .	276	11.4.3	Caso di elevato rumore . . . . .	316
10.2	Demodulazione di ampiezza . . . . .	276	11.4.4	Enfasi e de-enfasi . . . . .	318
10.2.1	Demodulazione coerente o omodina . . . . .	276	11.5	Appendice . . . . .	318
10.2.2	Sincronizzazione di portante . . . . .	276	11.5.1	Approssimazione della d.d.p. di Rice per SNR elevato . . . . .	318
10.2.2.1	Metodo della quadratura . . . . .	277	<b>12</b>	<b>Distorsione per segnali modulati</b>	<b>321</b>
10.2.2.2	Phase Locked Loop o PLL . . . . .	277	12.1	Filtraggio passa banda . . . . .	321
10.2.3	Errori di fase e di frequenza . . . . .	278	12.1.1	Intermodulazione tra componenti analogiche . . . . .	322
10.2.3.1	Demodulazione I e Q in presenza di errore di fase . . . . .	279	12.1.1.1	Equalizzazione in fase e quadratura . . . . .	323
10.2.4	Demodulazione incoerente . . . . .	279	12.1.1.2	Equalizzazione complessa . . . . .	323
10.2.5	Demodulatore di involuppo per AM-BLD-PI . . . . .	280	12.1.1.3	Canale equalizzato . . . . .	323
10.2.6	Demodulazione per segnali a banda laterale unica e ridotta . . . . .	280	12.1.2	Assenza di distorsione lineare nel filtraggio passa banda . . . . .	324
10.2.7	Demodulatore eterodina . . . . .	281	12.1.2.1	Canale passa banda ideale . . . . .	324
10.2.7.1	Supereterodina . . . . .	282	12.1.2.2	Canale equivalente passa basso perfetto . . . . .	324
10.2.7.2	Frequenza immagine . . . . .	283	12.1.2.3	Canale passa banda perfetto . . . . .	325
10.3	Modulazione angolare . . . . .	284	12.1.2.4	Segnale a banda stretta . . . . .	326
10.3.1	Generazione di un segnale a modulazione angolare . . . . .	286	12.1.3	Ritardo di fase, di gruppo, e distorsione di tempo di transito . . . . .	328
10.3.2	Ricezione di un segnale a modulazione angolare . . . . .	286	12.1.4	Assenza di intermodulazione tra componenti analogiche . . . . .	328
10.3.2.1	Ricevitore a PLL . . . . .	286	12.2	Distorsione lineare per segnali modulati . . . . .	329
10.3.2.2	Ricevitore a discriminatore . . . . .	287	12.2.1	Modulazione di ampiezza . . . . .	329
10.3.3	Densità spettrale di segnali a modulazione angolare . . . . .	288	12.2.2	Modulazione di Frequenza . . . . .	330
10.3.3.1	Segnale modulante sinusoidale . . . . .	289	12.3	Distorsione non lineare per segnali modulati	330
10.3.3.2	Regola di Carson . . . . .	291	12.3.1	Insensibilità della modulazione angolare alla distorsione non lineare . . . . .	331
10.3.3.3	Densità spettrale per FM ad alto indice . . . . .	292	12.3.2	Predistorsione . . . . .	331
10.3.3.4	Indice di modulazione per processi . . . . .	293	12.4	Appendice . . . . .	332
10.3.3.5	Densità spettrale per FM a basso indice . . . . .	294	12.4.1	Derivazione del tempo di ritardo di gruppo	332
10.4	Appendici . . . . .	294	<b>13</b>	<b>Teoria dell'informazione e codifica</b>	<b>333</b>
10.4.1	Soluzioni di mo-demodulazione . . . . .	294	13.1	Codifica di sorgente . . . . .	333
10.4.1.1	Il mixer . . . . .	294	13.1.1	Codifica di sorgente discreta . . . . .	334
10.4.1.2	Sintesi di frequenza con PLL ed oscillatore a cristallo . . . . .	296	13.1.1.1	Entropia . . . . .	335
10.4.1.3	Sintesi digitale diretta . . . . .	297	13.1.1.2	Intensità informativa e codifica binaria . . . . .	337
10.4.2	Densità di potenza per segnali AM a banda laterale unica . . . . .	297	13.1.1.3	Codifica con lunghezza di parola variabile . . . . .	338
10.4.3	Calcolo della potenza di un segnale AM BLU . . . . .	298	13.1.1.4	Codifica per blocchi . . . . .	341
10.4.3.1	Calcolo della potenza di segnali BLD-PI, PS, PPS . . . . .	298	13.1.2	Sorgente con memoria . . . . .	343
10.4.4	Modulazione FM a basso indice . . . . .	298	13.1.2.1	Sorgente Markoviana . . . . .	344
<b>11</b>	<b>Prestazioni delle trasmissioni modulate</b>	<b>301</b>	13.1.2.2	Codifica per sorgenti con memoria . . . . .	345
11.1	Il rumore nei segnali modulati . . . . .	301	13.1.2.3	Compressione basata su dizionario . . . . .	346
11.1.1	Filtro di ricezione . . . . .	301	13.1.3	Codifica con perdite di sorgente continua	348
11.1.2	Rapporto segnale-rumore . . . . .	301	13.1.3.1	Curva velocità-distorsione . . . . .	348
11.1.3	Banda di rumore . . . . .	302	13.1.3.2	Entropia di sorgente continua . . . . .	349
11.1.4	Demodulazione di un processo di rumore . . . . .	303	13.1.3.3	Sorgente continua con memoria . . . . .	350
11.1.5	SNR di riferimento . . . . .	304	13.2	Codifica di canale . . . . .	350
11.2	Prestazioni delle trasmissioni a modulazione di ampiezza . . . . .	304			

13.2.1	Canale simmetrico binario e decisore Bayesiano . . . . .	351	14.11.1	Sincronizzazione per sistemi a spettro espanso . . . . .	420
13.2.2	Informazione mutua media per sorgenti discrete . . . . .	353	14.12	Appendici . . . . .	422
13.2.3	Capacità di canale discreto . . . . .	355	14.12.1	Ortogonalità tra simboli sinusoidali . . . . .	422
13.2.4	Capacità di canale continuo . . . . .	357	14.12.2	Prestazioni della modulazione OFDM . . . . .	423
13.3	Codici di canale . . . . .	361	14.12.2.1	Calcolo della $P_e$ per portante . . . . .	424
13.3.1	Codice lineare a blocchi . . . . .	363	14.12.2.2	Potenza di rumore per portante . . . . .	425
13.3.1.1	Codice di Hamming . . . . .	365	14.12.2.3	Prestazioni per portante . . . . .	427
13.3.1.2	Codici ciclici . . . . .	368	14.12.2.4	Caso di rumore bianco . . . . .	427
13.3.2	Codice convoluzionale . . . . .	369	14.12.2.5	Confronto con la portante singola . . . . .	428
 			<b>15 Caratterizzazione circuitale, rumore e equalizzazione . . . . . 429</b>		
<b>II Trasmissione dei segnali . . . . . 373</b>			15.1 Modello circuitale dei segnali . . . . . 429		
<b>Prefazione . . . . . 375</b>			15.1.1 Bipoli . . . . . 430		
<b>14 Modulazione numerica . . . . . 377</b>			15.1.1.1 Potenza assorbita da un bipolo . . . . . 431		
14.1 Modulazione di ampiezza . . . . . 377			15.1.1.2 Connessione tra generatore e carico . . . . . 431		
14.1.1 Modulazione BPSK . . . . . 377			15.1.1.3 Potenza disponibile e massimo trasferimento di potenza . . . . . 432		
14.1.2 Modulazione L-ASK . . . . . 379			15.1.1.4 Adattamento di impedenza per assenza di distorsione lineare . . . . . 432		
14.1.3 Valutazione delle prestazioni . . . . . 380			15.1.2 Reti due porte . . . . . 432		
14.2 Modulazione di fase . . . . . 382			15.1.2.1 Modello circuitale . . . . . 433		
14.2.1 Modulazione QPSK ed L-PSK . . . . . 382			15.1.2.2 Schema simbolico . . . . . 433		
14.2.2 Prestazioni QPSK . . . . . 384			15.1.2.3 Trasferimento energetico . . . . . 433		
14.2.3 Prestazioni L-PSK . . . . . 386			15.2 Rumore nelle reti due porte . . . . . 436		
14.3 Modulazione QAM . . . . . 387			15.2.1 Reti passive . . . . . 437		
14.3.1 Prestazioni di QAM . . . . . 388			15.2.1.1 Rapporto SNR in uscita . . . . . 437		
14.4 Codifica differenziale . . . . . 391			15.2.1.2 Fattore di rumore per reti passive . . . . . 438		
14.4.1 Modulazione DBPSK . . . . . 391			15.2.2 Reti attive . . . . . 438		
14.4.2 DQPSK . . . . . 393			15.2.2.1 Fattore di rumore per reti attive . . . . . 438		
14.5 Modulazione di frequenza L-FSK . . . . . 393			15.2.3 Fattore di rumore per reti in cascata . . . . . 440		
14.5.1 Modulazione FSK ortogonale . . . . . 394			15.3 Rumore nei ripetitori . . . . . 443		
14.6 Demodulazione incoerente . . . . . 397			15.3.1 Ripetitore trasparente . . . . . 443		
14.7 Schema riassuntivo delle prestazioni . . . . . 398			15.3.1.1 Rumore termico accumulato . . . . . 444		
14.8 Modulazione OFDM . . . . . 398			15.3.1.2 Compromesso tra rumore termico e di intermodulazione . . . . . 445		
14.8.1 Rappresentazione nel tempo ed in frequenza . . . . . 399			15.3.2 Ripetitore rigenerativo . . . . . 445		
14.8.2 Architettura di modulazione . . . . . 402			15.4 Equalizzazione . . . . . 446		
14.8.3 Efficienza dell'OFDM . . . . . 403			15.4.1 Equalizzazione numerica . . . . . 447		
14.8.4 Architettura di demodulazione . . . . . 404			15.4.2 Equalizzatore zero forcing . . . . . 448		
14.8.5 Prestazioni . . . . . 404			15.4.3 Equalizzatore MMSE e filtro di Wiener . . . . . 450		
14.8.6 Sensibilità alla temporizzazione . . . . . 405			15.4.4 Equalizzatore a reazione . . . . . 456		
14.8.7 Equalizzazione . . . . . 405			15.4.5 Equalizzatore a massima verosimiglianza di sequenza . . . . . 457		
14.8.8 Codifica differenziale . . . . . 405			15.4.6 Confronto delle prestazioni di equalizzazione . . . . . 459		
14.8.9 Ottimalità . . . . . 406			15.5 Appendici . . . . . 460		
14.8.10 Codifica . . . . . 407			15.5.1 Potenza assorbita da un bipolo . . . . . 460		
14.8.11 Portanti pilota . . . . . 408			15.5.2 Condizioni per il massimo trasferimento di potenza . . . . . 461		
14.9 Sistemi a spettro espanso . . . . . 408			15.5.3 Potenza ceduta ad un carico $Z_c(f) \neq Z_g^*(f)$ . . . . . 461		
14.9.1 Sequenze pseudo-casuali . . . . . 409					
14.9.2 Modulazione per sequenza diretta . . . . . 410					
14.9.2.1 Guadagno di processo . . . . . 411					
14.9.2.2 Despreading . . . . . 411					
14.9.2.3 Prestazioni in presenza di rumore . . . . . 412					
14.9.2.4 Prestazioni in presenza di un tono interferente . . . . . 412					
14.9.2.5 Accesso multiplo . . . . . 413					
14.9.3 Famiglie di sequenze pseudo casuali . . . . . 415					
14.9.4 Frequency Hopping . . . . . 416					
14.9.5 Time Hopping o UWB . . . . . 417					
14.10 Altre possibilità . . . . . 417					
14.11 Sincronizzazione . . . . . 420					

<b>16</b>	<b>Collegamenti e mezzi trasmissivi</b>	<b>463</b>	<b>17</b>	<b>Sistema di servizio, teoria del traffico e delle reti</b>	<b>519</b>
16.1	Bilancio di collegamento . . . . .	463	17.1	Distribuzione binomiale per popolazione finita . . . . .	519
16.2	Collegamenti in cavo . . . . .	465	17.2	Distribuzione di Poisson	521
16.2.1	Costanti distribuite, grandezze derivate, e condizioni generali . . . . .	465	17.2.1	Variabile aleatoria esponenziale negativa	522
16.2.2	Trasmissione in cavo . . . . .	466	17.3	Sistema di servizio orientato alla perdita . . . . .	523
16.2.2.1	Casi limite . . . . .	469	17.3.1	Frequenza di arrivo e di servizio . . . . .	524
16.2.3	Tipologie di cavi per le telecomunicazioni	470	17.3.2	Intensità media di traffico . . . . .	524
16.2.3.1	Coppie simmetriche . . . . .	470	17.3.3	Probabilità di rifiuto . . . . .	524
16.2.3.2	Cavo coassiale . . . . .	471	17.3.4	Efficienza di giunzione . . . . .	526
16.3	Collegamenti radio . . . . .	472	17.3.5	Validità del modello . . . . .	527
16.3.1	Trasduzione elettromagnetica . . . . .	473	17.4	Sistemi di servizio orientati al ritardo . . . . .	528
16.3.2	Bilancio di collegamento per spazio libero	474	17.4.1	Risultato di Little . . . . .	528
16.3.3	Condizioni di propagazione e attenuazioni supplementari . . . . .	475	17.4.2	Sistemi a coda infinita ed a sergente unico	529
16.3.3.1	Condizioni di visibilità . . . . .	475	17.4.3	Sistemi a coda finita e con più serventi . . . . .	530
16.3.3.2	Diffusione e riflessione atmosferica . . . . .	476	17.5	Reti per trasmissione dati . . . . .	533
16.3.3.3	Assorbimento atmosferico . . . . .	477	17.5.1	Il pacchetto dati . . . . .	533
16.3.3.4	Dimensionamento di un collegamento soggetto a pioggia . . . . .	477	17.5.2	Modo di trasferimento delle informazioni	534
16.3.3.5	Cammini multipli . . . . .	478	17.5.2.1	Schema di moltiplicazione . . . . .	534
16.3.3.6	Collegamento in diversità . . . . .	480	17.5.2.2	Principio di commutazione . . . . .	535
16.3.4	Collegamenti radiomobili . . . . .	481	17.5.2.3	Architettura protocollare . . . . .	537
16.3.4.1	Le componenti del fading . . . . .	481	<b>18</b>	<b>Reti a pacchetto</b>	<b>541</b>
16.3.4.2	Path loss . . . . .	482	18.1	La rete Internet . . . . .	541
16.3.4.3	Fading su larga scala e shadowing . . . . .	483	18.1.1	Gli indirizzi . . . . .	542
16.3.4.4	Fading su piccola scala . . . . .	484	18.1.1.1	IP ed Ethernet . . . . .	543
16.3.4.5	Fading selettivo in frequenza . . . . .	487	18.1.1.2	Sottoreti . . . . .	543
16.3.4.6	Dispersione spettrale e variabilità temporale . . . . .	490	18.1.1.3	Intranet . . . . .	543
16.3.4.7	Tipologia di canale radiomobile . . . . .	492	18.1.1.4	Domain Name Service (DNS) . . . . .	543
16.3.4.8	Probabilità di errore in presenza di fading di Rayleigh . . . . .	493	18.1.1.5	Indirizzi TCP . . . . .	544
16.3.4.9	Ricevitore multi-antenna . . . . .	495	18.1.2	TCP . . . . .	545
16.3.4.10	Ricevitore Rake . . . . .	497	18.1.2.1	Il pacchetto TCP . . . . .	545
16.4	Collegamenti in fibra ottica . . . . .	498	18.1.2.2	Apertura e chiusura della connessione	546
16.4.1	Trasmissione ottica . . . . .	498	18.1.2.3	Protocollo a finestra . . . . .	546
16.4.2	Bilancio di collegamento . . . . .	503	18.1.2.4	UDP . . . . .	547
16.4.3	Seconda generazione . . . . .	505	18.1.3	IP . . . . .	548
16.4.3.1	Amplificazione ottica . . . . .	506	18.1.3.1	L'instestazione IP . . . . .	548
16.4.3.2	Moltiplicazione a divisione di lunghezza d'onda - WDM . . . . .	506	18.1.3.2	Indirizzamento e Routing . . . . .	549
16.4.3.3	Controllo della dispersione . . . . .	507	18.1.3.3	Subnetting e Supernetring . . . . .	549
16.4.4	Sistemi in fibra ottica . . . . .	508	18.1.3.4	Classless Interdomain Routing - CIDR	549
16.4.4.1	Dalle fibre ottiche alle reti ottiche . . . . .	508	18.1.3.5	Longest Match . . . . .	550
16.4.4.2	Rete ottica di trasporto . . . . .	510	18.1.3.6	Sistemi Autonomi e Border Gateway . . . . .	550
16.4.4.3	Rete passiva di distribuzione . . . . .	510	18.1.3.7	Multicast . . . . .	550
16.4.5	Ridondanza e pericoli naturali . . . . .	511	18.1.4	Ethernet . . . . .	551
16.5	Appendici . . . . .	511	18.1.4.1	Address Resolution Protocol - ARP . . . . .	551
16.5.1	Allocazione delle frequenze radio . . . . .	511	18.1.4.2	Formato di pacchetto . . . . .	552
16.5.2	Caratterizzazione della dispersione temporale . . . . .	513	18.1.4.3	Collisione . . . . .	553
			18.1.4.4	Trasmissione . . . . .	553
			18.1.5	Fast e Gigabit Ethernet . . . . .	553
			18.1.5.1	Fast Ethernet . . . . .	554
			18.1.5.2	LAN Switch . . . . .	554
			18.1.5.3	Domínio di broadcast e VLAN . . . . .	554
			18.1.5.4	Gigabit Ethernet . . . . .	554
			18.1.5.5	Packet bursting . . . . .	555
			18.1.5.6	Architettura . . . . .	555
			18.1.5.7	Ripetitore full-duplex e controllo di flusso . . . . .	555
			18.1.5.8	10 Gigabit Ethernet . . . . .	556
			18.2	ATM . . . . .	556
			18.2.1	Architettura . . . . .	556
			18.2.2	Strato fisico . . . . .	556
			18.2.3	Strato ATM . . . . .	557
			18.2.4	Classi di traffico e Qualità del Servizio (QoS)	558
<b>III</b>	<b>Sistemi di telecomunicazione</b>	<b>515</b>			
<b>Prefazione</b>		<b>517</b>			

18.2.5	Indirizzamento . . . . .	559	<b>20 Broadcast</b>	<b>593</b>	
18.2.6	Strato di adattamento . . . . .	560	20.1	Trasmissione televisiva analogica . . . . .	593
18.2.7	IP su ATM classico . . . . .	561	20.1.1	Codifica dell'immagine . . . . .	593
18.2.8	LANE, NHRP e MPOA . . . . .	562	20.1.2	Segnale televisivo in bianco e nero . . . . .	594
18.2.9	MPLS . . . . .	563	20.1.3	Formato dell'immagine . . . . .	594
			20.1.4	Occupazione spettrale . . . . .	595
			20.1.5	Segnale audio . . . . .	595
<b>19 Reti a commutazione di circuito</b>		<b>565</b>	20.1.6	Segnale di crominanza . . . . .	595
19.1	Introduzione . . . . .	565	20.1.7	Sincronizzazione . . . . .	596
19.1.1	Elementi della rete telefonica . . . . .	565	20.1.8	Interferenza . . . . .	596
19.1.2	La rete di accesso . . . . .	566	20.1.9	Video composito o separato . . . . .	596
19.2	Multiplicazione . . . . .	567	20.2	FM broadcast . . . . .	596
19.2.1	Multiplicazione a divisione di tempo . . . . .	567	20.3	Collegamenti satellitari . . . . .	598
19.3	Rete plesiocrona . . . . .	568	20.3.1	Studio di produzione . . . . .	598
19.3.1	Trama PCM . . . . .	568	20.3.2	Uplink . . . . .	598
19.3.2	Messaggi di segnalazione . . . . .	570	20.3.3	Transponder . . . . .	599
19.3.3	Sincronizzazione di centrale . . . . .	571	20.3.4	Footprint e Downlink . . . . .	600
19.3.4	Multiplicazione asincrona e PDH . . . . .	572	20.3.5	Temperatura di antenna . . . . .	601
19.3.4.1	Bit stuffing . . . . .	572	20.3.6	Ricevitore a terra . . . . .	601
19.3.4.2	Add and Drop Multiplexer - ADM . . . . .	573	20.3.7	Polarizzazione . . . . .	602
19.3.5	Sincronizzazione di rete . . . . .	573	<b>21 Codifica di sorgente multimediale</b>	<b>603</b>	
19.3.5.1	Elastic store . . . . .	574	21.1	Codifica audio . . . . .	603
19.4	Gerarchia digitale sincrona . . . . .	574	21.1.1	Codifica di forma d'onda . . . . .	604
19.5	Topologia di rete . . . . .	578	21.1.1.1	DPCM o PCM Differenziale . . . . .	604
19.6	Rete in fibra ottica . . . . .	579	21.1.1.2	ADPCM o DPCM Adattivo . . . . .	604
19.6.1	Dispositivi SDH . . . . .	579	21.1.1.3	Codifica per sottobande . . . . .	606
19.6.2	Topologia ad anello . . . . .	579	21.1.2	Codifica basata su modello . . . . .	607
19.6.2.1	Rete di trasporto . . . . .	580	21.1.2.1	Produzione del segnale vocale . . . . .	607
19.6.2.2	Rete di accesso in fibra . . . . .	580	21.1.2.2	Codifica a predizione lineare - LPC . . . . .	609
19.6.3	Sistemi di protezione automatica . . . . .	580	21.1.2.3	Predizione lineare ad eccitazione residuale - RELP . . . . .	612
19.7	Instradamento . . . . .	582	21.1.2.4	Quantizzazione vettoriale . . . . .	614
19.8	Commutazione . . . . .	583	21.1.2.5	Predizione lineare ad eccitazione codificata - CELP . . . . .	615
19.8.1	Reti a divisione di spazio . . . . .	583	21.1.3	Codifica psicoacustica . . . . .	616
19.8.2	Reti multistadio . . . . .	583	21.2	Codifica di immagine . . . . .	619
19.8.3	Commutazione numerica a divisione di tempo . . . . .	584	21.2.1	Dimensioni . . . . .	619
19.8.3.1	Time Slot Interchanger . . . . .	584	21.2.2	Spazio dei colori . . . . .	621
19.8.3.2	Commutazione bidimensionale . . . . .	584	21.2.3	Formato GIF . . . . .	624
19.9	Appendici . . . . .	585	21.2.4	Codifica JPEG . . . . .	625
19.9.1	Plain old telephony services (POTS) . . . . .	585	21.3	Codifica video . . . . .	630
19.9.2	ISDN . . . . .	587	21.3.1	Standard video . . . . .	635
19.9.3	Sistema di segnalazione numero 7 . . . . .	587	21.3.1.1	H.261 . . . . .	635
19.9.4	ADSL . . . . .	589	21.3.1.2	H.263 . . . . .	637
19.9.5	TDM mediante modulazione di ampiezza degli impulsi . . . . .	590	21.3.1.3	MPEG-1 . . . . .	639
19.10	Riferimenti . . . . .	591	21.3.1.4	MPEG-2 . . . . .	640
			21.3.2	Contentitori . . . . .	642
			21.3.2.1	Transport Stream . . . . .	643
			<b>Bibliografia</b>	<b>647</b>	
			<b>Indice analitico</b>	<b>651</b>	

# Una visione di insieme

**Q**ESTO capitolo introduttivo offre innanzitutto una panoramica dei diversi aspetti, denominazioni e procedure che sono oggetto di studio nella trasmissione dei segnali, e la cui analisi approfondita viene sviluppata ai capitoli successivi. Prosegue quindi al § 1.5 approfondendo la descrizione delle caratteristiche dei *segnali* e dei *sistemi*, ovvero del veicolo utilizzato per trasmettere informazione, e della infrastruttura necessaria all'inoltro. Saranno individuate diverse categorie e modalità di rappresentazione per i segnali, nonché le operazioni che è possibile eseguire su di essi.

## 1.1 Trasmissione dei segnali e dell'informazione

La disciplina della *trasmissione dei segnali* si è sviluppata allo scopo di descrivere la rappresentazione di *contenuti semantici* o *informativi* (il *significato*) mediante l'andamento nel tempo di grandezze fisiche (elettromagnetiche e/o simboliche) che ne costituiscono il *significante*<sup>1</sup>. Una volta che il messaggio informativo è stato *codificato* mediante un idoneo segnale, la sua *trasmissione* nello spazio è realizzata per mezzo di diversi apparati cooperanti, spesso organizzati *in rete*. Il segnale trasmesso può rappresentare un messaggio generato al tempo stesso della sua trasmissione, oppure pre-esistente e registrato.

**Sorgente, destinatario e canale** L'origine del segnale da trasmettere è tipicamente indicata (vedi Fig. 1.1) come *sorgente*, e ciò che giace tra sorgente e *destinatario* è descritto da una entità astratta denominata *canale* di comunicazione, le cui caratteristiche condizionano i segnali trasmessi.

**Distorsioni e disturbi** Il canale può imporre una limitazione alla *banda di frequenze* del segnale in transito e modificarne lo spettro, così come modificare i valori che esso assume<sup>2</sup>. Cause fisiche ineliminabili producono inoltre l'insorgere di un segnale di *disturbo additivo* al lato ricevente, indicato con il termine di *rumore* (*noise* in inglese), e anch'esso contribuisce alla ricezione di un segnale diverso da quello stesso presente all'uscita del canale. La conoscenza

<sup>1</sup>La distinzione tra significato e significante esprime la differenza che passa, ad esempio, tra l'immagine mentale che ognuno può avere di un cavallo, e la parola "cavallo" (scritta o pronunciata), in cui entrambi partecipano a definire un *segno linguistico*, vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Significante>. In tale contesto, i due aspetti del segno rimandano ad un *referente*, che nel nostro esempio corrisponde ad un cavallo in carne ad ossa, mentre dal punto di vista dei segnali individua una specifica *forma d'onda*.

<sup>2</sup>Approfondiremo nel seguito il senso di questi termini; ci limitiamo per ora ad associarli ad un concetto generico di *similitudine* tra segnale trasmesso e ricevuto, ovvero di *distorsione* di quanto ricevuto.

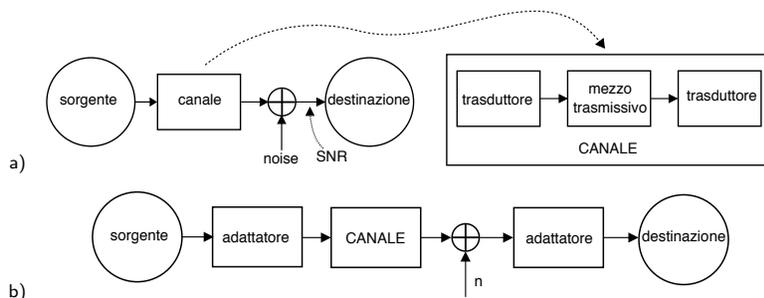


Figura 1.1: Trasmissione dell'informazione attraverso un canale di comunicazione

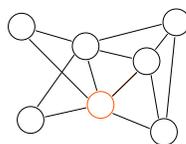
dei peggioramenti introdotti dal canale guida quindi la scelta dei metodi di trasmissione più idonei a minimizzare l'alterazione del messaggio trasmesso.

**Rapporto segnale-rumore** L'entità delle alterazioni subite dal messaggio viene quantificata nei termini di un *rapporto segnale rumore* (SNR o SIGNAL-TO-NOISE RATIO), che rappresenta un indice di qualità del collegamento e che per ora definiamo genericamente come il rapporto tra l'entità del segnale utile ricevuto e del rumore ad esso sovrapposto, indicato come *noise* nella figura 1.1, e che comprende sia il disturbo additivo che la distorsione introdotta dal canale.

**Trasmissione** La Fig. 1.1a) evidenzia come nella realtà fisica il canale sia costituito da un *mezzo trasmissivo* su cui si propaga un segnale di natura elettromagnetica, generato e ricevuto in tale forma mediante appositi *trasduttori* od *interfacce* di trasmissione e ricezione<sup>3</sup>. Considerando per il momento i trasduttori come facenti parte del canale stesso, proseguiamo l'analisi concentrandoci sugli ulteriori aspetti del processo di comunicazione.

**Adattatori** In figura 1.1b) si mostra la possibile presenza (in trasmissione, ricezione, o ad entrambe le estremità del canale) di dispositivi *adattatori*, che hanno lo scopo di controbilanciare per quanto possibile i fenomeni di distorsione introdotti dalla trasmissione: si può ad esempio ricorrere ad un *equalizzatore*, per correggere la risposta in frequenza di un canale, o ad un *amplificatore*, per contrastare l'attenuazione subita dal segnale.

**Rete** La trasmissione lungo un canale in uso esclusivo alla coppia sorgente-destinazione è piuttosto raro; usualmente i collegamenti sono *condivisi* tra più comunicazioni, ognuna con differente origine e destinatario. Il problema della condivisione delle risorse trasmissive, ed il coordinamento di queste attività, produce la necessità di analizzare in modo esplicito le *reti di telecomunicazione*, che entrano a far parte integrante dei sistemi di trasmissione dell'informazione.



## 1.2 Segnali analogici e numerici

Gli aspetti fin qui accennati sono immediatamente applicabili a segnali di natura *analogica*, definiti per *tutti* gli istanti di tempo, e che assumono valori nell'ambito dei numeri reali (o, come

<sup>3</sup>Un classico esempio di trasduttore è quello dell'antenna, nel caso di trasmissione radio, ovvero di microfono ed altoparlante qualora ci si ponga dal punto di vista dello studio e degli ascoltatori.

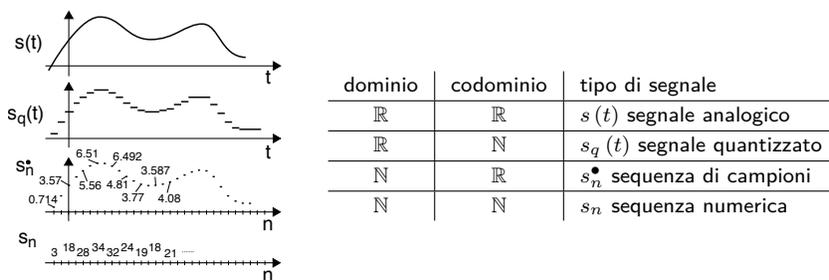


Figura 1.2: Segnali analogici, numerici, campionati e quantizzati

vedremo al cap. 9, complessi), come ad esempio nel caso di un segnale audio (vocale o musicale); d'altra parte, un segnale può viceversa essere definito solo per istanti di tempo *discreti* ovvero numerabili, ed assumere valori anch'essi discreti, come ad esempio per i documenti conservati su di un computer. In tal caso il segnale viene detto *sequenza numerica*, e la sua trasmissione coinvolge ulteriori elementi introdotti di seguito.

La figura 1.2 illustra la classificazione dei segnali dal punto di vista analitico, in base all'insieme di definizione dei valori assunti, e del dominio a cui appartiene la variabile indipendente. Notiamo che oltre ai due casi di segnale analogico e sequenza numerica, sussistono anche i due casi intermedi di *segnale quantizzato*  $s_q(t)$  definito per tutti gli istanti ma a valori discreti, e di *sequenza di campioni*  $s_n^*$  definita ad istanti discreti, ma con valori continui. La relazione tra queste rappresentazioni dell'informazione viene approfondita al § 1.2.2.

### 1.2.1 Segnale analogico

Corrisponde all'andamento *nel tempo* di una grandezza fisica  $s(t)$ , di natura elettromagnetica come nei campi dell'elettronica o dei circuiti, ovvero risultato della trasduzione elettrica di grandezze di altra natura, come nel caso di un segnale audio che consiste in un'onda trasversale di pressione-velocità convertita in una tensione da un microfono, o nel caso di una misura di posizione, velocità od accelerazione ottenuta mediante tecniche di geo-localizzazione come nel telerilevamento, oppure acquisita mediante sensori utilizzati ad es. nel contesto dei sistemi di controllo automatico.

Una diversa categoria di segnale sono le *immagini*, definite come una funzione di due variabili *spaziali*  $s(x, y)$  il cui valore ne individua la *luminanza*, eventualmente corredata da altri segnali di immagine definiti sullo stesso dominio e relativi all'informazione di *crominanza*. In questo contesto il fattore *tempo* torna in gioco qualora si tratti di immagini in movimento, come nei video: questi aspetti sono trattati al cap. 21.

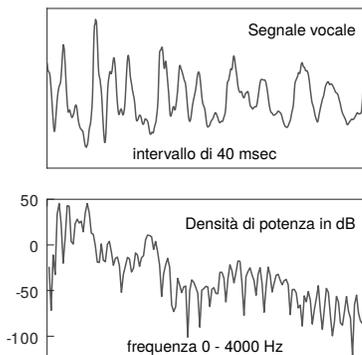
Un segnale può anche presentare *valori complessi*<sup>4</sup>, e in tal caso *si sdoppia* in due andamenti definiti come parte reale e parte immaginaria, oppure modulo e fase. In tutti i casi, i segnali analogici corrispondono alla comune accezione di funzione di variabile continua dell'analisi matematica, definita su di un intervallo che può essere limitato o meno, e possono in generale essere studiati e caratterizzati con le tecniche proprie di tale disciplina. Al § 1.5.1 è fornita una classificazione dei segnali in categorie (impulsivi, di energia, di potenza, e periodici) che rivestono un ruolo fondamentale per il loro studio successivo.

<sup>4</sup>Come vedremo al cap. 9, un segnale a valori complessi è il risultato di una particolare rappresentazione, detta *involuppo complesso*, utile nell'analisi dei segnali modulati.

### 1.2.1.1 Rappresentazione frequenziale dei segnali analogici

Nell'ambito della teoria dei segnali un ruolo determinante è svolto dallo studio di una particolare *trasformazione lineare*, che individua per ogni segnale funzione del tempo  $s(t)$  un corrispondente segnale (in generale complesso)  $S(f)$  funzione di una diversa variabile indipendente  $f$  nota come *frequenza*. Questo nuovo segnale è un sorta di *radiografia*, una analisi che individua uno *spettro* di frequenze di cui è costituito  $s(t)$ ; la differenza tra la minima e massima delle frequenze presenti è detta *banda*, ed è uno dei principali parametri per valutare le alterazioni subite del segnale nel passaggio attraverso sistemi fisici.

A seconda della categoria in cui ricade  $s(t)$ , la trasformazione assume una tra diverse formulazioni, definendo così uno *sviluppo in serie di Fourier* per la rappresentazione dei segnali periodici, una *trasformata di Fourier* per segnali di energia, e uno *spettro di densità di potenza* per segnali di durata indefinita. L'analisi di Fourier consente di definire come la potenza (o l'energia) del segnale si *distribuisce* in frequenza.



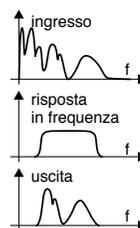
### 1.2.1.2 Transitio dei segnali attraverso sistemi fisici

L'attraversamento di un *canale* da parte di un segnale analogico, che come discusso al § 1.1 avviene grazie ad un *mezzo trasmissivo*, viene studiato mediante l'ausilio di alcuni strumenti fondamentali qui brevemente descritti, e ripresi al § 1.5.4.

**Risposta impulsiva e convoluzione** La prima rappresenta l'uscita di un sistema fisico quando in ingresso è presente una particolare astrazione analitica, detta *impulso matematico*. La risposta impulsiva permette poi di esprimere l'uscita del sistema in corrispondenza di un ingresso qualunque, mediante il calcolo di un particolare integrale (di *convoluzione*) che coinvolge solamente l'espressione del segnale in ingresso, e quella della risposta impulsiva.



**Risposta in frequenza e filtraggio** Operando nel dominio della frequenza, osserveremo come la trasformata di Fourier della risposta impulsiva rappresenta la *risposta in frequenza* del sistema, ovvero la modalità con cui il sistema riproduce in uscita ciascuna delle frequenze presenti nel segnale di ingresso. Dato che la risposta in frequenza descrive quali frequenze passeranno amplificate, inalterate od attenuate, il transitio di un segnale viene indicato anche con il termine *filtraggio*, ed il sistema è detto *filtro*.



**Modulazione** Qualora il canale (o filtro) attraverso cui convogliare il segnale  $s(t)$  non permetta l'attraversamento alle frequenze in esso presenti, come ad esempio nel caso di un collegamento radio, occorre trasformare il segnale mediante una tecnica chiamata *modulazione*, in modo che il risultato giaccia in una *banda* di frequenze compatibile con la risposta in frequenza del canale. Il segnale modulato occupa ora una banda concentrata attorno ad una frequenza più elevata detta *portante*, ed



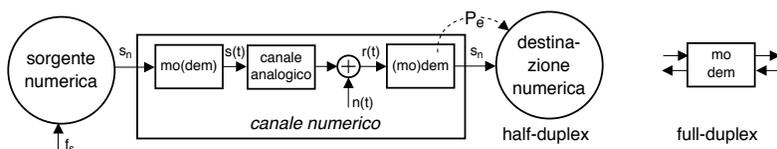
il suo andamento nel dominio del tempo è descritto da un segnale complesso noto appunto come *involuppo complesso*.

**Trasferimento energetico** Nel caso di collegamenti a distanza, l'attenuazione del mezzo trasmissivo non è più trascurabile, ed il segnale viene ricevuto con una ampiezza decisamente inferiore a quella utilizzata in trasmissione. Per questo è fondamentale verificare che la potenza ricevuta non sia inferiore alla *soglia di sensibilità* del ricevitore, che indica la condizione limite per la qualità di ricezione. D'altra parte, attenuazioni e distorsioni di entità non trascurabile possono verificarsi anche in assenza di collegamenti a distanza, qualora si verifichi un *disadattamento di impedenza* tra stadi della catena trasmissiva.

Ulteriori aspetti dei sistemi di telecomunicazione sono brevemente introdotti al § 1.4; occupiamoci ora invece di caratterizzare le modalità di trasmissione per una sequenza numerica  $s_n$ .

### 1.2.2 Trasmissione numerica

Quando il contenuto informativo è costituito da una sequenza numerica  $s_n$ , i suoi elementi possono essere messi in relazione biunivoca con un più generale alfabeto simbolico  $\mathcal{A}$  a cardinalità finita, come ad esempio nel caso di un testo scritto, in cui  $\mathcal{A}$  consiste nel vero e proprio alfabeto della lingua in cui è scritto il testo. In questo caso la trasmissione avviene tra una sorgente ed una destinazione *numeriche*, e gli elementi della sequenza  $s_n$  sono indicati più genericamente con il termine di *simboli*, emessi dalla sorgente numerica (o simbolica) ad intervalli regolari  $t = nT_s$  detti *istanti di simbolo*, mentre  $f_s = 1/T_s$  è indicata come *frequenza di simbolo*<sup>5</sup>. Ciò che permette la trasmissione dell'informazione contenuta nel messaggio tra sorgente e destinazione prende ora il nome di *canale numerico*, pensabile come una entità a se stante, che la figura seguente mostra essere comunque costituito al suo interno dal canale *analogico* già discusso, e basato a sua volta su di un mezzo trasmissivo.



**Modem o codificatore di linea** Denota il dispositivo che provvede a generare un segnale analogico  $s(t)$  in grado di trasportare l'informazione espressa dalla sequenza numerica  $s_n$ , la cui etimologia deriva dalla contrazione di MODulatore e DEModulatore (il cui significato approfondiremo al cap. 9), mentre il termine *codificatore di linea* è riferito alla trasmissione su di una *linea di trasmissione* come ad esempio un collegamento in cavo. In particolare, una trasmissione unidirezionale<sup>6</sup> necessita di solo *metà* delle funzioni del modem per entrambi i lati del collegamento, mentre nel caso di collegamento *full duplex* (in cui gli estremi del canale possono

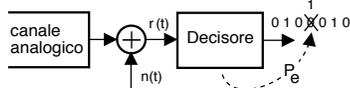
<sup>5</sup>Una sequenza prodotta da una sorgente numerica si presta facilmente ad essere trasformata in un'altra, con un diverso alfabeto ed una differente frequenza di simbolo. Per fissare le idee, consideriamo i simboli di una sequenza numerica  $s_n$  ad  $L$  valori (ovvero  $\mathcal{A} = 1, 2, \dots, L$ ): questi possono essere presi a gruppi di  $M$ , producendo nuovi simboli  $q_k$  a velocità  $M$  volte inferiore, ma con  $L^M$  valori distinti. Se si dispone di un alfabeto di uscita  $\mathcal{B}$  ad  $H$  valori (ovvero  $\mathcal{B} = 1, 2, \dots, H$ ), i gruppi di  $M$  simboli  $L$ -ari originari possono essere rappresentati con gruppi di  $N$  simboli  $H$ -ari purché  $L^M \leq H^N$ . Esempio: per codificare in binario ( $H = 2$ ) simboli con  $L = 26$  valori, occorrono almeno  $N = 5$  bit/simbolo, ottenendo così  $2^5 = 32 > L = 26$ . E' un ragionamento confuso? Sì e no. Basta fare degli esempi.

<sup>6</sup>Nelle trasmissioni unidirezionali, sorgente e destinazione non si scambiano i ruoli. La trasmissione stessa viene anche indicata con il termine di *half-duplex*.

essere contemporaneamente sorgente e destinazione) il modem opera allo stesso tempo nelle due direzioni.

All'interno del modem di ricezione è presente un dispositivo *decisore*, in grado di ricostruire la sequenza  $s_n$ , a partire dal segnale analogico ricevuto  $r(t)$ , ma a causa del rumore  $n(t)$  presente all'uscita del canale analogico il decisore può commettere *errore*, producendo una sequenza  $\hat{s}_n \neq s_n$ .

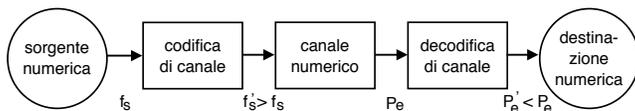
**Probabilità di errore** Quando il *decisore* presente nel modem produce un simbolo *diverso* da quello trasmesso si verifica un *errore*, e la frazione del numero di eventi di errore rispetto al totale rappresenta la *probabilità di errore*, il cui valore costituisce il parametro che caratterizza



la qualità del collegamento numerico. Evidentemente il valore della probabilità di errore è strettamente legato in modo inverso a quello del rapporto segnale-rumore SNR che si riscontra per il canale analogico sottostante.

Affrontiamo ora due aspetti del tutto *peculiarissimi* della trasmissione di sequenze numeriche e simboliche, ovvero la *codifica di canale* e di *sorgente*.

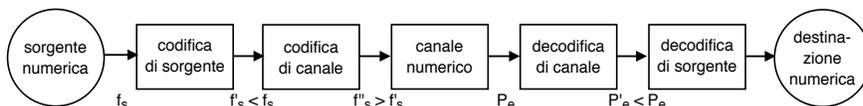
**Codifica di canale** Consiste nell'invio di più simboli di quanti ne produca la sorgente, e quindi di fatto *aumentando* il loro numero per unità di tempo, che da  $f_s$  passa ad  $f'_s > f_s$ . La scelta dei simboli aggiunti viene fatta in modo che essi *dipendano* in modo *deterministico* da quelli da già presenti, rendendo così la sequenza trasmessa *ridondante*, allo scopo di ridurre il valore della probabilità di errore. Infatti la dipendenza (nota) tra i simboli trasmessi permette al ricevitore di "accorgersi" che si è verificato un errore, dato che tale dipendenza non è più rispettata, e quindi il ricevitore può attuare delle contromisure, come quella di inviare una richiesta di ritrasmissione, oppure se la ridondanza introdotta è sufficientemente elevata, tentare di correggere errori isolati<sup>7</sup>. Dopo aver (eventualmente) svolto le possibili contromisure, i simboli aggiunti vengono rimossi al lato ricevente da parte di un blocco di *decodifica di canale*.



**Codifica di sorgente** Ha uno scopo per così dire "inverso" a quello della codifica di canale; la codifica di sorgente infatti *rimuove la dipendenza* (ora in senso *statistico*) tra i simboli presenti nella sequenza generata dalla sorgente, producendo così la riduzione del numero di simboli da trasmettere per unità di tempo<sup>8</sup>, che passa così da  $f_s$  ad  $f'_s < f_s$ . Un tipico esempio di questo modo di procedere è rappresentato dagli algoritmi di compressione esistenti per i documenti su computer (come i file *zippati*); in tal caso, il fattore di compressione che si ottiene dipende dalla natura del file trattato, ed è tanto maggiore quanto più quest'ultimo presenta caratteristiche di ripetitività, ovvero di predicibilità del suo contenuto. In altre parole, l'uscita di un codificatore di sorgente è una sequenza di simboli tendenzialmente *indipendenti* tra loro, nel senso che ogni forma di predicibilità di un simbolo a partire dai circostanti è stata rimossa.

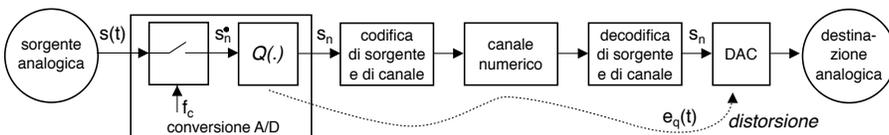
<sup>7</sup>Si parla in questo caso di codifica FEC, ovvero di *Forward Error Correction*.

<sup>8</sup>Pensiamo per similitudine ad un imballaggio, il cui contenuto è prima disposto in modo da occupare il minimo volume (codifica di sorgente), ed a cui viene poi aggiunto del materiale antiurto (codifica di canale).



Non resta ora che da discutere dei due casi elencati in fig. 1.2 ma non ancora incontrati, ovvero di . . .

**Campionamento e quantizzazione** Poniamoci il problema di utilizzare un *canale numerico* per effettuare una *trasmissione analogica*: il vantaggio di una tale “contorsione” è da ricercarsi nel migliore comportamento delle trasmissioni numeriche rispetto ai disturbi, nonché alla loro *generalità*<sup>9</sup>. Per riuscire nello scopo occorre che il segnale  $s(t)$  prodotto dalla sorgente analogica venga prima *campionato* prelevandone i valori  $s_n^*$  in corrispondenza degli istanti  $nT_c$ , ossia con una velocità di  $f_c = 1/T_c$  campioni/secondo, e quindi *quantizzato* approssimando i valori  $s_n^*$  mediante un insieme finito di  $L$  valori, e producendo una sequenza numerica  $s_n$  di simboli appartenenti ad un alfabeto finito. Questa coppia di operazioni è indicata come *conversione analogico-digitale* o A/D, e la sequenza  $s_n$  può essere rappresentata da una sequenza *binaria* facendo corrispondere  $M = \lceil \log_2 L \rceil$  bit<sup>10</sup> ad ognuno dei simboli  $L$ -ari. Dopo le operazioni di co-decodifica e trasmissione, un dispositivo di conversione *digitale-analogica* (DAC) posto al lato ricevente provvede a ricostruire il segnale  $s(t)$  originario.<sup>11</sup>



**Rumore di quantizzazione** L'approssimazione dei campioni  $s_n^*$  mediante un insieme finito di valori introduce una *distorsione*, dato che il DAC opera su valori approssimati e non su quelli reali. L'effetto risultante è come se presso la destinazione fosse presente un disturbo additivo  $e_q(t)$ , detto *rumore di quantizzazione*, che si somma al segnale originario. L'entità di tale disturbo è inversamente legata alla *risoluzione del quantizzatore*, ovvero alla capacità di differenziare tra valori di ingresso molto vicini tra loro. In definitiva, la distorsione risulta tanto minore, quanto maggiore è la velocità del flusso informativo prodotto dal quantizzatore, espresso in bit/secondo.

Lo scienziato CLAUDE SHANNON negli anni '50 enunciò una serie di teoremi, che sono la base dell'analisi dei sistemi di comunicazione. Tali aspetti sono affrontati al Cap. 13, e possono essere riassunti dagli enunciati seguenti.

**Compromesso velocità-distorsione** Per quanto sopra detto, una sorgente analogica campionata a velocità di  $f_c$  campioni/secondo e quantizzata con  $M$  bit/campione produce un

<sup>9</sup>Nei collegamenti numerici non occorre specializzare il metodo di trasmissione al mezzo a disposizione, anzi quest'ultimo è totalmente “mascherato” dal fornitore del collegamento numerico stesso, e dal modem che viene utilizzato.

<sup>10</sup>La notazione  $M = \lceil \log_2 L \rceil$  individua l'intero superiore del valore racchiuso tra le semiparentesi  $\lceil \cdot \rceil$ . Ad esempio se  $L = 21$  allora  $\log_2 21 = 4,3923\dots$  e dunque  $M = \lceil 4,3923 \rceil = 5$ , ovvero occorrono 5 bit/campione.

<sup>11</sup>L'utilizzo di dispositivi di conversione digitale-analogico è molto comune nella realtà odierna, un esempio tra tutti è quello dei *CD audio*, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/CD\\_Audio](https://it.wikipedia.org/wiki/CD_Audio)

flusso informativo di  $f_b = f_c \cdot M$  bit/secondo, tanto più elevato quanto minore è la distorsione introdotta dal processo di quantizzazione<sup>12</sup>, viceversa, la velocità di trasmissione può essere ridotta, a patto di accettare una maggiore distorsione.

**Compromesso banda-potenza** Un qualsiasi canale pone un limite al massimo flusso informativo che transita in esso. Il limite deriva dai vincoli che il canale impone sulla massima banda **B** del segnale in transito, sulla massima potenza di segnale **S** ricevuta, e sulla potenza di rumore **N** presente al ricevitore. Il massimo flusso di informazione in transito prende il nome di *capacità di canale* **C**, e può essere espresso come  $C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)$  bit/sec. In questi termini, la massima velocità di trasmissione può dipendere da una limitazione sulla banda, o sulla potenza, od essere causata da un eccessivo rumore: a parità di rumore solo adottando un diverso canale che permetta di trasmettere più potenza, o di occupare più banda, è possibile trasmettere a velocità più elevata.

**Compromesso tempo-distorsione** Considerando una coppia sorgente + canale, dato che il canale limita il massimo flusso informativo prodotto dalla sorgente, quest'ultima verrà necessariamente riprodotta con una distorsione tanto maggiore quanto minore è la capacità di canale. A meno di non cambiare canale, oppure impiegare *più tempo* per la trasmissione, e rinunciare alla possibilità di una riproduzione in *tempo reale*.

## 1.3 Segnali aleatori

Fino a qui si è fatta l'assunzione implicita che i segnali e le sequenze di cui si discute siano *segnali certi*, ovvero completamente *noti*, in forma di espressione analitica (ad es., una sinusoide con ampiezza e fase noti) oppure nei termini di una qualche forma d'onda registrata. Al contrario, un sistema di comunicazione deve essere progettato per poter funzionare altrettanto bene per tutti i possibili segnali appartenenti ad una medesima classe, che prendono dunque il nome di segnali (o *processi*) *aleatori* in quanto definiti unicamente da un punto di vista probabilistico, o per meglio dire, statistico.

### 1.3.1 Calcolo delle probabilità e statistica

Costituiscono le basi non solo per poter trattare i segnali aleatori, ma anche per definire la quantità di informazione di un messaggio, le prestazioni di un collegamento, i fenomeni che caratterizzano le trasmissioni radiomobili, il dimensionamento di una rete... Per questo al cap. 5 vengono riassunti concetti di calcolo delle probabilità e di statistica, immediatamente applicati nel cap. 6 per arrivare a descrivere sia i segnali certi che quelli aleatori mediante lo stesso formalismo analitico.

#### 1.3.1.1 Autocorrelazione e densità di potenza

Sono due funzioni, una del tempo e l'altra della frequenza, che è possibile definire sia per segnali certi che aleatori, e che appunto ne permettono la trattazione in modo unificato ai fini della relativa *stima spettrale*. Osserveremo come processi molto *correlati* siano caratterizzati da una

<sup>12</sup>Infatti  $M = \lceil \log_2 L \rceil$  aumenta all'aumentare del numero  $L$  di possibili valori per i campioni quantizzati, e ciò corrisponde ad una maggiore fedeltà, ossia ad una minore distorsione. Inoltre, al cap. 4 verrà illustrato come l'aumento di  $f_c$  corrisponda ad un maggiore intervallo di frequenze che possono essere riprodotte dal DAC, ovvero anche il valore di  $f_c$  è direttamente legato ad un concetto di fedeltà di riproduzione.

densità di potenza di tipo *colorato*, mentre processi scarsamente correlati saranno identificati da una densità di potenza di tipo *bianco*<sup>13</sup>.

### 1.3.1.2 Teoria del traffico

Trattata al cap. 17, affonda le sue radici nel calcolo delle probabilità come strumento per affrontare il problema del dimensionamento di collegamenti che debbano trasportare più messaggi contemporaneamente, operando una moltiplicazione degli stessi su di un medesimo mezzo trasmissivo. In particolare, la teoria del traffico consente di analizzare e confrontare le prestazioni offerte dalle reti basate sulla commutazione di circuito o di pacchetto, dal punto di vista della probabilità di blocco e del ritardo medio.

## 1.4 Sistemi di telecomunicazione

Questa prima parte introduttiva prosegue descrivendo, in modo sommario e sicuramente parziale, cinque diversi *punti di vista* in cui è possibile inquadrare le problematiche di telecomunicazione, ovvero gli aspetti *fisici*, di *sistema*, di *rete*, di *elaborazione*, e di *trasporto*, fornendo per ognuno di essi rimandi a dove nel testo essi vengono trattati, principalmente collocati a partire dalla *seconda parte* del testo, pag. 373.

**Aspetti fisici** Un canale di comunicazione, *dal punto di vista fisico*, si identifica con il mezzo trasmissivo, per la descrizione del quale si adotta frequentemente un modello circuitale. Elenchiamo i mezzi comunemente adottati:

**Collegamento radio** Il segnale si propaga nello spazio libero come onda elettromagnetica sferica, e viene irradiato mediante antenne, che ne focalizzano la potenza lungo direzioni privilegiate. La trasmissione è resa possibile grazie al processo di modulazione. § 16.3

**Collegamento in cavo** Da quello tra computer e stampante, a quello su doppino (telefonia) e su cavo coassiale (televisione, ethernet). Può essere di tipo half o full duplex a seconda se i due estremi della comunicazione siano unidirezionali o bidirezionali. § 16.2

**Collegamento in fibra ottica** E' realizzato facendo viaggiare energia luminosa attraverso una guida d'onda di materiale dielettrico. La tecnica è idonea alla trasmissione dei soli segnali numerici, dato che la sorgente luminosa in trasmissione viene semplicemente *accesa* e *spenta* in corrispondenza dei bit (zero od uno) del messaggio. § 16.4

**Modello circuitale** Il collegamento ed i trasduttori ad esso relativi sono spesso descritti ricorrendo ad un circuito elettrico equivalente, in modo da poterne descrivere il comportamento mediante strumenti analitici noti. Cap. 15

**Aspetti sistemistici** Da un punto di vista *di sistema*, il transito dei segnali attraverso sistemi fisici è analizzato in termini del peggioramento introdotto, che può essere catalogato nell'ambito di diverse categorie:

---

<sup>13</sup>I termini *colorato* e *bianco* hanno origine da una similitudine con l'energia luminosa, per cui se la luce bianca indica l'indiscriminata presenza di tutte le lunghezze d'onda, così uno spettro bianco indica la presenza in egual misura di tutte le frequenze; viceversa, come una luce colorata dipende dal prevalere di determinate frequenze nella radiazione elettromagnetica, così uno spettro colorato indica la prevalenza di alcune frequenze su altre.

**Distorsioni** Si distinguono quelle cosiddette *lineari*, causate da una risposta in frequenza non ideale, dalle distorsioni *non lineari*, che causano invece una deformazione istantanea sulla forma d'onda in transito. Capp. 7, 12

**Non stazionarietà** Sono fenomeni caratterizzati da una variazione nel tempo delle caratteristiche del canale, e ricorrono spesso nel caso di comunicazioni con mezzi mobili. § 16.3.4.4

**Attenuazione** Un segnale in transito lungo un canale presenta in uscita una ampiezza inferiore a quella di ingresso. L'alterazione può aver luogo sia per cause fisiche intrinseche (lunghezza del collegamento, disadattamento di impedenze, tecnologia degli amplificatori), che in dipendenza di fatti contingenti (percorsi multipli, pioggia); in questo secondo caso, il fenomeno è trattato come l'esito di un processo aleatorio; §§ 16.1, 16.2.2, 16.3.4.1, 16.4.2

**Portata** Affinché possano essere soddisfatti i requisiti di qualità (ad esempio l'SNR) desiderati, risulta che la lunghezza del collegamento deve essere inferiore ad un massimo, in conseguenza dell'attenuazione del collegamento, della potenza trasmessa, e degli altri fatti contingenti;

**Qualità del servizio** Con questo termine sono indicate diverse grandezze, ognuna applicabile in un particolare contesto, e che rappresentano un indice di "bontà" del processo comunicativo. Tra queste grandezze possiamo citare il *rapporto segnale rumore* SNR (§ 11) e la *probabilità di errore*  $P_e$  (§ 8.4, tab. 14.1), relative rispettivamente alle trasmissioni analogiche e numeriche; il *ritardo medio* (§ 17.4), rilevante nel caso di trasmissioni a pacchetto; il *tempo di fuori servizio* (§ 16.3.3.4), qualificante della affidabilità dei sottosistemi di comunicazione.

**Rete** Dal punto di vista della *rete di comunicazione*, la consegna del messaggio informativo alla destinazione deve tener conto degli aspetti descritti come:

**Commutazione** La rete è costituita da un insieme di *nodi di commutazione*, interconnessi da collegamenti che vengono usati in modalità condivisa da molte comunicazioni contemporanee, e che sono *attraversati* dai messaggi in transito e da *smistare* verso la porta di uscita corretta. §§ 17.5.2.2, 19.8

**Instradamento** La determinazione del percorso dei messaggi nella rete, scelto tra i possibili percorsi alternativi che collegano la sorgente con la destinazione, prende il nome di *instradamento*. §§ 19.7, 18.1.3

**Segnalazione** Il coordinamento tra i nodi della rete avviene mediante lo scambio tra gli stessi di informazioni aggiuntive dette *di segnalazione*, che costituiscono un vero e proprio processo di comunicazione parallelo a quello prettamente informativo. § 19.3.2

**Protocollo** Lo scambio dei messaggi tra le coppie di nodi della rete, od anche tra i nodi ed un organo di controllo centrale, avviene utilizzando particolari linguaggi, detti *protocolli* di segnalazione. Capp. 18, 19, § 8.6

**Mobilità** Se i nodi della rete modificano la propria posizione nel tempo, o gli utenti desiderano usufruire degli stessi servizi indipendentemente dal punto di accesso alla rete, occorre individuare soluzioni specifiche, come ad esempio la registrazione ed il mantenimento dei propri dati presso una *unità di controllo*, e l'adozione di procedure di *autenticazione* che permettano di certificare l'identità degli utenti.

**Elaborazione terminale** Questa categoria comprende tutti gli aspetti legati alle trasformazioni operate sull'informazione ai due estremi del collegamento<sup>14</sup>. Tra questi è possibile distinguere la...

**Codifica di sorgente** Le trasformazioni sul segnale che permettono di impegnare la minor quantità di risorse trasmissive (ad esempio, banda), possono prevedere operazioni che tengono conto delle specifiche *caratteristiche del segnale* da trattare, come nel caso della codifica vocale, o della codifica video. § 13.1, Cap. 21

**Codifica di canale** In questo caso le trasformazioni necessarie a combattere gli errori nelle trasmissioni numeriche possono tener conto delle caratteristiche statistiche *dei disturbi*. § 13.2

**Modulazione e formattazione** Le operazioni necessarie alla trasmissione di un segnale radio, o di un segnale numerico, possono tener conto delle caratteristiche del *canale trasmissivo*, e adottare soluzioni che possono facilitare la realizzazione delle due funzioni precedenti. § 10, cap. 14, § 17.5.1

**Trasporto** Dal punto di vista del *trasporto* dell'informazione, sono rilevanti gli aspetti di:

**Multiplicazione** Si tratta di raggruppare tra loro le singole comunicazioni in transito per un tratto in comune; con il risultato di migliorare sensibilmente l'efficienza della rete. Infatti, mediante la moltiplicazione si può garantire un elevato tasso di utilizzo delle risorse, che non giacciono mai inutilizzate proprio grazie al riuso continuo e multiplo delle stesse per parecchie comunicazioni in transito. Tecniche di moltiplicazione comunemente adottate sono la *multiplicazione ...*

- di *frequenza*, in cui le diverse comunicazioni occupano differenti regioni di frequenza, in uno stesso collegamento tra (ad esempio) due antenne (§§ 19.2.1, 9.1.1);
- di *tempo*, in cui lo stesso collegamento è utilizzato per più comunicazioni contemporanee in base ad uno schema di alternanza temporale (§ 19.2.1);
- di *codice*, in cui diverse comunicazioni avvengono simultaneamente nella medesima banda di frequenza, adottando una particolare codifica che ne permette la separazione dal lato ricevente (§ 14.9);
- di *lunghezza d'onda*, che si realizza quando una unica fibra ottica è alimentata da una sorgente luminosa che adotta una  $\lambda$  diversa per ogni flusso numerico trasportato (§ 16.4.3.2).

**Controllo** Riguarda la corretta consegna del messaggio al destinatario, e coinvolge la gestione degli errori di trasmissione (§ 8.6), le problematiche di riassettaggio delle comunicazioni inoltrate in forma di pacchetti distinti, la gestione della segnalazione per ciò che riguarda l'adattamento dei protocolli di instradamento alle condizioni di carico della rete, ed il coordinamento delle sorgenti che desiderano trasmettere utilizzando il medesimo mezzo trasmissivo.

Si conclude qui la parte introduttiva di questo capitolo. Passiamo dunque ad approfondire gli oggetti dello studio che ci attende.

---

<sup>14</sup>L'importanza e la specificità di tali trasformazioni assume un rilievo sempre maggiore con l'evoluzione (in termini di miniaturizzazione e potenza di calcolo) dei dispositivi di elaborazione, in special modo per ciò che riguarda le trasmissioni numeriche.

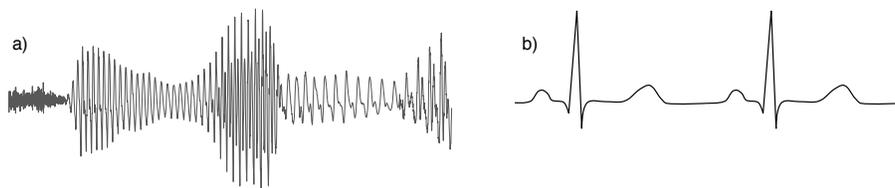


Figura 1.3: a) - 300 msec di segnale vocale; b) - due cicli di segnale elettrocardiografico

## 1.5 Segnali e sistemi

Queste due categorie concettuali sono alla base di molte discipline dell'ingegneria dell'informazione, e quelle più specialistiche possono tendere a darle per scontate. Cercando di mantenere la descrizione concisa, proviamo a fare un po' di chiarezza.

### 1.5.1 Caratteristiche dei segnali

Per quanto riguarda i segnali, valgono le categorie riportate al § 1.2, ed in particolare qualora il segnale sia di natura numerica, anche il sistema che lo produce o lo accetta in genere lo è. Volendo procedere per gradi, iniziamo a discutere dei segnali analogici  $s(t)$ , che essendo in pratica nient'altro che funzioni di una variabile temporale, possono essere caratterizzati utilizzando gli strumenti noti dai corsi di analisi matematica, almeno nel caso in cui se ne conosca l'espressione analitica. D'altra parte i segnali che tratteremo, proprio per la loro natura di trasportare informazione, spesso non sono noti a priori<sup>15</sup> ma definiti solo in termini statistici: vedi ad esempio la fig. 1.3 che riporta un frammento di segnale vocale, ed un tracciato ECG. In tal caso i calcoli che stiamo per illustrare individuano condizioni che possono essere verificate solo per via numerica<sup>16</sup>, a partire da *esempi* dei segnali stessi.

Al § 1.2.1 sono stati definiti *segnali analogici* anche le immagini ed le funzioni a valore complesso, ma per ora restringiamo l'attenzione al caso di segnali di *variabile reale* ed a *valori reali*, ovvero di semplici *funzioni del tempo*  $s(t)$ . Inoltre, ci aspettiamo che in generale i segnali di interesse NON POSSANO avere asintoti verticali, dato che i circuiti elettrici operano su tensioni e correnti di valore finito; per lo stesso motivo, *escludiamo* i segnali che divergono *illimitati* per  $t \rightarrow \infty$ .

**Valore medio** Se osserviamo un segnale per un intervallo di tempo finito  $\tau$ , per convenzione centrato attorno a  $t = 0$ , definiamo *media temporale* su  $\tau$  il valore  $\bar{s}_\tau = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) dt$  e, facendo tendere  $\tau$  ad infinito, si ottiene il suo *valore medio* come

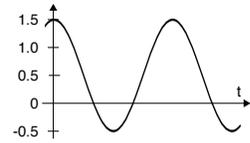
$$\bar{s} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t) dt$$

che si esprime nella stessa unità di misura di  $s(t)$ , che nella somma integrale si moltiplica per un tempo, per il quale viene nuovamente diviso attraverso il fattore  $1/\tau$ .

<sup>15</sup>Discuteremo al cap. 13 come l'informazione consista nella *sorpresa* di conoscere qualcosa che prima era ignoto, e dunque un segnale perfettamente noto non trasporta informazione.

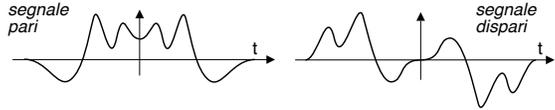
<sup>16</sup>Ad esempio, il calcolo dell'integrale di una funzione viene svolto *per via numerica* quando è ottenuto senza conoscere la primitiva, per mezzo di un programma che ne calcola l'approssimazione secondo la definizione di Riemann [https://it.wikipedia.org/wiki/Integrale\\_di\\_Riemann](https://it.wikipedia.org/wiki/Integrale_di_Riemann), vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Integrazione\\_numerica](https://it.wikipedia.org/wiki/Integrazione_numerica) e pagine collegate.

Il valore medio  $\bar{s}$  è detto anche *componente continua*, ed un qualunque segnale può essere decomposto come  $s(t) = s_0(t) + \bar{s}$  in cui  $s_0(t)$  è a media nulla. Se  $s(t)$  è un segnale *costante* pari ad  $A$ , allora  $\bar{s} = A$  ed il termine  $s_0(t)$  è nullo, mentre se  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$  il segnale ha valor medio nullo. In figura, una cosinusoide a valor medio 0.5.



**Simmetria pari e dispari** Ogni segnale può essere decomposto nella somma dei due termini

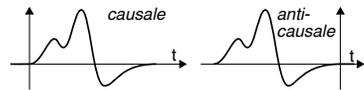
$$s(t) = s_p(t) + s_d(t)$$



in cui  $s_p(t)$  e  $s_d(t)$  individuano rispettivamente la sua parte *pari* e *dispari* rispetto all'istante  $t = 0$ , potendo scrivere  $s_p(t) = s_p(-t)$  e  $s_d(t) = -s_d(-t)$ <sup>17</sup>.

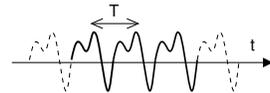
Un segnale può anche essere solamente pari, o solamente dispari, come rappresentato in figura; notiamo che necessariamente un segnale dispari ha valor medio nullo.

**Causalità** Individua la condizione per cui  $s(t) = 0$  per  $t < 0$ , mentre nel caso opposto ( $s(t) = 0$  per  $t > 0$ ) il segnale è detto *anticausale*. Qualora risulti  $s(t) \neq 0$  sia per  $t < 0$  che per  $t > 0$  il segnale è detto *noncausale*.



**Segnale periodico** In questo caso il segnale si ripete uguale a se stesso ciclicamente, ed il minimo intervallo temporale  $T$  che intercorre tra due copie prende il nome di *periodo*, potendo scrivere

$$s(t) = s(t + T)$$



Il valor medio di un segnale periodico può essere calcolato come  $\bar{s} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$ , od anche  $\bar{s} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} s(t) dt$  per qualsiasi scelta di  $a$ . Al cap. 2.2 vedremo come un segnale periodico possa essere rappresentato mediante la somma pesata di infiniti termini del tipo  $\cos(2\pi \frac{n}{T}t + \varphi_n)$  con  $n = 0, 1, \dots, \infty$ . Un segnale *non periodico* è detto *aperiodico*.

Non resta ora che distinguere tra i segnali che si mantengono diversi da zero per  $t \rightarrow \infty$  (<sup>18</sup>) da quelli che invece tendono a zero. Iniziamo dai primi.

**Segnale di potenza** In fisica la *potenza* (espressa in *Watt* ovvero *joule/sec*) è definita come lavoro per unità di tempo, la *tensione* (o potenziale elettrico) come lavoro per unità di carica, e la *corrente* come carica per unità di tempo<sup>19</sup>. Un circuito sottoposto ad una tensione  $v(t)$  ed in cui

<sup>17</sup>Le componenti pari e dispari di un segnale si ottengono scrivendo

$$s(t) = \frac{1}{2} (s(t) + s(-t)) + \frac{1}{2} (s(-t) - s(t)) = \frac{1}{2} (s(t) + s(-t)) + \frac{1}{2} (s(t) - s(-t))$$

risulta allora  $s_p(t) = \frac{1}{2} (s(t) + s(-t))$  e  $s_d(t) = \frac{1}{2} (s(t) - s(-t))$ .

<sup>18</sup>Si tratta di segnali che non si annullano, ma che neanche divergono, ed in questo caso possono rientrare i fenomeni naturali come il rumore del vento o delle onde del mare, ma anche segnali la cui durata eccede l'intervallo effettivo di osservazione, come un battito cardiaco, o perché no, l'audio di un televisore lasciato acceso giorno e notte!

<sup>19</sup>Vedi ad esempio [https://it.wikipedia.org/wiki/Potenza\\_\(fisica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Potenza_(fisica)), [https://it.wikipedia.org/wiki/Potenziale\\_elettrico](https://it.wikipedia.org/wiki/Potenziale_elettrico), [https://it.wikipedia.org/wiki/Corrente\\_elettrica](https://it.wikipedia.org/wiki/Corrente_elettrica), e [https://it.wikipedia.org/wiki/Potenza\\_elettrica](https://it.wikipedia.org/wiki/Potenza_elettrica)

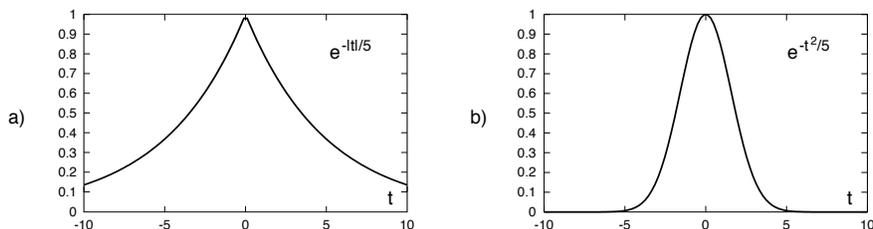
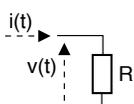


Figura 1.4: Segnale di energia: a) - impulso esponenziale bilatero; b) - impulso gaussiano



scorre una corrente  $i(t)$  assorbe dunque una potenza *istantanea*  $p(t) = v(t) \cdot i(t)$  Watt; se il circuito consiste in un resistore  $R$ , i valori di  $v(t)$  ed  $i(t)$  sono legati dalla legge di Ohm  $i(t) = v(t)/R$  e dunque  $p(t) = v^2(t)/R$ ; scegliendo infine  $R = 1\Omega$  si ottiene  $p(t) = v^2(t)$ .

La dipendenza dal tempo per la potenza  $p(t)$  *scompare* qualora  $v(t)$  sia pari ad una costante  $A$ , ed in tal caso possiamo scrivere che la *potenza*  $\mathcal{P}_v$  del segnale  $v(t) = A$  risulta  $\mathcal{P}_v = A^2$ . Se invece  $v(t)$  varia nel tempo, se ne può valutare la potenza *media* assorbita in un intervallo  $T$  come valore medio  $\bar{\mathcal{P}}_T = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v^2(t) dt$ , e per  $T \rightarrow \infty$  otteniamo la definizione di potenza di un generico segnale  $s(t)$  come

$$\mathcal{P}_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt \quad (1.1)$$

applicabile anche al caso di segnali *complessi* scrivendo  $|s(t)|^2 = s(t) \cdot s^*(t)$  in cui  $s^*(t)$  rappresenta il *coniugato* di  $s(t)$ .

**Esercizio** Calcoliamo la potenza del segnale periodico  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ . In questo caso il valore medio può ottenersi limitando l'integrale ad un solo periodo  $T = 1/f_0$ , e la (1.1) diviene  $\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [A \cos(2\pi f_0 t)]^2 dt = \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} [1 + \cos(4\pi f_0 t)] dt = \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{A^2}{2}$  in cui si è applicata la relazione  $\cos^2 \alpha = 1/2(1 + \cos 2\alpha)$ , e si è sfruttato il fatto che l'intervallo  $T$  di integrazione copre *esattamente* due periodi di  $\cos(4\pi f_0 t)$ , dando luogo ad un valor medio nullo.

**Valore efficace** E' definito come la radice quadrata della potenza  $\mathcal{P}_s$  di un segnale ovvero  $s_{eff} = \sqrt{\mathcal{P}_s}$ , e rappresenta il valore di un segnale *costante* con la stessa potenza di  $s(t)$ ; è noto anche come *valore quadratico medio* o RMS (*root mean square*). Per una sinusoida di ampiezza  $A$  risulta quindi  $s_{eff} = A/\sqrt{2} \simeq 0.707 \cdot A$ .

Se il segnale tende a zero per  $t \rightarrow \infty$ , al crescere di  $T$  il suo integrale  $\int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2$  aumenta *più lentamente* di quanto non faccia  $T$ , e dunque il valore della potenza calcolato mediante la (1.1) risulta nullo, ovvero il segnale *non* è di potenza, ma invece è un...

**Segnale di energia** Riprendiamo la citazione della fisica per cui la potenza è un lavoro per unità di tempo, e ricordiamo che il lavoro è definito come una variazione di energia<sup>20</sup>.

<sup>20</sup> Ad esempio si compie un lavoro quando si solleva un oggetto, aumentando la sua energia potenziale, o gli si imprime una accelerazione, aumentandone l'energia cinetica.

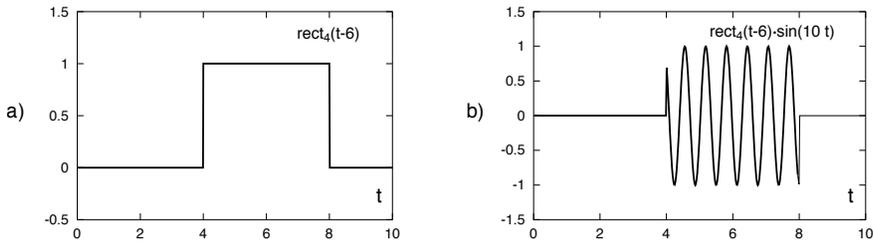


Figura 1.5: Segnale a durata limitata: a) - impulso rettangolare tra 4 ed 8; b) - sinusoide troncata

Definiamo dunque un segnale (reale o complesso)  $s(t)$  di energia  $\mathcal{E}_s$  quando esiste la quantità<sup>21</sup>

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s^*(t) dt \quad (1.2)$$

indicata appunto come energia del segnale: la fig. 1.4 ne riporta un paio di esempi. L'insieme di tutti i possibili segnali di energia costituisce uno *spazio vettoriale* indicato in matematica come spazio  $L^2$ , e gode di particolari proprietà che approfondiremo più avanti<sup>22</sup>.

**Segnale impulsivo** È un segnale che tende a zero più velocemente di  $\frac{1}{t}$ , ovvero per il quale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

È il caso delle funzioni *assolutamente sommabili*, per le quali  $|s(t)|$  tende a zero più velocemente di  $\frac{1}{t}$ , e che dunque sono anche di energia.

**Segnale a durata limitata** Risulta identicamente nullo per  $t$  al di fuori di un intervallo finito  $[t_1, t_2]$ , come esemplificato in fig. 1.5), e dato che per esso la (1.2) dà un risultato finito, è anche di energia.

### Riassumendo

- Un segnale *impulsivo* è di energia;
- Un segnale a *durata limitata* è impulsivo, e di energia;
- Un segnale *periodico* non è di energia, ma di potenza;

Vedi anche la rappresentazione insiemistica di fig. 1.6.

<sup>21</sup>Perché l'integrale (1.2) converga occorre che per  $t \rightarrow \infty$  il segnale  $s(t)$  tenda a zero più velocemente di  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ , e perciò  $|s(t)|^2$  vi tende più in rapidamente di  $\frac{1}{t}$ . In altre parole, un segnale di energia  $s(t)$  è *quadraticamente sommabile*; infatti sappiamo dall'analisi che una funzione è detta *sommabile* (o integrabile) nell'intervallo  $(-\infty, \infty)$  se il suo integrale è finito, ed una condizione sufficiente perché ciò avvenga è che  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot s(t)$  sia un infinitesimo di ordine *superiore* a 1, ovvero che  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot s(t) = 0$ .

<sup>22</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_a\\_quadrato\\_sommabile](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_a_quadrato_sommabile). La  $L$  che dà il nome allo spazio sta per *Lebesgue*, mentre il <sup>2</sup> individua un caso particolare (*di Hilbert*) di spazio  $L^p$  che corrisponde a tutte le funzioni per le quali  $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^p dt$  converge, noto come spazio di *Banach*, per il quale l'integrale costituisce una misura (norma) per i suoi elementi, il che induce una metrica, e quindi una topologia; per approfondimenti [https://en.wikipedia.org/wiki/Lp\\_space](https://en.wikipedia.org/wiki/Lp_space)

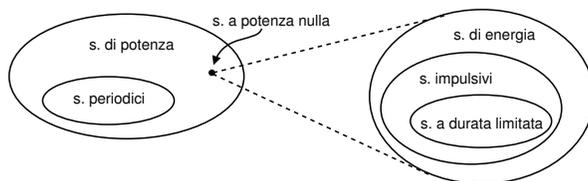


Figura 1.6: Visione insiemistica per le diverse classi di segnali

### 1.5.1.1 Spettro di segnale

Come anticipato al § 1.2.1.1, una caratteristica fondamentale dei segnali è la loro descrizione nei termini del *contenuto spettrale* che compete a ciascuno di essi, ovvero come la potenza (o energia) complessiva sia distribuita su di un insieme di *frequenze*. La frequenza è l'inverso di un tempo, e rappresenta *quanto spesso* avviene una circostanza; i segnali sinusoidali sono gli unici a contenere *una sola* frequenza, pari all'inverso del loro periodo.

**Esempio** Ad una senoide di periodo 50 msec corrisponde una frequenza di  $1/0.05 = 20$  *cicli/secondo* e si esprime come  $\sin(2\pi f_0 t)$  con  $f_0 = 20$  Hertz (Hz).

Un qualunque altro segnale è composto da più di una frequenza, il cui insieme è detto *spettro*<sup>23</sup> *del segnale* (nel dominio della frequenza). Può essere ottenuto mediante gli strumenti forniti dalla *analisi di Fourier* come la corrispondente serie (cap. 2) e trasformata (cap. 3), che associano ad un segnale  $x(t)$  un secondo segnale *complesso*  $X(f)$  che è diverso da zero per tutti i valori di  $f$  presenti in  $x(t)$ . Dato che la stessa analisi può essere svolta anche per la risposta impulsiva  $h(t)$  che caratterizza un sistema lineare e permanente (§ 1.5.4), tale rappresentazione si rivelerà unificante.

**Segnale limitato in banda** Quando un segnale contiene solo frequenze comprese entro un intervallo finito viene detto *limitato in banda* (§ 1.2.1.1); se tale banda è contigua alla frequenza zero viene detto *di banda base*, oppure di banda *traslata* qualora l'intervallo delle frequenze presenti sia concentrato attorno ad una frequenza più elevata detta *portante*. La limitazione in banda è una condizione necessaria affinché un segnale analogico possa essere campionato e quantizzato (cap. 4); d'altra parte, un segnale non può essere contemporaneamente limitato sia in banda che nel tempo.

## 1.5.2 Operazioni sui segnali

Alcune operazioni coinvolgono *un solo* segnale, modificandone l'ampiezza, oppure come risultato di una trasformazione *lineare* dell'argomento, come rappresentato in fig. 1.7.

**Prodotto per una costante** Viene variata l'ampiezza del segnale  $x(t)$  producendo un  $y(t) = a \cdot x(t)$  che ne costituisce una copia *amplificata* ( $|a| > 1$ ), *attenuata* ( $|a| < 1$ ) o *capovolta* ( $a < 0$ ).

**Traslazione temporale** Sostituisce ad un segnale  $x(t)$  un secondo segnale  $y(t)$  che ne rappresenta una copia *anticipata* o *ritardata* di un intervallo  $\tau$ .

- anticipo:  $y(t) = x(t + \tau)$  con  $y(t)$  che si sposta *a sinistra* rispetto ad  $x(t)$ ;
- ritardo:  $y(t) = x(t - \tau)$  con  $y(t)$  che si sposta *a destra* rispetto ad  $x(t)$ ;

<sup>23</sup>La parola spettro deriva dal latino *specĕre* (guardare) e viene utilizzato in molti campi della scienza per indicare la *gamma* dei costituenti di un qualcosa, vedi <https://it.wiktionary.org/wiki/spettro>

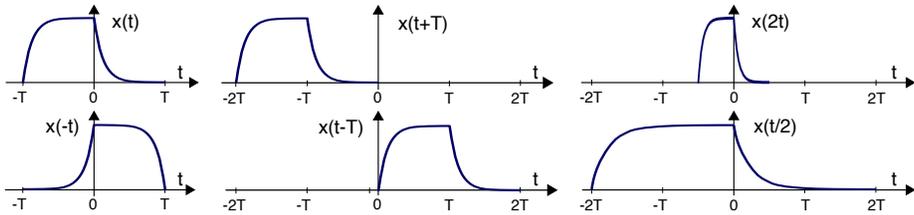


Figura 1.7: Operazioni di ribaltamento, traslazione, scalatura

Per ricordare la concordanza tra il segno della traslazione  $\tau$  e lo spostamento grafico, si pensi che se un treno è *in ritardo* significa che *non è ancora arrivato*, e dunque (il suo arrivo) si è spostato *in avanti* nel tempo, o nel futuro.

**Ribaltamento** Ruota il segnale rispetto all'asse delle ordinate, e si scrive  $y(t) = x(-t)$ .

**Cambio di scala** Comprime od espande il grafico rispetto all'asse dei tempi, ed è espresso come  $y(t) = x(\alpha t)$ . Si ha una *compressione* per  $\alpha > 1$ , ovvero una *espansione* per  $\alpha < 1$ . Infatti se ad es.  $\alpha > 1$ , una piccola variazione per l'argomento di  $y$  corrisponde ad una variazione *più grande* per quello di  $x$ .

Tali operazioni *monadiche* possono essere ovviamente combinate tra loro: in tal caso il risultato complessivo si ottiene applicandole una alla volta, eventualmente modificando l'espressione dell'argomento. Ad esempio, per ottenere il segnale  $s(\alpha t + \beta)$  conviene riscrivere l'argomento come  $\alpha(t + \beta/\alpha)$ , in modo da poter prima anticipare  $s(t)$  della quantità  $\beta/\alpha$ , e quindi alterare la scala dell'asse dei tempi del fattore  $\alpha$ .

### 1.5.2.1 Combinazione di segnali

Due segnali  $x(t)$  ed  $y(t)$  possono essere *sommati* tra loro, dopo un eventuale alterazione di ampiezza, dando luogo ad un nuovo segnale  $z(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t)$  *combinazione lineare* dei segnali di partenza. Potrebbe essere ovvio, ma è meglio dirlo: se la coppia di segnali appartiene ad una medesima classe (di energia, di potenza, di periodo  $T$ ) anche il risultato vi appartiene, e ciò comporta che la classe è dotata della struttura algebrica di spazio vettoriale (§ 2.4).

E' altresì definito anche il *prodotto*  $x(t) \cdot y(t)$  tra segnali, ma in generale il risultato non appartiene più alla classe di partenza: ad esempio il prodotto tra segnali di uguale periodo genera anche frequenze pari alla somma ed alla differenza delle *armoniche* presenti.

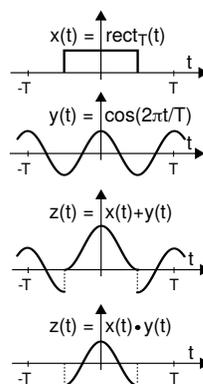
**Grafico dei segnali** Spesso ci si imbatte in espressioni analitiche il cui senso può essere apprezzato solo passando dalla forma scritta a quella grafica, ovvero disegnando il grafico di come la variabile *dipendente* varia in funzione dei valori assunti da quella *indipendente* (tempo  $t$  o frequenza  $f$ ) nell'intervallo di interesse. A questo fine il testo è corredato da innumerevoli grafici, ma lo studente dovrebbe essere in grado di visualizzare in modo autonomo l'andamento delle espressioni che incontra. Un metodo generale per ottenere i grafici di somma e prodotto tra segnali è quello di

- disegnare gli assi cartesiani su di una scala graduata compatibile con i valori da graficare, indicando l'identità della variabile indipendente, e quella della grandezza che si intende graficare;

- disegnare un secondo sistema di assi sotto al primo, allineato e nella stessa scala, su cui disegnare il secondo termine della somma o prodotto;
- eseguire la somma (o prodotto) tra i valori dei due segnali per tutti i valori della variabile indipendente, e riportare il risultato su un terzo grafico, allineato ai primi due.

Per casi più complessi è senz'altro di grande aiuto l'uso di applicazioni software che generano grafici *esatti*. Tra queste citiamo:

- **Gnuplot** <http://www.gnuplot.info/> Orientato a produrre grafici bi- e tri-dimensionali mediante una sintassi molto compatta, è in grado di generare uscite per un numero veramente elevato di dispositivi;
- **Octave** <https://www.gnu.org/software/octave/> Un linguaggio di programmazione completo e ad alto livello, con tipi di dato vettoriale e matriciale, equivalente Open-Source di *Matlab* e le cui funzionalità vengono estese da una vasta libreria di *package*. I grafici prodotti con Octave possono essere manipolati e ruotati in modo interattivo;
- **Geogebra** <https://www.geogebra.org/> Un insieme di applicazioni gratuite che girano oltre che su computer, anche via *javascript* nel browser e su smartphone, ognuna orientata ad uno specifico campo applicativo, compresa la grafica (interattiva) di funzioni tridimensionali, ottenibile senza programmare ma semplicemente scrivendo l'espressione analitica di ciò che si vuol graficare. E' molto attiva anche una community che condivide on-line codice di simulazioni animate;
- **Genius** <https://www.jirka.org/genius.html> Anch'esso pur disponendo di un linguaggio di programmazione, permette di generare grafici direttamente a partire dall'espressione analitica, ma in più rispetto ai precedenti, realizza anche grafici di funzioni complesse di variabile complessa! Sviluppato solamente per sistemi *Gnu/Linux*, è presente nelle *repository* di Debian e derivate.



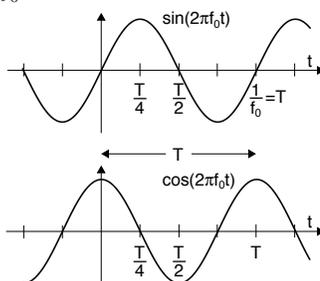
### 1.5.3 Segnali di uso frequente

**Sinusoide** E' un segnale periodico *dispari* con periodo  $T = 1/f_0$  espresso come  $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ , ed in cui è presente l'unica frequenza  $f_0$ . La medesima forma d'onda si ottiene anche ritardando una cosinusoide di un quarto di periodo, dato che

$$\sin(2\pi f_0 t) = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi f_0 \left(t - \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\pi f_0}\right)\right) = \cos\left(2\pi f_0 \left(t - \frac{T}{4}\right)\right)$$

In definitiva, un segnale *di forma* sinusoidale può essere descritto indifferentemente da un seno o da un coseno, con un termine di fase appropriato, legato alla traslazione temporale necessaria ad ottenere la forma d'onda nella posizione richiesta.

Le funzioni matematiche di seno e coseno derivano dalla espressione in coordinate cartesiane della posizione di un punto materiale animato da moto circolare uniforme, ossia che ruota su di un cerchio unitario<sup>24</sup> con velocità angolare  $\omega_0 = 2\pi f_0$  *radianzi/secondo*.

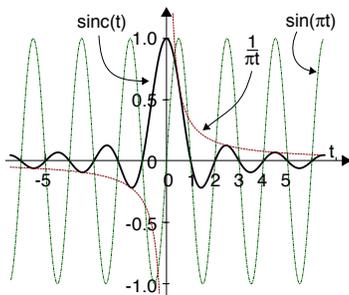


<sup>24</sup>Per una simulazione animata, visita <https://www.geogebra.org/m/Enf5AEbT>

**Seno cardinale** Il nome deriva dall'uso che ne viene fatto nell'ambito del teorema del campionamento (§ 4.1), ed è definito come

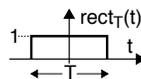
$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Si tratta dunque di un modo particolare di scrivere il rapporto  $\frac{\sin(x)}{x}$  ben noto nei corsi di analisi per essere utilizzato come esempio di applicazione del *teorema de l'Hôpital*, che ne determina il valore pari ad 1 per  $t \rightarrow 0$ . La figura a lato ne mostra l'andamento, assieme a quello di  $\sin(\pi t)$  e di  $\frac{1}{\pi t}$ : notiamo che l'aver espresso l'argomento del segnale come  $\pi t$  determina che esso *passa per zero* in corrispondenza dei valori *interi* dell'argomento, cioè per  $t = 1, 2, \dots, n$  con  $n$  intero. La sua importanza in teoria dei segnali discende dal fatto che come vedremo, la sua trasformata di Fourier è un rettangolo (e viceversa).



**Rettangolo** E' un segnale di durata finita che vale *uno* nel suo intervallo di definizione e *zero* al di fuori, e viene espresso nella forma

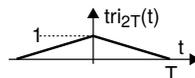
$$\text{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{con } |t| < T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



in cui il pedice  $T$  indica l'ampiezza dell'intervallo per la variabile indipendente, notazione adottata nel testo per segnali a durata limitata. Il rettangolo viene molto spesso utilizzato per idealizzare delle discontinuità di prima specie, ed in tal senso è il risultato di due *gradini contrapposti*  $\text{rect}_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$ ; è inoltre utilizzato moltiplicato ad altri segnali, in modo da renderli a durata limitata.

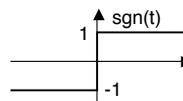
**Triangolo** Ha funzioni simili al precedente, ma la sua ampiezza varia linearmente da zero ad un massimo (in zero), per poi diminuire di nuovo linearmente. E' definito come

$$\text{tri}_{2T}(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T & \text{con } |t| < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



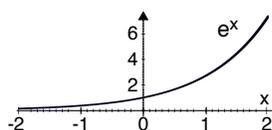
**Segno** E' definito come

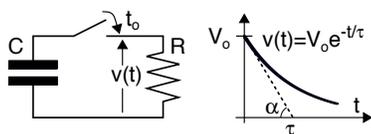
$$\text{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}$$



ovvero in modo equivalente  $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{con } t > 0 \\ -1 & \text{con } t < 0 \end{cases}$ , e viene spesso usato anziché come funzione di una variabile indipendente  $t$ , applicato al valore di un secondo segnale: ad esempio  $\text{sgn}(\cos(t))$  produce come risultato un'onda quadra, ed in tal caso viene detto *squadratore* e rappresenta un amplificatore che lavora in regime di saturazione.

**Esponenziale** La funzione reale di variabile reale  $e^x$  ha un ruolo del tutto particolare nell'analisi per il fatto di essere la derivata di stessa, e dunque soluzione di equazioni differenziali del tipo  $\frac{df(x)}{dx} = kf(x)$ : ciò comporta ad esempio che rappresenti l'andamento della tensione  $v(t)$  ai capi di un condensatore di capacità  $C$  che si scarica a partire da  $v(t_0) = V_0$  attraverso una resistenza  $R$ .





ponendo  $t_0 = 0$  si ottiene infatti  $v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$  in cui  $\tau = RC$  è la *costante di tempo* del circuito, che deve il suo nome al fatto che per disegnare  $v(t)$  si osserva come la *retta tangente* a  $v(t)$  in  $t = 0$  di espressione  $y(t) = mt + V_0$  abbia un *coefficiente angolare*  $m$  di valore  $-\frac{V_0}{\tau}$ , e pertanto<sup>25</sup> colleghi il punto  $v(0) = V_0$  con l'ascissa  $t = \tau$ , e quindi è possibile disegnare l'esponenziale tangente a tale retta, come mostrato in figura.

**Esponenziale complesso** I valori di  $e^x$  possono essere ottenuti mediante definizioni alternative<sup>26</sup>, tutte valide anche per *argomento complesso*  $z$ , rendendo l'esponenziale  $\underline{w} = e^z$  una *mappa conforme* che ad ogni numero complesso (§ 2.1.1)  $z = x + jy$  ne fa corrispondere un secondo  $\underline{w} = u + jv$ <sup>27</sup>. In particolare, l'uguaglianza  $e^{z+\underline{s}} = e^z \cdot e^{\underline{s}}$  si mantiene valida anche per  $z$  ed  $\underline{s}$  numeri complessi, e la stessa permette anche di scrivere  $\underline{w} = e^z = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy}$ : dato che  $x$  è la parte reale di  $z$ , osserviamo che se la parte immaginaria  $y$  dell'argomento è nulla, ritroviamo la definizione di esponenziale di variabile *reale*, di cui l'esponenziale complesso costituisce il *prolungamento analitico*.

Ma che andamento ha  $\underline{w} = e^z$  al variare di  $z$  nel piano complesso? Per farsene una idea, l'unica possibilità che abbiamo è quella di rappresentare separatamente le superfici descritte dalla parte reale  $u(x, y)$  ed immaginaria  $v(x, y)$  di  $\underline{w} = u + jv = e^x \cdot e^{jy}$ , oppure le superfici descritte da modulo  $|\underline{w}|$  e fase  $\arg\{\underline{w}\}$ : esattamente quanto mostrato in fig. 1.8.

Come si nota, le parti reale ed immaginaria  $u$  e  $v$  (a sinistra in figura) hanno un andamento del tutto simile tra loro, proporzionale a quello di  $e^x$  (o  $e^{-x}$ ) reale se  $y$  è costante, e che *oscilla* sinusoidalmente per  $x$  costante. L'unica differenza tra le due è che  $u$  oscilla come un coseno (è pari rispetto ad  $x$ ) mentre  $v$  segue un seno (dispari), e dunque si annulla per  $y = 0$ : infatti se  $z$  è solamente reale si ottiene  $e^z = e^x$  e ritroviamo l'esponenziale reale. D'altra parte, se  $z$  è solamente immaginario si ottiene  $e^{jy} = \cos y + j \sin y$ , nota come *formula di Eulero* (§ 2.1.2).

Per quanto riguarda la parte destra di fig. 1.8, osserviamo che il modulo  $|\underline{w}| = |e^x \cdot e^{jy}| = e^x \cdot \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x$  segue esattamente l'andamento dell'esponenziale reale per qualunque  $y$ , mentre la fase  $\arctan(v/u) = \arctan\left(\frac{e^x \sin y}{e^x \cos y}\right) = \arctan(\tan(y)) = y$  non dipende da  $x$ , e replica direttamente il valore della parte immaginaria  $y$  dell'argomento complesso  $z$ .

Pertanto la superficie che descrive la fase di  $\underline{w}$  è un piano, ma *rientra* dal valore  $-\pi = -3.14\dots$  ogni volta che supera  $\pi$ , essendo un angolo pari a  $\pi + \alpha$  indistinguibile da quello  $-\pi + \alpha$ . In definitiva, l'esponenziale complesso  $\underline{w} = e^z$  risulta periodico con periodo  $2\pi$  nella componente immaginaria  $y$  dell'argomento  $z$ .

Come mai questa digressione sull'esponenziale complesso? Anche se l'analisi di Fourier produce funzioni complesse di *variabile reale*, essa si basa sull'uso di esponenziali complessi

<sup>25</sup>Il coefficiente angolare  $m$  è pari alla derivata di  $v(t)$  calcolata per  $t = 0$ , dunque  $v'(t) = \frac{d}{dx} V_0 e^{-t/\tau} = -\frac{V_0}{\tau} e^{-t/\tau}$  che fornisce appunto  $v'(t)|_{t=0} = -\frac{V_0}{\tau}$ . Inoltre come noto  $m = \tan \alpha$  dove  $\alpha$  è l'angolo tra la retta tangente e l'asse delle ascisse come mostrato in figura, ma a sua volta  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{V_0}{\tau}$ .

<sup>26</sup>Le due più note sono la serie di potenze (di Maclaurin)  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ed il limite  $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ , entrambe convergenti per ogni  $x$  reale o complesso.

<sup>27</sup>Una mappa conforme è una trasformazione che preserva gli angoli ma non la forma degli oggetti (in questo caso delle curve nel piano complesso); tale proprietà deriva dall'essere la serie di potenze di  $e^z$  uniformemente convergente su ogni sottoinsieme limitato del campo complesso, e pertanto differenziabile ovunque con derivata non nulla, rendendo l'esponenziale complesso una *funzione analitica*, od *olomorfa*. Per approfondimenti: [https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_esponenziale](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_esponenziale), [https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_olomorfa](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_olomorfa), [https://it.wikipedia.org/wiki/Mappa\\_conforme](https://it.wikipedia.org/wiki/Mappa_conforme), [http://people.unipmn.it/catenacc/mec/compl\\_geometr\\_complessa.pdf](http://people.unipmn.it/catenacc/mec/compl_geometr_complessa.pdf)

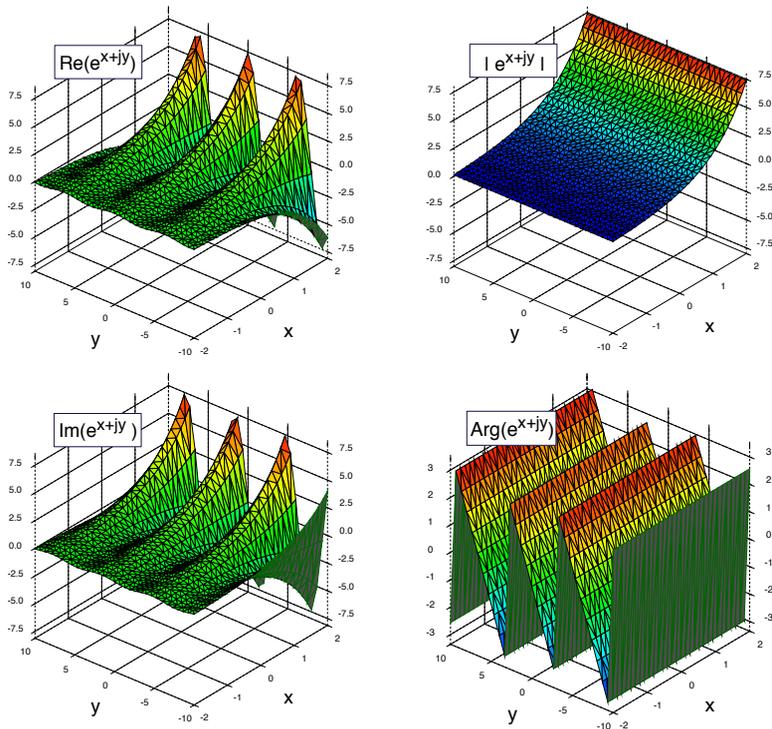


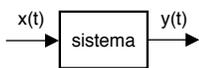
Figura 1.8: Superfici corrispondenti alle componenti dell'esponenziale complesso  $u + jv = e^{x+jy}$ . A sinistra le parti reale  $u$  ed immaginaria  $v$ , a destra il corrispondente modulo  $\sqrt{u^2 + v^2}$  e fase  $\arctan(v/u)$

con argomento puramente immaginario. Si è dunque ritenuto utile sul piano didattico tentare di fornire per questi una visione più ampia, illustrandone il comportamento per argomento complesso.

Affrontiamo ora la caratterizzazione degli oggetti che sono *attraversati* dai segnali.

### 1.5.4 Caratteristiche dei sistemi

In termini generali, un *sistema* è un dispositivo che opera su uno o più segnali di ingresso, od *eccitazione*, e produce uno o più segnali di uscita, o *risposta*. Il sistema può essere di natura elettrica, circuitale od elettronica, ma nulla impedisce che sia costituito da componenti meccaniche, pneumatiche, termiche, o di altra natura fisica, ed in generale i segnali di ingresso ed uscita saranno della stessa natura, anche se più spesso sono convertiti in segnali elettrici mediante appositi trasduttori e/o sensori. La relazione tra le grandezze di ingresso e quelle di uscita possono essere di tipo algebrico, o descritte da equazioni differenziali, ed è spesso rappresentata mediante un dominio trasformato (approfondiremo nel testo cosa ciò significa). I sistemi per telecomunicazioni rientrano in generale nella categoria dei *filtri*, ovvero sono lineari, permanenti, causali e stabili, terminologia che ora approfondiamo. La figura a lato mostra



la rappresentazione di un sistema mediante uno *schema simbolico* che semplicemente individua i segnali di ingresso e di uscita, senza porre attenzione alla reale natura del sistema stesso.

Nella breve introduzione che segue descriviamo un sistema come una generica *trasformazione*  $\mathcal{T}[\cdot]$ , tale che ad ogni segnale di ingresso  $x(t)$  corrisponde una uscita  $y(t)$ , ovvero  $\mathcal{T}[x(t)] = y(t)$ . Procediamo quindi a porre dei *paletti* concettuali entro cui classificare il tipo di sistema.

**Sistema lineare e permanente** Un sistema è detto *lineare* se, in presenza di una combinazione lineare di ingressi, l'uscita è la combinazione lineare delle uscite, detta anche *legge di sovrapposizione degli effetti*, ovvero:

$$\mathcal{T}\left[\sum_i a_i x_i(t)\right] = \sum_i a_i \mathcal{T}[x_i(t)] \quad (1.3)$$

Tale condizione implica che il sistema *sia a riposo* prima dell'applicazione dell'ingresso, perché altrimenti la presenza di uno *stato interno* diverso da zero ne impedirebbe la linearità. Un sistema è *permanente* (o *stazionario*) se la risposta ad un ingresso traslato nel tempo è la traslazione temporale dell'uscita che si avrebbe per lo stesso ingresso non traslato, ovvero

$$\text{se } \mathcal{T}[x(t)] = y(t) \quad \text{allora } \mathcal{T}[x(t \pm \tau)] = y(t \pm \tau)$$

Nella letteratura anglosassone un tale sistema è indicato come LTI, acronimo di *Linear Time Invariant*. Nel caso contrario, il sistema è detto tempo-variante, non stazionario, o non permanente.

**Filtro** Al § 3.4.2 scopriremo che per un sistema lineare e permanente il legame  $\mathcal{T}[x(t)] = y(t)$  tra le coppie di segnali di ingresso e di uscita è espresso dall'integrale di *convoluzione*

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

in cui la *risposta impulsiva*  $h(t)$  caratterizza completamente il sistema nei termini dell'uscita che corrisponde ad un ingresso impulsivo  $x(t) = \delta(t)$ . Alla convoluzione si associa il concetto di *filtraggio* del segnale, che verifichiamo essere un operatore *lineare* in virtù della distributività dell'integrale, e *permanente* in quanto  $h(t)$  dipende solo dal tempo trascorso dalla applicazione del segnale<sup>28</sup>.

**Memoria** Notiamo che un sistema descritto da una risposta impulsiva  $h(t)$  con estensione temporale non nulla è detto *con memoria*, in quanto i singoli valori di uscita dipendono da tutti i valori di ingresso *pescati* dalla risposta impulsiva, vedi § 3.4.3.

**Realizzabilità ideale** Un sistema è detto *idealmente realizzabile* se  $h(t)$  è *reale*, nel senso che può essere realizzato un *vero* dispositivo con quella  $h(t)$ .

<sup>28</sup>In realtà nulla vieta ad un filtro di modificare la propria risposta impulsiva nel tempo, ma in tal caso in uscita compaiono componenti frequenziali non presenti in ingresso, e viene dunque persa la linearità.

**Realizzabilità fisica** Questa proprietà viene anche indicata come *causalità*, poiché descrive l'impossibilità di osservare una uscita prima di aver applicato un qualunque ingresso. Una definizione alternativa asserisce che i valori di uscita  $y(t)$  ad un istante  $t = t_0$  non possono dipendere da valori di ingresso  $x(t)$  per istanti futuri  $t > t_0$ . Ciò è automaticamente verificato se  $h(t) = 0$  con  $t < 0$ , ovvero se la risposta impulsiva è causale. Osserveremo (nota 28 a pag. 208) come sistemi realizzabili idealmente *ma non* fisicamente possano essere approssimati da sistemi realizzabili, accettando *un ritardo* dell'uscita.

**Stabilità** E' definita come la proprietà di fornire uscite di ampiezza limitata per segnali di ingresso limitati, ed equivale alla condizione  $\int |h(t)| dt < \infty$ , ovvero che  $h(t)$  sia un segnale *impulsivo*. Una tale circostanza garantisce l'esistenza della trasformata di Fourier di  $h(t)$ , detta *risposta in frequenza*  $H(f)$ , e definita per  $-\infty < f < \infty$ .

**Risposta in frequenza** Se un sistema, oltre che stabile, è anche idealmente realizzabile (cioè  $h(t)$  è reale), allora per la risposta in frequenza sussiste la condizione di simmetria coniugata  $H(f) = H^*(-f)$ , e dunque è sufficiente conoscere la parte a frequenze positive indicata con  $H^+(f)$ , dato che quella a frequenze negative è ottenibile mediante una operazione di coniugazione. Questo fatto permette di misurare modulo e fase di  $H(f) = M(f)e^{j\varphi(f)}$ , che prende il nome di *risposta in frequenza*, utilizzando come ingresso una funzione sinusoidale  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$  con ampiezza  $A$  e fase  $\theta$  note, come illustrato a pag. 65.

**Non linearità** Corrisponde ad un legame ingresso-uscita *senza memoria*<sup>29</sup> del tipo  $y(t) = g(x(t))$ , in cui  $g(\cdot)$  è una generica funzione *non* lineare<sup>30</sup>. Ad esempio, un operatore basato sulla elevazione a potenza del segnale di ingresso è *non lineare*. Come approfondiremo al § 7.3, una delle più evidenti conseguenze della non linearità è l'insorgenza in uscita di contenuti frequenziali assenti in ingresso.

**Spazio di stato** Alcune discipline come ad es. i controlli automatici devono tener conto di fenomeni di instabilità, e del fatto che i sistemi su cui operano possono trovarsi in particolari condizioni iniziali; a tal fine ricorrono ad una rappresentazione nota come *spazio di stato* in cui si tiene esplicitamente conto della evoluzione dello stato interno del sistema. Dato che i sistemi di interesse per le telecomunicazioni si assumono privi di un particolare stato interno precedente l'applicazione di un segnale al loro ingresso, non approfondiremo un tale approccio.

<sup>29</sup>Un operatore si dice *senza memoria* quando ogni valore dell'uscita dipende da un unico valore di ingresso.

<sup>30</sup>Una funzione  $y(x)$  è lineare quando il suo sviluppo in serie di potenze si arresta al primo ordine, ed è quindi esprimibile in forma  $y = ax + b$ , che è l'equazione di una retta.

**Parte I**

**Teoria dei segnali**



## Prefazione alla prima parte

**C**HE lo *smartphone* sia uno dei massimi emblemi dei nostri tempi è indubbio, ed il suo funzionamento può dirsi un equilibrato *mix* di elettronica, informatica e telecomunicazioni. Un tratto comune a queste discipline è la loro dipendenza dai dati, o segnali, attraverso i quali viene rappresentata l'informazione, in modo da poterla trasmettere anche a distanza. Da sempre la *teoria dei segnali* riveste un ruolo cardine nelle discipline scientifiche, ed in questa parte ne affrontiamo lo studio, seguendo un ordine degli argomenti piuttosto classico, ma che include anche approfondimenti sulla trasmissione numerica, la modulazione e la teoria dell'informazione, includendo richiami di probabilità, e rilanci alla parte successiva, relativa alla trasmissione.

Nei capitoli 2 e 3 si affronta l'*analisi di Fourier*, prima per segnali periodici e quindi di energia, ed oltre alle sue proprietà, se ne approfondisce anche l'aspetto geometrico ed energetico-topologico, introducendo lo *spazio dei segnali* come modello analitico di una qualunque trasformazione o sistema con memoria. Dopo aver introdotto il *delta di Dirac*  $\delta(t)$  si elabora il concetto di risposta impulsiva e convoluzione, subito messa in relazione con le proprietà di prodotto nel tempo, finestrazione, ed il duale prodotto in frequenza. Infine, viene sfruttata la rappresentazione dei segnali periodici come convoluzione di un periodo per un treno di impulsi, per introdurre il concetto di *serie di Poisson*.

Il cap. 4 è dedicato al passaggio cruciale dal mondo analogico a quello digitale, reso possibile dal *teorema del campionamento*, per il quale sono illustrate condizioni e procedure necessarie ad evitare l'insorgenza di *aliasing*, ed accennate le soluzioni circuitali alla sua implementazione. Si passa quindi a discutere della necessità di *quantizzare* i campioni di segnale, altrimenti a precisione infinita, ed il criterio con cui valutare approssimativamente l'entità dell'errore di quantizzazione. Infine, si evidenzia come le operazioni sui segnali possano essere condotte operando esclusivamente con tecniche numeriche, accennando quindi alle possibilità che a quel punto si aprono, incluso poter sostituire un demodulatore con un sottocampionamento.

Il capitolo 5 rappresenta una sorta di parentesi scientifico-letteraria, essendovi riassunti gli assiomi ed i teoremi del *calcolo delle probabilità*, richiamando i concetti di *variabile aleatoria*, *densità di probabilità* e *momenti*, che vengono immediatamente applicati ai *processi aleatori*, per i quali sono definite le proprietà di *stazionarietà* ed *ergodicità*. Dopo aver discusso di trasformazione di v.a. e della gaussiana multivariata, il capitolo termina con dei cenni di *statistica*, definendo la *verifica di ipotesi*, la *verosimiglianza* e la *stima* di parametro; a cui in questa edizione si aggiungono la *stima di intervallo*, il test  $\chi^2$  e la *stima di forma d'onda*.

Siamo ora culturalmente attrezzati per affrontare i concetti di *correlazione* di v.a., di segnali deterministici, e di processi stazionari, come illustrato al cap. 6, che prosegue poi nel definire la

stima spettrale basata su *periodogramma*, e quella basata sulla autocorrelazione, come consentito dal *teorema di Wiener*. Sono quindi caratterizzati gli effetti del filtraggio, sia in termini di *trasferimento energetico* alle varie frequenze, sia per quanto riguarda le caratteristiche statistiche del segnale in uscita. Dopo aver approfondito gli effetti di somma e prodotto tra segnali e tra processi, è il turno dei *filtri trasversali e ricorsivi*, dal punto di vista dell'analisi, della sintesi, dell'approssimazione e della risposta di fase, seguiti da una panoramica di semplici applicazioni, passando quindi ad una breve introduzione alla relativa controparte analogica. Chiude il capitolo la trattazione del *filtro adattato* che giunge fino alla *segnalazione ortogonale*, mentre in appendice sono approfonditi i *filtri numerici*, la loro sintesi, e le relazioni che intercorrono tra piano  $s$  e piano  $z$ .

Nel cap. 7 viene introdotto il concetto di *canale perfetto*, si analizzano i peggioramenti introdotti sui segnali da parte dei dispositivi lineari e non lineari, vengono introdotte le misure in *decibel*, e si affronta la categorizzazione dei disturbi additivi, come in particolare il *rumore termico*.

Il capitolo 8 affronta la *trasmissione dati in banda base*, definendo il *segnale dati* come un'onda PAM di cui valutiamo la densità spettrale, ed individuiamo le *condizioni di Nyquist* per l'assenza di ICI. Si passa quindi a determinare la *probabilità di errore* sul simbolo e sul bit per una trasmissione multilivello a coseno rialzato, ed a descrivere le modalità per attuare il controllo di errore, come FEC e codifica di canale, ovvero ARQ e protocolli a finestra. Il capitolo termina affrontando l'argomento della *acquisizione della temporizzazione*, e quello del *ricevitore ottimo*, che suddivide l'impulso a coseno rialzato tra trasmettitore e ricevitore.

I successivi quattro capitoli dal 9 al 11 sono dedicati alla caratterizzazione, generazione e ricezione dei *segnali modulati o passa-banda*, gli unici idonei a trasportare informazione su di un canale radio. Dopo aver arricchito l'arsenale di strumenti analitici con i concetti di *involuppo complesso*, *filtro di Hilbert* e *componenti analogiche di bassa frequenza*, si giunge ad individuare l'espressione della *densità spettrale* per processi stazionari ergodici, per il relativo involuppo complesso e per le sue componenti. Il cap. 10 passa quindi a descrivere le varie tecniche di *modulazione di ampiezza*, assieme agli altrettanto vari modi di effettuarne la *demodulazione*; dopodiché sono affrontate le *modulazioni di fase e di frequenza*, mostrando come nel secondo caso l'occupazione di banda possa essere variata entro ampi margini, mentre invece l'involuppo di ampiezza si mantiene costante. Mentre nel cap. 12 si analizzano le conseguenze del *passaggio* dei segnali modulati attraverso i sistemi fisici, e viene definito il concetto di *segnale a banda stretta*, al cap. 11 si investiga su quanto il processo di demodulazione possa o meno alterare la qualità di un segnale ricevuto attraverso un canale rumoroso e caratterizzato dal relativo rapporto segnale-rumore, permettendo di approfondire come il *compromesso banda-potenza* sia immediatamente applicabile al caso della modulazione di frequenza.

L'ultimo argomento di questa prima parte riguarda approfondimenti spesso assenti in un testo introduttivo, ma pure fundamentalmente legati alla natura dei segnali. Al cap. 13 si parla dunque di *teoria dell'informazione*, che permette di discernere quanta parte di un messaggio trasporta vera informazione, quanta parte sia invece prevedibile, e in che misura l'informazione sia deteriorata dalla presenza di disturbi additivi. Tali concetti si applicano sia al trattamento (*codifica di sorgente*) necessario a *ridurre la banda* necessaria, sia al trattamento (*codifica di canale*) necessario a *proteggere* la stessa informazione.

# Serie di Fourier e spazio dei segnali

**S**ONO innanzitutto riviste alcune relazioni di *algebra complessa* e *trigonometria*, fondamentali per definire e comprendere la rappresentazione dei segnali periodici mediante lo sviluppo in *serie di Fourier*. Vengono quindi introdotte le proprietà di simmetria per *segnali reali*, e sviluppato il calcolo dei coefficienti per il caso dell'*onda rettangolare*. Dopo la dimostrazione del teorema di *Parseval* ed il concetto di ortogonalità collegato, viene sviluppato un approfondimento sullo *spazio dei segnali* per i quali sia definita una operazione di *prodotto interno*, e che costituisce un approccio unificante per lo sviluppo dei prossimi capitoli.

## 2.1 Prerequisiti trigonometrici

### 2.1.1 Numeri complessi

Un numero complesso  $\underline{x}$  è costituito da una coppia di valori  $a$  e  $b$  entrambi *reali*<sup>1</sup> che ne costituiscono la parte reale  $a$  e quella immaginaria<sup>2</sup>  $b$ , e viene scritto come

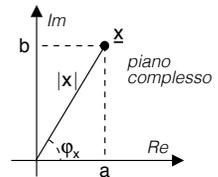
$$\underline{x} = a + jb = \Re\{\underline{x}\} + j\Im\{\underline{x}\} \quad (2.1)$$

detta rappresentazione in *coordinate cartesiane* o rettangolari, che lo mette in corrispondenza con un punto in un *piano complesso*. Le operazioni di somma e prodotto tra due numeri complessi  $\underline{x} = a + jb$  e  $\underline{y} = c + jd$  danno come risultato<sup>3</sup>

$$\underline{x} + \underline{y} = (a + c) + j(b + d) \quad \text{e} \quad \underline{x} \cdot \underline{y} = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

mentre l'inverso di un numero complesso risulta

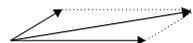
$$\frac{1}{\underline{x}} = \frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{(a + jb)(a - jb)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2}$$



<sup>1</sup>L'insieme dei numeri reali è indicato con  $\mathbb{R}$ , vi fanno parte i numeri interi, razionali, irrazionali e trascendenti, e può essere messo in corrispondenza biunivoca con gli infiniti punti su di una retta.

<sup>2</sup>L'*unità immaginaria* trae origine dalla teoria dei numeri come la quantità  $\sqrt{-1}$ , in modo da poter esprimere nel *campo complesso*  $\mathbb{C}$  tutte le radici di un'equazione polinomiale. Mentre in *analisi matematica* è indicata dalla lettera  $i$ , nel seguito viene indicata con la lettera  $j$  in accordo alla notazione di *teoria dei circuiti*, in modo da evitare confusione con il simbolo utilizzato per la corrente elettrica. Risulta  $j^2 = -1$ ,  $j^3 = -j$ ,  $j^4 = 1$ ,  $j^5 = j$  e così via ciclicamente.

<sup>3</sup>Sommare tra loro le parti reali e quelle immaginarie in modo indipendente equivale a realizzare una *somma vettoriale* tra  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  come mostrato a lato. Per il prodotto si applica invece la regola del prodotto tra binomi, ovvero  $(a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbd + jbjd$  da cui il risultato, ricordando che  $j^2 = -1$ .



in cui il numero complesso  $\underline{x}^* = a - jb$  prende il nome di *coniugato* di  $\underline{x}$ , per il quale valgono le relazioni  $\underline{x} + \underline{x}^* = 2a = 2\Re\{\underline{x}\}$  e  $\underline{x} - \underline{x}^* = 2jb = 2j\Im\{\underline{x}\}$ .

Ricorrendo alle relazioni trigonometriche  $a = |\underline{x}| \cos \varphi_x$  e  $b = |\underline{x}| \sin \varphi_x$  un numero complesso  $\underline{x}$  può essere anche espresso in *coordinate polari* come

$$\underline{x} = |\underline{x}| (\cos \varphi_x + j \sin \varphi_x) \quad (2.2)$$

in cui<sup>4</sup>  $|\underline{x}| = \sqrt{a^2 + b^2}$  prende il nome di *modulo* di  $\underline{x}$  e  $\varphi_x = \arg\{\underline{x}\} = \arctan \frac{b}{a}$  prende il nome di *fase* o *argomento*. Risulta quindi evidente che  $|\underline{x}|^2 = a^2 + b^2 = \underline{x} \cdot \underline{x}^*$ , mentre  $\frac{1}{\underline{x}} = \frac{\underline{x}^*}{|\underline{x}|^2}$ . Infine, in virtù della periodicità di  $\sin$  e  $\cos$ , due numeri complessi con uguale modulo ma fase che differisce per multipli di  $2\pi$  sono *indistinguibili*.

### 2.1.2 Formula di Eulero

Si può mostrare<sup>5</sup> che qualora la serie di potenze in cui può essere sviluppata la funzione esponenziale  $e^z$  (pag. 20) sia valutata per un argomento  $z = jb$  completamente immaginario, essa eguaglia la somma delle serie di potenze in cui è possibile sviluppare la funzione  $\cos b + j \sin b$ . Tale risultato prende il nome di *formula di Eulero*, e mostra come l'esponenziale  $e^{\pm j\varphi}$  sia un particolare numero complesso con modulo pari ad uno<sup>6</sup> e fase  $\varphi$  espresso come

$$e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi \quad (2.3)$$

La relazione (2.3) è nota come *formula di Eulero*, e consente di scrivere le funzioni trigonometriche in termini di esponenziali complessi come<sup>7</sup>

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

Tali relazioni possono tornare utili nel semplificare i calcoli, trasformando i prodotti tra funzioni trigonometriche in somme di angoli<sup>8</sup>. Ma soprattutto, la rappresentazione di un numero complesso  $\underline{x}$  in coordinate polari (2.2) può essere riscritta in base alla (2.3) come

$$\underline{x} = |\underline{x}| e^{j\varphi_x} \quad (2.4)$$

detta anche *rappresentazione esponenziale*.

<sup>4</sup>Mentre l'espressione del modulo è una diretta conseguenza del teorema di Pitagora, quella della fase discende dall'osservare che  $\frac{b}{a} = \frac{|\underline{x}| \sin \varphi_x}{|\underline{x}| \cos \varphi_x} = \tan \varphi_x$ , per cui  $\varphi_x = \arctan \frac{b}{a}$ . Con l'avvertenza che, qualora risulti  $a < 0$ , al risultato  $\varphi_x$  va aggiunto il termine  $\pi$  in quanto la funzione  $\arctan \varphi$  è definita per valori dell'argomento  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ , vedi <https://www.geogebra.org/m/Enf5AEbT>. Nei linguaggi di programmazione esiste in genere la funzione  $\text{atan2}(b,a)$  che effettua automaticamente tale considerazione, vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente2>.

<sup>5</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Formula\\_di\\_Eulero#Funzioni\\_analitiche](https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_Eulero#Funzioni_analitiche)

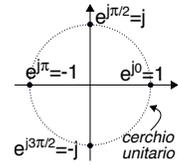
<sup>6</sup>Più in generale, il valore  $e^{\underline{x}}$  con  $\underline{x} = a + jb$  è ancora un numero complesso, con fase  $b$  e modulo  $e^a$ . Infatti  $e^{\underline{x}} = e^{a+jb} = e^a e^{jb} = e^a (\cos b + j \sin b)$ .

<sup>7</sup>Osserviamo infatti che  $e^{j\varphi}$  ed  $e^{-j\varphi}$  sono tra loro coniugati, e quindi per la loro somma dalla (2.3) si ha  $e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2\Re\{e^{j\varphi}\} = 2 \cos \varphi$  mentre la differenza produce  $e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j\Im\{e^{j\varphi}\} = 2j \sin \varphi$ .

<sup>8</sup>L'affermazione nasce dalla relazione  $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$ . Ad esempio quindi, il prodotto  $\cos \alpha \cdot \sin \beta$  diviene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4j} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) (e^{j\beta} - e^{-j\beta}) = \frac{1}{4j} [e^{j\alpha} e^{j\beta} - e^{j\alpha} e^{-j\beta} + e^{-j\alpha} e^{j\beta} - e^{-j\alpha} e^{-j\beta}] = \\ & = \frac{1}{4j} [e^{j(\alpha+\beta)} - e^{j(\alpha-\beta)} + e^{-j(\alpha-\beta)} - e^{-j(\alpha+\beta)}] = \frac{1}{4j} [e^{j(\alpha+\beta)} - e^{-j(\alpha+\beta)} - (e^{j(\alpha-\beta)} - e^{-j(\alpha-\beta)})] = \\ & = \frac{1}{4j} [2j \sin(\alpha + \beta) - 2j \sin(\alpha - \beta)] = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

In tal modo i numeri complessi di modulo unitario e che presentano la sola parte reale o che sono puramente immaginari possono essere rappresentati come in figura a lato, mentre il coniugato  $\underline{x}^*$  di un numero complesso  $\underline{x}$  viene ridefinito come quel numero complesso con uguale modulo e fase cambiata di segno, ovvero  $\underline{x}^* = a - jb = |x| e^{-j\varphi}$ .



Infine, il prodotto tra due numeri complessi  $\underline{x}$  ed  $\underline{y}$  può essere agevolmente calcolato come

$$|\underline{x}| e^{j\varphi_x} \cdot |\underline{y}| e^{j\varphi_y} = |\underline{x}| |\underline{y}| \cdot e^{j(\varphi_x + \varphi_y)} = |\underline{z}| e^{j\varphi_z} \quad \text{in cui} \quad |\underline{z}| = |\underline{x}| |\underline{y}| \quad \text{e} \quad \varphi_z = \varphi_x + \varphi_y$$

o, detto in altri termini

*il modulo del prodotto tra numeri complessi è pari al prodotto tra i moduli, e la fase pari alla somma delle fasi*

e dunque, come corollario, per il rapporto si ottiene  $\frac{\underline{x}}{\underline{y}} = \frac{|\underline{x}|}{|\underline{y}|} e^{j(\varphi_x - \varphi_y)}$ .

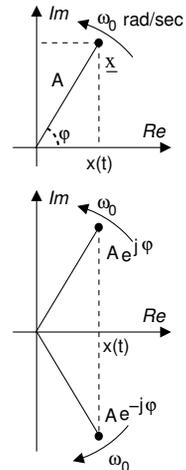
### 2.1.3 Fasore

Un segnale del tipo  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$  è completamente rappresentato dal numero complesso  $\underline{x} = A e^{j\varphi}$  detto *fasore*, la cui conoscenza permette di riottenere il segnale originario mediante la relazione  $x(t) = \Re \{ \underline{x} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \}$ , che una volta sviluppata<sup>9</sup> risulta infatti pari a

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re \{ A e^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \} = A \cdot \Re \{ e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \} = \\ &= A \cdot \Re \{ \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + j \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \} = \\ &= A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

Osserviamo che tale risultato si può interpretare graficamente come l'aver impresso al fasore una rotazione di velocità angolare  $\omega_0 = 2\pi f_0$  radianti/secondo in senso antiorario, ed aver proiettato il risultato sull'asse reale. In alternativa, possiamo esprimere il segnale  $x(t)$  di partenza anche come

$$x(t) = \frac{1}{2} \left\{ \underline{x} e^{j2\pi f_0 t} + \underline{x}^* e^{-j2\pi f_0 t} \right\} \quad (2.5)$$



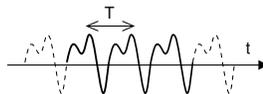
Tale operazione coinvolge anche le *frequenze negative*, e corrisponde a tener conto di un secondo vettore rotante, che si muove ora in senso orario, che ha una parte immaginaria di segno sempre opposto al primo, e che è moltiplicato per il coniugato del fasore. Vedremo tra breve che la (2.5) coincide con l'espressione della *serie di Fourier* per il caso in questione.

<sup>9</sup>Un modo alternativo di ottenere lo stesso risultato è quello di esprimere gli esponenziali complessi mediante la (2.3), ottenendo  $x(t) = \Re \{ |\underline{x}| (\cos \varphi + j \sin \varphi) [\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)] \}$ , e sviluppare il calcolo facendo uso delle relazioni  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$  e  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ , ma avremmo svolto molti più passaggi.

## 2.2 Serie di Fourier

Come anticipato a pag. 13, un segnale  $x(t)$  *periodico* è un segnale di potenza, reale o complesso, che assume ripetutamente gli stessi valori a distanza multipla di un intervallo temporale  $T$  denominato *periodo*, ovvero tale che

$$x(t) = x(t + T) \quad \forall t$$



L'inverso di  $T$  è detto *frequenza fondamentale*  $F = \frac{1}{T}$  o *prima armonica* di  $x(t)$ , espressa in Hertz, dimensionalmente pari all'inverso di un tempo [ $\text{sec}^{-1}$ ].

Per i segnali periodici esiste una forma di rappresentazione basata sulla conoscenza di una serie infinita di valori *complessi*  $\{X_n\}$  denominati *coefficienti di Fourier*, calcolati a partire da un periodo di segnale come

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt \quad (2.6)$$

e che permettono<sup>10</sup> la *ricostruzione* di  $x(t)$  nella forma di una combinazione lineare di infinite funzioni esponenziali complesse  $e^{j2\pi n F t}$ , mediante l'espressione nota come *serie di Fourier*:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t} \quad (2.7)$$

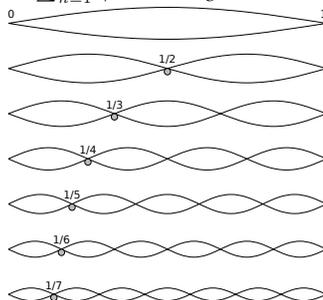
Osserviamo che:

- la conoscenza di  $\{X_n\}$  *equivale* a quella di  $x(t)$  e *viceversa*, esistendo il modo di passare dall'una all'altra rappresentazione;
- le funzioni della base di rappresentazione  $e^{j2\pi n F t}$  sono funzioni trigonometriche a frequenza multipla ( $n$ -esima) della fondamentale, detta anche  $n$ -esima armonica<sup>11</sup>;
- la somma dei termini *simmetrici*  $X_n e^{j2\pi n F t} + X_{-n} e^{-j2\pi n F t}$  è detta *componente armonica* di  $x(t)$  a frequenza  $f = nF$ , se  $x(t)$  è reale<sup>12</sup>, risulta pari a  $2|X_n| \cos(2\pi n F t + \varphi_n)$  in cui  $\varphi_n$  è la fase di  $X_n$ ;
- il coefficiente  $X_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$  costituisce il *valor medio* di  $x(t)$  (pag. 12);
- la serie di Fourier (2.7) dà valori esatti in tutti i punti in cui  $x(t)$  è continuo, mentre in corrispondenza di discontinuità di prima specie fornisce un valore pari alla media dei valori agli estremi, vedi § 2.5.1;

<sup>10</sup>Per una discussione relativa alla convergenza della serie (2.7) si veda il § 2.5.1.

<sup>11</sup>Da un punto di vista etimologico, la serie *armonica* è definita come  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ , mentre gli *armonici* di una corda di chitarra sono i suoni prodotti dopo averne bloccato la vibrazione in corrispondenza di  $1/n$ -esimo della sua lunghezza. Dal punto di vista della teoria musicale le *armoniche* di una nota sono altre note a frequenza multipla della prima. In particolare la seconda armonica corrisponde ad un intervallo di *ottava*, mentre la quarta a due ottave. E la terza armonica? Partendo ad esempio dal  $la_4$ , e sapendo che ogni semitono della scala *temperata* corrisponde ad un rapporto di frequenze pari a  $2^{1/12}$  rispetto al semitono precedente, determiniamo il numero di semitoni  $N_s$  tra il  $la_4$  e la sua la terza armonica. Ad un rapporto di frequenze pari a  $2^{N_s/12} = 3$  corrisponde  $\frac{N_s}{12} = \log_2 3 \simeq 1.5849$  e quindi  $N_s = 19$  semitoni, ovvero un intervallo di *dodicesima*, cioè il  $mi_5$  che viene dopo il  $la_5$  dell'ottava successiva. Procedendo allo stesso modo si trova che la quinta, sesta e settima armonica corrispondono rispettivamente a  $do\#_6$ ,  $mi_6$  e  $sol_6$ ; pertanto, con le prime sette armoniche si compone un accordo di *settima di dominante*.

<sup>12</sup>vedi § 2.2.1.1 e 2.2.1.3



- i coefficienti di Fourier  $X_n$  possono essere calcolati anche per un segnale di estensione finita  $T$ , ed antitrasformando, il segnale diventa periodico;
- i coefficienti  $X_n$  possono essere pensati anche come i valori assunti dalla funzione complessa di variabile continua  $\overline{X}(f)$  per i valori discreti  $f = nF$ , ossia  $X_n = \overline{X}(f = nF)$ .  $\overline{X}(f)$  prende il nome di *inviluppo dello spettro di ampiezza (complessa)* di  $x(t)$ , e si ottiene riscrivendo la (2.6) come  $\overline{X}(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ ;
- i coefficienti complessi  $X_n$  possono essere espressi nei termini delle corrispondenti parti reale ed immaginaria come  $X_n = \Re\{X_n\} + j\Im\{X_n\}$ , oppure in forma esponenziale  $X_n = M_n e^{j\varphi_n}$  in cui

$$\begin{cases} M_n = \sqrt{\Re\{X_n\}^2 + \Im\{X_n\}^2} = |X_n| & \text{spettro di modulo} \\ \varphi_n = \arctan \frac{\Im\{X_n\}}{\Re\{X_n\}} & \text{spettro di fase} \end{cases}$$

### 2.2.1 Serie di Fourier per segnali reali

Qualora il segnale periodico  $x(t)$  di cui si calcola la serie di Fourier sia *reale*, si verificano le importanti conseguenze che ora analizziamo.

#### 2.2.1.1 Simmetria coniugata o Hermitiana

Se  $x(t)$  è reale i coefficienti di Fourier godono della importante proprietà di *simmetria coniugata*, che consiste nell'eguaglianza

$$X_n = X_{-n}^* \quad (2.8)$$

ovvero il coefficiente con indice  $n$  è il complesso coniugato di quello con indice  $-n$ , avendo uguale parte reale e parte immaginaria di segno opposto. Infatti scomponendo l'esponenziale complesso  $e^{-j2\pi nFt}$  mediante la (2.3) come  $\cos 2\pi nFt - j \sin 2\pi nFt$ , ed essendo  $x(t)$  reale, l'integrale (2.6) si suddivide in due integrali entrambi *reali*

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nFt) dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nFt) dt \quad (2.9)$$

relativi al calcolo rispettivamente della parte reale e di quella immaginaria di  $X_n$ , ovvero  $\Re\{X_n\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nFt) dt$  e  $\Im\{X_n\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nFt) dt$ . Essendo il coseno una funzione pari,  $\Re\{X_n\}$  ha lo stesso valore indipendentemente dal segno di  $n$ , mentre  $\Im\{X_n\}$  cambia segno con  $n$ , essendo il seno una funzione dispari. Ciò comporta una proprietà analoga anche per modulo e fase di  $X_n$ , e quindi in definitiva

$$x(t) \text{ reale} \Leftrightarrow \begin{cases} \Re\{X_n\} = \Re\{X_{-n}\} \\ \Im\{X_n\} = -\Im\{X_{-n}\} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} |X_n| = |X_{-n}| \\ \arg\{X_n\} = -\arg\{X_{-n}\} \end{cases}$$

riassumibile nella frase

*se  $x(t)$  è reale i coefficienti  $X_n$  hanno parte reale pari e parte immaginaria dispari, ovvero modulo pari e fase dispari*

da cui discende anche<sup>13</sup>

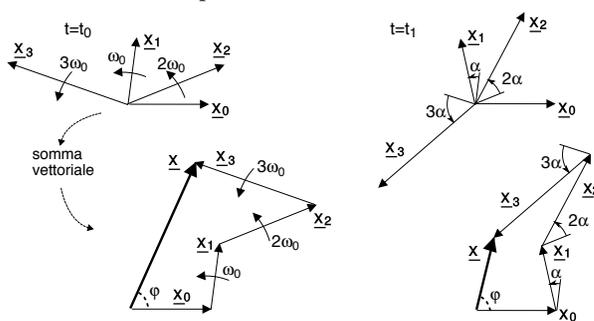
*se  $x(t)$  oltre ad essere reale è anche pari, i coefficienti  $X_n$  sono reali (pari), mentre se  $x(t)$  è reale dispari, gli  $X_n$  sono immaginari (dispari).*

<sup>13</sup>Notiamo infatti che se  $x(t)$  è (reale) *pari*, allora il termine  $x(t) \sin 2\pi nFt dt$  che compare nel secondo termine della (2.9) è *dispari*, ed il suo integrale esteso ad un intervallo simmetrico rispetto all'origine è *nullo*, e pertanto  $\Im\{X_n\} = 0$ . Se invece  $x(t)$  è (reale) *dispari*, allora è  $x(t) \cos 2\pi nFt dt$  nel primo termine ad essere *dispari*, e dunque per lo stesso motivo si annulla l'integrale che esprime  $\Re\{X_n\} = 0$ .

### 2.2.1.2 Interpretazione dei coefficienti di Fourier come fasori

Confrontando la formula di ricostruzione (2.7) con la (2.5) ricavata al § 2.1.3 per il caso di un  $x(t)$  cosinusoidale, e tenendo conto della proprietà di simmetria coniugata (2.8), è possibile pensare un segnale periodico reale come *la parte reale* del risultato di una somma vettoriale di un insieme infinito di fasori  $\underline{X}_n$  (di modulo *doppio* di quello dei coefficienti  $X_n$ ), ognuno rotante con una velocità angolare  $\omega_n = 2\pi nF$  multipla della fondamentale  $2\pi F$ .

La figura a lato mostra la *somma vettoriale* dei primi tre termini  $X_n e^{j2\pi nFt}$  della (2.7) per  $n \geq 0$ , valutata per due istanti di tempo consecutivi  $t_1$  e  $t_2 > t_1$ , ed evidenzia come nell'intervallo  $\tau = t_2 - t_1$  i fasori  $\underline{X}_2$  e  $\underline{X}_3$  siano ruotati di un angolo  $n\alpha$  multiplo di quello  $\alpha = 2\pi F\tau$  di cui ha ruotato  $\underline{X}_1$ .



**Esercizio** Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier per il segnale  $x(t) = A \cos(2\pi Ft + \varphi)$ . Esprimiamo innanzitutto l'integrale che fornisce i coefficienti nei termini della formula di Eulero per il coseno:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{j2\pi Ft} e^{j\varphi} + e^{-j2\pi Ft} e^{-j\varphi}}{2} e^{-j2\pi nFt} dt \\ &= \frac{A}{2T} \left( e^{j\varphi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi Ft} e^{-j2\pi nFt} dt + e^{-j\varphi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi Ft} e^{-j2\pi nFt} dt \right) \end{aligned}$$

in cui  $F = \frac{1}{T}$ , e consideriamo la funzione integranda  $e^{\pm j2\pi nFt} e^{-j2\pi nFt}$  per i diversi valori di  $n$ :

- per  $n = 0$ , osserviamo che  $e^{-j2\pi nFt} \Big|_{n=0} = e^0 = 1$ , e dunque  $X_0 = 0$  in quanto

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{\pm j2\pi nFt} dt = 0$$

poiché in un intervallo  $T$  entra esattamente un ciclo di (co)sinusoide a frequenza  $F$ , risultando in un valor medio nullo.

- per  $n = 1$ , si ha che  $\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi Ft} e^{-j2\pi nFt} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^0 dt = T$ , mentre  $\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi Ft} e^{-j2\pi nFt} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi 2Ft} dt = 0$ , dato che in un periodo  $T$  entrano due cicli esatti della funzione periodica integranda, ottenendo quindi

$$X_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi}$$

- per  $n = -1$  valgono considerazioni analoghe, ottenendo quindi

$$X_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$$

- per  $|n| > 1$  infine, si ottiene  $X_{\pm n} = 0$  dato che  $\int_{-T/2}^{T/2} e^{\pm j2\pi nFt} e^{-j2\pi nFt} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(\pm 1 - n)Ft} dt$  presenta sempre un numero intero di periodi entro l'intervallo di integrazione.

### 2.2.1.3 Serie trigonometrica

Qualora i coefficienti  $X_n$  presentino simmetria coniugata la (2.7) può essere riscritta<sup>14</sup> come

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ X_n e^{j2\pi n Ft} + X_{-n} e^{-j2\pi n Ft} \right\} = M_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(2\pi n Ft + \varphi_n) \quad (2.10)$$

ovvero in forma di una serie di coseni; notiamo che  $X_0 = M_0$  è necessariamente reale, in quanto la fase deve risultare una funzione dispari della frequenza. Similmente, le proprietà relative alle parti reale ed immaginaria degli  $X_n$  permettono di scrivere<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (R_n + jI_n) e^{j2\pi n Ft} + (R_n - jI_n) e^{-j2\pi n Ft} \right\} = \\ &= R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ 2R_n \cos(2\pi n Ft) - 2I_n \sin(2\pi n Ft) \} \end{aligned}$$

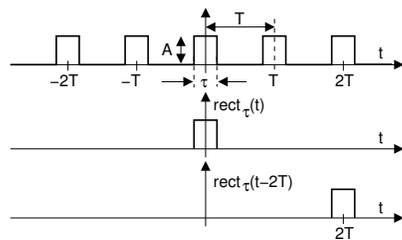
$$\text{in cui } R_0 = M_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \text{ e } \begin{cases} R_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi n Ft) dt \\ I_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi n Ft) dt \end{cases}$$

Pertanto nel caso in cui  $x(t)$  sia un segnale reale la serie di Fourier può essere ricondotta ad uno sviluppo in termini di funzioni trigonometriche, ed in particolare ad una serie di soli coseni (con fase nulla) nel caso in cui  $x(t)$  sia pari, oppure una serie di soli seni (sempre con fase nulla), nel caso in cui sia dispari.

#### 2.2.1.4 Serie di Fourier di un'onda rettangolare

Applichiamo quanto fin qui discusso ad un particolare segnale periodico, realizzato ripetendo con periodo  $T$  un impulso rettangolare (pag. 19) di base  $\tau < T$ , mostrato a lato per un valore di *duty cycle*<sup>16</sup> del 33%, la cui espressione analitica può essere scritta come

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \text{rect}_{\tau}(t - nT)$$



in cui si è adottata la notazione  $\text{rect}_{\tau}(t)$  per rappresentare l'impulso (pag. 19), mentre l'argomento  $(t - nT)$  indica una *traslazione temporale* (vedi § 1.5.2) di ciascun rettangolo *a destra*<sup>17</sup> (ossia verso gli istanti *positivi*) di una quantità pari a  $nT$ , cosicché la sommatoria rappresenta appunto la replica dello stesso impulso rettangolare infinite volte in avanti ed all'indietro.

<sup>14</sup>Infatti  $X_{\pm n} = M_n e^{\pm i\varphi_n}$  e dunque il termine entro parentesi graffe risulta pari a  $M_n (e^{j(2\pi n Ft + \varphi_n)} + e^{-j(2\pi n Ft + \varphi_n)}) = M_n 2 \cos(2\pi n Ft + \varphi_n)$

<sup>15</sup>In questo caso in virtù dell'uguaglianza  $j^2 = -1$  il termine tra parentesi graffe diviene

$$\begin{aligned} &R_n \cos(2\pi n Ft) + jR_n \sin(2\pi n Ft) + jI_n \cos(2\pi n Ft) - I_n \sin(2\pi n Ft) + \\ &R_n \cos(2\pi n Ft) - jR_n \sin(2\pi n Ft) - jI_n \cos(2\pi n Ft) - I_n \sin(2\pi n Ft) \end{aligned}$$

che si semplifica nel risultato mostrato.

<sup>16</sup>Il termine *DUTY CYCLE* si traduce *ciclo di impegno*, ed è definito come il rapporto percentuale tra il tempo  $\tau$  per cui il segnale è diverso da zero ed il suo periodo  $T$ , ossia *duty cycle* =  $\frac{\tau}{T} * 100$  %.

<sup>17</sup>Oppure *a sinistra*, qualora  $n$  sia negativo e quindi  $-nT$  positivo.

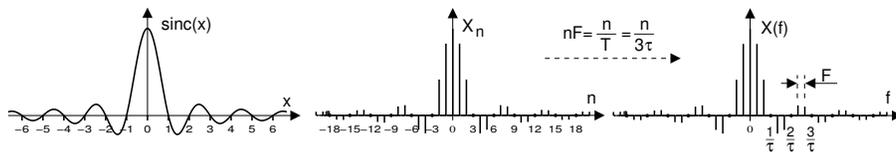


Figura 2.1: Funzione  $\text{sinc}(x)$  e coefficienti di Fourier dell'onda quadra

Il calcolo dei coefficienti di Fourier per il segnale in questione non presenta particolari difficoltà, ma l'esito si presta ad alcune utili considerazioni. Applicando un risultato noto<sup>18</sup>, si ottiene

$$\begin{aligned}
 X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi n F t} dt = \\
 &= A \frac{1}{T} \left. \frac{e^{-j2\pi n F t}}{-j2\pi n F} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} = A \frac{1}{T} \frac{\tau}{\pi n F \tau} \frac{e^{j2\pi n F \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi n F \frac{\tau}{2}}}{2j} = \\
 &= A \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\pi n F \tau)}{\pi n F \tau} = A \frac{\tau}{T} \text{sinc}(n F \tau)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

in cui nella seconda uguaglianza gli estremi di integrazione sono stati ristretti all'intervallo di effettiva esistenza del segnale, mentre la penultima uguaglianza si giustifica ricordando le formule di Eulero.

Il risultato (2.11) ottenuto mostra come i coefficienti  $X_n$  della serie di Fourier per l'onda rettangolare dipendano dai valori di  $\frac{\sin(\pi n F \tau)}{\pi n F \tau}$  calcolati per  $n$  intero; tale espressione viene però rappresentata nei termini della funzione *seno cardinale* (vedi pag. 19)

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

che ricorre spesso nel testo, che è raffigurata nella parte sinistra di fig. 2.1, e che *passa da zero* per valori *interi* dell'argomento  $x$ , tranne che per  $x = 0$ , dove vale uno.

Nella parte centrale di fig. 2.1 è mostrato l'andamento degli  $X_n$  che, qualora si ponga  $\tau = \frac{T}{3}$  (corrispondente al duty cycle del 33%) e ricordando che  $F = 1/T$ , valgono  $X_n = \frac{A}{3} \text{sinc}(n/3)$ , producendo dunque valori di  $X_n$  nulli in corrispondenza degli indici  $n = 3, 6, 9, \dots$

La parte destra di fig. 2.1 mostra ancora il valore dei coefficienti  $X_n$ , ma lungo una scala in Hertz, dato che l'indice  $n$  corrisponde all'ampiezza della componente a frequenza  $nF = \frac{n}{T}$  relativa all' $n$ -esima armonica, che per  $\tau = \frac{T}{3}$  è pari ad  $nF = \frac{n}{T} = \frac{n}{3\tau}$ : quindi i valori di  $n$  per cui gli  $X_n$  si annullano corrispondono alle frequenze  $1/\tau, 2/\tau, 3/\tau, \dots$  e dipendono dalla durata  $\tau$  del singolo impulso, mentre la spaziatura tra le armoniche è pari ad  $F = \frac{1}{T}$  e dipende esclusivamente dal *periodo* della forma d'onda. A partire da tali considerazioni, valutiamo come si modificano i coefficienti  $X_n$  al variare di  $\tau$  e di  $T$ .

**Relazione tra i coefficienti della serie ed i parametri dell'onda quadra** La parte in alto di fig. 2.2 mostra quattro possibili modi di variare l'onda quadra di partenza: la colonna di sinistra rappresenta il caso in cui il periodo  $T$  si mantenga costante, mentre la durata  $\tau$  di un singolo ciclo *raddoppia* (prima riga) o si *dimezza* (terza riga), mentre la colonna di destra

<sup>18</sup>Sappiamo infatti che  $\frac{\partial}{\partial x} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ , e quindi  $\int_a^b e^{f(x)} dx = 1/\frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot e^{f(x)} \Big|_a^b$

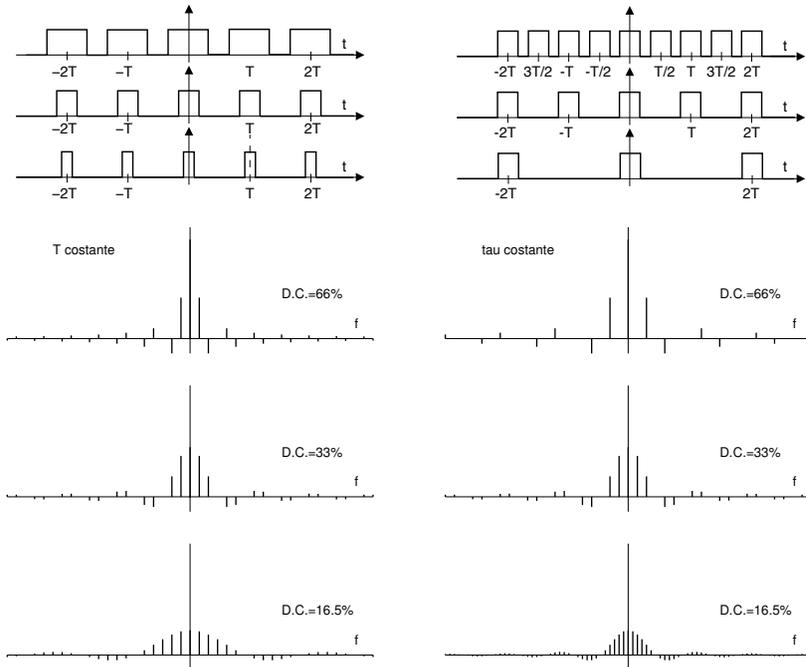


Figura 2.2: Modifiche allo spettro di ampiezza per variazioni della forma d'onda

considera il caso in cui  $\tau$  si mantenga invariato, mentre il periodo si dimezza o raddoppia in modo da ottenere lo stesso duty cycle  $\frac{\tau}{T}$  di sinistra, ovvero pari al 66% (prima riga), 33% (al centro) o 12,5% (terza riga).

La parte inferiore di Fig. 2.2 mostra le corrispondenti variazioni per i valori dei coefficienti dello sviluppo in serie, calcolate facendo uso della (2.11), e raffigurati su di una scala in Hertz. Sul lato sinistro (caso del periodo costante) osserviamo che le armoniche mantengono la stessa spaziatura  $\frac{1}{T}$ , ma l'involuppo  $\text{sinc}(nF\tau)$  si *contrae* ed *espande* rispettivamente. Il lato destro della figura (caso di  $\tau$  costante) mostra come sia l'involuppo degli  $X_n$  a rimanere costante, mentre le armoniche si *diradano* (sopra) ed *infittiscono* (sotto) rispettivamente all'aumentare ed al diminuire del periodo. Infine, notiamo come al diminuire del duty cycle si assista in entrambi i casi ad una riduzione dell'ampiezza degli  $X_n$ , legata alla riduzione di potenza del segnale (vedi sezione 2.3).

### 2.2.2 Serie di Fourier troncata

Come affermato al § 2.2, la serie di Fourier  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nFt}$  permette di riottenere esattamente il segnale  $x(t)$  a partire da *tutti* i valori  $X_n$ ; analizziamo ora cosa accade qualora la sommatoria sia invece *troncata*, ossia limitata ai  $2N + 1$  termini centrati attorno ad  $n = 0$ , utilizzando cioè solamente i coefficienti  $X_n$  con indice  $-N \leq n \leq N$ . A tal fine, consideriamo un'onda *quadra* con duty-cycle del 50%

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}_{T/2}(t - kT)$$

per la quale al § 2.2.1.4 abbiamo ottenuto l'espressione  $X_n = \frac{\tau}{T} \text{sinc}(nF\tau)$  per i relativi coefficienti di Fourier, che per  $\tau = \frac{T}{2}$  fornisce  $X_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$ , diverso da zero solo con  $n$  *dispari*<sup>19</sup>. Ricordando che  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$  possiamo dunque esprimere i coefficienti di Fourier dell'onda quadra come

$$X_0 = \frac{1}{2}; \quad X_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi n} & \text{con } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{con } n \text{ pari} \end{cases}$$

Essendo inoltre  $x(t)$  reale pari, sappiamo che  $x(t)$  può essere espresso come serie di coseni

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2X_n \cos(2\pi nFt)$$

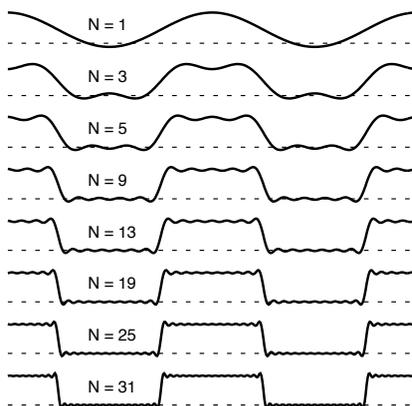
che si presta ad essere facilmente calcolato numericamente e graficato arrestando ad  $N$  lo sviluppo in serie

$$\hat{x}_N(t) = X_0 + \sum_{n=1}^N 2X_n \cos(2\pi nFt)$$

producendo il risultato mostrato in figura per diverse scelte di  $N$ .

Come era da aspettarsi al crescere di  $N$  la ricostruzione è sempre più accurata, tranne che per le oscillazioni in prossimità della

discontinuità, che prendono il nome di *fenomeno di Gibbs*<sup>20</sup>. Da un punto di vista *informale*, accade che l'assenza delle componenti armoniche a frequenza  $f = nF$  più elevata fa sì che l'errore si localizzi in prossimità degli istanti in cui  $x(t)$  varia *più velocemente*. Da un punto di vista *pratico*, il caso studiato è un esempio di cosa può succedere quando un segnale viene privato delle sue componenti a frequenza più elevata, come ad esempio a seguito di un *filtraggio passa-basso*. Da un punto di vista *analitico*, si dimostra che l'errore  $e_N(t) = x(t) - \hat{x}_N(t)$  ha media quadratica  $\frac{1}{T} \int e^2(t) dt$  minima, e risulta *ortogonale* (vedi § 2.4) a  $\hat{x}_N(t)$ ,



### 2.3 Teorema di Parseval

A pag. 13 abbiamo definito la potenza di un segnale  $x(t)$  come il valor medio del suo quadrato, ovvero  $\mathcal{P}_x = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |x(t)|^2 dt$ , facendo poi osservare come nel caso di segnale periodico decada la necessità del passaggio al limite limitando l'integrale ad un periodo  $T$ , ovvero  $\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$ . Il teorema di Parseval ci fornisce un modo alternativo di ottenere la stessa grandezza a partire dai coefficienti  $X_n$  del suo sviluppo in serie, risultando

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \quad (2.12)$$

<sup>19</sup>Si può mostrare che le armoniche *pari* risultano nulle per *tutti* i segnali periodici *alternativi*, ovvero per i quali (a parte una eventuale componente continua) un semiperiodo eguaglia l'altro, cambiato di segno.

<sup>20</sup>Vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Fenomeno\\_di\\_Gibbs](https://it.wikipedia.org/wiki/Fenomeno_di_Gibbs)

Per provare che è vero, sviluppiamo i calcoli generalizzandoli al caso di un segnale complesso:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_x &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t) dt = \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \sum_n X_n e^{j2\pi n F t} \right] \left[ \sum_m X_m^* e^{-j2\pi m F t} \right] dt = \\
 &= \sum_n \sum_m X_n X_m^* \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = \tag{2.13} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n X_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (R_n^2 + I_n^2)
 \end{aligned}$$

**Ortogonalità degli esponenziali complessi** Nel passare dalla terza alla quarta riga della (2.13) si è fatto uso del risultato

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = \begin{cases} 0 & \text{con } m \neq n \\ 1 & \text{con } m = n \end{cases} \tag{2.14}$$

che deriva dalla circostanza che, ponendo  $k = n - m$ , la funzione integranda è pari a  $\cos(2\pi \frac{k}{T}t) + j \sin(2\pi \frac{k}{T}t)$  e dunque uguale ad 1 quando  $k = 0$ , e co-sinusoidale con periodo  $\frac{T}{k}$  per  $k \neq 0$ . Mentre quindi per  $m = n$  ovvero  $k = 0$  l'integrale vale  $T$ , quando  $k \neq 0$  presenta un numero intero  $k$  di periodi entro l'intervallo di integrazione  $T$ , dando luogo ad un valor medio nullo: ciò comporta la scomparsa dei termini con  $m \neq n$  dalla sommatoria doppia in (2.13). In base ai principi di algebra vettoriale forniti al § 2.4, la proprietà appena illustrata viene indicata come *ortogonalità* degli esponenziali complessi.

**Spettro di potenza per segnali periodici** Tornando ad esaminare il risultato  $\mathcal{P}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$  espresso dal teorema di Parseval, notiamo che  $|X_n|^2$  è la potenza  $\mathcal{P}_n$  della sola  $n$ -esima componente armonica  $X_n e^{j2\pi n F t}$  di  $x(t)$ :

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ X_n e^{j2\pi n F t} \right] \left[ X_n^* e^{-j2\pi n F t} \right] dt = \frac{|X_n|^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = |X_n|^2$$

e quindi

*La potenza totale  $\mathcal{P}_x$  di un segnale periodico  $x(t)$  è pari alla somma delle potenze delle sue componenti armoniche*

Si presti attenzione che il risultato è una diretta conseguenza dell'ortogonalità degli esponenziali complessi: infatti la potenza di una somma *non* è in generale pari alla somma delle potenze<sup>21</sup>; l'uguaglianza ha luogo solo nel caso in cui gli addendi siano *ortogonali*.

La successione  $\{\mathcal{P}_n\} = \{\dots, |X_{-k}|^2, \dots, |X_0|^2, \dots, |X_k|^2, \dots\}$  rappresenta dunque il modo con cui la potenza totale *si ripartisce* tra le diverse armoniche a frequenza  $f = nF$ , e prende il nome di *spettro di potenza* del segnale  $x(t)$ . Osserviamo che necessariamente i termini  $\mathcal{P}_n = |X_n|^2$  risultano reali e positivi; inoltre se  $x(t)$  è reale la proprietà di simmetria coniugata comporta che  $|X_n|^2 = |X_{-n}^*|^2 = |X_{-n}|^2$ , e quindi  $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{-n}$ ; pertanto un segnale *reale* è caratterizzato da uno spettro di potenza *pari*.

<sup>21</sup>In generale risulta, con la notazione di prodotto scalare  $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$  tra vettori-segnali  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  introdotta al § 2.4:  $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$ .

**Esempio** Determiniamo lo spettro di potenza di un'onda quadra di ampiezza unitaria. Essendo  $X_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$ , si ottiene  $\{\mathcal{P}_n\} = \{|X_n|^2\} = \frac{1}{4} \{\text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)\}$ .

**Potenza di un coseno** Cogliamo l'occasione per verificare il risultato di pag. 14 relativo alla potenza di un coseno di ampiezza  $A$ . Applicando il teorema di Parseval ai coefficienti calcolati a pag. 34 si ottiene:

$$\mathcal{P}_x = |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = 2 \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

## 2.4 Spazio dei segnali

Esiste un modo di affrontare l'analisi dei segnali rappresentando gli stessi come elementi di uno *spazio vettoriale*<sup>22</sup>, estendendo così ai primi le proprietà algebriche e geometriche valide per i secondi. In questa sezione viene prima sinteticamente rivisitata la teoria degli spazi algebrici per i quali è definito un operatore di prodotto scalare, e quindi individuate le possibili corrispondenze tra le proprietà dei vettori e quelle dei segnali, riuscendo così a realizzare una sintesi unificante in relazione ai concetti di *base di rappresentazione*, *ortogonalità*, e *trasformazione unitaria*. Si accenna infine a come molti degli integrali che sono studiati nel testo (trasformata di Fourier e di Hilbert, convoluzione, correlazione) possano essere ricondotti al calcolo di un *prodotto scalare*, a sua volta associato al concetto di *operatore funzionale*, ossia di funzioni che dipendono da una seconda funzione.

### 2.4.1 Spazio metrico

Consiste in un insieme  $\mathcal{A}$  di elementi (qualunque) per il quale esiste un modo per valutare la *distanza* (o *metrica*) tra elementi, ossia un operatore  $d(x, y)$  che associa ad ogni coppia di elementi  $x, y \in \mathcal{A}$  un numero *reale*, e per il quale<sup>23</sup>

- $d(x, y) \geq 0$  nulla solo se  $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$  - simmetria
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  - disuguaglianza triangolare

La distanza è un concetto *topologico* che permette di definire *l'intorno* di un punto nello spazio.

**Spazio completo** Identifica uno spazio metrico in cui il limite a cui tende una successione fa parte dell'insieme stesso<sup>24</sup>. Uno spazio metrico *non* completo è sempre contenuto in uno spazio completo *più grande*, che ne costituisce il completamento, come ad esempio l'insieme dei numeri razionali è contenuto nell'insieme (completo) dei numeri reali, ottenuto dal primo con l'aggiunta dei numeri irrazionali.

<sup>22</sup>Uno spazio vettoriale è la generalizzazione del ben noto *spazio euclideo*, descritto da una  $n$ -pla di numeri reali detto *vettore*  $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ , e che estende quello mono-, bi- o tri-dimensionale rispettivamente legato a retta, piano e spazio in senso geometrico. Le quantità  $x_i$  costituiscono dunque le *coordinate* di un punto, ovvero dove si colloca *la testa* di un vettore che parte dall'origine, ed individuano *quanto* di quel vettore è dovuto al contributo di ciascuna delle *componenti* associate ai versori della base di rappresentazione.

<sup>23</sup>Vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Distanza\\_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Distanza_(matematica)). Un esempio di distanza particolarmente *poco utile*, ma che rispetta le condizioni mostrate, è definita come  $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$

<sup>24</sup>La definizione analitica di completezza consiste nell'affermare che tutte le successioni di Cauchy (o successioni fondamentali) sono convergenti, in cui una successione è di Cauchy se, comunque fissato un  $\varepsilon > 0$ , da un certo punto in poi tutti i suoi elementi sono tra loro più vicini di  $\varepsilon$ , e dunque la loro distanza tende ad annullarsi; se poi la successione converge *ad un elemento dello spazio stesso*, allora lo spazio è *completo*. Pertanto una successione convergente è di Cauchy, ma non è detto l'inverso. Vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio\\_metrico\\_completo](https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_metrico_completo)

### 2.4.2 Spazio lineare

Un insieme  $\mathcal{A}$  di elementi viene detto *spazio lineare* (o *spazio vettoriale*) su di un campo  $K$ <sup>25</sup>, quando sono definite le operazioni di *somma* tra elementi  $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{A}$  e di *moltiplicazione* degli stessi per dei coefficienti  $\lambda \in K$ , e queste due operazioni danno come risultato ancora un elemento dell'insieme<sup>26</sup>, in modo che lo spazio acquisisca le proprietà di una *struttura algebrica*. Oltre al caso intuitivo dello *spazio euclideo*  $\mathbb{R}^n$  da cui la nozione di spazio trae origine, e quello  $\mathbb{C}^n$  i cui vettori sono descritti da elementi complessi, ricadono in questo caso anche lo spazio dei segnali con periodo  $T$ , quello dei segnali di energia, e quello dei segnali di potenza.

**Base di rappresentazione** Scegliendo un *qualunque* sottoinsieme  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$  di  $n$  vettori  $\bar{u}_i$  *linearmente indipendenti*<sup>27</sup>, la combinazione lineare

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i \quad (2.15)$$

dei vettori  $\bar{u}_i$  con coefficienti  $x_i \in K$  esprime un qualunque elemento  $\bar{x} \in \mathcal{A}$  *purché*  $n$  sia pari alla *dimensione* dello spazio, ed in tal caso l'insieme  $\mathcal{B}$  dei vettori  $\bar{u}_i$  è indicato come sua *base di rappresentazione*<sup>28</sup>.

**Spazio normato** Individua uno spazio vettoriale per il quale sia definita la *norma* (o *lunghezza*)  $\|\bar{x}\|$  dei suoi elementi<sup>29</sup> che come si può verificare dalle proprietà che la definiscono

- $0 \leq \|\bar{x}\| < \infty$  con  $\|\bar{x}\| = 0$  se e solo se  $\bar{x} = 0$
- $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda| \|\bar{x}\|$  omogeneità con  $\lambda \in K$
- $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$  disuguaglianza triangolare

corrisponde alla definizione di distanza  $d(\bar{x}, \bar{y})$  data al § 2.4.1, semplicemente ponendo  $d(\bar{x}, \bar{y}) \doteq \|\bar{x} - \bar{y}\|$ . In tal modo lo spazio normato oltre che algebrico perché lineare diviene anche *metrico*, con una metrica che è *indotta* dalla norma; uno spazio normato che è anche completo è detto *spazio di Banach*<sup>30</sup>.

**Norma per spazi euclidei** Per uno spazio vettoriale con un numero finito  $n$  di dimensioni *isomorfo* ad  $\mathbb{R}^n$  si può definire norma di ordine  $p$  (con  $p = 0, 1, \dots, \infty$ ) del vettore  $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  la quantità

$$\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n x_i^p} \quad (2.16)$$

<sup>25</sup> $K$  può essere il campo dei numeri reali  $\mathbb{R}$ , o quello dei numeri complessi  $\mathbb{C}$ , vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Campo\\_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Campo_(matematica)). Qualora il campo sia complesso, anche le componenti del vettore lo sono; d'altra parte, le relazioni sviluppate per il caso complesso continuano a valere anche nel caso di vettori a componenti reali.

<sup>26</sup>I perfezionisti possono volersi sentir anche dire che deve esistere l'elemento neutro (zero) rispetto alla somma, che quest'ultima deve essere commutativa, associativa, e distributiva rispetto al prodotto, e che ogni elemento  $\bar{x}$  deve avere il suo opposto  $-\bar{x}$ . Vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio\\_vettoriale](https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_vettoriale)

<sup>27</sup>L'indipendenza lineare tra vettori comporta che  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{u}_i = 0$  solo se  $\lambda_i = 0$  per tutti gli  $i$ .

<sup>28</sup>Per una simulazione bidimensionale si veda ad esempio <https://www.geogebra.org/m/mXkurndd>

<sup>29</sup>Vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Norma\\_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Norma_(matematica))

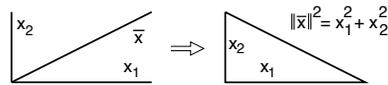
<sup>30</sup>Vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio\\_di\\_Banach](https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Banach)

che per  $p = 2$  rappresenta una estensione del *teorema di Pitagora*, mentre la distanza di ordine  $p$  indotta tra coppie di vettori si scrive come

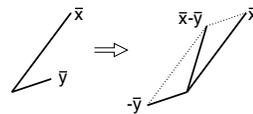
$$d_p(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p} \quad (2.17)$$

che nel caso  $p = 2$  fornisce la ben nota *distanza euclidea*<sup>31</sup>  $d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ .

**Esempio** Il teorema di Pitagora stabilisce che  $(\|\bar{x}\|)^2 = x_1^2 + x_2^2$ , ossia che il quadrato costruito sull'ipotenusa è pari alla somma dei quadrati dei costruiti sui cateti, come in figura.



La geometria euclidea calcola la distanza tra due punti attraverso la costruzione grafica dei vettori le cui componenti sono le coordinate dei punti come in figura, e dunque  $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$  ha componenti  $z_1 = x_1 - y_1$  e  $z_2 = x_2 - y_2$ .



### 2.4.3 Spazio prodotto interno e di Hilbert

Torniamo ora *indietro* e ripartiamo da un *generico* spazio lineare definito su di un campo  $K$  reale o complesso, per il quale non è definita alcuna norma, mentre invece è definito un operatore detto *prodotto scalare* o prodotto *interno*<sup>32</sup>, indicato come  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ , e che associa uno scalare  $\lambda \in K$  a coppie di generici vettori  $\bar{x}$  ed  $\bar{y}$  in modo che

- $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^*$  proprietà *Hermitiana*, ovvero *commutativa* se  $K = \mathbb{R}$
- $\langle a\bar{x} + b\bar{y}, \bar{z} \rangle = a \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + b \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$  proprietà *lineare e distributiva*
- $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$  reale, con  $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$  se e solo se  $\bar{x} = 0$

da cui si ottiene che nel caso complesso deve risultare anche  $\langle \bar{x}, a\bar{y} \rangle = a^* \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$  detta proprietà *antilineare*<sup>33</sup>. Osserviamo quindi che la relazione  $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$  può essere efficacemente utilizzata come *norma* di  $\bar{x}$ , semplicemente ponendo<sup>34</sup>

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \quad (2.18)$$

senza dover ricorrere a *definizioni* come per la (2.16). L'esistenza del prodotto interno pertanto *induce* una norma (e dunque una *distanza*) rendendo *metrico* lo spazio lineare, che viene detto

<sup>31</sup>Per altri valori di  $p$  si ottengono risultati che hanno senso in particolari circostanze: ad esempio per  $p = 1$  si ha  $\|\bar{x} - \bar{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$  detta distanza *Manhattan*, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Geometria\\_del\\_taxi](https://it.wikipedia.org/wiki/Geometria_del_taxi), mentre per  $p = \infty$  si ottiene  $\|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty = \max_i \{|x_i - y_i|\}$ , vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Distanza\\_di\\_Cebicev](https://it.wikipedia.org/wiki/Distanza_di_Cebicev).

<sup>32</sup>In genere il termine *prodotto interno* si riferisce al caso in cui lo spazio sia di natura *complessa*, mentre si dice *prodotto scalare* qualora sia definito sul campo dei numeri reali. Nel seguito potrà essere usato *prodotto scalare* anche nel caso complesso.

<sup>33</sup>Infatti risulta  $\langle \bar{x}, a\bar{y} \rangle = \langle a\bar{y}, \bar{x} \rangle^* = (a \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle)^* = a^* \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^* = a^* \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$

<sup>34</sup>Le proprietà  $0 \leq \|\bar{x}\| < \infty$  e  $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda| \|\bar{x}\|$  che definiscono una norma sono facilmente verificate, mentre per dimostrare che  $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$  ovvero  $\sqrt{\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle} \leq \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} + \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle}$  occorre utilizzare il risultato (2.19). Scriviamo infatti

$$\begin{aligned} \langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle &= \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + 2\Re \{ \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \} + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \\ &\leq \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2 \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| = (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 \end{aligned}$$

in quanto  $\Re \{ \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \} \leq |\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$  dove la seconda disuguaglianza è appunto la (2.19). Dunque, dato che in base alla (2.18) si ha  $\|\bar{x} + \bar{y}\| = \sqrt{\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle}$ , si ottiene  $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ .

di Hilbert qualora sia anche *completo*<sup>35</sup>; inoltre, il prodotto interno aggiunge allo spazio anche la nozione di *angolo*  $\theta$  tra vettori, come discutiamo ora.

**Disuguaglianza di Schwartz** Esprime la relazione<sup>36</sup>

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|^2 \leq \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \cdot \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \quad (2.19)$$

ovvero  $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$ , e quindi afferma che il prodotto interno tra vettori non è mai maggiore del prodotto delle rispettive lunghezze, eguagliandolo solo se i vettori sono proporzionali, ossia  $\bar{x} = \alpha \bar{y}$ <sup>37</sup>, o in termini geometrici, *paralleli*.

**Angolo tra vettori** Dopo aver notato che dalla (2.19) si ottiene  $0 \leq \frac{|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} \leq 1$ , indichiamo i due estremi 0 e 1 come condizioni di *ortogonalità* e *parallelismo*, e dato che esiste un solo angolo  $\theta$  tale che  $\cos \theta = \frac{|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$ , identifichiamo  $\theta$  come l'angolo<sup>38</sup> tra  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , in modo che la (2.19) possa essere letta nel consueto modo della fisica e della geometria, ovvero

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \cdot \cos \theta \quad (2.20)$$

e cioè *il prodotto scalare è pari al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso tra i vettori*. Forti questo nuovo risultato, possiamo affermare che

*Due vettori si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo, ossia  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ .*

Procediamo con l'individuare una *modalità di calcolo* per il prodotto scalare, restringendo per ora l'analisi al caso di spazi a dimensione  $n$  finita e *isomorfi* (in quanto con base ortogonale) ad uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ , ovvero  $\mathbb{C}^n$  nel caso più generale di vettori a componenti complesse.

**Prodotto scalare tra vettori espressi su di una medesima base ortogonale** Come espresso dalla (2.15), i vettori  $\bar{x}$  di uno spazio lineare (tanto più se di Hilbert) possono essere espressi come una combinazione lineare  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i$  tra i vettori  $\bar{u}_i \in \mathcal{B}$  (che compongono una base di rappresentazione  $\mathcal{B}$ ) mediante coefficienti  $\{x_i\}$ . Se ora aggiungiamo che tra gli elementi di  $\mathcal{B}$  debba sussistere la condizione di ortogonalità a coppie, ovvero  $\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = 0$  per tutti gli

<sup>35</sup>Ogni spazio di Hilbert è quindi anche di Banach, ma il viceversa è vero solo se la metrica è indotta da un operatore di prodotto interno, che rispetti le proprietà su indicate; vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio\\_di\\_Hilbert](https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Hilbert)

<sup>36</sup>Innanzitutto osserviamo che deve risultare  $\bar{x}, \bar{y} \neq 0$ , altrimenti la (2.19) è banalmente  $0 = 0$ . Applichiamo quindi la relazione  $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$  ad un vettore  $\bar{x} - \lambda \bar{y}$  con un qualunque  $\lambda \in K$  (sia per  $K = \mathbb{R}$  che per  $K = \mathbb{C}$ ), scrivendo

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\bar{x} - \lambda \bar{y}\|^2 &= \langle \bar{x} - \lambda \bar{y}, \bar{x} - \lambda \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle - \langle \lambda \bar{y}, \bar{x} \rangle + \lambda^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \\ &= \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle - \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle^* + \lambda^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - 2\Re \{ \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle \} + \lambda^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \end{aligned}$$

Ponendo ora  $\lambda = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle}$  e tenendo conto che  $\langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle = \lambda^* \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$  e che  $\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle$  è reale, otteniamo

$$0 \leq \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - 2\Re \left\{ \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^*}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \right\} + \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle^2} \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - 2 \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} + \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle}$$

da cui si ottiene la (2.19). Approfondimenti su [https://it.wikipedia.org/wiki/Disuguaglianza\\_di\\_Cauchy-Schwarz](https://it.wikipedia.org/wiki/Disuguaglianza_di_Cauchy-Schwarz).

<sup>37</sup>Infatti in tal caso la (2.19) diviene

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| = |\langle \alpha \bar{y}, \bar{y} \rangle| = |\alpha \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle| = \left| \alpha \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \right| = \sqrt{\alpha^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

dato che  $\alpha^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \alpha \alpha^* \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \alpha \bar{y}, \alpha \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle$ .

<sup>38</sup>Come fatto notare si ottiene  $\cos \theta = 1$  quando  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono paralleli e la (2.19) è un'uguaglianza. Dal canto suo  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$  è un numero (se  $K = \mathbb{C}$ ) a priori *complesso*, e dunque l'operazione di modulo  $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|$  limita il risultato a  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . Quindi  $\theta$  è un angolo *un po' per modo di dire*; ciononostante, il concetto di parallelismo e ortogonalità che ne deriva è molto utile.

$i \neq j$ , l'intera base è detta *ortogonale*, ed i coefficienti  $x_i$  si determinano<sup>39</sup> eseguendo il prodotto scalare di  $\bar{x}$  con ognuno di essi

$$x_i = \frac{\langle \bar{x}, \bar{u}_i \rangle}{\|\bar{u}_i\|^2} \quad (2.21)$$

Possiamo a questo punto valutare il *prodotto scalare* tra coppie di vettori  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i$  e  $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i \bar{u}_i$  con coefficienti  $\{x_i\}$  e  $\{y_i\}$  ottenuti mediante la (2.21), nei termini del prodotto scalare tra i vettori dei coefficienti, ovvero:<sup>40</sup>

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \|\bar{u}_i\|^2 \quad (2.22)$$

**Calcolo della norma su di una base ortonormale** Se i vettori  $\bar{u}_i$  oltre ad essere ortogonali hanno tutti norma pari ad uno ovvero  $\|\bar{u}_i\|^2 = \langle \bar{u}_i, \bar{u}_i \rangle = 1$  essi vengono detti *unitari*, la base è detta *ortonormale*<sup>41</sup>, e dalla (2.22) si ottiene per il prodotto scalare tra  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \quad (2.23)$$

mentre la norma *quadratica* di un generico vettore  $\bar{x}$  si ottiene come

$$\|\bar{x}\|^2 = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad (2.24)$$

che corrisponde al quadrato della (2.16) per  $p = 2$ . Quindi, quando la base  $\mathcal{B}$  di rappresentazione è ortonormale, ed il prodotto interno è definito dalla (2.23), la norma indotta (2.24) assume la stessa forma della (2.16) corrispondente all'ordine  $p = 2$ , accomunando il comportamento degli spazi di Hilbert a quello noto per la geometria euclidea, in cui la base è appunto ortonormale.

Una forma più generale per indicare sia l'ortogonalità che l'unitarietà è quella di scrivere  $\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = \delta_{i,j}$ , detto *delta di Kronecker* che vale 1 se  $i = j$  e zero in caso contrario. La sua versione continua è il *delta di Dirac*, introdotto al § 3.4.

Notiamo infine come il prodotto scalare  $\langle \bar{x}, \bar{u}_i \rangle$  tra  $\bar{x}$  ed un vettore della base ortonormale sia una *proiezione ortogonale*, nel senso che potendo scrivere  $\langle \bar{x}, \bar{u}_i \rangle = |\bar{x}| \cdot |\bar{u}_i| \cdot \cos \theta$  (eq. (2.20)) ed essendo  $\bar{u}_i$  a lunghezza unitaria, si ottiene la lunghezza *dell'ombra* del primo nella direzione del secondo.

**Distanza indotta dal prodotto scalare** Si esprime come la *norma del vettore differenza* ovvero applicando la (2.24)

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\|\bar{x} - \bar{y}\|^2} = \sqrt{\langle \bar{x} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

che a sua volta corrisponde a quella di ordine  $p = 2$  che abbiamo definito per gli spazi euclidei (eq. (2.17)); si ricordi che nel caso di vettori complessi risulta  $|x_i - y_i|^2 = (x_i - y_i)(x_i - y_i)^* = (\Re\{x_i - y_i\})^2 + (\Im\{x_i - y_i\})^2$ .

<sup>39</sup>E sufficiente eseguire il prodotto scalare di ambo i membri di  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i$  per ciascuno dei vettori  $\bar{u}_j$  per ottenere  $\langle \bar{x}, \bar{u}_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = x_j \langle \bar{u}_j, \bar{u}_j \rangle = x_j \|\bar{u}_j\|^2$  dato che  $\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = 0$  per  $i \neq j$  e che  $\langle \bar{u}_j, \bar{u}_j \rangle = \|\bar{u}_j\|^2$ .

<sup>40</sup>Scriviamo infatti  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i, \sum_{j=1}^n y_j \bar{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i \bar{u}_i, y_j \bar{u}_j \rangle$  ma, essendo  $\bar{u}_i$  e  $\bar{u}_j$  ortogonali la doppia sommatoria si riduce ad una sola, ovvero  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i \bar{u}_i, y_i \bar{u}_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \|\bar{u}_i\|^2$ .

<sup>41</sup>Da una qualsiasi base ortogonale se ne può ottenere una diversa ma con elementi di norma unitaria, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Base\\_ortonormale](https://it.wikipedia.org/wiki/Base_ortonormale)

**Esercizio** Dati due vettori complessi  $\bar{x} = [1 + j2, 0]$  e  $\bar{y} = [3 + j4, -j2]$  calcolare la norma di entrambi, e la loro distanza. Si ha  $\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = \sqrt{(1^2 + 2^2) + 0^2} = \sqrt{5}$  e  $\|\bar{y}\| = \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} = \sqrt{(3^2 + 4^2) + 2^2} = \sqrt{29}$ ; mentre  $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = [1 + j2 - 3 - j4, 0 + j2] = [-2 - j2, j2]$  e dunque  $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(2^2 + 2^2) + 2^2} = \sqrt{12}$ .

## 2.4.4 Spazi a dimensionalità infinita

I risultati a cui siamo pervenuti, e che sono stati dimostrati per spazi con un numero  $n$  finito di dimensioni, mantengono validità anche qualora detto numero divenga infinito, come per gli spazi dei segnali periodici o di energia.

Un esempio di spazio con infinite (ma numerabili) dimensioni è quello indicato come  $L^p$  e descritto da un vettore le cui componenti sono elementi di una *successione*  $\bar{x} = \{x_i\}$  con  $i = 1, 2, \dots, \infty$ , e per le quali la norma  $\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}$  converge ad un numero finito. La successione  $X_n$  dei coefficienti di una serie di Fourier rispetta tale proprietà per  $p = 2$ , e la corrispondente norma quadratica  $(\|\bar{x}\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |X_n^2|$  esprime<sup>42</sup> la potenza di  $\bar{x}$  nei termini del teorema di Parseval.

Un altro spazio ad infinite dimensioni (stavolta *non numerabili*) è quello  $L^p$  delle *funzioni*  $\bar{x} = x(t)$  la cui  $p$ -esima potenza è sommabile<sup>43</sup>, la norma di ordine  $p$  in questo caso viene definita come  $\|x(t)\|_p = (\int x^p(t) dt)^{1/p}$  e per  $p = 2$  ritroviamo la classe dei *segnali di energia*, alla cui energia corrisponde la *norma quadratica*  $\mathcal{E}_x = (\|f(t)\|_2)^2 = \int x^2(t) dt$ , mentre la distanza  $d_2(x(t), y(t))$  tra segnali è la radice dell'errore quadratico  $\int |x(t) - y(t)|^2 dt$ .

Anche se non ci addenteremo nei dettagli analitici soggiacenti, il tipo di equivalenze ora accennate sono conseguenza dell'adattare a questo genere di casi la definizione (2.23) di prodotto scalare, rendendo possibile associare alle relazioni ottenibili per i segnali una interpretazione geometrica unificante.

### 2.4.4.1 Spazio dei segnali periodici

Lo spazio vettoriale descritto dall'insieme dei segnali periodici di periodo  $T$  può essere dotato di un operatore di prodotto interno tra segnali  $x(t)$  ed  $y(t)$  nella forma di

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt \quad (2.25)$$

che quando calcolato per  $y(t) = x(t)$  permette di equiparare la *norma quadratica* di  $x(t)$  alla relativa *potenza*

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

e dunque la sua norma corrisponde al relativo *valore efficace* (pag. 14). Osserviamo che

- la base ortonormale di rappresentazione dei segnali periodici è costituita dai segnali  $u_n = e^{j2\pi n F t}$  con periodo  $T = \frac{1}{F}$ , in quanto per essi si ha  $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = \delta_{n,m}$  come ottenuto nella (2.14). Si riconosce allora che la relazione eq. (2.6) rappresenta il

<sup>42</sup>A chi si sta chiedendo dove siano finiti gli indici *negativi*, rispondo che gli indici sono stati *riorganizzati* alterandone la numerazione, tanto rimangono comunque di una infinità numerabile.

<sup>43</sup>La  $L$  usata per definire tali insiemi sta per *Lebesgue*, legata cioè al modo di calcolare l'integrale che prende nome da tale matematico, e che assegna uguale valore all'integrale di due funzioni che differiscono in un insieme di punti a misura nulla, dette funzioni *uguali quasi ovunque*, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Integrale\\_di\\_Lebesgue](https://it.wikipedia.org/wiki/Integrale_di_Lebesgue) e [https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio\\_Lp](https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_Lp)

prodotto scalare tra il segnale ed i vettori della base (2.21), dato che dalla (2.25) si ottiene<sup>44</sup>

$$\langle \bar{x}, \bar{u}_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt = X_n;$$

- l'espressione della serie di Fourier  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$  (eq. (2.7)) costituisce la rappresentazione del segnale nei termini delle sue componenti ortogonali su base ortonormale, come espresso dalla (2.15);
- il risultato fornito dal teorema di Parseval  $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$  (eq. (2.12)) non è altro che la (2.24), ovvero il calcolo della norma quadratica come somma dei quadrati delle componenti  $X_n$  di  $x(t)$  rispetto ai vettori  $e^{j2\pi n F t}$  della base.

La differenza rispetto alla trattazione generale è che ora per descrivere lo spazio occorrono *infiniti* (ma numerabili) vettori della base; in tal senso, lo spazio (dei segnali con periodo  $T$ ) è detto *separabile*, che nel contesto della teoria dei segnali significa che è costituito dalle sole frequenze *armoniche* della fondamentale.

Una seconda conseguenza dell'ortogonalità della base costituita dagli  $e^{j2\pi n F t}$  è che qualora dalla serie venga ommesso qualche termine (ovvero qualche indice  $n$ ) ottenendo un diverso segnale  $\hat{x}(t) = \sum_{incompleta} X_n e^{j2\pi n F t}$ , il corrispondente errore  $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , periodico anch'esso, giace su di un *sottospazio ortogonale* a quello esplorato dai vettori presenti nella serie, e (si dimostra che) ha la minima norma, e dunque potenza, possibile.

#### 2.4.4.2 Spazio dei segnali di energia e di potenza

**Definizione del prodotto interno** Anche in questi due casi è possibile definire un operatore prodotto interno, che per segnali di energia prende la forma

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \quad (2.26)$$

a cui corrisponde una *norma quadratica*  $\|x(t)\|^2 = \langle x(t), y(t) \rangle$  pari all'*energia* del segnale  $\mathcal{E}_x = \|x(t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$ . Per segnali di *potenza* invece il prodotto scalare si scrive come

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt \quad (2.27)$$

a cui corrisponde una *norma quadratica* che è pari alla *potenza* del segnale  $\mathcal{P}_x = \|x(t)\|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$ .

**Disuguaglianza di Schwartz** La (2.19) può essere applicata sia ai *segnali di energia* che a quelli di *potenza*, in quanto le relative espressioni per il prodotto interno, quando sostituite nella (2.19), permettono di scrivere (nel caso di energia)

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \quad (2.28)$$

ovvero che il quadrato del prodotto scalare (ovvero dell'*energia mutua*, § 3.2) tra segnali è sempre inferiore del prodotto delle rispettive energie (o potenze), oppure uguale nel caso in cui un

<sup>44</sup>Ad esempio, la componente continua  $X_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j0} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$  rappresenta il prodotto scalare tra  $x(t)$  ed un segnale costante pari ad uno.

segnale sia proporzionale all'altro, ovvero  $x(t) = \alpha y(t)$ . Per il caso dei segnali di potenza valgono le stesse parole, dopo aver sostituito la (2.28) con

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |y(t)|^2 dt$$

Questi concetti troveranno applicazione ad es. al § 3.2 relativamente all'*energia mutua*, al § 6.1.4 nel definire la *correlazione* tra segnali, al § 6.8 per l'analisi del *filtro adattato*... Ma lanciamoci prima su di una ulteriore speculazione, di cui tralasciamo il rigore teorico: buona parte delle relazioni affrontate nella prima parte del testo *sono una forma di prodotto interno*.

### 2.4.4.3 Spazio dei funzionali lineari definiti da un prodotto interno

Al § 1.5.4 si è definito un *sistema* come una trasformazione  $\mathcal{T}[\cdot]$  che produce segnali di uscita in funzione di segnali di ingresso ovvero  $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$ . Dal punto di vista dell'analisi  $\mathcal{T}[\cdot]$  viene pensato come un operatore o *funzionale*<sup>45</sup> lineare (eq. (1.3)) che *mappa* i vettori  $\bar{x}$  dello spazio  $\mathcal{X}$  dei segnali di ingresso, in elementi  $\bar{y}$  di uno spazio  $\mathcal{Y}$  di segnali di uscita, eventualmente *monodimensionale*.

Qualora  $\mathcal{X}$  sia uno spazio di Hilbert (ossia completo e dotato di prodotto interno), allora qualunque funzionale  $\mathcal{T}_\varphi[\bar{x}]$  può essere espresso nella forma di un prodotto interno  $\mathcal{T}_\varphi[\bar{x}] = \langle \bar{x}, \bar{\varphi} \rangle$  tra il vettore  $\bar{x} \in \mathcal{X}$  ed un altro vettore-segnale  $\bar{\varphi}$  che caratterizza la trasformazione.

Se anche  $\bar{\varphi} \in \mathcal{X}$ , quando  $\bar{\varphi} = \bar{x}$  si ottiene il funzionale che calcola l'*energia* o la *potenza*, mentre se  $\bar{\varphi} \neq \bar{x}$  si ottiene la formula di calcolo per l'*energia mutua* (3.5) e l'*intercorrelazione* (6.6). Nell'intercorrelazione in particolare il vettore  $\bar{\varphi}$  che caratterizza il funzionale dipende da *due* variabili  $\bar{\varphi} = \varphi(t, \theta)$ , in modo che il risultato del prodotto interno

$$\langle x(t), \varphi(t, \theta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi^*(t, \theta) dt = y(\theta)$$

dipenda dalla nuova variabile  $\theta$ . Dato che stiamo portando esempi che rimandano ad argomenti trattati nei capitoli successivi, può essere opportuno tornare qui dopo aver svolto una prima fase di studio, almeno fino al cap. 6.

Prendiamo ad esempio il caso della *trasformata di Fourier* (3.1), che calcola

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \langle x(t), e^{j2\pi ft} \rangle$$

e che costituisce dunque la proiezione di  $x(t)$  nei confronti del segnale  $e^{j2\pi ft}$ , che a sua volta rappresenta il vettore  $\varphi(t, f)$ . A ben guardare, gli esponenziali complessi costituiscono una base *ortonormale* per i segnali di energia (§ 3.8.4), condizione che in questo spazio è definita come

$$\langle \varphi(t, f), \varphi(t, \lambda) \rangle = \delta(f - \lambda)$$

in cui  $\delta$  è un *impulso di Dirac*. Da questa proprietà degli  $e^{j2\pi ft}$  discende sia l'esistenza della *antitrasformata* nella forma (3.2), sia la proprietà di *unitarietà*<sup>46</sup> della trasformazione, ovvero di non alterare la lunghezza dei vettori nel passare dagli elementi dello spazio di segnale  $\mathcal{X}$  funzione di  $t$  e quelli dello spazio immagine  $\mathcal{Y}$  funzione di  $f$ , e che dà luogo al teorema di Parseval.

<sup>45</sup>Vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Analisi\\_funzionale](https://it.wikipedia.org/wiki/Analisi_funzionale)

<sup>46</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Unitary\\_operator](https://en.wikipedia.org/wiki/Unitary_operator)

In alcuni casi il vettore  $\varphi$  che caratterizza il funzionale dipende da una *differenza* di variabili ovvero

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(t - \tau)$$

come nell'operazione di *setacciamento* (3.14), di *trasformata di Hilbert* (9.23), o di *convoluzione* (3.18): in quest'ultimo caso  $\varphi(t, \tau) = h(t - \tau)$  è direttamente legato alla *risposta impulsiva*  $h(t)$  che caratterizza completamente il sistema.

Se aver verificato che una convoluzione e dunque un filtro corrisponde ad un prodotto scalare e quindi ad un funzionale ovvero un sistema non ci è bastato, allarghiamo il discorso aggiungendo il fatto che l'insieme dei funzionali  $\mathcal{T}_\varphi$  che operano su di un medesimo spazio di Hilbert  $\mathcal{X}$  di ingresso costituisce esso stesso uno spazio di Hilbert, detto *spazio duale*<sup>47</sup>  $\mathcal{X}^*$ , in cui la norma è definita come

$$\|\mathcal{T}_\varphi\| = \|\bar{\varphi}\| = \sqrt{\langle \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle}$$

e se  $\|\bar{\varphi}\| < \infty$  il funzionale è *continuo*. Se inoltre  $\mathcal{X}$  possiede una base *ortonormale*  $\{u_i(t)\}$  mediante la quale rappresentare i suoi vettori come  $x(t) = \sum_{i=1}^n x_i u_i(t)$  in cui  $x_i = \langle x(t), u_i(t) \rangle$ , allora i funzionali di  $\mathcal{X}^*$  possono a loro volta essere rappresentati come una combinazione lineare di vettori-segnali.

Un modo diretto di procedere esprime il *segnale di uscita*  $y(\theta) = \mathcal{T}_{\varphi, \theta}[x(t)]$  come

$$y(\theta) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{T}_{\varphi, \theta}[u_i(t)] = \sum_{i=1}^n x_i v_i(\theta)$$

in cui<sup>48</sup>  $v_i(\theta)$  è il risultato del funzionale  $\mathcal{T}_\varphi$  applicato ai vettori della base  $u_i(t)$  di  $\mathcal{X}$ , che dunque opera sommando i suoi *vettori di risposta*  $v_i(\theta)$  (che appartengono a  $\mathcal{Y}$ ) con pesi pari alle componenti  $x_i$  di  $x(t)$  rispetto agli  $u_i(t)$ .

**Esempio** L'integrale di convoluzione  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$  esprime l'uscita  $y(t)$  come combinazione lineare delle  $h(t - \tau)$  effetto degli impulsi  $\delta(t)$ , che costituiscono una base ortonormale per  $x(t)$  nei termini espressi dalla proprietà di setacciamento  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$ , vedi § 3.4.

Non è però detto che  $\{v_i(\theta)\}$  formi una base di vettori linearmente indipendenti per lo spazio di uscita  $\mathcal{Y}$ ; poniamo allora di conoscere una base ortonormale  $\{\tilde{u}_i(\theta)\}$  per lo spazio  $\mathcal{Y}$ <sup>(49)</sup>: in tal caso esiste un insieme di  $n$  vettori  $\{z_i(t) \in \mathcal{X}\}$  che dipende sia da  $\{\tilde{u}_i(\theta)\}$  che da  $\{u_i(t)\}$  e dalla sua trasformata  $\{v_i(\theta)\}$ <sup>50</sup>, e che individua altrettanti funzionali  $\mathcal{T}_{z_i}[x(t)] = \langle x(t), z_i(t) \rangle$  in modo da poter scrivere

$$y(\theta) = \sum_{i=1}^n \langle x(t), z_i(t) \rangle \tilde{u}_i(\theta) = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}_{z_i}[x(t)] \tilde{u}_i(\theta)$$

decomponendo quindi  $\mathcal{T}_\varphi$  in  $n$  funzionali dipendenti dalla scelta delle basi.

<sup>47</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio\\_duale](https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_duale)

<sup>48</sup>Infatti  $v_i(\theta) = \mathcal{T}_{\varphi, \theta}[u_i(t)] = \langle u_i(t), \varphi(t, \theta) \rangle$ . Ma è anche vero che  $\langle u_i(t), \varphi(t, \theta) \rangle = \langle \varphi(t, \theta), u_i(t) \rangle^* = (\mathcal{T}_{u_i}[\varphi(t)])^*$  e dunque i segnali  $v_i(\theta)$  sono anche coniugati alla proiezione di  $\varphi(t)$  lungo il vettore della base  $u_i(t)$ .

<sup>49</sup>E dunque poter esprimere ogni suo vettore come  $y(\theta) = \sum_{i=1}^n y_i \tilde{u}_i(\theta)$  in cui  $y_i = \langle y(\theta), \tilde{u}_i(\theta) \rangle$  è la proiezione di  $y(\theta)$  lungo  $\tilde{u}_i(\theta)$ .

<sup>50</sup>La relazione che lega  $z_j(t)$  alle altre grandezze dovrebbe risultare  $z_j(t) = \sum_{i=1}^n \langle \tilde{u}_j(\theta), v_i(\theta) \rangle u_i(t)$ , ma il testo *Signal Theory* di L.E. Franks che ho utilizzato per questa parte forse ha saltato qualche passaggio, o non ho avuto la pazienza di ricostruirlo.

## 2.5 Appendici

### 2.5.1 Convergenza della serie di Fourier

Illustriamo le condizioni *sufficienti* a garantire la convergenza della serie di Fourier (2.7) al segnale  $x(t)$  di partenza per ogni istante  $t$ .

**Condizioni di Dirichlet** Qualora  $x(t)$ , per  $t$  interno all'intervallo di un periodo  $t \in (-T/2, T/2)$ ,

1. sia assolutamente integrabile, ovvero  $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$ ;
2. presenti un numero finito di discontinuità di prima specie<sup>51</sup>, ovvero sia continua a tratti;
3. contenga un numero finito di massimi e minimi, ovvero sia derivabile ovunque, esclusi al più un numero finito di punti in cui la derivata presenta discontinuità di prima specie;

allora la serie  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$  eguaglia il valore  $x(t)$  del segnale utilizzato per calcolarne i coefficienti  $X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt$  in tutti i punti in cui  $x(t)$  è continuo, mentre negli istanti di discontinuità di prima specie, fornisce un valore pari alla media dei valori limite destro e sinistro. Tali condizioni si applicano direttamente ai segnali  $x(t)$  reali, mentre nel caso di segnali complessi, si applicano in modo indipendente alla parte reale ed a quella immaginaria. Inoltre le condizioni sono sufficienti e non necessarie, nel senso che anche se lo sviluppo di un segnale in serie di Fourier converge, non è detto che lo stesso soddisfi tali condizioni.

Nella pratica, i segnali che rappresentano fenomeni fisici sono *di energia*, cioè per essi si può assumere sempre verificata la condizione  $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$ , più debole della condizione  $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$ , ma ciononostante quasi sempre è possibile ottenere lo sviluppo in serie; inoltre, tali segnali sono in pratica sempre continui, rendendo verificata la seconda condizione. Infine, nel caso ad esempio di un'onda triangolare (vedi § 2.5.2), la derivata soddisfa anche la terza condizione.

**Rapidità di convergenza** Svolgiamo ora qualche riflessione in merito alla velocità con cui i coefficienti  $X_n$  tendono a zero per  $n \rightarrow \infty$ . Si può mostrare che se un segnale soddisfa le condizioni di Dirichlet, allora le ampiezze dei relativi coefficienti di Fourier rispettano l'andamento  $|X_n| \leq \frac{\alpha}{n}$ , ovvero le armoniche presentano ampiezze che si riducono con legge *almeno* inversa del corrispondente ordine. Un caso in cui vale l'uguaglianza è quello relativo all'onda quadra studiata al § 2.2.1.4, in cui sono presenti discontinuità di prima specie. Al contrario, per un'onda triangolare (§ 2.5.2) la velocità di smorzamento delle ampiezze è maggiore, risultando infatti del tipo  $|X_n| = \frac{\alpha}{n^2}$ . Ciò significa che volendo approssimare il segnale troncando la serie ad un indice  $N$ , nel caso di un'onda triangolare la potenza dell'errore sarà molto minore, a parità di  $N$ , di quella osservabile per l'onda quadra. In generale, si può affermare che se la  $k$ -esima derivata di un segnale soddisfa le condizioni di Dirichlet, allora i corrispondenti coefficienti della serie vanno a zero con legge  $|X_n| \leq \frac{\alpha}{n^{k+1}}$ . Ciò in pratica significa che più un segnale ha un andamento *dolce*, e minore sarà il suo contenuto armonico. Il caso limite è rappresentato dalla sinusoidale, alla quale è associata una unica armonica (la fondamentale), e difatti per essa tutte le derivate sono continue essendo, come noto, sinusoidi anch'esse.

<sup>51</sup>Vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Punto\\_di\\_discontinuità](https://it.wikipedia.org/wiki/Punto_di_discontinuità).

### 2.5.1.1 Ri-definizione dei coefficienti di Fourier

Moltiplicando il segnale periodico per  $e^{-j2\pi m F t}$  ed eseguendo l'integrale tra due istanti  $t_1$  e  $t_2$  presi a distanza di un multiplo intero di periodi (ossia  $t_2 - t_1 = kT$ ), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-j2\pi m F t} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t} \right) e^{-j2\pi m F t} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_{t_1}^{t_2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = (t_2 - t_1) \cdot X_m \end{aligned}$$

in quanto per  $n \neq m$  la funzione integranda ha valor medio nullo, dato che nell'intervallo  $(t_1, t_2)$  (dovunque collocato dell'asse dei tempi) presenta un numero intero di periodi. Pertanto, il valore dei coefficienti della serie di Fourier può essere ottenuto a partire da un qualunque intervallo esteso su un numero intero di periodi:

$$X_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt$$

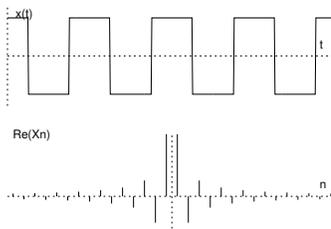
### 2.5.2 Sviluppo in serie per alcuni segnali

Nello schema che segue, sono mostrate le ampiezze delle componenti armoniche  $X_n$  per alcuni segnali periodici di periodo  $T$ , di cui è fornita l'espressione nel tempo per  $|t| < T/2$ .

#### Onda quadra simmetrica

$$x(t) = \begin{cases} +1 & |t| < T/4 \\ -1 & T/4 \leq |t| < T/2 \end{cases}$$

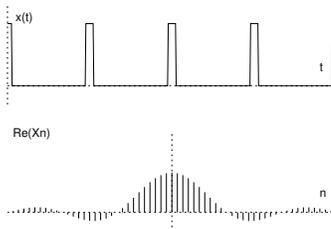
$$X_n = \begin{cases} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$



#### Treno di impulsi rettangolari

$$x(t) = \begin{cases} +1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & \tau/2 \leq |t| < T/2 \end{cases}$$

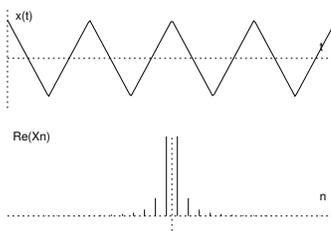
$$X_n = \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T}\right)$$



#### Onda triangolare simmetrica

$$x(t) = 1 - 4 \frac{|t|}{T} \quad |t| < T/2$$

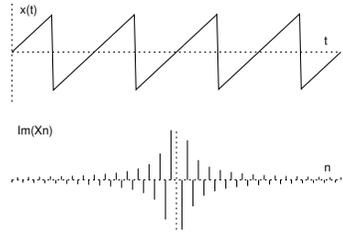
$$X_n = \begin{cases} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$



**Dente di sega simmetrico**

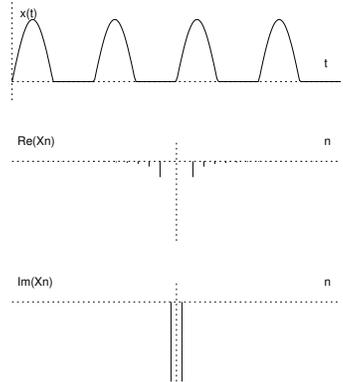
$$x(t) = 2\frac{t}{T} \quad |t| < T/2$$

$$X_n = \begin{cases} j\frac{(-1)^n}{n\pi} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

**Rettificata a singola semionda**

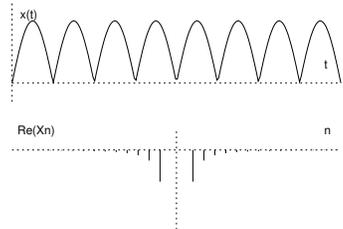
$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & 0 \leq t < T/2 \\ 0 & -T/2 \leq t < 0 \end{cases}$$

$$X_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-n^2)} & n \text{ pari} \\ -j\frac{1}{4} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Rettificata a onda intera**

$$x(t) = |\sin \omega_0 t|$$

$$X_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n^2)} & n \text{ pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

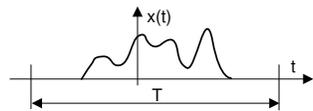


## Trasformata di Fourier e convoluzione

**S**PECIALIZZA al caso di segnali aperiodici l'analisi in frequenza introdotta al § 2.2 per segnali periodici, dando ora luogo ad uno *spettro continuo*. Dopo l'estensione del teorema di Parseval e la definizione di *densità di energia* ed *energia mutua*, il capitolo procede investigando le proprietà della trasformata di Fourier, di cui interrompe l'esposizione per definire l'impulso matematico  $\delta(t)$  e le sue applicazioni come la *risposta impulsiva* e l'*integrale di convoluzione*. Si passa quindi ad illustrare l'equivalenza tra convoluzione e prodotto nel dominio trasformato, con le relative conseguenze sul *filtraggio*, la *modulazione* e la *finestratura*. Dopo aver discusso a riguardo delle proprietà della trasformata di segnali derivati ed integrali, viene definito il *treno di impulsi*, subito applicato per estendere la trasformata di Fourier anche al caso periodico.

### 3.1 Dalla serie alla trasformata

A pag. 33 abbiamo osservato come lo sviluppo in serie di Fourier possa essere applicato ad un segnale *limitato nel tempo*, con il risultato che la formula di ricostruzione  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$  in tal caso rende il segnale originario *periodico*. Se allo stesso tempo il periodo *fittizio*  $T$  su cui sono calcolati i coefficienti  $X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt$  viene fatto tendere ad infinito<sup>1</sup>, le armoniche della serie di Fourier tendono ad infittirsi, fino ad arrivare ad una distanza infinitesima; allo stesso tempo, il periodo del segnale ricostruito tende anch'esso ad infinito, e dunque la ricostruzione non è più periodica.



La *trasformata* di Fourier è idonea a rappresentare segnali privi di struttura periodica, e da un punto di vista formale può essere vista come un *operatore funzionale* che, applicato ad un segnale  $x(t)$  funzione del tempo, ne individua un *secondo*  $X(f)$  con valori complessi e funzione di variabile reale e continua, detta *frequenza* ed indicata con  $f$ ; tale passaggio da tempo a frequenza viene rappresentato attraverso la simbologia  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ , indicando il segnale *trasformato* con la stessa lettera di quello di partenza, ma resa maiuscola. Dal punto di vista analitico la trasformata di Fourier è espressa come

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>Occorre però rimuovere il termine  $1/T$  dell'eq. (2.6), altrimenti i coefficienti andrebbero a zero, essendo il segnale a durata limitata.

e la sua esistenza è garantita per segnali  $x(t)$  impulsivi (pag. 15) ovvero tali che  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ , e per i quali le condizioni di Dirichlet (§ 2.5.1) sono verificate nell'intervallo  $t \in (-\infty, \infty)$ . Dato che un segnale impulsivo è anche di energia (vedi § 1.5.1), la (3.1) è valida anche per segnali di energia<sup>2</sup>. Vedremo al § 3.7 che, grazie ad operazioni di passaggio al limite, la trasformata di Fourier può essere definita anche per segnali periodici, e dunque di potenza.

Il passaggio inverso da  $f$  a  $t$  è detto *antitrasformata* di Fourier, viene indicato come  $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$ , e consente di ri-ottenere il segnale  $x(t)$  di cui la (3.1) ha calcolato la trasformata  $X(f)$ . Da un punto di vista analitico l'antitrasformata di Fourier è definita in modo del tutto simile<sup>3</sup> alla (3.1), ovvero

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3.2)$$

valida ovunque  $x(t)$  sia continuo, mentre nelle discontinuità di prima specie fornisce il valore intermedio tra quelli limite destro e sinistro. Il risultato  $X(f)$  della trasformazione viene indicato anche come *spettro di ampiezza* complessa, e dato che  $X(f)$  assume valori complessi, può esprimersi in forma esponenziale (2.4)  $X(f) = M(f) e^{j\varphi(f)}$  in cui  $M(f)$  ed  $\varphi(f)$  sono indicati come spettri di *modulo* e di *fase* del segnale  $x(t)$ .

**Spettro di ampiezza come densità** L'espressione dell'antitrasformata (3.2) può essere messa a confronto con quella della serie di Fourier  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$ , evidenziando che la prima può essere pensata come una *somma integrale di infinite* componenti  $X(f) df$  di ampiezza *infinitesima*, in cui  $X(f)$  si esprime come *segnale/Hz*, ovvero una *densità*.

**Spazio a dimensionalità infinita** Al § 3.8.4 si mostra come gli esponenziali complessi  $e^{j2\pi ft}$  corrispondano ad una base di rappresentazione *ortonormale* per uno spazio di Hilbert (§ 2.4.3) con un numero di dimensioni *infinito non numerabile*, e dunque  $X(f)$  costituisce la rappresentazione di  $x(t)$  su tale base.

**Relazione tra serie e trasformata per segnali a durata limitata** Consideriamo un segnale  $x(t)$  a *durata limitata*  $T$ , ed un segnale *periodico*  $x^p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT)$  derivato da esso. I coefficienti  $X_n$  della serie di Fourier (2.6) ottenuti per  $x^p(t)$  sono legati ai valori  $X(f)|_{f=n/T}$  dello spettro di ampiezza (3.1) relativo ad  $x(t)$  calcolato in corrispondenza alle frequenze  $f = \frac{n}{T}$  dalla relazione<sup>4</sup>

$$X(f)|_{f=\frac{n}{T}} = T \cdot X_n \quad (3.3)$$

Prima di procedere ad illustrare altre proprietà e caratteristiche della trasformata di Fourier, svolgiamo un semplice esercizio.

**Trasformata di un rettangolo** Disponendo del segnale  $x(t) = A \text{rect}_\tau(t)$ , se ne calcoli lo spettro di ampiezza  $X(f)$ . Si ottiene:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \text{rect}_\tau(t) e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = A \left. \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\ &= \frac{A}{\pi f} \frac{e^{j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}}}{2j} = A\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = A\tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \end{aligned} \quad (3.4)$$

<sup>2</sup>O almeno quasi sempre, dato che non è sempre vero che un segnale di energia sia necessariamente impulsivo.

<sup>3</sup>Da un punto di vista *mnemonico*, cerchiamo di ricordare che l'esponenziale sotto il segno di integrale prende il segno *meno* nel passaggio  $t \rightarrow f$ , ed il segno *più* passando da  $f$  a  $t$ .

<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} X\left(\frac{n}{T}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt = \\ &= T \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt = T \cdot X_n \end{aligned}$$

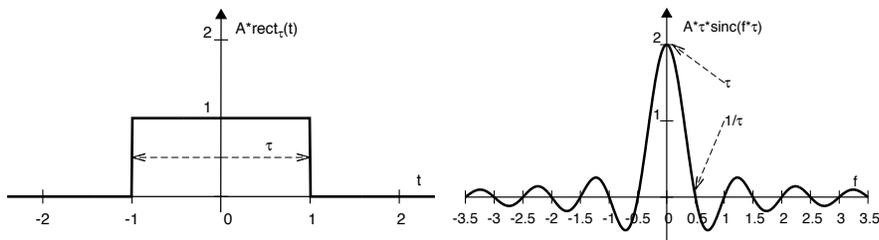


Figura 3.1:  $\mathcal{F}$ -trasformata di un rettangolo di base  $\tau = 2$  ed ampiezza  $A = 1$

Il risultato, graficato in fig 3.1, ricorda quello già incontrato al § 2.2.1.4 per la serie di Fourier dell'onda rettangolare. Il noto andamento  $\text{sinc}(f\tau) = \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$  rappresenta ora la distribuzione in frequenza *continua* dello spettro di ampiezza, con il primo zero della curva che si trova presso  $f = \frac{1}{\tau}$ , in modo del tutto simile al treno di impulsi rettangolari di base  $\tau$ . Notiamo subito che *umentando* la durata del *rect* lo spettro si *concentra*, addensandosi nella regione delle frequenze più basse; mentre al contrario, qualora il *rect* sia più breve,  $X(f)$  si *estende* a regioni di frequenza più elevata.

### 3.2 Energia mutua, Parseval e densità di energia

In analogia a quanto osservato per la potenza dei segnali periodici (§ 2.3), *l'energia* totale  $\mathcal{E}_x$  di un segnale  $x(t)$  si *distribuisce* nel dominio della frequenza come descritto dalla relativa *densità di energia*  $\mathcal{E}_x(f)$ , che si ottiene a partire da  $X(f)$ . Arriviamoci per gradi, illustrando prima due relazioni dirette conseguenza delle considerazioni geometriche svolte al § 2.4.

**Energia mutua**<sup>5</sup> Data una coppia di segnali di energia  $x(t)$  e  $y(t)$ , è definita come il valore

$$\mathcal{E}_{xy} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \quad (3.5)$$

e corrisponde al *prodotto scalare* (eq. (2.26)) tra  $x(t)$  e  $y(t)$  nello spazio a dimensionalità infinita dei segnali di energia. L'energia mutua  $\mathcal{E}_{xy}$  rappresenta una misura di *similarità* tra i due segnali, e qualora sia nulla i segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  sono detti *ortogonali*. Osserviamo che per la disuguaglianza di Schwartz risulta  $\mathcal{E}_{xy} \leq \sqrt{\mathcal{E}_x \cdot \mathcal{E}_y}$ , vedi pag. 46.

**Teorema di Parseval**<sup>6</sup> Se entrambi  $x(t)$  e  $y(t)$  possiedono trasformata di Fourier la (3.5) può essere scritta come

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right] y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) e^{j2\pi ft} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df \end{aligned}$$

ed il risultato

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df \quad (3.6)$$

<sup>5</sup>Nei testi anglofoni la (3.5) è indicata come *cross-energy*, tradotta letteralmente come *energia incrociata*, o meglio, *in comune*.

<sup>6</sup>In realtà l'estensione del teorema di Parseval alla trasformata di Fourier è dovuta a *Plancherel*, vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Plancherel\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Plancherel_theorem)

esprime il *teorema di Parseval* per segnali di energia, ed implica che le trasformate di segnali ortogonali, sono anch'esse ortogonali, e viceversa.

**Densità di energia** Ponendo  $x(t) = y(t)$ , la (3.5) rappresenta ora l'energia  $\mathcal{E}_x$  di  $x(t)$ , ovvero la sua *norma quadratica* in termini vettoriali. Combinando (3.5) con (3.6) si ottiene

$$\mathcal{E}_x = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (3.7)$$

che mette in luce come la trasformata di Fourier sia un operatore *unitario*, ossia che non altera la norma dei vettori trasformati. Osservando l'ultimo membro della (3.7) possiamo interpretare

$$\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2$$

come lo *spettro di densità di energia* di  $x(t)$ . Infatti, l'integrale  $\int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$  rappresenta il contributo all'energia totale  $\mathcal{E}_x$  di  $x(t)$ , limitatamente alla banda di frequenze comprese tra  $f_1$  ed  $f_2$ .

### 3.3 Prime proprietà della trasformata di Fourier

Descriviamo cosa accade al risultato quando le (3.1) e (3.2) sono applicate a particolari classi di segnali, a loro combinazioni e/o trasformazioni, o più in generale, cosa lega le trasformazioni in un verso, con quelle in senso opposto. Altre proprietà sono illustrate a partire dal § 3.5.

**Linearità** Discende molto semplicemente dalla proprietà distributiva dell'integrale che definisce la trasformata. Pertanto:

$$\text{se } z(t) = ax(t) + by(t) \quad \text{allora } Z(f) = aX(f) + bY(f)$$

e ciò consente di catalogare la trasformata di Fourier come un *operatore lineare*<sup>7</sup> (§ 2.4.4.3).

**Simmetria coniugata** Qualora  $x(t)$  sia un segnale *reale* si ottiene<sup>8</sup>

$$X(f) = X^*(-f)$$

ovvero la parte reale di  $X(f)$  è *pari* e quella immaginaria *dispari*, così come il modulo  $|X(f)|$  è pari e la fase  $\arg\{X(f)\}$  dispari. Si applica inoltre il corollario di pag. 33, ovvero se  $x(t)$  oltre ad essere reale è anche pari,  $X(f)$  è reale (pari), mentre se  $x(t)$  è reale dispari,  $X(f)$  è puramente immaginaria (dispari).

**Dualità** Trasformata ed antitrasformata differiscono solo per il segno. Ciò comporta che se sostituiamo alla variabile  $f$  del risultato  $X(f)$  di una  $\mathcal{F}$ -trasformata, la variabile  $t$ , si ottiene una funzione del tempo  $X(t)$  che, se nuovamente trasformata, fornisce ... il segnale originario

<sup>7</sup>Ovvero che mette in corrispondenza coppie di vettori-segnale  $x(t)$  e  $X(f)$  appartenenti allo spazio vettoriale dei segnali di energia definito rispettivamente sul dominio del tempo e della frequenza. Dato che gli esponenziali complessi  $\{e^{j2\pi ft}\}$  costituiscono una base ortonormale per i segnali di energia (§ 3.8.4), osserviamo come la (3.1) valuti il *prodotto interno* tra il vettore  $x(t)$  e un vettore della base, mentre la (3.2) rappresenta l'equivalente continuo della formula di ricostruzione (2.7).

<sup>8</sup>Infatti  $X^*(f) = \left[ \int x(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]^* = \int x^*(t) e^{j2\pi ft} dt = X(-f)$  dato che  $x(t)$  è reale.

$x(t)$ , espresso come funzione della variabile  $f$ , cambiata di segno:  $x(-f)$ . Il concetto esposto, verificabile analiticamente con qualche *trucco*<sup>9</sup>, si riassume come

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}\{\}} X(f) \quad \text{allora sostituendo } f \text{ con } -f &\rightarrow X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}\{\}} x(-t) \\ \text{se } X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}\{\}} x(t) \quad \text{allora sostituendo } t \text{ con } -t &\rightarrow x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}\{\}} X(-f) \end{aligned}$$

e consente l'uso dei risultati ottenuti "in un senso" (ad es. da tempo a frequenza) per derivare senza calcoli i risultati nell'altro (da frequenza a tempo), o viceversa.

**Esempio: Trasformata di un sinc(t)** Supponiamo di voler trasformare il segnale  $x(t) = B \frac{\sin(\pi t B)}{\pi t B} = B \text{sinc}(tB)$ : l'applicazione cieca dell'integrale che definisce la trasformata di Fourier al segnale  $x(t)$  appare un'impresa ardua...

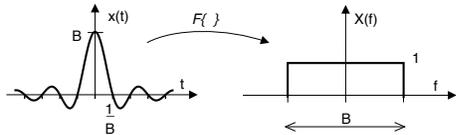
Allora, ricordando che

$$\mathcal{F}\{\text{rect}_\tau(t)\} = \tau \text{sinc}(f\tau)$$

scriviamo direttamente

$$\mathcal{F}\{B \cdot \text{sinc}(tB)\} = \text{rect}_B(f)$$

Pertanto la trasformata di un *sinc* nel tempo, è un rettangolo in frequenza.



**Valore nell'origine (o iniziale) e area** La corrispondenza risulta subito verificabile una volta notato che la trasformata calcolata per  $f = 0$  si riduce all'integrale di  $x(t)$ , e quindi alla sua *area*. Pertanto:

$$X(f = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \quad \text{e, per dualità} \quad x(t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df \quad (3.8)$$

**Esempio** Come applicazione, troviamo subito l'area di un *sinc*(.):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(tB) dt = \frac{1}{B} \text{rect}_B(f = 0) = \frac{1}{B} \quad (3.9)$$

**Traslazione nel tempo** Si tratta di una proprietà molto semplice, e che ricorre frequentemente nei calcoli sui segnali. Esprime la relazione tra la trasformata di un segnale e quella dello stesso qualora traslato, in accordo al predicato

$$\text{se } z(t) = x(t - T) \quad \text{allora} \quad Z(f) = X(f) e^{-j2\pi fT} \quad (3.10)$$

la cui dimostrazione è fornita sotto<sup>10</sup>.

**Esempio** Dato un segnale rettangolare  $x(t) = \text{rect}_\tau(t)$ , valutiamo la trasformata di  $z(t) = x(t - T)$ . L'applicazione diretta della (3.10) porta al risultato  $Z(f) = \tau \text{sinc}(f\tau) e^{-j2\pi fT}$ , e l'esercizio potrebbe dirsi concluso, se non per il desiderio aggiuntivo di disegnare  $Z(f)$  nei termini del suo modulo e fase, ovvero in *notazione esponenziale*  $Z(f) = |Z(f)| e^{j \arg\{Z(f)\}}$ . Ci accorgiamo infatti che il termine  $\text{sinc}(f\tau)$  non è pari a  $|Z(f)|$ ,

<sup>9</sup>Iniziamo dall'espressione dell'antitrasformata  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$  in cui scambiamo tra loro le variabili  $f$  e  $t$  ottenendo  $x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j2\pi ft} dt$ ; operando quindi un cambio di variabile  $f \rightarrow -f$  si ha  $x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt$  che coincide con il risultato mostrato alla prima riga nel testo.

<sup>10</sup>La dimostrazione si basa sul semplice cambio di variabile  $\theta = t - T$ :  $Z(f) = \int x(t - T) e^{-j2\pi ft} dt = \int x(\theta) e^{-j2\pi f(T+\theta)} d\theta = e^{-j2\pi fT} \int x(\theta) e^{-j2\pi f\theta} d\theta = X(f) e^{-j2\pi fT}$

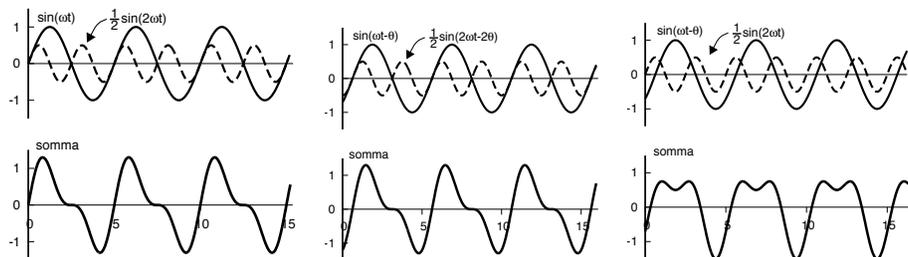


Figura 3.2: Confronto tra diversi spettri di fase

in quanto assume anche valore *negativi*, mentre il modulo, per definizione, è positivo o nullo. Per non appesantire la lettura, la soluzione a questo apparente problema viene svolta al § 3.8.1.

Il termine  $-2\pi fT$  che risulta aggiunto allo spettro di fase originario prende il nome di *fase lineare*, in quanto la sua entità aumenta linearmente con  $f$ , e quindi le frequenze doppie, triple di una frequenza data, subiscono una variazione di fase doppia, tripla, ecc., ma tutte subiscono il medesimo ritardo temporale. Tale circostanza mette in luce una interessante conseguenza anche nel passaggio da frequenza a tempo, ossia:

*Affinché un segnale mantenga inalterato l'aspetto della propria forma d'onda anche a seguito di una modifica della corrispondente trasformata, l'unica alterazione possibile del suo spettro è una variazione costante per il modulo, e lineare per la fase*<sup>11</sup>

**Esempio** Consideriamo un segnale periodico  $x(t)$  costituito da due sole armoniche

$$x(t) = a \sin(\omega t) + b \sin(2\omega t)$$

in cui si è posto  $2\pi F = \omega$ ; la sua versione ritardata è

$$x(t - T) = a \sin(\omega(t - T)) + b \sin(2\omega(t - T)) = a \sin(\omega t - \omega T) + b \sin(2\omega t - 2\omega T)$$

Ponendo  $\omega T = \theta$ , otteniamo

$$x(t - T) = a \sin(\omega t - \theta) + b \sin(2\omega t - 2\theta)$$

e verifichiamo che la seconda armonica subisce un ritardo di fase esattamente doppio. In fig 3.2 si è posto  $a = 1$ ,  $b = 0,5$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$  e  $F = 0,2$ , ed è mostrato sia il segnale somma originario, sia quello ottenuto considerando un contributo di fase lineare per le due armoniche. Verifichiamo come nel secondo caso la forma d'onda sia la stessa ottenibile per  $T = 0$ , in quanto le armoniche sono traslate del medesimo intervallo temporale. A destra invece, la fase della seconda armonica viene annullata, ottenendo dalla somma un segnale  $a \sin(2\pi Ft - \theta) + b \sin(2\pi Ft)$ . Come è evidente, in questo caso il risultato assume una forma d'onda completamente diversa<sup>12</sup>.

**Traslazione in frequenza (Modulazione)** È la proprietà duale della precedente, e stabilisce che

$$\text{se } Z(f) = X(f - f_0) \quad \text{allora } z(t) = x(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

la cui dimostrazione è del tutto analoga a quanto già visto. Da un punto di vista mnemonico, distinguiamo la traslazione temporale da quella in frequenza per il fatto che, nel primo caso, i *segni* della traslazione e dell'esponenziale complesso sono *uguali*, e nel secondo, *opposti*.

<sup>11</sup>Tali condizioni corrispondono a quelle descritte a pag. 183 come un *canale perfetto*.

<sup>12</sup>Nel seguito (§ 8.1.2.2) illustreremo che una conseguenza del risultato discusso, è la sensibilità delle trasmissioni numeriche alle distorsioni di fase.

Da un punto di vista pratico, può sorgere qualche perplessità per la comparsa di un segnale *complesso* nel tempo. Mostriamo però che anti-trasformando uno spettro ottenuto dalla somma di due traslazioni (in frequenza) opposte, si ottiene un segnale *reale*:

$$\mathcal{F}^{-1} \{X(f - f_0) + X(f + f_0)\} = x(t) e^{j2\pi f_0 t} + x(t) e^{-j2\pi f_0 t} = 2x(t) \cos 2\pi f_0 t$$

Pertanto, lo sdoppiamento e la traslazione di  $X(f)$  in  $\pm f_0$  sono equivalenti ad un segnale cosinusoidale di frequenza  $f_0$ , la cui ampiezza è *modulata* dal segnale  $x(t) = \mathcal{F}^{-1} \{X(f)\}$ . E' proprio per questo motivo, che la proprietà è detta di *modulazione* (vedi anche a fig. 3.4).

**Coniugato** Deriva direttamente<sup>13</sup> dalla definizione di trasformata:

$$\mathcal{F} \{x^*(t)\} = X^*(-f); \quad \mathcal{F}^{-1} \{X^*(f)\} = x^*(-t) \quad (3.11)$$

Nel caso di segnali reali, ritroviamo la proprietà di simmetria coniugata  $X(f) = X^*(-f)$ .

**Cambiamento di scala** Quantifica l'effetto che una variazione nella velocità di scorrimento del tempo ha sullo spettro. Possiamo ad esempio pensare come, riavvolgendo velocemente un nastro magnetico, si ascolta un segnale di durata più breve, e dal timbro più *acuto*. Questo fenomeno viene espresso analiticamente come:

$$\mathcal{F} \{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

in cui se  $|a| > 1$  si ottiene una *accelerazione* temporale, ed un *allargamento* dello spettro, oppure il contrario quando  $|a| < 1$ . La dimostrazione (per  $a > 0$ ) è riportata alla nota<sup>14</sup>. Un corollario di questa proprietà è che se  $a = -1$ , allora

$$\mathcal{F} \{x(-t)\} = X(-f)$$

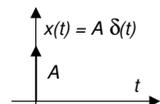
Sospendiamo per ora l'elencazione delle proprietà della trasformata di Fourier, per introdurre un *nuovo segnale* del tutto particolare, grazie al quale potremo definire un ulteriore strumento analitico come *l'integrale di convoluzione*, e con questo caratterizzare l'attraversamento di un sistema da parte dei segnali.

### 3.4 Impulso matematico

Il simbolo  $\delta(t)$ , chiamato impulso matematico o *delta di Dirac*, descrive un segnale *ideale* che vale zero ovunque, tranne per  $t = 0$  dove vale infinito; per contro, l'area di  $\delta(t)$  è *unitaria*:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{con } t = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Da un punto di vista analitico  $\delta(t)$  non è una funzione bensì una *distribuzione*<sup>15</sup>, definita come il limite a cui tende una *successione* di funzioni, come discusso appresso. E' prassi rappresentare graficamente  $A \cdot \delta(t)$  come una freccia (vedi figura) con scritto accanto il valore dell'area A.



Procediamo con l'analisi di alcune importanti applicazioni dell'impulso ora definito.

<sup>13</sup>Infatti  $\mathcal{F} \{x^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi f t} dt = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi f t} dt \right]^* = X^*(-f)$

<sup>14</sup> $\int x(at) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{a} \int x(at) e^{-j2\pi \frac{f}{a} at} d(at) = \frac{1}{a} \int x(\beta) e^{-j2\pi \frac{f}{a} \beta} d\beta = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$

<sup>15</sup>Detta anche *funzione generalizzata*, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Delta\\_di\\_Dirac](https://it.wikipedia.org/wiki/Delta_di_Dirac) e [http://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione\\_\(matematica\)](http://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_(matematica))

**Trasformata di una costante** Anche se per un segnale costante  $x(t) = A$  l'integrale (3.1) non converge, grazie al  $\delta()$  otteniamo che

*La trasformata di Fourier di una costante è un impulso matematico di area pari al valore della costante.*

Tale proprietà è valida per entrambi i domini ( $f$  e  $t$ ) di partenza, fornendo

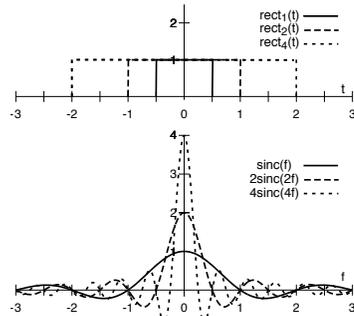
$$\mathcal{F}\{A\} = A \cdot \delta(f) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{-1}\{A\} = A \cdot \delta(t)$$

Osserviamo infatti che la costante  $A$  può essere vista come il limite, per  $\tau \rightarrow \infty$ , di un segnale rettangolare:

$$A = \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \text{rect}_\tau(t)$$

la cui trasformata per  $\tau \rightarrow \infty$  risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\lim_{\tau \rightarrow \infty} A \text{rect}_\tau(t)\right\} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{F}\{A \text{rect}_\tau(t)\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \tau \text{sinc}(f\tau) = \begin{cases} \infty & \text{con } f = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$



Ci troviamo pertanto nelle esatte circostanze che definiscono un impulso matematico, e resta da verificare che  $\int_{-\infty}^{\infty} \tau \text{sinc}(f\tau) df = 1$ : a pag. 57 (eq. (3.9)) si è effettivamente mostrato che tale integrale vale uno per qualunque  $\tau$ , e dunque possiamo scrivere  $\mathcal{F}\{A\} = A \cdot \delta(f)$ .

**Trasformata di segnali periodici** Consideriamo ora un segnale periodico  $x(t)$ , del quale conosciamo lo sviluppo in serie

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$$

Applicando la proprietà di linearità, il risultato per la trasformata di una costante, e ricordando la proprietà della traslazione in frequenza, troviamo<sup>16</sup> che la  $\mathcal{F}$ -trasformata di  $x(t)$  vale:

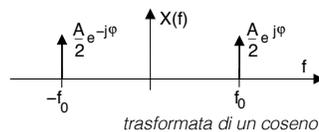
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - nF) \tag{3.12}$$

Lo spettro di ampiezza di un segnale periodico è quindi costituito da *impulsi matematici*, situati in corrispondenza delle frequenze armoniche, e di area pari ai rispettivi coefficienti della serie di Fourier, significando che la densità di ampiezza è concentrata solo su tali frequenze. Un modo alternativo di calcolare la trasformata di segnali periodici è illustrato alla sezione 3.7.

**Trasformata di un coseno** Applichiamo il risultato (3.12) nel verso opposto, ossia per individuare le componenti armoniche, a partire dall'espressione della trasformata di Fourier. Nel caso di un coseno, che scriviamo  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)}}{2}$ , la relativa trasformata di Fourier risulta

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{2} \left( e^{j2\pi f_0 t} e^{j\varphi} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\varphi} \right)\right\} \\ &= \frac{A}{2} \left\{ e^{j\varphi} \delta(f - f_0) + e^{-j\varphi} \delta(f + f_0) \right\} \end{aligned}$$

in cui riconosciamo  $X_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi}$  e  $X_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$  come mostrato in figura.

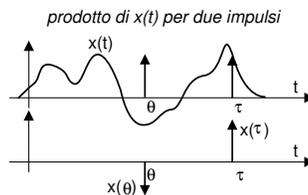


trasformata di un coseno

<sup>16</sup>  $X(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \mathcal{F}\{1 \cdot e^{j2\pi n F t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot \delta(f - nF)$

**Proprietà di campionamento** Esprime il risultato del prodotto di un segnale per un impulso unitario, che da come risultato<sup>17</sup> lo stesso impulso, con area pari al valore del segnale nell'istante in cui è centrato l'impulso, ovvero

$$x(t) \delta(t - \tau) = x(\tau) \delta(t - \tau) \quad (3.13)$$



**Proprietà di setacciamento** Integrando ambo i membri della (3.13) otteniamo  $x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt$  che, dopo un (s)cambio di variabile, consente di scrivere il segnale  $x(t)$  nella forma

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau \quad (3.14)$$

ovvero come una somma<sup>18</sup> di infiniti termini di valore  $x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau$ . La relazione (3.14) è detta proprietà di *setacciamento* (in inglese, SIFTING) in quanto consiste nel passare (metaforicamente) al setaccio  $x(t)$ , che compare in entrambi i membri della (3.14), così come la farina compare su entrambi i lati del setaccio stesso. Che ci facciamo? La usiamo tra poco, al § 3.4.2.

Descriviamo ora come grazie all'impulso  $\delta(t)$  sia possibile definire un particolare segnale noto come risposta impulsiva  $h(t)$ , che descrive completamente un sistema lineare e permanente, e che può essere usata per calcolare la sua uscita in corrispondenza di un ingresso qualsiasi.

### 3.4.1 Risposta impulsiva

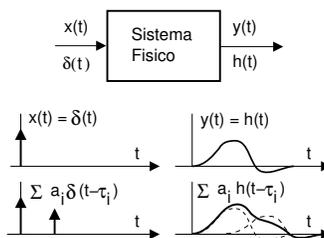
Consideriamo un sistema fisico (elettrico, meccanico, pneumatico...) che venga sollecitato, in un punto considerato come ingresso, da un segnale impulsivo  $\delta(t)$  centrato in  $t = 0$ , ed osserviamo l'andamento temporale di una grandezza (meccanica, pneumatica, elettrica...) che possiamo considerare una uscita. Questo nuovo segnale prende il nome di *risposta impulsiva* (ossia all'impulso) e viene indicato con  $h(t)$ . L'andamento di  $h(t)$  rappresenta quindi la grandezza di uscita, osservata dopo che è passato un tempo pari a  $t$  da quando si è applicato in ingresso l'impulso  $\delta(t)$ , e se il sistema è causale (vedi § 1.5.4) risulta  $h(t) = 0$  con  $t < 0$ , come raffigurato a lato.

Se inoltre il sistema è anche lineare e permanente, applicando un ingresso costituito da più impulsi, ognuno con differente area  $a_i$  e centrato ad un diverso istante  $\tau_i$ , ovvero

$$x(t) = \sum_{i=1}^N a_i \delta(t - \tau_i) \quad (3.15)$$

si ottiene una uscita pari a

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i h(t - \tau_i) \quad (3.16)$$



<sup>17</sup>La (3.13) si dimostra esprimendo  $\delta(t)$  come  $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}_T(t)$  in modo da scrivere il primo membro come  $x(t) \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}_T(t - \tau)$ . Al tendere di  $T$  a zero il rettangolo di ampiezza  $\frac{1}{T}$  converge ad un impulso, la cui area resta moltiplicata per il valore che  $x(t)$  assume per  $t = \tau$ , dove è centrato il rettangolo.

<sup>18</sup>Senza voler entrare nei dettagli analitici, diciamo che la (3.14) rappresenta l'equivalente della formula di ricostruzione (2.15) per uno spazio a cardinalità infinita, in cui  $\delta(\tau - t)$  al variare di  $\tau$  costituisce una base di rappresentazione ortonormale, ed i cui coefficienti  $x(\tau)$  sono calcolati come prodotto scalare  $x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt$ .

Si rifletta sul significato della sommatoria, con l'aiuto della figura precedente: ad un dato istante  $t$ , il valore dell'uscita  $y(t)$  è il risultato dalla somma di  $N$  termini, ognuno legato (a meno del fattore  $a_i$ ) al valore della risposta impulsiva calcolata con argomento  $t - \tau_i$  pari al tempo trascorso tra l'istante di applicazione dell' $i$ -esimo impulso  $\tau_i$ , e l'istante di osservazione  $t$ .

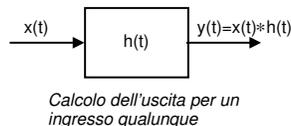
### 3.4.2 Integrale di convoluzione

Consideriamo ancora lo stesso sistema fisico al cui ingresso sia ora posto un generico segnale  $x(t)$  che, grazie alla proprietà di setacciamento (3.14) ed al fatto che  $\delta(t)$  è pari, rappresentiamo scomposto in infiniti termini, ossia in una somma integrale di impulsi centrati in  $\tau$  (variabile) ed area  $x(\tau) d\tau$  (infinitesima)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \delta(t - \tau) \quad (3.17)$$

L'andamento della grandezza di uscita sarà dunque pari alla sovrapposizione di infinite risposte impulsive, ognuna relativa ad un diverso valore dell'ingresso

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.18)$$



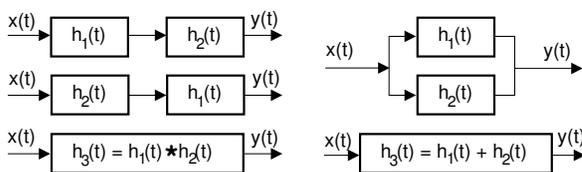
dove  $x(\tau) d\tau$  è l'area infinitesima degli impulsi di cui, in base alla (3.17), è costituito l'ingresso, e  $h(t - \tau)$  è l'uscita all'istante  $t$  causata dall'impulso in ingresso centrato all'istante  $\tau$ . Il risultato ottenuto, formalmente simile a (3.16), prende il nome di *integrale di convoluzione*, e viene indicato in forma simbolica da un asterisco (\*), in modo che ci si possa riferire ad esso anche come *prodotto di convoluzione*, ossia  $g(t) = x(t) * h(t)$ .

Notiamo come  $h(t)$  caratterizzi completamente il sistema fisico, in quanto permette di calcolarne l'uscita per un qualsiasi ingresso.

**Proprietà commutativa** Se un segnale con andamento  $h(t)$  è posto in ingresso ad un sistema con risposta impulsiva  $x(t)$ , si ottiene ancora la stessa uscita, in quanto l'integrale di convoluzione è *commutativo*<sup>19</sup>:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = h(t) * x(t)$$

Questa proprietà, assieme a quella di linearità, consente di stabilire le equivalenze mostrate in figura, dove si mostra come l'attraversamento *in serie* ed *in parallelo* di più sistemi lineari può essere ricondotto all'attraversamento di un sistema equivalente, con risposta impulsiva pari rispettivamente alla convoluzione ed alla somma delle singole risposte impulsive.



Risposta impulsiva equivalente per sistemi in serie e parallelo

<sup>19</sup>Adottando il cambio di variabile  $t - \tau = \theta$ , si ottiene  $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \theta) h(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \theta) h(\theta) d\theta$ . Infatti, il cambio di variabile determina quello degli estremi in integrazione, che vengono poi scambiati ripristinando il segno, vedi ad es. <https://it.wikipedia.org/wiki/Convoluzione>

### 3.4.3 Risposta impulsiva come funzione memoria

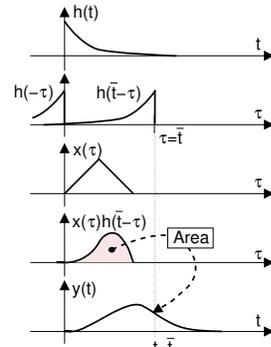
Diamo ora un'interpretazione grafica della convoluzione: poniamo che  $h(t)$  sia un esponenziale decrescente ed  $x(t)$  un segnale triangolare, come mostrato a lato, e proviamo a disegnare la funzione integranda  $x(\tau)h(\bar{t}-\tau)$  che compare nel calcolo dell'uscita, per un generico istante  $t = \bar{t} > 0$ .

La seconda riga della figura mostra l'andamento di  $h(\bar{t}-\tau)$  con  $\tau$  variabile indipendente, e si ottiene prima ribaltando  $h(t)$  rispetto all'origine dei tempi, e quindi traslandola a destra di  $\bar{t}^{20}$ . La terza e quarta riga mostrano rispettivamente l'ingresso  $x(\tau)$  ed il suo prodotto per  $h(\bar{t}-\tau)$ , dunque il risultato dell'integrale di convoluzione che per  $t = \bar{t}$  è pari a

$$y(\bar{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\bar{t}-\tau) d\tau$$

corrisponde all'area del prodotto  $x(\tau)h(\bar{t}-\tau)$ , ombreggiata in figura; per altri valori di  $\bar{t}$ , il termine  $h(\bar{t}-\tau)$  sarà traslato di una diversa quantità<sup>21</sup>.

Il calcolo dell'area di  $x(\tau)h(\bar{t}-\tau)$  ha il significato di sommare le risposte causate da tutti i valori di ingresso, in cui per ogni termine della somma,  $h(\bar{t}-\tau)$  *pondera* l'ingresso in  $\tau$  in base al tempo trascorso  $\bar{t}-\tau$  tra l'istante (passato)  $\tau \leq \bar{t}$  di applicazione del valore di ingresso, e l'istante  $\bar{t}$  di osservazione. Pertanto, i valori di  $h(t)$  rappresentano il peso della memoria, da parte del sistema fisico, degli ingressi precedenti.

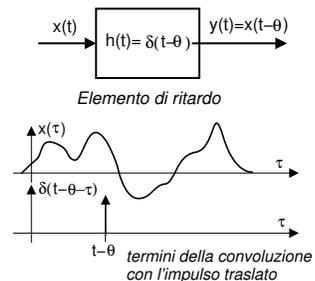


**Estensione temporale della convoluzione** In base alla costruzione grafica discussa, è facile verificare che se  $x(t)$  ed  $h(t)$  presentano una estensione temporale limitata, ovvero  $x(t) \neq 0$  con  $0 \leq t \leq T_x$  e  $h(t) \neq 0$  con  $0 \leq t \leq T_h$ , allora il risultato  $y(t) = x(t) * h(t)$  ha estensione compresa tra  $t = 0$  e  $t = T_x + T_h$ , ossia presenta una durata pari alla somma delle durate.

### 3.4.4 Convoluzione con l'impulso traslato

Consideriamo ora un sistema fisico che operi un semplice ritardo  $\theta$  sui segnali in ingresso: in tal caso scriveremo  $h(t) = \delta(t - \theta)$ , ossia la risposta impulsiva corrisponde all'impulso ritardato. Per calcolare l'uscita, che sappiamo essere pari a  $y(t) = x(t - \theta)$ , possiamo ricorrere all'integrale di convoluzione, ottenendo

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t - \theta) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \theta - \tau) d\tau = x(t - \theta) \end{aligned}$$



Questo risultato ci permette di enunciare un principio generale, che verrà utilizzato di frequente, e che recita:

*La convoluzione tra un segnale  $x(t)$  ed un impulso  $\delta(t - \theta)$  centrato ad un istante  $\theta$  provoca la traslazione di  $x(t)$  all'istante in cui è centrato l'impulso.*

<sup>20</sup>Per convincerci dell'operazione, verifichiamo che per  $\tau < \bar{t}$  l'argomento  $\bar{t} - \tau$  di  $h$  è positivo, e infatti il valore di  $h(\bar{t} - \tau)$  è  $\neq 0$ .

<sup>21</sup>Osserviamo che un integrale calcola un numero, e la convoluzione produce un segnale solo perché l'integrale è calcolato per tutte le possibili traslazioni di  $h(t - \tau)$ , vedi anche § 2.4.4.3.

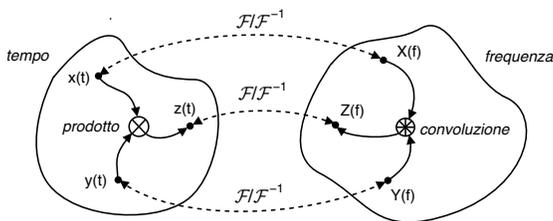


Figura 3.3: Isomorfismo tra gli spazi di segnale nel tempo e nella frequenza

### 3.5 Moltiplicazione in frequenza e nel tempo

Forti dei nuovi strumenti in nostro possesso, riprendiamo la discussione sulle proprietà della trasformata di Fourier. Infatti, la descrizione di un sistema fisico per mezzo della sua risposta impulsiva è di fondamentale utilità soprattutto per merito della seguente proprietà:

*La trasformata di Fourier della convoluzione tra due segnali è pari al prodotto delle trasformate dei segnali*

$$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f) Y(f) \quad (3.19)$$

La dimostrazione è riportata alla nota<sup>22</sup>. Sussiste inoltre anche la proprietà *duale*, ovvero ad un prodotto nel tempo corrisponde una convoluzione in frequenza, che si scrive

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) * Y(f) \quad (3.20)$$

In fig. 3.3 si mostra come l'ultima relazione individui un *isomorfismo* tra spazi di segnale; chiaramente la (3.19) rappresenta un isomorfismo analogo. Nel seguito, trattiamo delle conseguenze e dei risvolti legati alla coppia di proprietà ora introdotte, iniziando dalla prima.

#### 3.5.1 Moltiplicazione in frequenza (filtraggio)

La proprietà (3.19) consente una diversa modalità di calcolo dell'uscita da un sistema fisico, che può infatti essere ricavata operando nel dominio della frequenza, calcolando prima

$$Y(f) = \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = X(f) H(f) \quad (3.21)$$

e quindi valutando  $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\}$ . La trasformata della risposta impulsiva  $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$  prende il nome di *risposta in frequenza*, per il motivo esposto di seguito, assieme ad un paio di esempi di applicazione di questa proprietà a casi già noti al lettore. Approfondimenti sulle operazioni di filtraggio possono essere trovati al cap. 6, da affrontare dopo lo studio di processi ergodici al § 5.3.

**Risposta in frequenza** Ponendo in ingresso al sistema un segnale esponenziale complesso  $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ , in cui è presente l'unica frequenza  $f_0$  (infatti  $X(f) = \delta(f - f_0)$ ), la proprietà del prodotto per un impulso permette di valutare una uscita  $Y(f) = H(f) \delta(f - f_0) = H(f_0) \delta(f - f_0)$ , ossia un impulso centrato in  $f_0$  e di area complessa  $H(f_0)$ , da cui

$$y(t) = H(f_0) e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\begin{aligned} Z(f) &= \mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) Y(f) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \\ &= Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = Y(f) \cdot X(f) \end{aligned}$$

Quindi, il segnale in ingresso si ripropone in uscita, alterato in modulo e fase in base al valore complesso  $H(f_0) | e^{j \arg\{H(f_0)\}}$  che  $H(f)$  assume alla frequenza  $f_0$ : per questo motivo  $H(f)$  è detta *risposta in frequenza* del sistema.

**Autovettori di  $H(f)$**  Ricordando come in algebra lineare l'applicazione di una trasformazione lineare ad un proprio autovettore produce l'autovettore stesso, moltiplicato per il rispettivo autovalore, osserviamo che per un sistema con risposta in frequenza  $H(f)$  gli autovettori (o *autofunzioni*) sono i segnali esponenziali complessi  $e^{j2\pi f_0 t}$ , ai quali risulta associato l'autovalore  $H(f_0)$ .

**Misura della risposta in frequenza** Se un filtro è idealmente realizzabile (pag. 22) risulta  $H(f) = H^*(-f)$ , e considerando per  $H(f)$  la sua espressione in termini di modulo e fase  $H(f) = M(f) e^{j\varphi(f)}$ , risulta  $M(f)|_{f<0} = M(f)|_{f>0}$  e  $\varphi(f)|_{f<0} = -\varphi(f)|_{f>0}$ . Ciò consente di misurare modulo  $M(f)$  e fase  $\varphi(f)$  della risposta in frequenza per tutti i valori di  $f$ , utilizzando come ingresso una funzione sinusoidale con ampiezza  $A$  e fase  $\theta$  note:  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ . Il segnale in uscita è ancora una cosinusoide<sup>23</sup> con ampiezza  $A \cdot M(f_0)$  e fase  $\theta + \varphi(f_0)$ ; pertanto ricaviamo

$$M(f_0) = \frac{\max\{y(t)\}}{\max\{x(t)\}}, \quad \text{e} \quad \varphi(f_0) = \arg\{y(t)\} - \arg\{x(t)\}$$

Ripetendo il procedimento per diverse  $f_0$ , possiamo "campionare"  $H(f)$ .

**Sistema passa tutto** Poniamo di avere  $H(f) = 1$ , e che quindi risulti  $h(t) = \delta(t)$ . In questo caso le componenti di  $X(f)$  alle diverse frequenze non subiscono nessuna alterazione, ottenendo

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t)$$

ed il sistema viene detto di tipo *passa tutto*. Per verifica, scriviamo l'integrale di convoluzione, che risulta  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$ : ritroviamo quindi la proprietà di setacciamento (3.14).

**Fase lineare e ritardo** Se invece  $H(f) = e^{-j2\pi f\tau}$  abbiamo un sistema caratterizzato da una *fase lineare* (pag. 58) e che equivale ad un elemento di ritardo, riproducendo in uscita il valore presente in ingresso  $\tau$  istanti prima. Infatti in base alla (3.10) risulta:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f) e^{-j2\pi f\tau}\} = x(t - \tau)$$

D'altra parte, scrivendo l'integrale di convoluzione, e ricordando che  $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j2\pi f\tau}\} = \delta(t - \tau)$ , avremmo ottenuto  $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \delta(t - \tau - \theta) d\theta = x(t - \tau)$ , ritrovando la proprietà della convoluzione per un impulso traslato. Un sistema siffatto è indicato a pag. 183 come *canale perfetto*, in quanto privo di distorsioni lineari (vedi § 7.2).

<sup>23</sup>Svolgiamo i calcoli nel dominio della frequenza:

$$X(f) = \frac{A}{2} \left( e^{j\theta} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} \delta(f + f_0) \right);$$

$$Y(f) = X(f) H(f) = \frac{A}{2} M(f_0) \left( e^{j\theta} e^{j\varphi(f_0)} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} e^{-j\varphi(f_0)} \delta(f + f_0) \right)$$

e antitrasformando si ottiene

$$y(t) = A \cdot M(f_0) \cos(2\pi f_0 t + \theta + \varphi(f_0))$$

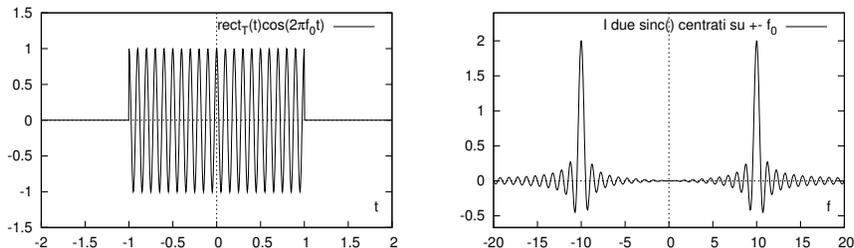


Figura 3.4: Trasformata di un coseno finestrato con  $T = 2$ ,  $f_0 = 10$

**Sistemi in cascata** Ponendo l'uscita  $y(t) = x(t) * h(t)$  di un primo sistema con risposta impulsiva  $h(t)$  in ingresso ad un secondo filtro con risposta impulsiva  $g(t)$ , e ricordando che (pag. 62) la cascata dei due sistemi è equivalente ad un terzo sistema con risposta impulsiva  $h'(t) = h(t) * g(t)$ , si ottiene come risultato complessivo  $z(t) = y(t) * g(t) = x(t) * h(t) * g(t)$ , la cui trasformata di Fourier risulta  $Z(f) = X(f)H(f)G(f)$ . Pertanto, la risposta in frequenza di sistemi posti in serie è il prodotto delle relative risposte in frequenza.

### 3.5.2 Moltiplicazione nel tempo (*modulazione e finestatura*)

La relazione (3.20)

$$Z(f) = \mathcal{F}\{x(t)y(t)\} = X(f) * Y(f) \quad (3.22)$$

ci permette di investigare le conseguenze frequenziali del prodotto temporale di due segnali.

**Esempio** Prendiamo il caso in cui  $z(t) = A \text{rect}_T(t) \cos 2\pi f_0 t$ , ovvero pari alla forma d'onda graficata a sinistra nella fig. 3.4. Applicando i risultati noti e la proprietà di traslazione in frequenza, risulta:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \frac{A}{2} \mathcal{F}\left\{\text{rect}_T(t) \left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)\right\} \\ &= \frac{AT}{2} \left(\text{sinc}[(f - f_0)T] + \text{sinc}[(f + f_0)T]\right) \end{aligned}$$

in cui  $\mathcal{F}\{\text{rect}_T(t)\} = T \text{sinc}(fT)$  si è traslato in  $\pm f_0$ .

Il risultato dell'esempio, mostrato a destra in fig. 3.4, coincide con quello previsto: l'espressione di  $Z(f)$  infatti è anche pari alla convoluzione tra  $\mathcal{F}\{\text{rect}_T(t)\} = T \text{sinc}(fT)$  ed i due impulsi traslati  $\mathcal{F}\{\cos 2\pi f_0 t\} = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$ , determinando quindi la replica dello spettro del *rect*, traslata alla frequenza del coseno.

**Modulazione** Il prodotto nel tempo prende questo nome quando uno dei due fattori è una (co)sinusoide, la cui ampiezza viene appunto variata (o *modulata*) dal secondo fattore<sup>24</sup>. La *modulazione di ampiezza* (cap. 9) dei radio ricevitori si riferisce esattamente a questo processo, svolto allo scopo di condividere tra più emittenti la banda prevista per le trasmissioni, assegnando a ciascuna di esse una diversa frequenza portante  $f_0$  su cui trasmettere: infatti come mostrato dall'esempio, lo spettro del rettangolo si è spostato da  $f = 0$  a  $f = f_0$ .

<sup>24</sup>Nel caso dell'esempio il rettangolo è costante e dunque l'ampiezza del coseno *non varia*, ma il termine modulazione si riferisce al prodotto di una sinusoide per un segnale dall'andamento qualsiasi.

**Finestratura** Questo termine fa riferimento al caso in cui uno dei due fattori della (3.22) sia un segnale a durata limitata (detto *finestra*), come nel caso del  $rect_T(t)$  di fig. 3.4. Con riferimento all'esempio si può osservare come, per  $T$  crescente,  $Z(f)$  tenda sempre più ad assomigliare ad una coppia di impulsi, ossia al risultato noto per un un coseno di durata *infinita*. Qualora si consideri invece solo un *breve intervallo* di un segnale il suo spettro si modifica a seguito della *convoluzione in frequenza* con la trasformata della *finestra* di analisi. L'estrazione di un segmento di durata limitata da un segnale comunque esteso prende dunque il nome di *finestratura* (WINDOWING), ed in appendice 3.8.3 sono svolte considerazioni relative alla scelta di una finestra rettangolare o con *altro andamento*.

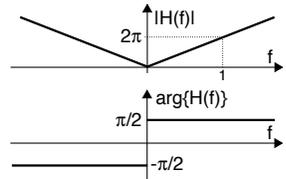
### 3.6 Derivazione ed integrazione nel tempo

Queste due proprietà sono di applicazione meno frequente, ma talvolta utile. Si ottiene infatti che le operazioni di derivata ed integrale di un segnale possono essere realizzate mediante il passaggio dello stesso attraverso un filtro, dato che derivata ed integrale nel tempo sono equivalenti a prodotti in frequenza, e quindi realizzabili come convoluzione del segnale con una appropriata risposta impulsiva.

**Derivazione nel tempo** La trasformata  $Y(f)$  di un segnale  $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$  è esprimibile in funzione della trasformata di  $x(t)$  come<sup>25</sup>

$$Y(f) = \mathcal{F} \left\{ \frac{d}{dt}x(t) \right\} = j2\pi f \cdot X(f) \quad (3.23)$$

e più in generale si ha  $\mathcal{F} \left\{ \frac{d^n}{dt^n}x(t) \right\} = (j2\pi f)^n \cdot X(f)$ . L'andamento del modulo dello spettro originario  $|X(f)|$  risulta pertanto *esaltato* alle frequenze più elevate, con legge proporzionale ad  $f$ , come risulta dal prodotto per  $2\pi|f|$ . Osservando poi che il numero *immaginario puro*  $\pm j2\pi f$  =  $2\pi f e^{j\frac{\pi}{2} \text{sgn}(f)}$  ha fase  $\pm \frac{\pi}{2}$  con segno uguale a quello di  $f$ , troviamo che la fase di  $X(f)$  subisce un incremento di  $\frac{\pi}{2}$  per frequenze positive, ed un eguale decremento per quelle negative. Pertanto, la derivata di un segnale corrisponde all'uscita di un filtro descritto dalla risposta in frequenza riportata a lato.



**Esercizio** Calcolare  $Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ , considerando  $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$  e  $x(t) = \cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t$ . Valutare poi  $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\}$  nel caso in cui  $f_1 = 10$  e  $f_2 = 100$  Hz.

Anziché applicare le regole di derivazione e quindi effettuare la trasformata, scegliamo di calcolare prima  $X(f)$ , e quindi applicare la (3.23):

$$X(f) = 1/2 [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1) + \delta(f - f_2) + \delta(f + f_2)]$$

Dato ora che  $f \cdot \delta(f \pm a) = \mp a \cdot \delta(f \pm a)$ , il prodotto  $Y(f) = j2\pi f \cdot X(f)$  fornisce

$$Y(f) = \frac{j2\pi}{2} \{f_1 [\delta(f - f_1) - \delta(f + f_1)] + f_2 [\delta(f - f_2) - \delta(f + f_2)]\}$$

<sup>25</sup>La dimostrazione viene svolta per segnali di energia, applicando in modo piuttosto diretto la regola di integrazione per parti:  $\mathcal{F} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi f t} dt = x(t) e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = j2\pi f X(f)$ , dato che il termine  $x(t) e^{-j2\pi f t} \Big|_{-\infty}^{\infty}$  si annulla, visto che se  $x(t)$  è un segnale di energia, tende a zero per  $t \rightarrow \infty$ .

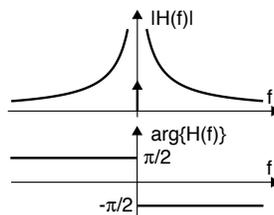
Considerando infine che  $\frac{j2\pi}{2} = -\frac{2\pi}{2j}$ , si ottiene  $y(t) = -2\pi f_1 \sin 2\pi f_1 t - 2\pi f_2 \sin 2\pi f_2 t$  e quindi, per  $f_1 = 10$  e  $f_2 = 100$ , si ha

$$y(t) = -2\pi [10 \sin \omega_1 t + 100 \sin \omega_2 t]$$

**Il doppietto** Viene da chiedersi quale sia la risposta impulsiva  $h(t)$  di un filtro derivatore. Dato che per definizione  $h(t)$  rappresenta l'uscita corrispondente ad un ingresso impulsivo  $\delta(t)$ , evidentemente deve risultare  $h(t) = \delta'(t)$ , ovvero pari alla *derivata dell'impulso*. Ok, ma come è fatto  $\delta'(t)$ , e perché viene detto *doppietto*? Per rispondere occorre fare un passo indietro, e tornare a pensare l'impulso come una distribuzione, ad es.  $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \text{rect}_\tau(t)$ , e considerare che  $\frac{d}{dt} \text{rect}_\tau(t) = \delta(t + \frac{\tau}{2}) - \delta(t - \frac{\tau}{2})$ , ossia due impulsi di segno opposto, centrati in corrispondenza delle discontinuità<sup>26</sup>. Pertanto risulta  $\delta'(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [\delta(t + \frac{\tau}{2}) - \delta(t - \frac{\tau}{2})]$ , ovvero due impulsi di area infinita e segno opposto, entrambi centrati in  $t = 0$ .

**Integrazione nel tempo** Indicando il segnale integrale (o primitiva) come  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta$ , il legame tra integrale e derivata permette di scrivere<sup>27</sup>

$$Y(f) = \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta \right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} \quad (3.24)$$



Come per la derivata, la (3.24) rappresenta l'uscita di un filtro integratore con risposta in frequenza  $H(f) = -j \frac{1}{2\pi f}$ , che quindi *esalta* le frequenze più basse del segnale originario in accordo all'andamento iperbolico di  $|H(f)| = 1/2\pi|f|$ , mentre la fase  $\arg\{H(f)\} = -\frac{\pi}{2} \text{sgn}(f)$  subisce una alterazione *opposta* al caso della derivata, dato che ora  $j$  ha cambiato segno.

Notiamo però che il risultato (3.24) manifesta la comparsa di una *singolarità* in  $f = 0$  se  $X(0) \neq 0$ : come mostrato a pag. 57, ciò corrisponde ad un segnale  $x(t)$  che sottende un'area non nulla, e quindi  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta$  non si azzera per  $t \rightarrow \infty$ . In questo caso  $y(t)$  non è di energia, ed il calcolo della sua trasformata richiede qualche *espediente*<sup>28</sup>, che aggiunge ad  $H(f) = -j \frac{1}{2\pi f}$  il termine  $\frac{1}{2} \delta(f)$ , anch'esso mostrato in figura.

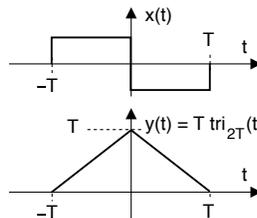
**Esercizio** Trasformata di un triangolo.

Consideriamo un segnale ad area nulla

$$x(t) = \text{rect}_T \left( t + \frac{T}{2} \right) - \text{rect}_T \left( t - \frac{T}{2} \right)$$

ed il suo integrale

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta = T \text{tri}_{2T}(t)$$

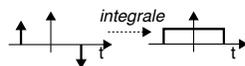


<sup>26</sup>

Se infatti valutiamo  $\int_{-\infty}^t [\delta(\theta + \frac{\tau}{2}) - \delta(\theta - \frac{\tau}{2})] d\theta$  con  $t > \frac{\tau}{2}$ , otteniamo due gradini  $u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})$ , che combinati assieme, riproducono il  $\text{rect}_\tau$  di partenza.

<sup>27</sup>Essendo  $x(t) = \frac{d}{dt} y(t)$ , ed applicando la (3.23) otteniamo  $X(f) = j2\pi f Y(f)$ , da cui la (3.24).

<sup>28</sup>Si può giungere ad un risultato anche nel caso in cui  $X(0) \neq 0$ , ricorrendo all'impulso  $\delta(t)$ . Occorre scrivere l'integrale di  $x(t)$  nella forma di una convoluzione con un *gradino unitario*  $u(t)$ , cioè  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) u(t - \theta) d\theta$  (si pensi alla costruzione grafica del § 3.4.3). Al § 3.8.5 si ricava che  $U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$ , ed applicando la proprietà della trasformata della convoluzione si ottiene  $Y(f) = X(f) U(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} X(0)$ , in cui l'ultimo termine scompare per segnali ad area nulla, riottenendo la (3.24).



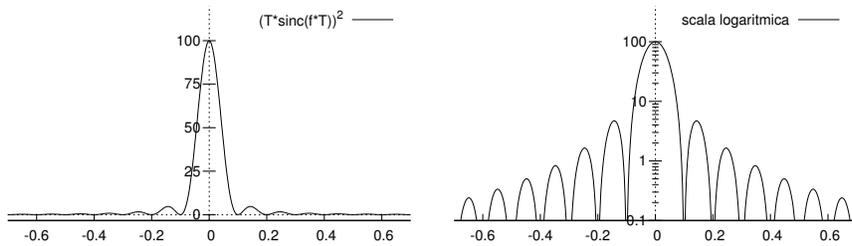


Figura 3.5: Andamento di  $(T \operatorname{sinc}(fT))^2$  in scala lineare e logaritmica;  $T = 10$ .

entrambi rappresentati in figura:  $y(t)$  è nullo fino a  $t < -T$ , cresce linearmente fino a  $t = 0$ , e quindi il contributo all'integrale dato dall'area del *rect* negativo torna ad annullarne il valore.

Per calcolare la trasformata di  $y(t)$ , calcoliamo prima quella di  $x(t)$ , e poi applichiamo la proprietà dell'integrazione. Applicando la proprietà di traslazione nel tempo, scriviamo

$$\begin{aligned} X(f) &= T \cdot \operatorname{sinc}(fT) \cdot e^{+j2\pi f \frac{T}{2}} - T \cdot \operatorname{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = \\ &= T \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \cdot 2j \sin \pi fT = j2T \frac{\sin^2(\pi fT)}{\pi fT} \end{aligned}$$

Essendo  $x(t)$  ad area nulla, la trasformata del suo integrale si ottiene dividendo  $X(f)$  per  $j2\pi f$ , ovvero

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} = \frac{j2T \sin^2(\pi fT) T}{j2\pi f \pi fT} = \left( T \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right)^2 = (T \operatorname{sinc}(fT))^2$$

il cui andamento è mostrato in figura 3.5. Da questo risultato ne consegue infine che  $\mathcal{F}\{tri_{2T}(t)\} = T \operatorname{sinc}^2(fT)$ , come riportato al § 3.8.7.

**Densità di energia del rettangolo** Lo stesso risultato mostrato nell'esempio può essere ottenuto per altra via, notando che il triangolo è il risultato della convoluzione di due rettangoli:

$$y(t) = T \cdot tri_{2T}(t) = \operatorname{rect}_T(t) * \operatorname{rect}_T(t) \quad (3.25)$$

Come verifica, si ripercorra la costruzione grafica riportata alla sezione 3.4.3. E' quindi ora sufficiente applicare la proprietà del prodotto in frequenza, per ottenere:

$$Y(f) = \mathcal{F}\{T \cdot tri_{2T}(t)\} = [\mathcal{F}\{\operatorname{rect}_T(t)\}]^2 = [T \operatorname{sinc}(fT)]^2 \quad (3.26)$$

Il risultato (3.26) è anche pari alla densità di energia  $\mathcal{E}_z(f)$  di un segnale rettangolare  $z(t) = \operatorname{rect}_T(t)$ : infatti per il teorema di Parseval eq. (3.7) si ha  $\mathcal{E}_z(f) = Z(f) Z^*(f)$ , in cui  $Z(f) = \mathcal{F}\{\operatorname{rect}_T(t)\} = T \operatorname{sinc}(fT)$ , e pertanto

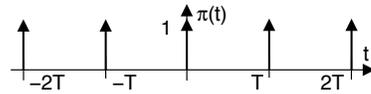
$$\mathcal{E}_z(f) = [T \operatorname{sinc}(fT)]^2 \quad (3.27)$$

Prima di terminare il capitolo, definiamo un nuovo importante tipo di segnale *tuttofare*.

### 3.7 Treno di impulsi

La ripetizione periodica di un impulso matematico  $\delta(t)$  dà luogo ad un segnale del tutto particolare, il cui ruolo si rivelerà fondamentale in diversi aspetti trattati nel testo, come il campionamento (cap. 4) e la trasmissione numerica (cap. 8); nel seguito ne mostriamo una prima applicazione orientata ad ottenere la descrizione della trasformata per un segnale periodico, senza necessità di calcolare i relativi coefficienti di Fourier.

**Definizione** Un treno di impulsi (o segnale a pettine) di periodo  $T$  viene rappresentato dal simbolo  $\pi_T(t)$  ed è realizzato come una serie infinita di impulsi matematici



$$\pi_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (3.28)$$

**Serie di Fourier** Il segnale  $\pi_T(t)$  è periodico, e dunque può essere rappresentato mediante la relativa serie come  $\pi_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_n e^{j2\pi n F t}$  con  $F = \frac{1}{T}$  ed i cui coefficienti  $\Pi_n$  sono pari a

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \right] e^{-j2\pi n F t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n F t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \delta(t) dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

in quanto, tra tutti gli impulsi della sommatoria, ne resta solo uno, quello centrato in zero, dato che tutti gli altri cadono al di fuori dei limiti di integrazione, mentre la seconda eguaglianza tiene conto della (3.13). Tutti i coefficienti risultano pertanto avere lo stesso valore, pari ad  $\frac{1}{T}$ , ottenendo lo sviluppo

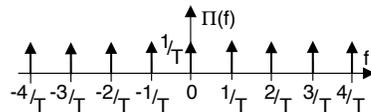
$$\pi_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n F t} \quad (3.29)$$

Notiamo inoltre che, essendo  $\pi_T(t)$  un segnale reale pari, per esso la (3.29) può essere riscritta<sup>29</sup> come una serie di coseni (vedi il § 2.2.1.3)  $\pi_T(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi n F t$ .

**Trasformata del treno di impulsi** Si può ottenere applicando la (3.12) alla (3.29), ovvero

$$\mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \mathcal{F}\left\{ \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n F t} \right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \Pi_{\frac{1}{T}}(f) \quad (3.30)$$

ottenendo quindi il risultato che la trasformata di un treno di impulsi è a sua volta un treno di impulsi, di ampiezza  $1/T$ , e di periodo (in frequenza) inverso a quello originario, ovvero  $\mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \frac{1}{T} \Pi_{\frac{1}{T}}(f)$ .



**Trasformata di un segnale periodico** Utilizziamo ora il risultato (3.30) per ottenere una formula alternativa alla (3.12) per un generico segnale  $x(t)$  periodico di periodo  $T$ , che innanzitutto scriviamo come una serie infinita di ripetizioni di un suo periodo  $g(t)$

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT) \quad (3.31)$$

<sup>29</sup>Sembra strano che  $\pi_T(t)$  si ottenga come somma di infiniti coseni a frequenza armonica e tutti della stessa ampiezza  $\frac{2}{T}$ ? Per verificare il risultato, visitare <https://dspillustrations.com/pages/posts/misc/the-dirac-comb-and-its-fourier-transform.html>

Sfruttando la proprietà di convoluzione con l'impulso traslato, la (3.31) può essere scritta nei termini della (3.28) come

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t) * \delta(t - mT) = g(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = g(t) * \pi_T(t)$$

dove nel secondo passaggio si è sfruttata la linearità della convoluzione. Ricordando ora la proprietà della moltiplicazione in frequenza (3.21) otteniamo che lo spettro di  $x(t)$  si esprime come

$$X(f) = G(f) \cdot \mathcal{F}\{\pi_T(t)\} \quad (3.32)$$

e quindi, sostituendo l'espressione di  $\mathcal{F}\{\pi_T(t)\}$  ottenuta con la (3.30) nella (3.32) otteniamo

$$X(f) = G(f) \cdot \frac{1}{T} \Pi_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (3.33)$$

ovvero la trasformata di un segnale periodico  $x(t)$  è pari al prodotto tra la trasformata  $G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\}$  di un suo periodo, ed un treno di impulsi in frequenza di periodo  $\frac{1}{T}$  ed ampiezza  $\frac{1}{T}$ .

**Esempio** Riprendendo in considerazione il caso dell'onda quadra affrontato al § 2.2.1.4, non è difficile riconoscere come, ponendo  $g(t) = A \text{rect}_{\tau}(t)$ , a cui corrisponde  $G(f) = A\tau \text{sinc}(f\tau)$ , il prodotto di  $G(f)$  per il treno di impulsi  $\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF)$  (con  $F = \frac{1}{T}$ ) fornisce il risultato già incontrato:

$$X(f) = A \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(nF\tau) \delta(f - nF)$$

**Somma di Poisson** Il risultato ottenuto è un aspetto dell'uguaglianza nota come *somma di Poisson*<sup>30</sup> e che permette di esprimere una somma infinita basata su di una funzione nel tempo, nei termini di una somma infinita basata su di una funzione della frequenza, che è la trasformata di quella nel tempo. Nel caso in esame, antitrasformando entrambi i membri della (3.33) si ottiene

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} G\left(\frac{n}{T}\right) e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

che riconosciamo corrispondere all'espansione in serie di Fourier del segnale periodico  $x(t)$ , non appena constatato come i termini  $\frac{1}{T} G\left(\frac{n}{T}\right)$  altro non siano che i suoi coefficienti Fourier, come d'altra parte risulta anche dalla (3.3).

## 3.8 Appendici

### 3.8.1 Grafico della trasformata di un rettangolo ritardato

Affrontiamo il problema definito a pag. 57. Convienne iniziare esprimendo  $X(f) = \tau \text{sinc}(f\tau)$  come

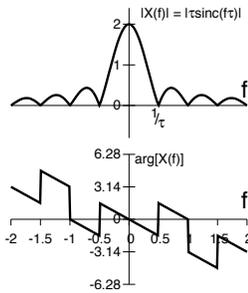
$$X(f) = \tau |\text{sinc}(f\tau)| e^{j\phi(f)}$$

in cui, adottando la funzione  $\text{sgn}(x) = x/|x|$  (pag. 1.5.3),

$$\phi(f) = \frac{\pi}{2} \{1 - \text{sgn}[\text{sinc}(f\tau)]\} \cdot \text{sgn}(f)$$

alterna valori tra 0 e  $\pi$  in funzione del segno del *sinc*, in modo che quando *sinc* è negativo la fase sia  $\pi$  e dunque il fattore  $e^{j\pi} = -1$  ristabilisce il suo corretto valore. Inoltre, il prodotto per  $\text{sgn}(f)$  rende la fase un segnale *dispari*.

<sup>30</sup>Per un approfondimento si veda ad es. [http://it.wikipedia.org/wiki/Formula\\_di\\_sommazione\\_di\\_Poisson](http://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_sommazione_di_Poisson).



L'esercizio chiedeva di calcolare la trasformata di  $z(t) = x(t - T) = \text{rect}_\tau(t - T)$ , e dunque possiamo dire che la traslazione temporale del *rect* determina per  $Z(f)$  uno spettro di modulo ancora pari a  $|Z(f)| = \tau |\text{sinc}(f\tau)|$ , mentre alla fase  $\phi(f)$  si aggiunge il contributo *lineare* in  $f$  pari a  $\varphi(f) = -2\pi fT$ , ottenendo quindi

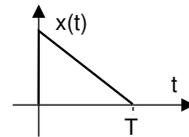
$$Z(f) = \tau |\text{sinc}(f\tau)| e^{j(\phi(f) - 2\pi fT)}$$

che viene rappresentato in figura, avendo posto  $\tau = 2$  e  $T = .5$ .

### 3.8.2 Quanti sono i possibili modi di calcolare una trasformata?

Sia dato il segnale

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} & \text{con } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



mostrato in figura. Descrivere quanti più modi possibili di calcolarne lo spettro di densità di energia  $\mathcal{E}_x(f)$ .

1. Si calcola  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$  e quindi  $\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2$ ;
2. Notando che  $x(t) = y(t) \cdot z(t)$  con  $y(t) = \text{tri}_{2T}(t)$  e  $z(t) = \text{rect}_T(t - \frac{T}{2})$ , possiamo scrivere  $X(f) = Y(f) * Z(f)$ , e quindi si procede come in 1);
3. Notiamo che la derivata<sup>31</sup> di  $x(t)$  vale  $g(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \delta(t) - \frac{1}{T}\text{rect}_T(t - \frac{T}{2})$ ; questo ci permette di calcolare  $G(f)$  come  $G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\} = 1 - \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j\pi fT}$ . Otteniamo quindi  $X(f) = \frac{G(f)}{j2\pi f}$ , e quindi come in 1);
4. Anticipando un risultato del § 6.2.1, è possibile calcolare  $\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt$ , e quindi  $\mathcal{E}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$ .

### 3.8.3 Finestratura e stima spettrale

Applichiamo ora la teoria svolta al § 3.5.2 per ragionare su come interpretare l'*analisi spettrale* (§ 6.3) di  $x(t)$  svolta a partire da un suo segmento temporale  $y(t) = x(t)w(t)$  ottenuto delimitandolo nel tempo mediante moltiplicazione per una *funzione finestra* di durata limitata  $w(t)$ : la trasformata di  $y(t) = x(t)w(t)$  fornisce infatti il valore  $Y(f) = X(f) * W(f)$ , e quindi il *vero spettro*  $X(f)$  di  $x(t)$  non può essere conosciuto, se non tramite l'effetto della convoluzione con quello  $W(f)$  della funzione finestra  $w(t)$ . Già a pagina 66 si è fatto notare come, se  $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$  e  $w(t) = \text{rect}_T(t)$ , si ottiene che  $W(f) = T \text{sinc}(fT)$ , e pertanto

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot w(t)\} = \frac{AT}{2} (\text{sinc}[(f - f_0)T] + \text{sinc}[(f + f_0)T])$$

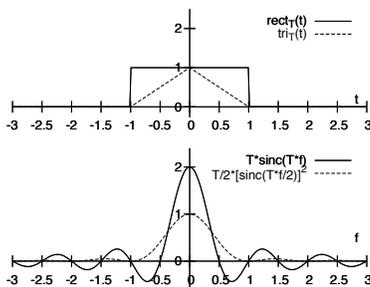
che è tanto più diverso dai due impulsi del coseno (vedi Fig. 3.4), quanto più è piccolo  $T$ .

<sup>31</sup>La derivata di una discontinuità di prima specie è pari ad un impulso matematico, di area uguale all'altezza della discontinuità. Infatti l'integrale dell'impulso  $\int_{-\infty}^t \delta(\theta) d\theta$  è proprio un gradino. Questa considerazione consente di risolvere in modo semplice le trasformate di segnali in cui è presente una discontinuità.

Valutiamo ora gli effetti derivanti dall'uso di una funzione finestra diversa da quella rettangolare. Se ad esempio si sceglie di adottare una finestra *triangolare* di eguale durata  $T$ , a partire dalla (3.26) si ottiene

$$W(f) = \mathcal{F}\{w(t) = \text{tri}_T(t)\} = \frac{T}{2} \left[ \text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) \right]^2$$

Come può essere verificato dalla figura a fianco, la finestra triangolare esibisce un andamento nel tempo *più dolce* (è continua!) rispetto al  $\text{rect}(t)$ , e ciò si riflette in una maggiore concentrazione della sua trasformata alle frequenze più basse. Infatti,  $W(f)$  ha ora un *lobo principale* di estensione *doppia* (il primo zero si trova ad  $f = \frac{2}{T}$  anziché ad  $\frac{1}{T}$  come per il  $\text{rect}$ ), e le *code laterali* decrescono *più rapidamente*, andando a zero come  $\frac{1}{f^2}$ , mentre l'ampiezza risulta dimezzata.



L'andamento del *lobo principale* e delle *code* di  $W(f)$  si riflette nell'andamento della trasformata del segnale finestrato qualora il segnale originario contenga, ad esempio, più di una frequenza: per la linearità della trasformata, il risultato sarà la replica di  $W(f)$  centrata alle frequenze presenti. La Fig. 3.6 confronta il risultato ottenibile per un segnale contenente due cosinoidi di frequenza  $f_0 = 10$  e  $f_1 = 15$  Hz, quando delimitato (a sinistra) mediante una finestra rettangolare di durata (dall'alto in basso)  $T = 2, 0.5$ , e  $0.25$  secondi<sup>32</sup>, oppure (a destra) mediante una finestra triangolare della stessa durata. E' possibile distinguere due effetti.

<sup>32</sup>Queste durate corrispondono quindi ad utilizzare 20 cicli di cosinoidi, oppure 5, oppure due e mezzo.

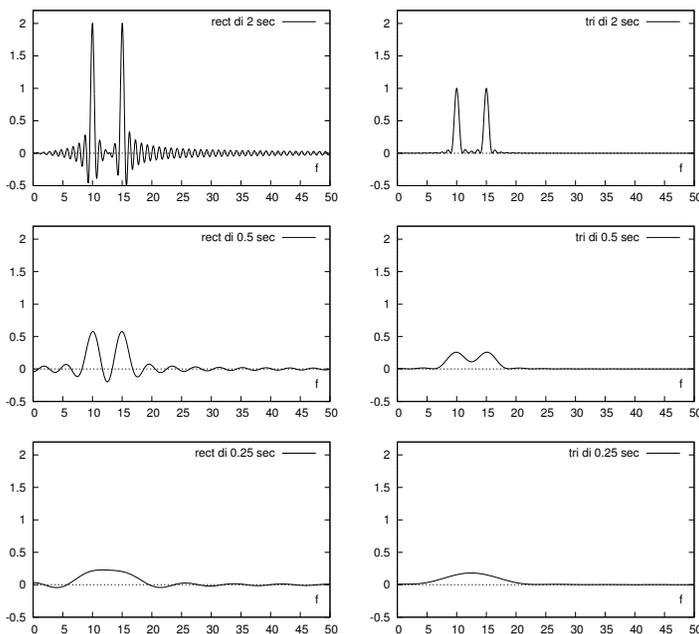


Figura 3.6: Trasformata di due toni a 10 e 15 Hz, con finestra temporale  $\text{rect}_T$  e  $\text{tri}_T$  di durata 2, .5 e .25 secondi

**Risoluzione spettrale** Osserviamo che al diminuire del prodotto  $(f_1 - f_0) \cdot T$ , le due trasformate  $W(f)$  *interagiscono*, fino ad esibire un andamento complessivo in cui non è più possibile *distinguere* la presenza di due diversi toni. Il fenomeno illustrato avviene tanto prima, quanto più il lobo principale di  $W(f)$  è esteso; pertanto, l'uso di una finestra triangolare peggiora la situazione: in effetti, la finestra rettangolare è quella che permette la migliore capacità di distinguere due toni.

**Infiltrazione spettrale** Detto *leakage* in inglese, indica l'*influenza* che una determinata componente spettrale ha nei confronti delle altre porzioni dello spettro: ad esempio, la prima riga di fig. 3.6 mostra come adottando  $w(t) = \text{tri}_T(t)$  si ottiene un  $Y(f)$  più simile a quello di due toni, piuttosto che con un  $\text{rect}_T(t)$ . Ciò è dovuto alle lunghe code di  $W(f) = \text{sinc}(fT)$  (trasformata del  $\text{rect}_T(t)$ ) che appunto *infiltrano* il contenuto energetico di ciascun tono a frequenze anche distanti, mentre nel caso di  $w(t) = \text{tri}_T(t)$  ciò avviene in forma assai ridotta, evitando di mostrare *artefatti*.

Considerazioni di questo tipo possono far preferire una tra le diverse possibili proposte<sup>33</sup> di funzione finestra, in dipendenza dal particolare obiettivo della stima spettrale (§ 6.3).

### 3.8.4 Gli esponenziali complessi come base ortogonale

Al § 3.1 sono esposte similitudini tra la serie e la trasformata di Fourier; chiediamoci ora se le funzioni  $e^{j2\pi ft}$  possano anche in questo caso essere considerate come una base *ortonormale* (pag. 44), e se la (3.1) sia una *proiezione* di  $x(t)$  lungo tali vettori.

Un primo ostacolo è rappresentato dal fatto che ora la cardinalità dello spazio di rappresentazione risulta veramente *infinita*, e non più infinita *numerabile* come per la serie. Ma l'ostacolo maggiore sembra essere che le funzioni  $e^{j2\pi ft}$  non sono segnali impulsivi, e neanche di energia: infatti  $e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi ft} = 1$ , e dunque la definizione di prodotto scalare (3.5) e di norma fornisce  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi ft} dt = \infty$ . Ma se proviamo ad effettuare il calcolo del prodotto scalare tra due esponenziali  $e^{j2\pi ft}$  ed  $e^{j2\pi \lambda t}$  come risultato di un passaggio al limite, otteniamo

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi \lambda t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j2\pi(f-\lambda)t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \cdot \text{sinc}((f-\lambda)\tau) = \delta(f-\lambda)$$

in cui si è fatto uso del risultato (3.4) e del fatto che l'ultimo limite tende ad un impulso matematico, come mostrato al § 3.4, ottenendo che  $\langle e^{j2\pi ft}, e^{j2\pi \lambda t} \rangle = \delta(f-\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se } f \neq \lambda \\ \infty & \text{se } f = \lambda \end{cases}$ .

Se poi applichiamo agli esponenziali la definizione di prodotto interno *per segnali di potenza* (2.27), si ottiene che

$$\left\langle e^{j2\pi ft}, e^{j2\pi \lambda t} \right\rangle_{\text{pot}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \text{sinc}((f-\lambda)\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } f \neq \lambda \\ 1 & \text{se } f = \lambda \end{cases}$$

permettendo dunque di dichiarare la base  $\{e^{j2\pi ft}\}$  come *ortonormale* per lo spazio dei segnali di potenza.

Effettivamente, visto che l'introduzione dell'impulso  $\delta(\cdot)$  permette di estendere l'operatore di trasformata di Fourier anche al caso dei segnali periodici (pag. 60), che sono di potenza, sembra sensato considerare quest'ultimo come lo spazio corretto in cui individuare le funzioni

<sup>33</sup>Nel tempo sono state definite un elevato numero di finestre temporali, ognuna *migliore* sotto certi aspetti, e *peggiore* sotto altri. Consultando Wikipedia [http://en.wikipedia.org/wiki/Window\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Window_function), possiamo elencare le finestre di *Hamming*, *Hann*, *Cosine*, *Lanczos*, *Bartlett*, *Gauss*, *Blackman*, *Kaiser*, *Nuttall*, *Bessel*, *Dolph-Chebyshev*, *Exponential*, *Tukey*...

della base che permette la rappresentazione  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$  dei segnali  $x(t)$  nei termini della corrispondente trasformata di Fourier  $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ .

### 3.8.5 Trasformata di un gradino

Definiamo la funzione gradino<sup>34</sup> come  $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } t = 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$  che, fornendo  $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt =$

$\infty$ , non dovrebbe avere una trasformata  $U(f)$ . Proviamo allora a gestire il gradino nelle vesti di una *distribuzione*, ed in modo simile a quanto fatto al § 3.4 per la costante, lo rappresentiamo come il limite a cui tende una *successione*  $u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u_{\alpha}(t)$ , dei cui elementi valutare la trasformata  $U_{\alpha}(f) = \mathcal{F}\{u_{\alpha}(t)\}$ , e adottare  $U(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} U_{\alpha}(f)$  come trasformata di  $u(t)$ . Scegliamo quindi  $u_{\alpha}(t) = e^{-\alpha t}$  per  $t > 0$  che effettivamente converge a  $u(t)$  per  $\alpha \rightarrow 0$ , e troviamo

$$U_{\alpha}(f) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi ft} dt = \left. \frac{e^{-(\alpha + j2\pi f)t}}{-(\alpha + j2\pi f)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f} = \frac{\alpha - j2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \quad (3.34)$$

Mentre per la parte immaginaria risulta che

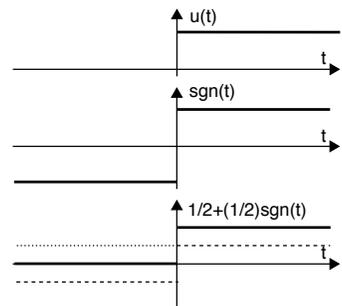
$$U^{Im}(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Im \{U_{\alpha}(f)\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} = -\frac{1}{2\pi f}$$

e *va bene così*, il limite della parte reale della (3.34)  $U^{Re}(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$  assume invece la forma indeterminata  $\frac{0}{0}$  se anche  $f \rightarrow 0$ . Per tentare di capire *cosa manca*, proviamo ad antitrasformare  $jU^{Im}(f)$ , ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{j}{2\pi f} \right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j2\pi ft}}{j2\pi f} df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\pi ft}{j2\pi f} df + j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi ft}{j2\pi f} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi ft}{2\pi f} df = t \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2ft) df = \frac{t}{2|t|} = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \end{aligned}$$

dato che  $\frac{\cos 2\pi ft}{j2\pi f}$  è una funzione dispari e dunque dà integrale nullo<sup>35</sup>, mentre la penultima uguaglianza sfrutta il risultato (3.9). *Ci siamo quasi!* Infatti, il gradino può essere riscritto come  $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$  (vedi la figura a lato), e in questo modo ci accorgiamo che mentre  $jU^{Im}(f) = -\frac{j}{2\pi f}$  è la trasformata di  $\frac{1}{2} \text{sgn}(t)$ ,  $U^{Re}(f)$  deve necessariamente convergere alla trasformata di  $\frac{1}{2}$ , ovvero ad un impulso di area  $\frac{1}{2}$ , permettendo finalmente di scrivere

$$U(f) = \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{2} \left( \delta(f) - \frac{j}{\pi f} \right)$$



<sup>34</sup>Nota anche come funzione di Heaviside, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_gradino\\_di\\_Heaviside](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_gradino_di_Heaviside)  
<sup>35</sup>Ciò è vero purché si consideri il metodo di calcolo dell'integrale noto come *valore principale di Cauchy*, in quanto  $\frac{\cos 2\pi ft}{j2\pi f}$  tende a  $\frac{1}{0}$  per  $f \rightarrow 0$ , con valori opposti per  $0^+$  e  $0^-$ , vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Valore\\_principale\\_di\\_Cauchy](https://it.wikipedia.org/wiki/Valore_principale_di_Cauchy).

Sembrano conti troppo contorti? In realtà l'abbiamo *fatta semplice...*<sup>36</sup>.

### 3.8.6 Proprietà della trasformata di Fourier

Uno schema riassuntivo delle relazioni illustrate nel capitolo

PROPRIETÀ	$z(t)$	$Z(f) = \mathcal{F}\{z(t)\}$
Linearità	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Coniugato	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Cambiamento di scala	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
Ritardo	$x(t - T)$	$X(f) e^{-j2\pi fT}$
Traslazione in frequenza	$x(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
Modulazione di ampiezza	$x(t) \cos 2\pi ft$	$\frac{1}{2} X(f - f_0) + \frac{1}{2} X(f + f_0)$
Prodotto in frequenza	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$X(f) Y(f)$
Prodotto nel tempo	$x(t) y(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma) Y(f - \sigma) d\sigma$
Dualità	$X(t)$	$x(-f)$
Simmetria coniugata	$x(t)$ reale	$X(f) = X^*(-f)$
Derivazione	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j2\pi f \cdot X(f)$
Integrazione	$\int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f) X(0)$

### 3.8.7 Trasformate di segnali

Un sommario dei risultati per alcune trasformate

$x(t)$	$X(f)$	$\mathcal{P}/\mathcal{E}$	$\mathcal{P}(f)/\mathcal{E}(f)$	Pot/En
$\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$	$\frac{1}{2} e^{j\varphi} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \delta(f + f_0)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} \delta(f - f_0) + \frac{1}{4} \delta(f + f_0)$	P
A	$A \cdot \delta(f)$	$A^2$	$A^2 \cdot \delta(f)$	P
$A \cdot \text{rect}_\tau(t)$	$A \cdot \tau \text{sinc}(f\tau)$	$A^2 \cdot \tau$	$A^2 \cdot \tau^2 \text{sinc}^2(f\tau)$	E
$A \cdot \text{tri}_{2\tau}(t)$	$A \cdot \tau \text{sinc}^2(f\tau)$	$A^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \tau$	$A^2 \cdot \tau^2 \text{sinc}^4(f\tau)$	E
$e^{-\beta t}, t \geq 0$	$\frac{1}{\beta + j2\pi f}$		$\frac{1}{\beta^2 + 4(\pi f)^2}$	E
$e^{-\beta t }$	$\frac{2\beta}{\beta^2 + 4(\pi f)^2}$		$\frac{4\beta^2}{\beta^4 + 8(\pi\beta f)^2 + 16(\pi f)^4}$	E
$e^{-\alpha(\beta t)^2}$	$\frac{1}{\beta} e^{-\alpha \left(\frac{f}{\beta}\right)^2}$		$\frac{1}{\beta^2} e^{-2\alpha \left(\frac{f}{\beta}\right)^2}$	E

- Per il risultato di  $\mathcal{F}\{\text{tri}_{2\tau}(t)\}$ , vedi esercizio a pag. 68;
- per il risultato di  $\mathcal{F}\{e^{-\beta t}\}$ , vedi nota 64 a pag. 162.

<sup>36</sup>Vedi ad es. <http://bueler.github.io/M611F05/M611heaviside.pdf>

# Campionamento, quantizzazione ed elaborazione numerica

**S**ONO esposti i metodi che consentono di rappresentare un segnale per mezzo dei suoi *campioni*<sup>1</sup> temporali, permettendone la rappresentazione in forma numerica: infatti i campioni sono una sequenza di *numeri*<sup>2</sup> e quindi (dopo la *quantizzazione*) *bit*. Le operazioni descritte ai precedenti capitoli e che operano sul segnale  $x(t)$ , possono quindi essere eseguite direttamente sulla sua rappresentazione numerica, dando luogo alle tecniche indicate come *elaborazione numerica* dei segnali, di cui anche si fornisce qualche accenno, relativo alle rappresentazione frequenziale di sequenze, ed al suo impiego nelle operazioni di filtraggio.

## 4.1 Teorema del campionamento

Esprime la possibilità di ricostruire un segnale *limitato in banda* a partire dai suoi campioni:

*Un segnale con spettro nullo a frequenze maggiori di  $W$  è completamente descritto dai suoi valori osservati ad intervalli temporali regolari  $t_n = nT_c$ , con  $n$  intero e periodo di campionamento  $T_c \leq \frac{1}{2W}$ ; da questi è quindi possibile risalire ai suoi valori per qualunque altro istante.*

La frequenza  $f_{c_{min}} = \frac{1}{T_{c_{Max}}} = 2W$ , chiamata *velocità di Nyquist*<sup>3</sup>, corrisponde alla *minima* velocità con cui occorre campionare un segnale  $x(t)$  limitato in banda, ed è pari al doppio della massima frequenza  $W$  presente nel segnale. Se questa condizione è rispettata, il segnale originario può essere ricostruito (ad esempio<sup>4</sup>) ricorrendo ad una formula di *interpolazione*<sup>5</sup> (detta *cardinale*) che utilizza i campioni di segnale  $x(nT_c)$  nell'espressione

<sup>1</sup>Il termine *campione* rappresenta il valore di un segnale ad un determinato istante, e può essere considerato come sinonimo di esemplare, o esempio, ovvero *sample* in inglese; da non confondere con *champion*, o primatista!

<sup>2</sup>*Digits* in inglese, che a sua volta deriva dal latino *digitus*, da cui il termine *digitale* come sinonimo di *numerico*. In effetti il *dito* era una unità di misura utilizzata prima che nell'impero Romano, in Grecia, Egitto e Mesopotamia.

<sup>3</sup>Questo teorema è stato derivato indipendentemente e in tempi diversi da *Borel*, *Whittaker*, *Kotelnikov* e *Shannon*. Il contributo di Nyquist è in realtà relativo al problema di determinare la massima velocità di segnalazione  $f_s$  su di un canale limitato in banda, vedi § 8.2.2.2.

<sup>4</sup>Al § 4.1.2 troveremo che in realtà la formula (4.1) non è l'unica possibile.

<sup>5</sup>L'*interpolazione* individua un insieme di metodi per ottenere un segnale che passi per  $N$  punti (istante, valore) prefissati, vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Interpolazione>. Qualora i punti siano *prelevati* a frequenza  $f_c \geq f_{c_{min}}$  da un segnale limitato in banda, la (4.1) fornisce i suoi valori *esatti* anche per istanti  $t \neq nT_c$ , vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Formule\\_di\\_interpolazione\\_di\\_Whittaker-Shannon](https://it.wikipedia.org/wiki/Formule_di_interpolazione_di_Whittaker-Shannon).

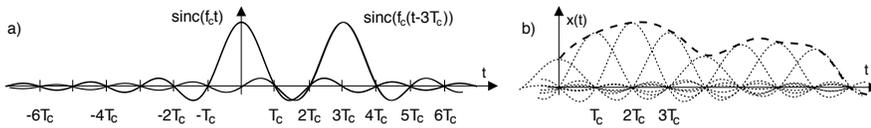
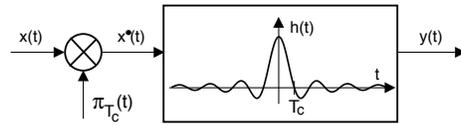


Figura 4.1: a) - Funzione sinc ( $f_c t$ ) centrata in  $t = 0$  e traslata in  $t = 3T_c$ ;  
b) - ricostruzione del segnale limitato in banda mediante la formula (4.1)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(t - nT_c)) \quad (4.1)$$

che si basa sulla ripetizione ritmica del segnale  $\text{sinc}(f_c t) = \frac{\sin \pi f_c t}{\pi f_c t}$ , detto per questo motivo *seno cardinale* (pag. 1.5.3). Come richiamato in fig. 4.1-a),  $\text{sinc}(f_c t)$  passa da zero per gli istanti  $t = n/f_c = nT_c$ , e dunque sommando i termini  $\text{sinc}(f_c(t - nT_c))$  centrati a multipli di  $T_c$  e con ampiezza  $x(nT_c)$  si ottiene il risultato di 4.1-b), ovvero un segnale che per  $t = nT_c$  vale esattamente  $x(nT_c)$ , mentre negli istanti intermedi il valore si forma come *somma* di tutte le “code” dei *sinc* adiacenti.

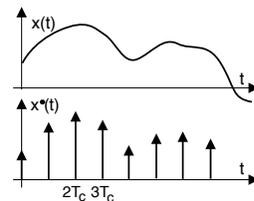
Osserviamo ora che la (4.1) può essere realizzata mediante lo schema simbolico mostrato a lato, ovvero moltiplicando il segnale  $x(t)$  per un treno di impulsi  $\pi_{T_c}(t)$  con periodo  $T_c \leq 1/2w$ , ed il risultato  $x^\bullet(t)$  fatto passare attraverso un filtro con risposta impulsiva  $h(t) = \text{sinc}(f_c t)$ .



Il segnale  $x^\bullet(t) = x(t) \cdot \pi_{T_c}(t)$  è dunque costituito (eq. (3.13)) da impulsi con area pari ai campioni di segnale, ossia

$$x^\bullet(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c) \delta(t - nT_c)$$

come mostrato a lato, e per ogni impulso  $x(nT_c) \delta(t - nT_c)$  presente in ingresso al filtro, in uscita si otterrà una replica della risposta impulsiva centrata sulla posizione dell'impulso, ovvero  $x(nT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(t - nT_c))$ , e cioè



$$\begin{aligned} y(t) &= \left[ x(t) \cdot \sum_n \delta(t - nT_c) \right] * h(t) = \sum_n x(nT_c) \delta(t - nT_c) * \text{sinc}(f_c t) = \\ &= \sum_n x(nT_c) \text{sinc}(f_c(t - nT_c)) \end{aligned}$$

che corrisponde alla (4.1). Per dimostrare che il segnale  $y(t)$  così ottenuto eguaglia il segnale originario  $x(t)$ , deriviamo ora l'espressione di  $X^\bullet(f) = \mathcal{F}\{x^\bullet(t)\}$ . Ricordando il risultato ottenuto a pag. 70 per la trasformata di un treno di impulsi, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} X^\bullet(f) &= \mathcal{F}\{x(t) \cdot \pi_{T_c}(t)\} = X(f) * \frac{1}{T_c} \Pi_{\frac{1}{T_c}}(f) = X(f) * \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_c}\right) = \\ &= f_c \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f) * \delta(f - nf_c) = f_c \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_c) \end{aligned} \quad (4.2)$$

dove il penultimo passaggio scambia l'integrale (di convoluzione) di una somma con una somma di integrali, e l'ultimo passaggio tiene conto della proprietà di convoluzione con un impulso.

Lo spettro di  $x^*(t)$  è dunque un segnale *periodico in frequenza* costituito da infinite repliche di  $X(f)$ , centrate a multipli della frequenza di campionamento  $f_c$ , e che *nel caso in cui* si sia scelto  $f_c = 2W$  ovvero pari al suo valore *minimo*, appare come mostrato a lato<sup>6</sup>. A questo punto osserviamo che al filtro con  $h(t) = \text{sinc}(f_c t)$  corrisponde una risposta in frequenza

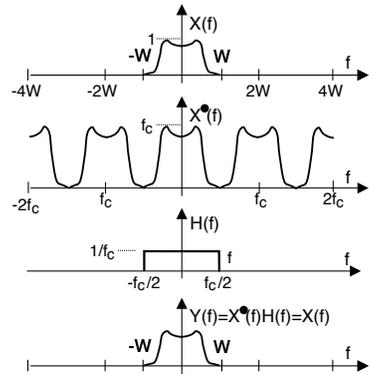
$$H(f) = 1/f_c \text{rect}_{f_c}(f)$$

ovvero quella di un *passa basso ideale*, che permette l'attraversamento delle sole frequenze nell'intervallo  $(-f_c/2, f_c/2)$ , e dunque dell'unica replica spettrale di  $X^*(f)$  centrata in  $f = 0$ . In uscita è quindi presente un segnale  $y(t)$  con spettro di ampiezza

$$Y(f) = H(f) X^*(f) = 1/f_c f_c X(f) = X(f)$$

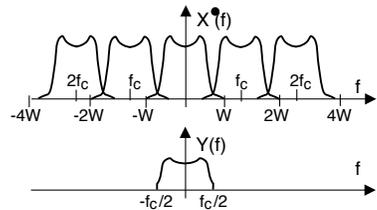
che è perfettamente equivalente al segnale originario, ricostruito sulla base dei suoi soli campioni  $x(nT_c)$ . Per questo motivo il filtro  $H(f)$  è anche noto come *filtro di restituzione*.

Abbiamo così verificato la correttezza della (4.1) che esprime il teorema del campionamento nella sua forma *cardinale*, ossia quando  $f_c$  è *esattamente* pari a  $2W$ , cioè pari al suo valore minimo. Analizziamo ora cosa accade se la condizione  $f_c \geq 2W$  non è rispettata.

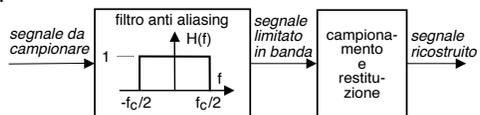


### 4.1.1 Aliasing

Questo termine ha origine dalla parola inglese<sup>7</sup> *alias* (copia, clone) e sta ad indicare il fenomeno che si produce nell'applicare il teorema del campionamento quando i requisiti non sono soddisfatti, e cioè quando la frequenza di campionamento è inferiore alla velocità di Nyquist, ossia  $f_c = 1/T_c < 2W$  (ovvero  $T_c > 1/2W$ ). In questo caso la (4.2) indica come le repliche spettrali che compongono  $X^*(f)$  siano più ravvicinate, e si sovrappongono, come rappresentato dalla figura a lato: l'*aliasing* è infatti indicato anche come *FOLD-OVER*, o *ripiegamento*. Quando questo avviene, il filtro passa-basso di restituzione non è più in grado di estrarre la replica centrata in  $f = 0$ , e dunque alla sua uscita è presente un segnale  $y(t)$  che si differenzia da  $x(t)$  in particolar modo per i contenuti energetici nella regione delle frequenze più elevate<sup>8</sup>.



Il fenomeno dell'*aliasing* può insorgere, oltre che nel caso in cui si commetta il banale errore di adottare  $f_c < 2W$ , anche a causa di una imperfetta limitazione in banda del segnale da campionare, che infatti viene sempre preventivamente filtrato, in modo di assicurarsi che non contenga componenti a frequenze maggiori della metà di quella di campionamento.



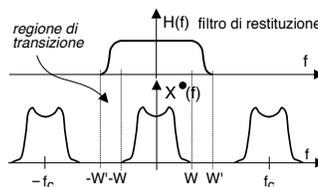
<sup>6</sup>Il risultato ottenuto replica in frequenza quello della trasformata di segnali periodici nel tempo: ad un segnale periodico *in frequenza* con periodo  $f_c$  corrisponde una *antitrasformata* di Fourier costituita da impulsi *nel tempo* distanziati dall'inverso  $T_c = 1/f_c$  del periodo  $f_c$ .

<sup>7</sup>In realtà *alias* è di origine latina !!!

<sup>8</sup>In un segnale audio, ad esempio, ci si accorge che c'è *aliasing* quando è udibile una distorsione (rumore) congiuntamente ai passaggi con maggior contenuto di alte frequenze.

### 4.1.2 Generalizzazione del filtro di restituzione

La realizzazione di un filtro di restituzione con  $H(f)$  esattamente rettangolare è pressoché impossibile<sup>9</sup>, mentre ciò che si può realizzare è un filtro che presenta una *regione di transizione* tra banda passante e banda soppressa, di estensione non nulla. In questo caso occorre *sovracampionare* ad una frequenza  $f_c = 2W' > 2W$ , in modo che le repliche spettrali siano più distanziate tra loro, e quindi il filtro possa ancora isolare l'unica replica di  $X^*(f)$  in banda base, come si osserva in figura. Notiamo ora che la risposta impulsiva di questo nuovo filtro non è più un  $\text{sinc}(f_c t)$ ! In questo caso dunque la formula di interpolazione non ha più l'espressione *cardinale* fornita nella 4.1: ciò significa che l'operazione di campionamento e restituzione può essere realizzata in forme anche molto diverse tra loro.



### 4.1.3 Ortogonalità delle funzioni sinc

Si può dimostrare<sup>10</sup> che le funzioni *sinc* costituiscono una base di rappresentazione ortogonale, in quanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f_c(t - kT_c)) \text{sinc}(f_c(t - hT_c)) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ T_c & \text{se } h = k \end{cases} \quad (4.3)$$

Pertanto, il valore dell'energia di un segnale limitato in banda è calcolabile a partire dai suoi campioni, e vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \sum_k \sum_h x_k x_h^* \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f_c(t - kT_c)) \text{sinc}(f_c(t - hT_c)) dt \\ &= \sum_k \sum_h x_k x_h^* T_c \delta(h, k) = T_c \sum_k |x_k|^2 \end{aligned}$$

### 4.1.4 Approssimazione degli impulsi

Mentre lo schema discusso al § 4.1 illustra gli aspetti teorico-matematici del teorema del campionamento, iniziamo ora ad esaminare come questo sia realmente implementato. Prima di discutere gli aspetti legati alla quantizzazione (vedi § successivo), osserviamo che il segnale  $x^*(t)$  non viene generato affatto, a causa dell'impossibilità di realizzare gli impulsi  $\delta(t)$ ; al suo posto viene prodotto un segnale  $x^\circ(t)$  mediante l'uso di un circuito *Sample and Hold* (s&H, ovvero *campiona e mantiene*) il cui schema di principio è mostrato in fig. 4.2-a)<sup>11</sup>. Quando  $s_1$  si chiude, il valore di tensione di ingresso viene trasferito ai capi del condensatore, dopodiché  $s_1$

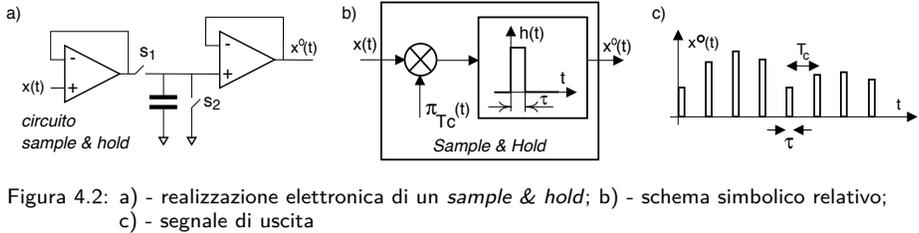
<sup>9</sup>Sarebbe necessaria una  $h(t)$  di durata infinita...

<sup>10</sup>Applicando il teorema di Parseval (§ 3.2) e la proprietà di traslazione temporale, la (4.3) può essere riscritta come

$$\int_{-\infty}^{\infty} T_c \text{rect}_{f_c}(f) e^{-j2\pi f k T_c} T_c \text{rect}_{f_c}(f) e^{+j2\pi f h T_c} df = (T_c)^2 \int_{-f_c/2}^{f_c/2} e^{-j2\pi f \frac{k-h}{T_c}} df$$

in cui l'esponenziale complesso sotto integrale compie un numero intero di oscillazioni a media nulla per  $f \in [-f_c/2, f_c/2]$  se  $k \neq h$ , e dunque in tal caso l'integrale è nullo; al contrario, l'esponenziale vale 1 se  $k = h$ , ed il suo integrale vale  $f_c$ , determinando così il risultato mostrato.

<sup>11</sup>Non entriamo nei dettagli del funzionamento del *buffer* (vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Amplificatore\\_separatore](https://it.wikipedia.org/wiki/Amplificatore_separatore)) qui esemplificato dall'amplificatore operazionale a controreazione unitaria: è sufficiente dire che agisce come un *adattatore di impedenza*, consentendo al condensatore di caricarsi in modo pressoché istantaneo, e di non scaricarsi prima che  $s_2$  sia chiuso, in quanto il secondo amplificatore presenta una impedenza di ingresso pressoché infinita.



si apre e lo stesso valore viene mantenuto costante per un tempo  $\tau \leq T_c$  e reso disponibile in uscita; trascorso il tempo  $\tau$  si chiude  $s_2$ , il condensatore si scarica, e l'uscita si annulla.

Il funzionamento del s&H può essere idealizzato come illustrato nella figura 4.2-b), ed il corrispondente segnale di uscita descritto nella forma

$$x^o(t) = \sum_n x(nT_c) \cdot \text{rect}_\tau(t - nT_c)$$

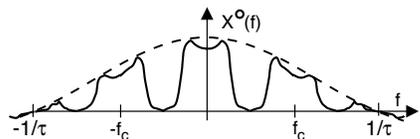
in cui cioè al posto degli impulsi *matematici* viene adottato un treno di impulsi *rettangolari* modulati in ampiezza (vedi fig. 4.2-c)). Il filtro passa basso di restituzione  $H(f)$  viene ora alimentato da  $x^o(t)$  anziché da  $x^\bullet(t)$ , e per determinare quale sia in questo caso la sua uscita, riscriviamo  $x^o(t)$  nella forma

$$\begin{aligned} x^o(t) &= \sum_n x(nT_c) \cdot \text{rect}_\tau(t) * \delta(t - nT_c) = \\ &= \text{rect}_\tau(t) * \sum_n x(nT_c) \cdot \delta(t - nT_c) = \text{rect}_\tau(t) * x^\bullet(t) \end{aligned}$$

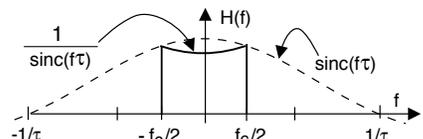
il cui spettro risulta pari a

$$X^o(f) = \tau \text{sinc}(f\tau) \cdot X^\bullet(f) \quad (4.4)$$

Osserviamo quindi che usare rettangoli di base  $\tau < T_c$  al posto degli impulsi, equivale a moltiplicare  $X^\bullet(f)$  per un involuppo  $\tau \text{sinc}(f\tau)$  che, seppure con  $\tau \ll T_c$  non causa grossi inconvenienti (gli zeri posti ad  $\frac{1}{\tau}$  si allontanano dall'origine, e  $\text{sinc}(f\tau)$  nei pressi di  $f = 0$  è praticamente costante), per  $\tau$  prossimo a  $T_c$  produce una alterazione dell'ampiezza della replica in banda base.



In tal caso ( $\tau$  è noto) il filtro di ricostruzione può essere realizzato in modo da avere un andamento *inverso* a quello del  $\text{sinc}(f\tau)$ , e tale che  $H(f) \cdot \tau \text{sinc}(f\tau) = \text{costante}$ . Infatti, questo accorgimento prende il nome di *sinc correction*<sup>12</sup>. Al § 19.9.5 è illustrato un metodo di **MULTIPLAZIONE** di più segnali campionati in una unica trasmissione.



### 4.1.5 Conversione A/D e D/A

Affrontiamo ora l'aspetto strettamente collegato a quello del campionamento, e relativo alla necessità di rappresentare i valori dei campioni  $x(nT_c)$ , che sono grandezze *a precisione infinita*, mediante un numero finito  $M$  di bit per campione, in modo da poter memorizzare o

<sup>12</sup>Vedi ad es. <https://www.maximintegrated.com/en/app-notes/index.mvp/id/3853>

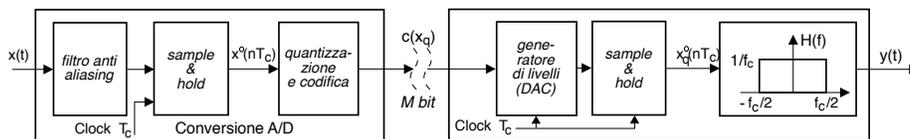


Figura 4.3: Campionamento, quantizzazione e restituzione nel mondo reale

trasmettere in forma di sequenza numerica tale rappresentazione digitale. L'insieme delle operazioni da svolgere è illustrato in fig. 4.3 dove oltre ai dispositivi che svolgono funzioni già discusse, è presente anche un blocco di *quantizzazione e codifica* dal lato della conversione analogico/digitale (A/D), mentre dal lato della restituzione è presente un *generatore di livelli* (o DAC) che ricostruisce il valore analogico (sia pur quantizzato) a partire dalla sua codifica binaria. Senza alcuna pretesa di completezza<sup>13</sup>, discutiamo brevemente una possibile implementazione dei due dispositivi ora citati.

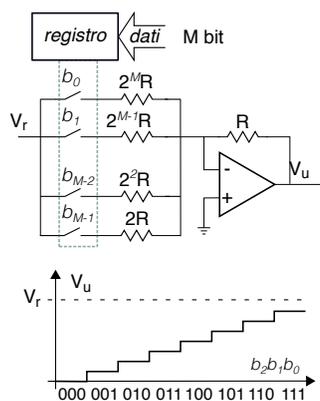
**Quantizzatore A/D a rampa lineare** Per fissare le idee, descriviamo il funzionamento di uno schema *semplice*, con l'ausilio della fig. 4.4. Il valore  $x^\circ(nT_c)$  viene confrontato con il segnale  $s(t)$  prodotto dal generatore di rampa, e finché il secondo non supera il valore del primo, il comparatore emette un livello logico vero (il *gate*), e quindi il segnale di clock in ingresso all'AND si ripresenta in uscita, facendo avanzare il contatore binario ad  $M$  bit. Quando  $s(t)$  supera  $x^\circ(nT_c)$  il *gate* si annulla e l'AND viene interdetto, in modo che il conteggio si arresti. Prima di iniziare un nuovo periodo della rampa, il valore presente nel contatore (pari a *dieci* nell'esempio in figura) viene letto ed adottato come *codifica binaria*  $c(x_q)$  del valore  $x^\circ(nT_c)$  in ingresso, ed il processo può ripartire per il campione successivo.

**Convertitore D/A a resistenze pesate** Il generatore di livelli presente in fig. 4.3 consiste in un circuito elettronico in grado di produrre una tensione di ampiezza  $V_u$  corrispondente a quella rappresentata dalla *parola binaria* ad  $M$  bit

$$b_{M-1}2^{M-1} + \dots + b_32^3 + b_22^2 + b_12 + b_0$$

in ingresso. Una soluzione *semplice* fa uso di un amplificatore operazionale *sommatore* come in figura, con ciascuna delle resistenze di ingresso  $R_i$  di valore  $2^i R$  ( $i$  da 1 a  $M$ ) collegata o meno alla tensione di riferimento  $V_r$  a seconda se il bit  $b_{M-i}$  sia uno o zero. In uscita sarà presente una tensione<sup>14</sup>

$$V_u = -V_r \sum_{i=1}^M b_{M-i} 2^{-i}$$



<sup>13</sup>Per approfondimenti sulla conversione A/D e D/A vedi ad es. [http://sms.unipv.it/misure/ME/Conversione\\_A-D\\_Slides.pdf](http://sms.unipv.it/misure/ME/Conversione_A-D_Slides.pdf)

<sup>14</sup>Per effetto della massa virtuale dell'amplificatore operazionale, in ciascuno dei resistori per cui  $b_{M-i} = 1$  scorre una corrente  $I_i = \frac{V_r}{2^i R}$ , la cui somma  $I_T$  scorre anche nella  $R$  di controreazione, per cui

$$V_u = -R \cdot I_T = -R \sum_{i=1}^M b_{M-i} \frac{V_r}{2^i R} = -V_r \sum_{i=1}^M b_{M-i} 2^{-i}$$

e moltiplicando e dividendo per  $2^M$  si ha  $V_r = -\frac{V_r}{2^M} \sum_{i=1}^M b_{M-i} 2^{M-i}$ , ossia compresa tra 0 e  $-V_r \frac{2^M - 1}{2^M}$ . A parte il segno meno, ad esempio con  $M = 3$  bit e  $V_r = 10$  si ha un *quanto* di  $10/8 = 1.25$ , e valori 0.0, 1.25, 2.5, ..., 8.75, vedi anche <http://www.elemania.altervista.org/adda/architetture/arc1.html>.

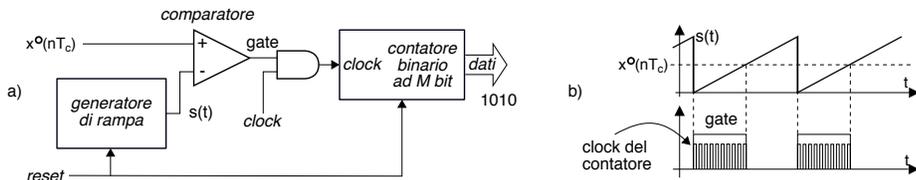


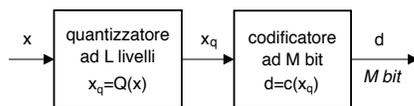
Figura 4.4: Quantizzatore a rampa lineare: a) - schema circuitale; b) - forme d'onda

in cui cioè il bit più significativo  $b_{M-1}$  pesa per  $1/2$ , quello successivo per  $1/4$ , e così via, dando luogo alla funzione ad  $L = 2^M$  livelli mostrata in figura.

## 4.2 Quantizzazione e codifica binaria

Al di là degli aspetti tecnologici, dal punto di vista dei segnali il processo di quantizzazione e conversione D/A va studiato in relazione all'effetto che la scelta del numero  $M$  di bit/campione produce sulla *qualità* del segnale ricostruito. Maggiore è  $M$ , e più elevata risulta la velocità binaria  $f_b = f_c \cdot M$  bit/sec, a cui corrisponde un maggior impegno di risorse trasmissive o di memoria. Ma riducendo il valore di  $M$  aumenta l'entità dell'errore di quantizzazione  $\varepsilon_q = x - x_q$ , di cui aumenta la potenza, e dunque peggiora il *rapporto segnale rumore*, come ora andiamo a studiare. Notiamo inoltre che essendo la quantizzazione un processo *non lineare* (§ 7.3) la densità spettrale di  $\varepsilon_q$  presenta anche frequenze *assenti* nel segnale originario, rendendo *bianco* il processo di errore<sup>15</sup> (§ 6.2.4).

Ai fini della discussione che segue separiamo la funzione svolta da un dispositivo come il quantizzatore a rampa nei due blocchi concettuali disegnati a fianco, in cui i valori dei campioni prima vengono *quantizzati* dal dispositivo  $x_q = Q(x)$ , e successivamente espressi (o *codificati*) mediante una sequenza di  $M$  bit  $d = c(x_q)$ . Il tipo di codifica  $c(x_q)$  realizzato dal quantizzatore a rampa prende il nome di...



### 4.2.1 Quantizzazione uniforme

In questo caso l'intervallo dei valori che l'ingresso  $x$  può assumere, indicato come *dinamica*  $\Delta_x = x_{max} - x_{min}$ , viene suddiviso in  $L = 2^M$  intervalli  $I_k$  di eguale ampiezza<sup>16</sup>  $\Delta_q = \frac{\Delta_x}{L}$ , separati da  $L - 1$  *soglie di decisione*, come riportato in figura per  $M = 3$  bit.

Dato che  $L$  è pari<sup>17</sup>, la curva di quantizzazione  $x_q = Q(x)$  che associa il valore  $x_q(k)$  a tutti gli  $x$  che ricadono in uno stesso intervallo  $I_k$  risulta *a scaletta* come in figura, e fornisce valori

<sup>15</sup>In realtà per valori particolarmente bassi di  $M$  il segnale di errore  $\varepsilon_q$  tende a divenire fortemente *correlato* (§ 6.1.4) a quello del segnale originale.

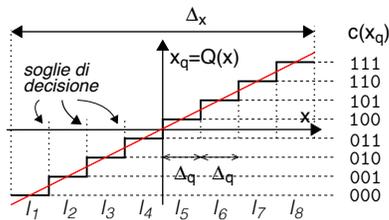
<sup>16</sup>Se invece gli intervalli hanno ampiezze differenti il quantizzatore è detto *non uniforme*, vedi ad es. il § 4.2.2.

<sup>17</sup>Il caso di  $L$  pari, diretta conseguenza dell'essere  $L = 2^M$  una potenza di due, è detto *mid-rise* in quanto il grafico  $x = Q(x)$  *sale* per  $x = 0$ , mentre ad  $L$  dispari (caso *mid-tread*) corrisponde una regola di quantizzazione basata sull'*arrotondamento* di  $x$ , ed esiste un valore quantizzato che esprime un *valore nullo*. Per approfondimenti, vedi ad es. [https://www.tutorialspoint.com/digital\\_communication/digital\\_communication\\_quantization.htm](https://www.tutorialspoint.com/digital_communication/digital_communication_quantization.htm)

quantizzati<sup>18</sup>

$$x_q = \Delta_q \cdot \left( \left\lfloor \frac{x}{\Delta_q} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right)$$

che rispetto alla *linea rossa* (che esprime la retta  $x_q = x$ ), sono *esatti* solo a metà dell'intervallo, mentre all'interno dello stesso l'errore  $\varepsilon_q = x - x_q$  si mantiene compreso tra  $-\frac{\Delta_q}{2}$  e  $\frac{\Delta_q}{2}$ . Dato poi che con  $M$  bit si possono descrivere le  $L = 2^M$  configurazioni binarie che corrispondono ai numeri che vanno da 0 a  $2^M - 1$ , sulla destra è riportata la corrispondenza dei codici  $d = c(x_q)$  che è possibile assegnare ai livelli quantizzati.



Per proseguire con l'analisi della distorsione, aggiungiamo ora l'ipotesi che il campione  $x$  da quantizzare sia stato prelevato da un membro di processo *stazionario ergodico*<sup>19</sup> con d.d.p. uniforme a media nulla, ovvero pari a  $p_X(x) = \frac{1}{\Delta_x} \text{rect}_{\Delta_x}(x)$ .

### 4.2.1.1 SNR di quantizzazione

La distorsione in cui si incorre a seguito del processo di quantizzazione è tanto minore quanto maggiore risulta il valore del *rapporto segnale-rumore*  $SNR_q = P_x/P_\varepsilon$ , ovvero il rapporto tra la potenza del segnale da quantizzare  $P_x$ , e quella  $P_\varepsilon$  dell'errore  $\varepsilon_q = x - x_q$ .

La fig. 4.5, mostra un possibile andamento temporale per  $x(t)$ , assieme alla sua versione quantizzata  $x_q^\circ(t)$ , ed al corrispondente errore  $\varepsilon_q(t)$ , per il quale si fa l'ulteriore ipotesi che anch'esso sia un processo ergodico a media nulla, anch'esso descritto da una d.d.p. uniforme  $p(\varepsilon) = \frac{1}{\Delta_q} \text{rect}_{\Delta_q}(\varepsilon)$  ma con dinamica  $\Delta_q = \Delta_x/L$ , e che sia anche *statisticamente indipendente*<sup>20</sup> da  $x(t)$ .

In queste ipotesi, la potenza  $P_x$  è pari alla varianza della v.a.  $x$ , e risulta<sup>21</sup>

$$P_x = \sigma_x^2 = \frac{\Delta_x^2}{12}$$

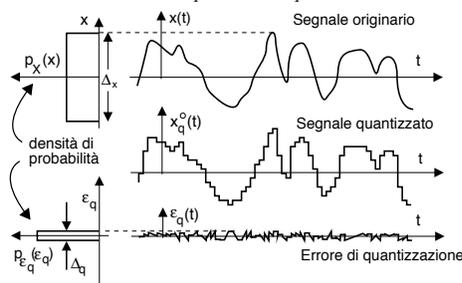


Figura 4.5: Processo di quantizzazione per segnali a distribuzione di ampiezza uniforme

mentre per quanto riguarda la potenza del segnale di errore  $\varepsilon_q(t)$  il risultato è lo stesso, ma espresso nei termini di  $\Delta_q$ , ovvero

$$P_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\Delta_q^2}{12} = \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta_x}{L} \right)^2$$

Siamo dunque in grado di valutare l' $SNR$  di quantizzazione come

$$SNR_q = \frac{P_x}{P_\varepsilon} = \frac{\Delta_x^2}{12} 12 \left( \frac{L}{\Delta_x} \right)^2 = L^2$$

<sup>18</sup>La notazione  $\left\lfloor \frac{x}{\Delta_q} \right\rfloor$  individua un *troncamento*, ovvero il numero intero subito inferiore ad  $\frac{x}{\Delta_q}$ . Ad esempio, se  $-4 < x < 4$ , allora avremo  $x_q = -3.5, -2.5, -1.5, -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5$ .

<sup>19</sup>Nel seguito della sezione sono usati i concetti definiti al capitolo 5, a cui si rimanda per le definizioni mancanti.

<sup>20</sup>Questa ipotesi, come anche quella delle v.a. uniformi, sono manifestamente *non vere* in generale, ma permettono di giungere ad un risultato abbastanza semplice, e che può essere molto utile nei progetti di dimensionamento.

<sup>21</sup>Assumendo che il processo sia ergodico, la potenza (media temporale) eguaglia (eq. (5.10)) la corrispondente media di insieme, ovvero il momento di secondo ordine  $m_x^{(2)}$ , che a sua volta è pari alla varianza  $\sigma_x^2$ , essendo  $m_x = 0$ . Vedi § 5.2.3 per il calcolo di  $\sigma_x^2 = \Delta_x^2/12$ .

e dunque  $SNR_q$  cresce in modo *quadratico* con l'aumentare dei livelli, ovvero se  $L$  raddoppia  $SNR_q$  quadruplica. Ricorrendo alla notazione in decibel<sup>22</sup> per l'SNR, otteniamo il risultato  $SNR_q(L)|_{dB} = 10 \log_{10} L^2 = 20 \log_{10} L$  e, ricordando che  $L = 2^M$ , si ottiene

$$SNR_q(M)|_{dB} = M \cdot 20 \log_{10} 2 \simeq 6 \cdot M \quad \text{dB} \quad (4.5)$$

dato che  $\log_{10} 2 \simeq 0.3$ . Pertanto è possibile concludere che

*La qualità del quantizzatore uniforme, espressa da  $SNR_q$  [dB], aumenta linearmente con il numero  $M$  di bit/campione, con un incremento di 6 dB per ogni bit utilizzato in più.*

Consideriamo ora cosa accade qualora il segnale in ingresso  $x$  abbia una dinamica *minore* di quanto previsto: in tal caso  $\sigma_x^2$  si riduce, mentre  $\sigma_\epsilon^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta_x}{L}\right)^2$  non cambia, e dunque  $SNR_q$  peggiora, come se avessimo ridotto il numero di livelli. Viceversa, la tecnica illustrata di seguito è in grado di mantenere un  $SNR_q$  accettabile anche con bassi livelli di segnale.

#### 4.2.2 Quantizzazione non uniforme

La tecnica di cui al titolo nasce sia come risposta al problema appena evidenziato, ossia il peggioramento di  $SNR_q$  in presenza di bassi segnali, sia in considerazione del fatto che in realtà il processo  $x$  non ha distribuzione di ampiezza uniforme come fino ad ora ipotizzato, rendendo il risultato (4.5) di ridotta utilità pratica. Ma svolgiamo prima una breve digressione su come, conoscendo con esattezza la  $p_X(x)$  del processo da quantizzare, si possa giungere al miglior risultato.

**Minimizzazione dell'errore di quantizzazione** Si può mostrare<sup>23</sup> che per una  $p_X(x)$  generica, il quantizzatore *ottimo* (che rende massimo  $SNR_q$ ) non suddivide la dinamica  $\Delta_x$  in  $L - 1$  intervalli di uguale estensione  $\Delta_q = \frac{\Delta_x}{L}$ , ma l'estensione  $\Delta_q(k)$  varia ed è diversa per ogni intervallo  $I_k$  con  $k = 1, 2, \dots, L$ , adottando in particolare intervalli di estensione *ridotta* nelle regioni in cui i valori  $x$  sono *più probabili, ovvero* più frequenti, e dunque per i quali la  $p_X(x)$  è *più grande*. In tal modo ai valori  $x$  *più probabili* corrisponde un errore di quantizzazione  $\sigma_q^2(k) = \Delta_q^2(k)/12$  *ridotto*; viceversa, le regioni corrispondenti a valori di  $x$  *più rari* adottano intervalli di estensione  $\Delta_q(k)$  *più grande*, e conseguentemente un  $\sigma_q^2(k)$  maggiore. Il risultato è quello variare il contributo alla  $P_\epsilon$  complessiva, riducendolo per i valori più frequenti, ed aumentandolo per quelli meno: infatti,  $P_\epsilon$  può essere valutata anche come un *valore atteso*, pesando i contributi  $\sigma_q^2(k)$  con le rispettive probabilità

$$\mathcal{P}_\epsilon = E_k \{ \sigma_q^2(k) \} = \sum_{k=1}^L p_k \sigma_q^2(k)$$

in cui  $p_k = \int_{I_k} p_X(x) dx$  è la probabilità che  $x \in I_k$ . Il modo ottimo di disporre le soglie  $(\theta_{k-1}, \theta_k)$  che delimitano  $I_k$  in modo da rendere minima  $\mathcal{P}_\epsilon$ , è noto come algoritmo di LLOYD-MAX<sup>24</sup>.

<sup>22</sup>Una discussione relativa alla misura delle grandezze in decibel, è fornita al § 7.1. Qui ci limitiamo ad usare i dB come misura relativa di un rapporto, ossia

$$SNR_q(dB) = 10 \log_{10} \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_\epsilon} = 10 \log_{10} \mathcal{P}_x - 10 \log_{10} \mathcal{P}_\epsilon = \mathcal{P}_x[dBV^2] - \mathcal{P}_\epsilon[dBV^2]$$

in cui le grandezze espresse in  $dBV^2$  rappresentano potenze di segnale di tensione, in unità logaritmiche.

<sup>23</sup>Vedi ad es. [http://en.wikipedia.org/wiki/Quantization\\_\(signal\\_processing\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Quantization_(signal_processing))

<sup>24</sup>Il metodo è iterativo, ed inizia suddividendo l'intervallo  $\Delta_x$  in modo uniforme. Per ogni iterazione:

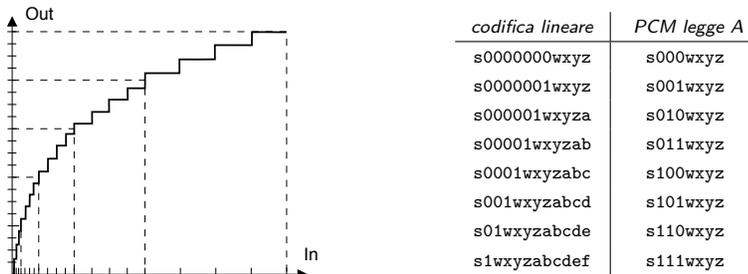


Figura 4.6: Caratteristica I/O di un quantizzatore logaritmico e relativa tabella di codifica

**Codifica PCM** Nella quantizzazione del segnale vocale, anche se è arbitrario identificare con esattezza una  $p_X(x)$ , si verifica strumentalmente che quest'ultima è addensata nelle regioni con valori più piccoli. Per questo motivo la legge di quantizzazione che si è adottata per ottenere gli 8 bit a campione utilizzati nel PCM<sup>25</sup> segue un andamento logaritmico<sup>26</sup>, e dimezza progressivamente la pendenza della caratteristica di ingresso-uscita del quantizzatore all'aumentare dei valori in ingresso.

La fig. 4.6 mostra un esempio di tale realizzazione (per i soli valori positivi), in cui l'andamento logaritmico viene approssimato individuando (a partire dall'origine) *regioni* di valori della  $x$  la cui ampiezza di volta in volta raddoppia, e suddividendo ogni regione in un uguale numero di intervalli equispazianti. La caratteristica non lineare è realizzabile per via completamente numerica: per prima cosa si realizza un campionamento uniforme con  $M = 12$  bit a campione, a cui corrispondono  $L = 2^{12} = 4096$  livelli. Per ogni campione, il numero di bit pari a zero nella parte più significativa degli  $M$  individua la *regione* dei valori di ingresso, mentre i bit rimanenti sono *shiftati* a destra, per mantenere costante il numero di *intervalli* per regione, ottenendo in definitiva una rappresentazione in *virgola mobile* del valore del campione.

**Esempio** La tabella a destra di fig. 4.6 esemplifica il processo di conversione PCM *legge A*, in cui a partire dalla quantizzazione uniforme a 12 bit si ottengono gli 8 bit della codifica PCM, ripartiti in un bit di segno (s), tre bit di esponente, e quattro di mantissa (wxyz). Il bit più significativo dei 12 rappresenta il segno, e resta inalterato. Il numero di zeri più significativi dei 12 individua in quale delle 8 regioni<sup>27</sup> cade il valore di ingresso, e tale regione è codificata mediante i 3 bit del codice PCM che seguono quello del segno. Delle restanti cifre della codifica uniforme, se ne conservano solo le 4 più significative. Ad esempio, il valore 100000001010 diviene 1-000-1010 (come risulta dalla prima riga della tabella), mentre 000110011010 diventa 0-101-1001, come riporta la sesta riga.

- si determinano i valori quantizzati  $x_k$  (detti *centroidi*) come  $x_k = E\{x \in I_k\} = \int_{I_k} x \cdot p_X(x/k) dx = \frac{\int_{I_k} x p_X(x) dx}{p_k}$ , in cui  $p_k = \int_{I_k} p_X(x) dx$ . In tal modo, i valori  $x_k$  si spostano (internamente a  $I_k$ ) verso la regione in cui  $p_X(x)$  ha un valore più elevato, ovvero dove la v.a. si addensa;
- si ri-calcolano i confini di decisione  $\theta_k$  come  $\theta_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ , seguendo lo spostamento degli  $x_k$ .

Le iterazioni si arrestano quando non si riscontrano cambiamenti apprezzabili.

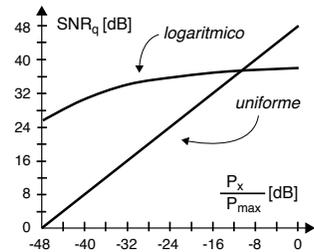
<sup>25</sup>La sigla PCM sta per *Pulse Code Modulation*, e trae origine dalla tecnica di quantizzazione di un segnale vocale di qualità telefonica (§ 9.1.2), anche se è stato poi adottato per indicare l'intera gerarchia di moltiplicazione plesiocrona (§ 19.3.1). Etimologicamente il termine deriva dall'*onda PAM* (§ 6.9.3) in cui degli impulsi sono *Modulati in Ampiezza*, mentre in questo caso le ampiezze degli impulsi sono *Codificate*.

<sup>26</sup>L'andamento esatto della curva segue uno di due standard, denominati legge  $\mu$  (per USA e Giappone) e legge  $A$  (per gli altri), lievemente diverse nella definizione, ma sostanzialmente equivalenti.

<sup>27</sup>Per motivi grafici, in figura sono mostrate solo 5 regioni, divise in 4 intervalli.

I risultati del *mapping* illustrato possono essere inseriti in una ROM come coppie di *ingresso-uscita*, utilizzando dunque 4096 posizioni di memoria da 8 bit ciascuna; al contrario presso il DAC di restituzione, sono sufficienti 256 posizioni, di 12 bit ciascuna.

Nella figura a fianco viene mostrato l'andamento di  $SNR_q$  al variare della potenza di segnale rispetto al massimo possibile, nei due casi del quantizzatore uniforme, oppure con compressione logaritmica. Come si può notare, l'effetto della quantizzazione logaritmica penalizza l' $SNR$  per i segnali a piena dinamica, ma peggiora molto più lentamente al diminuire della stessa. Al cap. 21 l'argomento della codifica di sorgente audio viene ripreso, e debitamente approfondito.



Le prossime sezioni non tengono più conto delle questioni relative alla quantizzazione dei campioni, anche se nella realizzazione di dispositivi reali può rivestire interesse di progetto.

### 4.3 Trasformata di Fourier di sequenze

Avendo illustrato come sia sufficiente la conoscenza dei soli campioni temporali  $x_n = x(nT_c)$  per descrivere completamente un segnale tempo continuo e limitato in banda  $x(t)$ , e come alla sequenza tempo-discreta dei suoi campioni  $x_n$  corrisponda una *periodizzazione* in frequenza  $X^\bullet(f)$ , notiamo come ciò sia in qualche modo *speculare* alla proprietà dei segnali *periodici nel tempo*, di godere di una rappresentazione equivalente nel dominio della frequenza, costituita dalla sequenza dei coefficienti  $X_n$  noti come serie di Fourier. L'analogia è più stringente di quanto non possa apparire, dato che è assolutamente lecito ed esatto<sup>28</sup> usare l'espressione della serie di Fourier (2.7) nella direzione *opposta*, ossia per ottenere lo spettro periodico di ampiezza  $X^\bullet(f)$  a partire dalla sequenza dei campioni temporali  $x_n$ :

$$X^\bullet(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_c} \quad (4.6)$$

definendo così una *trasformata di Fourier a tempo discreto*<sup>29</sup> o **DTFT**, che produce una  $X^\bullet(f)$  periodica in frequenza di periodo  $f_c = \frac{1}{T_c}$ <sup>30</sup>, in cui  $T_c$  è il periodo di campionamento con cui sono prelevati i valori  $x_n$ <sup>31</sup>. Alla (4.6) è associata una *antitrasformazione*, in grado di valutare i campioni temporali  $x_n$  a partire dalla conoscenza di un periodo di  $X^\bullet(f)$ , definita come

$$x_n = \frac{1}{f_c} \int_{-\frac{f_c}{2}}^{\frac{f_c}{2}} X^\bullet(f) e^{j2\pi f n T_c} df \quad (4.7)$$

e che è del tutto analoga (a parte il segno) alla (2.6) che calcola i coefficienti della serie di Fourier.

<sup>28</sup>A prima vista può sembrare *ardito* accettare che i coefficienti di Fourier (4.7) siano pari ai campioni di segnale  $x_n$ , ma se proviamo a calcolare  $X^\bullet(f) = \mathcal{F}\{x^\bullet(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - nT_c) \right) e^{-j2\pi f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t} \delta(t - nT_c) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_c}$ , otteniamo esattamente la (4.6).

<sup>29</sup>Condizione sufficiente per la convergenza della serie (4.6) è che risulti  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty$ , in quanto  $|X^\bullet(f)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_c} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|$ .

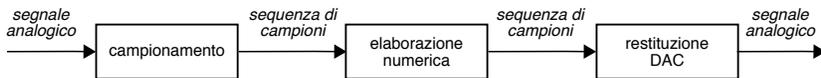
<sup>30</sup>Infatti se applichiamo la (4.6) per calcolare  $X^\bullet(f + f_c)$  si ottiene  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi(f+f_c)nT_c} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T_c} e^{-j2\pi f_c n T_c} = X^\bullet(f)$  dato che, essendo  $f_c = \frac{1}{T_c}$ , risulta  $e^{-j2\pi f_c n T_c} = e^{-j2\pi n} = 1$  per qualsiasi  $n$ .

<sup>31</sup>Proprio come ai coefficienti della serie di Fourier per segnali periodici, intervallati di  $F$  Hz, corrisponde un segnale periodico nel tempo, di periodo  $T = \frac{1}{F}$ .

Molte delle proprietà già note per la serie e la trasformata di Fourier sono valide anche in questo caso, come ad esempio

- simmetria coniugata per  $X^\bullet(f)$  nel caso di  $x_n$  reale;
- linearità:  $ax_n + by_n \iff aX^\bullet(f) + bY^\bullet(f)$ ;
- ritardo:  $x_{n-k} \iff X^\bullet(f) e^{-j2\pi k f T_c}$ ;
- modulazione:  $x_n e^{j2\pi n f_0 T_c} \iff X^\bullet(f - f_0)$ ;
- convoluzione:  $z_n = x_n * y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k} \iff Z^\bullet(f) = X^\bullet(f) \cdot Y^\bullet(f)$ ;
- prodotto:  $z_n = x_n \cdot y_n \iff Z^\bullet(f) = \frac{1}{f_c} \int_{-f_c/2}^{f_c/2} X^\bullet(\sigma) Y^\bullet(f - \sigma) d\sigma$ .

Tutto ciò permette di effettuare operazioni sui segnali come analisi spettrale e filtraggio, senza dover svolgere calcoli analitici come integrali e trasformate, bensì operando direttamente sui campioni di segnale mediante appositi programmi di calcolo numerico, eseguiti su dispositivi ottimizzati a tale scopo<sup>32</sup>, e quindi effettuare il processo di conversione D/A per riottenere un risultato tempo-continuo.



Resta comunque il fatto che nelle (4.6) e (4.7) tuttora compaiono una somma di infiniti termini ed un integrale di funzione continua, mentre per effettuare le operazioni di elaborazione numerica possono essere usate solo sequenze di durata finita e somme. Per questo motivo affrontiamo la sezione successiva, che illustra come ciò possa essere risolto eseguendo il campionamento anche in frequenza, e limitando i segnali ad una durata limitata.

#### 4.4 Trasformata discreta di Fourier

Disponendo di una sequenza di lunghezza *finita* composta da  $N$  valori  $x_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , corrispondenti a campioni di un segnale  $x(t)$  prelevati con ritmo  $f_c = \frac{1}{T_c}$ , si indica come DISCRETE FOURIER TRANSFORM (**DFT**) la nuova sequenza<sup>33</sup>

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} \quad (4.8)$$

univocamente definita per  $m = 0, 1, \dots, N - 1$ , e che costituisce una approssimazione<sup>34</sup> del campionamento in frequenza della trasformata  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ , calcolata per  $f = \frac{m}{N} f_c$ , e

<sup>32</sup>I chip progettati appositamente per svolgere calcoli di elaborazione numerica del segnale sono detti DSP (*Digital Signal Processor*).

<sup>33</sup>La (4.8) può essere fatta discendere dalla (4.6) vincolando  $f$  ad assumere i soli valori discreti  $f = \frac{m}{N} \frac{1}{T_c}$ , e limitando l'indice della sommatoria ad un insieme finito di campioni.

<sup>34</sup>Una prima fonte di approssimazione deriva dall'operazione di finestra legata all'uso di un numero finito di campioni, operando quindi su  $x_w(t) = x(t) w(t_c)$  anziché su  $x(t)$ . Per analizzare le altre fonti di approssimazione, iniziamo a scrivere l'espressione di  $X_w(f) = \mathcal{F}\{x_w(t)\}$  per  $f = \frac{m}{N} f_c$ :

$$\begin{aligned} X_w\left(f = \frac{m}{N} f_c\right) &= \int_0^{(N-1)T_c} x(t) e^{-j2\pi \frac{m}{N} f_c t} dt \\ &\simeq \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot \int_0^{(N-1)T_c} \text{sinc}(f_c(t - nT_c)) e^{-j2\pi \frac{m}{N} f_c t} dt \end{aligned}$$

in cui la seconda eguaglianza utilizza l'interpolazione cardinale  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \text{sinc}(f_c(t - nT_c))$  fornita dalla (4.1), ed introduce una seconda fonte di approssimazione legata all'intervallo *finito* di variazione per  $n$ : infatti,

moltiplicata per  $f_c$ :

$$X_m \simeq f_c X \left( f = \frac{m}{N} f_c \right) \quad (4.9)$$

Notiamo subito che la (4.8) è valida per qualsiasi  $m$ , ed ha un andamento periodico con periodo  $N$ , a cui corrisponde la frequenza  $f_c = \frac{1}{T_c}$ , in accordo con la periodicità in frequenza evidenziata per  $X^\bullet(f)$  (vedi (4.6) e (4.2)); per questo motivo, qualora il segnale originario  $x(t)$  contenga componenti a frequenze maggiori di  $\frac{f_c}{2}$ , gli  $X_m$  con indici prossimi ad  $\frac{N}{2}$  presenteranno errore di aliasing<sup>35</sup>. Notiamo inoltre come i valori  $X_m$  siano tutti relativi a frequenze  $\geq 0$ , ma nel caso di una sequenza  $x_n$  reale la proprietà di simmetria coniugata, associata alla periodicità in frequenza, rende il risultato interessante solo per indici  $m \leq \frac{N}{2}$ , dato che successivamente si trovano valori coniugati a quelli della prima metà. Notiamo infine che la (4.8) può essere espressa in forma matriciale: ad esempio, per  $N = 4$  si ottiene

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{\pi}{2}} & e^{-j\pi} & e^{-j\frac{3\pi}{2}} \\ 1 & e^{-j\pi} & e^{-j2\pi} & e^{-j3\pi} \\ 1 & e^{-j\frac{3\pi}{2}} & e^{-j3\pi} & e^{-j\frac{9\pi}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

da cui notiamo la proprietà di *simmetria* per la matrice dei coefficienti.

**Esempio** Allo scopo di concretizzare le differenze tra la trasformata di Fourier ed i valori forniti dalla DFT, in fig. 4.7-a sono riportati i valori  $|X_m|$ , normalizzati in ampiezza, per la DFT di una sinusoide a 10 Hz, adottando due diverse finestre di analisi (vedi § 3.8.3), prelevando alla medesima frequenza di campionamento (100 Hz) un numero variabile di campioni (mostrato in figura), e ponendo i rimanenti a zero, per calcolare in tutti i casi la medesima DFT a 256 punti<sup>36</sup>.

Il risultato è quindi confrontato (fig. 4.7-b) con quello ottenibile per via analitica calcolando la  $\mathcal{F}$ -trasformata dello stesso segnale, adottando le medesime finestre temporali, di durata uguale al primo caso. Le curve ottenute nel caso di 80 msec (e 8 campioni!) dipendono da meno di un periodo di segnale, e perciò presentano una componente continua apprezzabile. Aumentando la durata della finestra, l'approssimazione di calcolare una  $\mathcal{F}\{ \}$  mediante la DFT migliora, anche se persiste un ridotto potere di risoluzione spettrale.

**Osservazione** Probabilmente a questo punto qualche lettore può trovarsi stupito di non avere incontrato due linee spettrali, come sarebbe stato lecito aspettarsi per una sinusoide. In realtà ciò può accadere, a patto che il numero di campioni  $N$  su cui si effettua la DFT sia un multiplo intero  $k$  del numero di campioni  $M = T/T_c$  che ricadono entro uno stesso

benché l'integrale abbia estensione limitata, i valori di  $x(t)$  che cadono entro tale estensione, dovrebbero dipendere da *tutti* i suoi campioni. L'ultimo integrale è a sua volta una approssimazione (a causa degli estremi di integrazione limitati, e peggiore per i sinc centrati in prossimità dei confini della finestra) della trasformata (calcolata in  $f = \frac{m}{N} f_c$ ) di  $\text{sinc}(f_c(t - nT_c))$ , pari quest'ultima a  $T_c \text{rect}_{f_c}(f) e^{-j2\pi f n T_c}$ , che quando valutata per  $f = \frac{m}{N} f_c$ , fornisce il risultato

$$X_w \left( f = \frac{m}{N} f_c \right) \simeq T_c \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$$

per valori  $|m| \leq \frac{N}{2}$ , a causa della estensione limitata (in frequenza) di  $\text{rect}_{f_c}(f)$ . E' però facile verificare che  $X_w(\frac{m}{N} f_c)$  è periodica in  $m$  con periodo  $N$ , cosicché i valori assunti per  $m = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots$  sono uguali a quelli per  $m = -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots$ .

<sup>35</sup>Come osservato al § 4.1.1, lo spettro  $X^\bullet(f)$  di un segnale campionato a frequenza  $f_c$  è costituito dalle repliche del segnale originario, distanziate di multipli di  $f_c$ :  $X^\bullet(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_c)$ , e coincide con  $X(f)$  per  $-f_c/2 < f < f_c/2$ , se  $X(f)$  è limitata in banda tra  $\pm W$  ed  $f_c \geq 2W$ . Al contrario, se  $f_c < 2W$ , allora le repliche  $X(f - n f_c)$  si sovrappongono, e la (4.9) si riscrive come  $X_m \simeq f_c X^\bullet(f = \frac{m}{N} f_c)$ .

<sup>36</sup>Il metodo esposto di porre a zero i campioni fino al raggiungimento di una potenza di due è detto ZERO PADDING. Il calcolo della DFT su di un numero di punti pari ai campioni di segnale disponibili, non avrebbe dato luogo all'effetto finestra, ma avrebbe fornito in tutti i casi andamenti simili a quello osservabile per 256 punti. Infine, notiamo che nelle figure sono mostrati solo i primi 128 valori, essendo i rimanenti speculari.

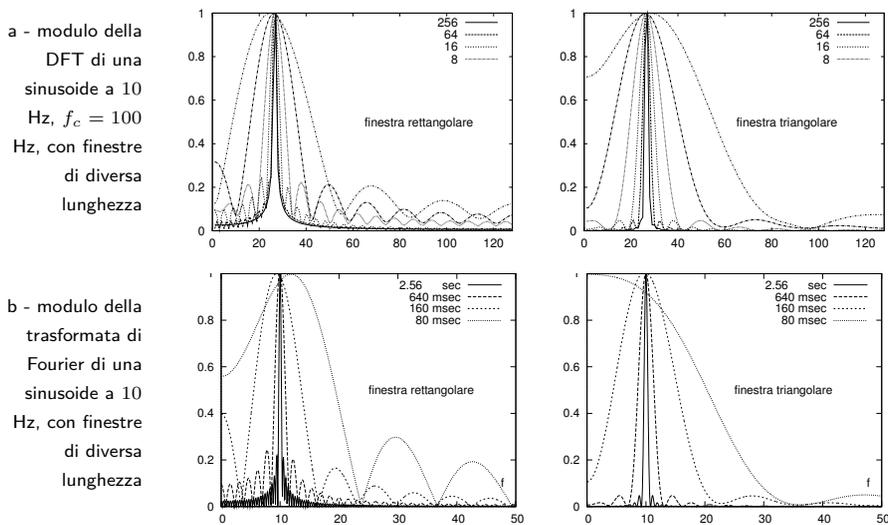


Figura 4.7: Confronto tra DFT ed  $\mathcal{F}$ -trasformata con uguale estensione temporale

periodo  $T$  della sinusoida<sup>37</sup>, ovvero  $k$  esprime quanti periodi entrano in  $N$  campioni, ed  $M$  quanti campioni/periodo: infatti in questo caso, l'applicazione della IDFT (4.11) produce una sequenza ancora periodica. Nel nostro esempio, essendo  $T = 1/10 = 100$  msec e scegliendo  $N = 64$  punti e  $k = 6$  periodi, il vincolo  $N = kM = kTf_c$  permette di ottenere  $f_c = \frac{N}{kT} = \frac{64}{6 \cdot 10^{-1}} = 106, \bar{6}$  Hz, ovvero  $M = Tf_c = 10^{-1} \cdot 106, \bar{6} = 10, \bar{6}$  campioni/periodo. La fig. 4.8 mostra questo risultato, evidenziando come la riga spettrale si manifesti per  $m = 6$ , ossia alla frequenza  $f = \frac{m}{N} f_c = \frac{6}{64} 106, \bar{6} = 10$  Hz, mentre la riga presente in  $m = 58$  è in realtà il ripiegamento periodico di quella a  $-10$  Hz.

Il passaggio dai campioni nel tempo  $x_n$  a quelli in frequenza  $X_m$  è invertibile<sup>38</sup>, ricorrendo alla INVERSE DISCRETE FOURIER TRANSFORM (IDFT)

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{j2\pi \frac{m}{N} n} \tag{4.11}$$

che per  $n$  esterno a  $[0, N - 1]$  continua a valere, ed assume valori periodici, coerentemente a quanto accade per lo sviluppo in serie di Fourier. Infatti il legame tra DFT e serie di Fourier è molto stretto, in quanto i valori  $X_m$  rappresentano una approssimazione<sup>39</sup> dei rispettivi

<sup>37</sup>Con la ovvia condizione che sia  $M > 2$  per rispettare il vincolo  $f_c > 2/T$

<sup>38</sup>Sostituendo infatti la (4.8) nella (4.11), otteniamo

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left( \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi \frac{m}{N} k} \right) e^{j2\pi \frac{m}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m}{N} (n-k)}$$

ma, dato che  $\sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m}{N} (n-k)} = \begin{cases} N & \text{se } k = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ , allora nella sommatoria esterna sopravvive solo il termine  $x_n$ , dimostrando l'uguaglianza.

<sup>39</sup>La relazione (4.12) si dimostra combinando le relazioni (3.3) e (4.9):  $X_n \simeq f_c X\left(\frac{n}{N} f_c\right) = f_c X\left(\frac{n}{NT_c}\right) = f_c X\left(\frac{n}{T}\right) = f_c X(nF) = f_c T X_n^{SF} = \frac{1}{T_c} T X_n^{SF} = N X_n^{SF}$

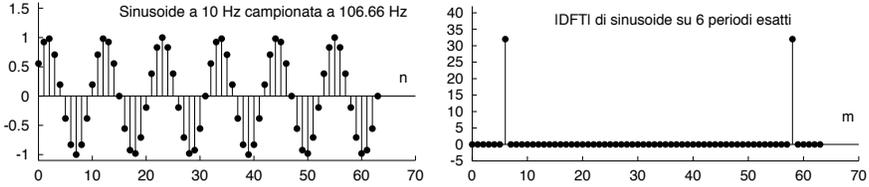


Figura 4.8: Sinusoide campionata su di un numero intero di periodi e relativo modulo di DFT

coefficienti della serie di Fourier  $X_m^{SF} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j2\pi \frac{m}{T} t} dt$ , calcolati a partire da un segmento  $x_T(t)$  estratto da  $x(t)$ , e moltiplicati per  $N$ :

$$X_m \simeq N \cdot X_m^{SF} \quad (4.12)$$

Per approfondire i risvolti di questo risultato, affrontiamo la sezione successiva.

#### 4.4.1 Relazione tra DTFT, DFT e trasformata zeta

Così come per i segnali analogici sussiste una relazione (vedi pag. 160) tra la trasformata di FOURIER e quella di LAPLACE, così nel contesto delle sequenze, esistono legami tra DTFT e *trasformata zeta*, definita quest'ultima come  $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$ , funzione complessa della variabile complessa *zeta* dal valore

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} \quad (4.13)$$

che, nel caso in cui converga per  $|z| = 1$ , può essere fatta corrispondere alla DTFT (4.6) della stessa sequenza  $x_n$  semplicemente ponendo  $z = e^{j\omega}$ , ovvero calcolando  $X(z)$  sul *cerchio unitario*:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n} = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X^\bullet(f)|_{f=\frac{\omega}{2\pi T_c}} \quad (4.14)$$

Infatti, nelle consuete condizioni in cui gli  $x_n$  sono i campioni di un segnale  $x(t)$  limitato in banda tra  $\pm W$  e prelevati con ritmo  $f_c \geq 2W$ , la (4.14) effettivamente *coincide* (per  $-\pi \leq \omega < \pi$ ) con la  $X^\bullet(f)$  (eq. (4.6), per  $-\frac{f_c}{2} \leq f \leq \frac{f_c}{2}$ ) in cui si ponga  $f = \frac{\omega}{2\pi T_c}$ , mettendo cioè in corrispondenza le frequenze  $\pm \frac{f_c}{2}$  di  $X^\bullet(f)$  con le pulsazioni  $\pm \pi$  di  $X(e^{j\omega})$ . Al di fuori di tale intervallo,  $X(e^{j\omega})$  è periodica in  $\omega$  con periodo  $2\pi$ , analogamente a ciò che risulta (con periodo  $f_c$ ) per la trasformata di Fourier  $X^\bullet(f)$  di sequenze; se invece  $x_n$  è *sottocampionata*, ossia  $f_c < 2W$ , anche  $X(e^{j\omega})$  è affetta da aliasing, così come avviene per  $X^\bullet(f)$ .

**Esempio** Consideriamo la sequenza  $x_n = \begin{cases} a^n & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$  il cui andamento per  $a = 0.7$  è mostrato

in fig. 4.9, la cui trasformata zeta  $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$  risulta pari a<sup>40</sup>  $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ , ed il cui modulo, dopo aver scritto la variabile complessa  $z$  come  $z = x + jy$ , è espresso

$$\text{come } |X(z)| = 1 / \sqrt{\left(\frac{x^2 - ax + y^2}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{ay}{x^2 + y^2}\right)^2}.$$

<sup>40</sup>Il risultato si ottiene ricordando che  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$  qualora  $|\alpha| < 1$ .

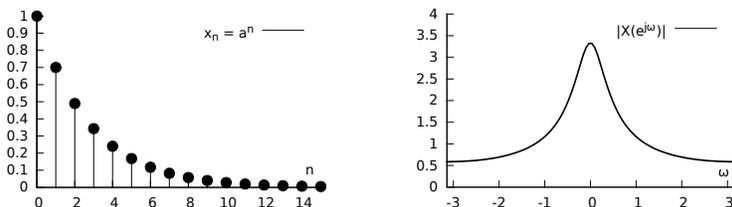
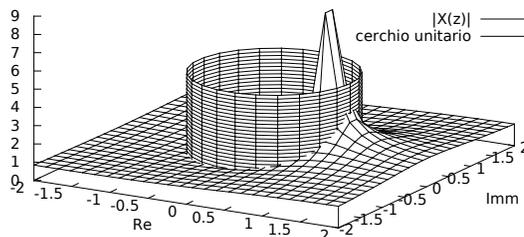


Figura 4.9: Sequenza  $x_n = a^n$  e modulo della relativa trasformata di Fourier a tempo discreto

Facendo ora variare  $z$  nell'intervallo  $[-2 - j2, 2 + j2]$  si ottiene per il modulo di  $X(z)$  l'andamento mostrato nella figura a lato, in cui è anche raffigurato un cilindro di raggio unitario, la cui intersezione con  $|X(z)|$  individua l'andamento di  $|X(e^{j\omega})| = 1/\sqrt{1+a^2-2a\cos\omega}$ , ossia la DTFT della sequenza  $a^n$ , che a sua volta è mostrata in fig. 4.9 per  $-\pi < \omega < \pi$ .



Se la  $X(e^{j\omega})$  ottenuta per una sequenza  $x_n$  aperiodica nel tempo è campionata in  $N$  punti equispaziati e disposti sul cerchio unitario, ossia ponendo  $\omega = 2\pi \frac{m}{N}$  con  $m = 0, 1, \dots, N-1$ , si ottiene allora una sequenza periodica in frequenza<sup>41</sup>

$$\tilde{X}_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi \frac{m}{N}} = X^*(f) \Big|_{f=f_c \frac{m}{N}} \tag{4.15}$$

che può coincidere con la sequenza  $X_m$  ottenuta calcolando la DFT (4.8) di una sequenza  $x_n$ , qualora questa abbia una durata limitata  $\leq N$ . D'altro canto, è possibile applicare la IDFT (4.11) ad un periodo della sequenza  $\tilde{X}_m$ , ed ottenere quindi una nuova sequenza di valori nel tempo, anch'essa periodica di periodo  $N$ , espressa come

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{X}_m e^{j2\pi \frac{m}{N} n} \tag{4.16}$$

Infatti, i valori  $\tilde{x}_n$  dipendono da quelli  $x_n = x(t) \Big|_{t=nT_c}$  del segnale originario  $x(t)$ , campionato agli istanti  $t = nT_c$ , mediante la relazione<sup>42</sup>

<sup>41</sup>Infatti,  $e^{-j2\pi \frac{m+N}{N} n} = e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} e^{-j2\pi n}$ , ed il secondo termine vale 1 per qualsiasi  $n$ . Indichiamo qui ed al prossimo §, una sequenza periodica mediante la tilde ..

<sup>42</sup>Infatti, sostituendo la (4.15) in (4.16), otteniamo  $\tilde{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{h=-\infty}^{\infty} x_h e^{-j2\pi \frac{k}{N} h} e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$ . Scambiando ora l'ordine delle sommatorie risulta

$$\tilde{x}_n = \sum_{h=-\infty}^{\infty} x_h \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (h-n)} \right)$$

Dato che  $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (h-n)} = \begin{cases} 1 & \text{se } h = n + rN \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ , con  $r$  intero, si ottiene il risultato (4.17).

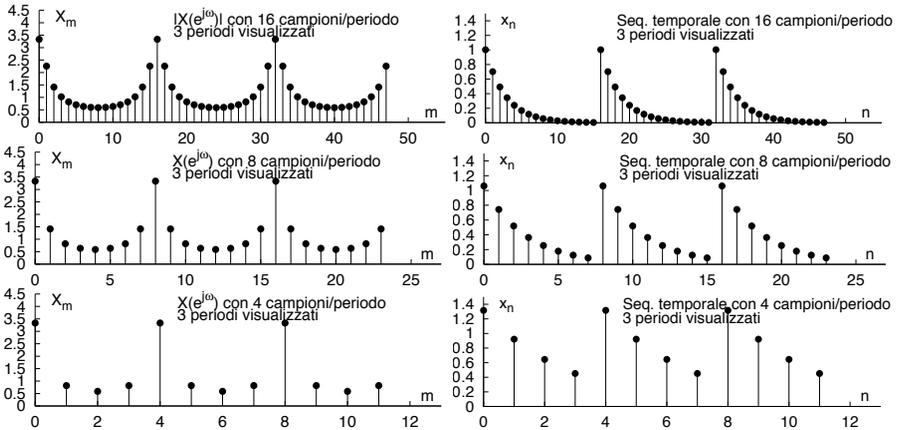


Figura 4.10: Aliasing temporale al diminuire della risoluzione del campionamento in frequenza

$$\tilde{x}_n = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{n+rN} \tag{4.17}$$

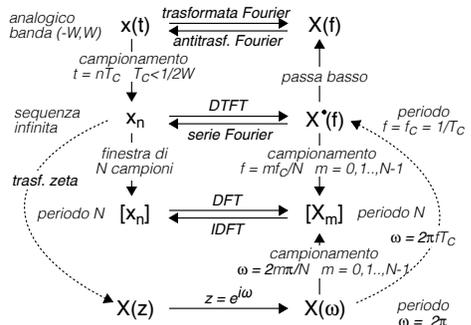
e quindi i primi  $N$  valori di  $\tilde{x}_n$  coincidono con i campioni di  $x(t)$  solo se quest'ultimo ha durata limitata, con estensione minore di  $NT_c$ , ossia se  $N$  è sufficientemente elevato in modo che  $NT_c$  copra tutta la durata di  $x(t)$ , e la (4.13) si riconduca alla somma di un numero finito di termini. D'altra parte, se  $x(t)$  ha durata maggiore di  $NT_c$ , ovvero  $X(z)$  è stata campionata su di un numero di campioni troppo ristretto, allora l'applicazione della IDFT (4.16) ad  $\tilde{X}(k)$  provoca il fenomeno di *aliasing temporale*.

**Esempio** Nella parte sinistra di fig. 4.10 viene mostrato il modulo della sequenza  $X_m$  ottenuta campionando la  $X(e^{j\omega})$  dell'esempio precedente, utilizzando 16, 8 o 4 campioni/periodo. Nella parte destra della stessa figura sono quindi rappresentate le corrispondenti sequenze  $x_n$  ottenute mediante IDFT. Si può notare che, mentre con 16 campioni/periodo la ricostruzione della sequenza  $x_n = a^n$  è piuttosto fedele, con 8 campioni si inizia a verificare il fenomeno di aliasing temporale, che diviene ancor più evidente per 4 campioni/periodo.

**Riepilogo** La figura che segue tenta di riassumere le relazioni che legano la trasformata di Fourier per segnali limitati in banda ai suoi campioni ed alla relativa DTFT, così come la relazione di questa con la DFT e la trasformata zeta.

### 4.4.2 Fast Fourier Transform

La sigla FFT descrive una classe di algoritmi di calcolo della DFT e della sua inversa, caratterizzati dall'uso di un numero molto ridotto di operazioni, rendendo così computazionalmente praticabile l'elaborazione numerica dei segnali. Analizziamo innanzitutto come il calcolo di ognuno degli  $N$  termini  $X_m$  della (4.8), considerando i valori  $e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$



precalcolati (vedi (4.10)), richiede  $N$  moltiplicazioni complesse (equivalenti ognuna ad 4 moltiplicazioni e 2 somme reali) ed  $N - 1$  somme complesse (ognuna pari a 2 somme reali): pertanto una DFT richiede  $N(N(4 + 2) + 2(N - 1)) = N(8N - 2) \simeq 8N^2$  operazioni.

Al contrario, gli algoritmi FFT più efficienti riducono il numero di operazioni ad  $8N \log_2 N$ : ad esempio, ponendo  $N = 1024$ , si ottiene un miglioramento di  $2^3(2^{10})^2/2^3 2^{10} \cdot 10 = 2^{10}/10 \simeq 100$  volte! Queste prestazioni sono legate all'adozione di un valore di  $N$  che sia una potenza di due (ossia  $N = 2^M$  con  $M$  intero), ma successivamente sono stati individuati metodi<sup>43</sup> che permettono una efficienza di calcolo comparabile anche per finestre di analisi di lunghezza qualsiasi.

#### 4.4.3 Relazione tra DFT e DCT

Anche per la DFT risulta valida la proprietà di simmetria coniugata (§ 3.3) e quindi, se i valori della sequenza  $x_n$  di lunghezza  $N$  che compare nella (4.8) sono reali anziché complessi, allora i coefficienti di DFT  $X_m$  presentano parte reale pari e parte immaginaria dispari. In particolare, se immaginiamo di *estendere* la lunghezza della sequenza a  $2N$  punti, ottenuti ribaltando sugli indici negativi la sequenza di partenza come  $x_{-n} = x_n$  (vedi prima riga di fig. 4.11), allora siamo nelle condizioni di sequenza *reale pari*, che determina una trasformata solo reale (e pari), con parte immaginaria nulla.

Per arrivare a definire la DISCRETE COSINE TRANSFORM (DCT) si calcola una DFT *bilatera* sulla sequenza lunga  $2N$  ottenuta traslando quella descritta in modo da renderla effettivamente pari (seconda riga di fig. 4.11). Considerando che per segnali reali pari le componenti sinusoidali della base della DFT non danno contributi al risultato<sup>44</sup>, e adottando un

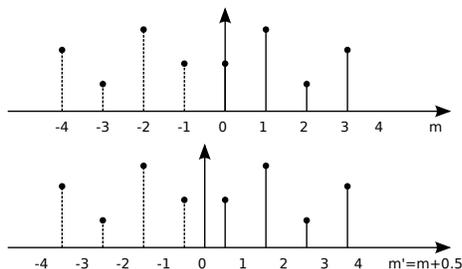


Figura 4.11: Estensione pari di sequenza reale

<sup>43</sup>Vedi ad es. [http://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata\\_di\\_Fourier\\_veloce](http://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata_di_Fourier_veloce)

<sup>44</sup>Scriviamo la (4.8) come

$$\begin{aligned}
 X_m &= \sum_{n'=-N+1/2}^{N-1/2} x_{n'-1/2} e^{-j2\pi \frac{n'}{2N} m} = \\
 &= \sum_{n'=-N+1/2}^{N-1/2} x_{n'-1/2} \cos\left(2\pi \frac{n'}{2N} m\right) - j \sum_{n'=-N+1/2}^{N-1/2} x_{n'-1/2} \sin\left(2\pi \frac{n'}{2N} m\right) = \\
 &= 2 \sum_{n'=1/2}^{N-1/2} x_{n'-1/2} \cos\left(2\pi \frac{n'}{2N} m\right) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(2\pi \frac{n+1/2}{2N} m\right) = \\
 &= 2 \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{\pi}{N} \left(n + \frac{1}{2}\right) m\right]
 \end{aligned}$$

in cui  $x_{n'}$  è quella disegnata per seconda in fig. 4.11. La quarta eguaglianza tiene conto del fatto che il termine immaginario si annulla, in quanto sommatoria bilatera di una funzione dispari (ottenuta come prodotto di  $x_{n'-1/2}$  pari e  $\sin\left(2\pi \frac{n'}{2N} m\right)$  dispari), e del fatto che essendo i termini coseno pari, la sommatoria può essere ristretta ai soli indici positivi, raddoppiati. La penultima eguaglianza rappresenta il semplice cambio di variabile  $n = n' - 1/2$ , mentre l'ultima è (a parte il fattore 2) la definizione della DCT data in (4.18).

nuovo cambio di variabile, si ottiene in definitiva la formula di calcolo della DCT come

$$X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( n + \frac{1}{2} \right) m \right] \quad (4.18)$$

a cui è associata la trasformazione inversa IDCT

$$x_n = \frac{1}{2} X_0 + \sum_{m=1}^{N-1} X_m \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( m + \frac{1}{2} \right) n \right] \quad (4.19)$$

La DCT verrà usata in questo testo nell'ambito della compressione di immagini (§ 21.2.4): infatti i valori di luminanza dei pixel in cui si scompone una immagine, sono tutti valori reali.

## 4.5 Filtraggio numerico via DFT

La definizione di DFT illustrata al § 4.4 ben si presta a calcolare il risultato relativo ad un integrale di convoluzione, a patto di seguire alcune accortezze.

### 4.5.1 Convoluzione discreta

Dati due segnali  $x(t)$  e  $h(t)$  limitati in banda tra  $-W$  e  $W$ , anche il risultato della convoluzione  $y(t) = x(t) * h(t)$  è limitato in banda, ed i suoi campioni  $y_n = y(nT_c)$  (con  $T_c < \frac{1}{2W}$ ) possono essere calcolati<sup>45</sup> a partire da quelli di  $x(t)$  e  $h(t)$ , come

$$y_n = T_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \quad (4.20)$$

Nel caso in cui le sequenze  $x_n$  e  $h_n$  abbiano durata finita e pari rispettivamente a  $N$  ed  $M$  campioni, si otterrà una sequenza  $y_n$  di durata pari a  $N + M - 1$  campioni.

**Esempio:** il lato sinistro di fig. (4.12) mostra una sequenza triangolare ed una rettangolare con un numero di elementi non nulli rispettivamente pari a 5 e 4, la cui convoluzione si estende su 8 valori.

<sup>45</sup>Infatti, esprimendo l'integrale di convoluzione  $x(t) * h(t)$  nei termini dei campioni di  $x(t)$  e  $h(t)$  (eq. 4.1), e sfruttando la proprietà di ortogonalità dei segnali  $\text{sinc}(f_c(t - kT_c))$  (vedi § 4.1.3), per i campioni dell'uscita possiamo scrivere

$$\begin{aligned} y(nT_c) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(nT_c - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(\tau - kT_c)) \right] \left[ \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(jT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(nT_c - \tau - jT_c)) \right] d\tau = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(kT_c) h(jT_c) \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(f_c(\tau - kT_c)) \text{sinc}(f_c(\tau - (n - j)T_c)) d\tau = \\ &= \frac{1}{f_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) h((n - k)T_c) = \frac{1}{f_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} \end{aligned}$$

in cui alla seconda uguaglianza si è applicata la formula di ricostruzione *cardinale*  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(t - kT_c))$  e dunque  $h(t - \tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h(jT_c) \cdot \text{sinc}(f_c(t - \tau - jT_c))$ , quest'ultima valutata per  $t = nT_c$ ; alla terza uguaglianza si è considerato che  $\text{sinc}(x)$  è una funzione *pari*, permettendo di scrivere  $\text{sinc}(f_c((n - j)T_c - \tau)) = \text{sinc}(f_c(\tau - (n - j)T_c))$ , ed alla quarta si è applicata la proprietà di ortogonalità tra  $\text{sinc}(f_c t)$  traslati di multipli di  $T_c = 1/f_c$  (vedi § 4.1.3), per cui l'integrale vale  $T_c = 1/f_c$  solo quando  $k = n - j$ , ovvero  $j = n - k$ .

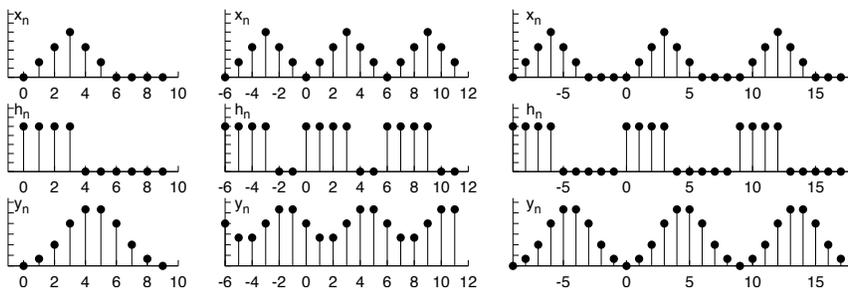


Figura 4.12: Confronto tra convoluzione discreta, circolare, e via DFT

#### 4.5.2 Convoluzione circolare

Date due sequenze  $x_n$  ed  $h_n$  di durata finita  $N$ , il prodotto  $Y_m = X_m H_m$  delle rispettive DFT  $X_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$  ed  $H_m = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$  possiede antitrasformata  $\tilde{y}_n = \text{IDFT} \{Y_m\}$  periodica in  $n$  di periodo  $N$ , e pari a

$$\tilde{y}_n = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{x}_p \tilde{h}_{n-p} \quad (4.21)$$

in cui  $\tilde{x}_n$  e  $\tilde{h}_n$  sono le sequenze periodiche di periodo  $N$  ottenute replicando infinitamente le sequenze originali  $x_n$  ed  $h_n$  (<sup>46</sup>). La convoluzione (4.21) è detta *circolare* perché è possibile immaginare le sequenze  $x_n$  ed  $h_n$  incollate su due cilindri concentrici, e la somma svolta sui prodotti degli elementi coincidenti. Ogni valore di  $p$  corrisponde ad una diversa rotazione relativa (con angolo multiplo di  $2\pi/N$ ) dei cilindri, ed il campione di  $h_n$  che era allineato ad  $x_{N-1}$  rientra dall'altro lato, per corrispondere ad  $x_0$ .

La parte centrale di fig. (4.12) mostra il risultato della periodizzazione delle stesse sequenze dell'esempio precedente, assieme al risultato della convoluzione circolare tra esse, considerando un periodo  $N = 6$  per entrambe: come evidente, il risultato è abbastanza differente da quello ottenuto nel caso della convoluzione discreta.

#### 4.5.3 Convoluzione tra sequenze di durata finita via DFT

Sappiamo che la convoluzione produce un risultato di durata pari alla somma delle durate degli operandi; come anticipato, nel caso di due sequenze  $x_n$  ed  $h_n$  di durata  $N$  ed  $M$ , il risultato della convoluzione discreta  $y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k h_{n-k}$  produce valori non nulli per indici  $n = 0, 1, \dots, N + M - 1$ . Pertanto, per fare in modo che la (4.21) produca lo stesso effetto di una convoluzione discreta, occorre costruire delle sequenze  $x'_n$  e  $h'_n$  di lunghezza almeno pari ad

<sup>46</sup>Infatti, ad  $x_n$  ed  $h_n$  corrispondono le DFT periodiche  $\tilde{X}_m$  ed  $\tilde{H}_m$ , che hanno per antitrasformata  $\tilde{x}_n$  ed  $\tilde{h}_n$ . Il prodotto  $\tilde{X}_m \tilde{H}_m$ , espresso in termini di  $\tilde{x}_n$  ed  $\tilde{h}_n$ , risulta pari a  $\tilde{Y}_m = \tilde{X}_m \tilde{H}_m = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{x}_p \tilde{h}_q e^{-j2\pi \frac{m}{N} (p+q)}$ , ed applicando a questo la IDFT (4.11), otteniamo:

$$\tilde{y}_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{Y}_m e^{j2\pi \frac{m}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} \tilde{x}_p \tilde{h}_q \left( \sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m}{N} (n-p-q)} \right)$$

Dato che  $\sum_{m=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m}{N} (n-p-q)} = \begin{cases} N & \text{se } q = (n-p) + lN \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ , con  $l$  intero, risulta allora  $\tilde{y}_n = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{x}_p \tilde{h}_{n-p}$ , come espresso dalla (4.21).

$N + M - 1$ , ottenute a partire dai valori di  $x_n$  ed  $h_n$ , a cui si aggiungono  $M - 1$  ed  $N - 1$  valori nulli, rispettivamente. In tal modo, il prodotto  $X'_m H'_m$  tra le DFT ad  $N + M - 1$  punti di queste due nuove sequenze può essere antitrasformato, per fornire il risultato corretto.

La parte destra di fig. (4.12) mostra come estendendo con zeri le due sequenze di esempio fino ad una stessa lunghezza  $N = 9$ , il risultato della loro convoluzione circolare anch'esso di periodo  $N$  ora fornisce con esattezza lo stesso risultato ottenuto calcolando direttamente la convoluzione discreta.

#### 4.5.4 Convoluzione di segnali via DFT

Due segnali  $x(t)$  e  $h(t)$  limitati in banda non possono, a rigore, essere limitati nel tempo. Viceversa, una finestra di segnale non può, a rigore, essere rappresentata dai suoi campioni: infatti, l'effetto della convoluzione in frequenza tra la trasformata della finestra (nominalmente illimitata in banda) e lo spettro del segnale, produce una dispersione frequenziale di quest'ultimo.

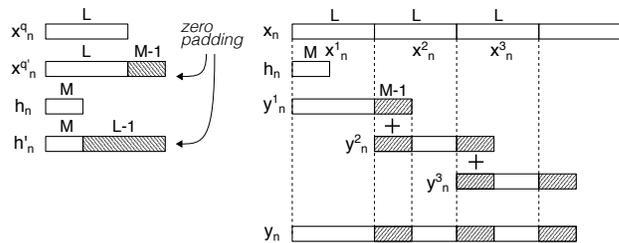
Ciononostante, disponendo di un numero di campioni sufficientemente elevato, si può assumere che la trasformata della finestra si attenui più velocemente in frequenza, fino a rendersi trascurabile oltre un certo valore. Inoltre, l'adozione di una frequenza di campionamento più elevata provoca un allontanamento delle repliche spettrali del segnale campionato. In queste due ipotesi, è lecito ritenere l'elaborazione condotta sui campioni di segnale, equivalente a quella da svolgere sul segnale originario.

Consideriamo quindi il caso di operare su campioni prelevati alla frequenza opportuna, e di voler determinare la risposta di un filtro caratterizzato dai campioni<sup>47</sup>  $h_n = T_c \cdot h(nT_c)$  di durata finita  $M$ , ad un ingresso descritto dai campioni  $x_n = x(nT_c)$  di durata indefinita. Per applicare i risultati fin qui descritti, occorre suddividere la sequenza  $x_n$  in segmenti  $x_n^q$  di lunghezza  $L$

$$x_n^q = \begin{cases} x_n & \text{per } qL \leq n < (q+1)L \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

in modo da poter scrivere  $x_n = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_n^q$ , operare una successione di convoluzioni discrete  $y_n^q = x_n^q * h_n$ , ed infine ottenere  $y_n = x_n * h_n = \sum_{q=-\infty}^{\infty} y_n^q$  per la linearità della convoluzione.

Osserviamo ora (vedi fig. a lato) che ognuno dei termini  $y_n^q$  risulta di estensione  $N = M + L - 1$  punti, e può essere calcolato mediante la DFT inversa ad  $N$  punti del prodotto  $X_m^q H'_m$  tra le DFT ad  $N$  punti delle versioni *allungate con zero* (ZERO PADDED) di  $x_n^q$  ed  $h_n$ .



Infine, notiamo che l'estensione temporale  $N = M + L - 1$  dei termini  $y_n^q$  è maggiore di quella dei segmenti originali  $x_n^q$ , di lunghezza  $L$ : pertanto la sequenza  $y_n$  si ottiene sommando ai primi  $M - 1$  valori di ognuna delle  $y_n^q$ , gli ultimi  $M - 1$  valori risultanti dalle operazioni precedenti. Per questo motivo, il metodo prende il nome di OVERLAP AND ADD.

<sup>47</sup>La normalizzazione per  $T_c$  discende dalla (4.20)

## 4.6 Riassumendo

La DFT (4.8) e la IDFT (4.11) costituiscono una coppia di relazioni invertibili che permettono di passare da una sequenza complessa di lunghezza  $N$  ad un'altra di pari lunghezza. Ma:

- calcolando la DFT (4.8) su di una finestra di  $N$  campioni  $x_n$  di un segnale  $x(t)$  limitato in una banda  $W < f_c/2$ , si ottengono delle stime  $X_m$  dei campioni della sua trasformata di Fourier  $X(f)$  per  $f = \frac{m}{N}f_c$ , ossia  $X_m \simeq f_c X\left(\frac{m}{N}f_c\right)$  con  $m = 0, 1, \dots, N-1$ ;
- calcolando la IDFT (4.11) degli  $X_m$  si ri-ottengono i campioni di  $x(t)$  di partenza;
- sia gli  $X_m$  che gli  $x_n$  sono in realtà sequenze periodiche di periodo  $N$ ;
- i calcoli indicati dalle (4.8) e (4.11) sono in realtà svolti mediante un diverso algoritmo, chiamato *Fast Fourier Transform* o FFT, che ha il vantaggio di richiedere una complessità  $O(N \log_2 N)$  ridotta rispetto a quella della DFT, che è  $O(N^2)$ .

Se la sommatoria (4.8) della DFT venisse applicata, anziché ad un numero finito  $N$  di campioni  $x_n$ , ad un loro numero infinito, allora

- si otterrebbe una sequenza periodica  $\tilde{X}_m$  (4.15) di periodo  $N$ , corrispondente al campionamento dello spettro periodico  $X^\bullet(f)$ ;
- l'applicazione della IDFT a  $\tilde{X}_m$  produrrebbe una sequenza periodica  $\tilde{x}_n$  (4.16), coincidente con la sequenza originaria  $x_n$  solo nel caso in cui questa fosse di durata finita, minore o uguale ad  $N$ ;
- segmentando un segnale  $x(t)$  in sotto-intervalli disgiunti, si può eseguire la convoluzione tra  $x(t)$  ed una  $h(t)$  di durata finita (§ 4.5.4), operando esclusivamente nel dominio digitale, e sommando tra loro le IDFT dei prodotti tra la DFT dei campioni di  $T_c \cdot h(t)$ , e le DFT dei campioni di  $x(t)$  prelevati in corrispondenza ai suoi segmenti.

L'interpretazione dei valori che risultano dalla applicazione della DFT su dei campioni di segnale, come stima della trasformata di Fourier del segnale, deve tenere conto oltre che delle fonti di approssimazioni evidenziate nella nota 34, anche dei corretti valori da assegnare alla scala delle frequenze e delle ampiezze, ossia:

### 4.6.1 Le frequenze della DFT

Occorre tener presente il valore della frequenza di campionamento e della periodicità degli  $X_m$ . Infatti i valori  $X_m$  per  $m = 0, 1, \dots, N-1$  corrispondono ai campioni di  $X^\bullet(f)$  per  $f = \frac{m}{N}f_c$ , ma se  $x(t)$  è reale,  $X^\bullet(f)$  oltre ad essere periodico presenta simmetria coniugata, e dunque per valori  $f > \frac{f_c}{2}$ , ossia per  $m = \frac{N}{2}$ ,  $X^\bullet(f)$  assume valori *speculari* a quelli risultanti per  $f < \frac{f_c}{2}$ . Per fissare le idee, procediamo con un esempio: se  $N = 512$  i primi 256 valori (da 0 a 255, ossia per  $m = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$ ) sono da mettere in corrispondenza con quelli di  $X(f)$  con  $f = 0, \frac{1}{N}f_c, \frac{2}{N}f_c, \dots, \frac{N/2-1}{N}f_c$ ; mentre i restanti 256 valori (da 256 a 511, ossia per  $m = N/2, N/2 + 1, \dots, N-1$ , e corrispondenti a  $f = \frac{1}{2}f_c, \frac{N/2+1}{N}f_c, \dots, \frac{N-1}{N}f_c$ ) esibiscono un comportamento speculare a quello dei precedenti.

### 4.6.2 Le ampiezze della DFT

Come espresso dalla (4.12), i valori  $X_m$  rappresentano una approssimazione dei coefficienti della serie di Fourier calcolati sulla finestra temporale da cui provengono i campioni di segnale, e moltiplicati per il numero di campioni utilizzati nel calcolo:  $X_m \simeq N \cdot X_m^{SF}$ . Pertanto, i valori ottenuti dalla DFT devono essere normalizzati, dividendoli per  $N$ .

### 4.7 Sottocampionamento

Fin da subito in questo capitolo è stato messo in chiaro come per poter ricostruire un segnale limitato in banda  $x(t)$  a partire dai suoi campioni, è necessario che la frequenza di campionamento  $f_c$  superi il doppio della massima frequenza  $W$  contenuta in  $x(t)$ , ovvero  $f_c \geq 2W$ . In realtà, ciò è vero solamente per segnali di banda base. Nel caso di segnali limitati in banda e centrati attorno ad una frequenza  $f_0$  detti *segnali modulati* (cap. 9), la cui massima frequenza è pertanto  $f_0 + W$ , la ricostruzione è possibile purché si scelga  $2W \leq f_c < f_0/k$  con  $k$  intero, nel senso che in tal caso il segnale con spettro periodico in frequenza  $X^\bullet(f)$  che si viene a creare non presenta aliasing, e quello di partenza può essere recuperato mediante una operazione di filtraggio *passa banda*.

Per illustrare ciò che succede, facciamo riferimento alla figura a lato. Partiamo da un segnale  $x(t)$  limitato in banda, e consideriamo un secondo segnale con spettro  $Y(f) = X^+(f) + X^-(f)$  in cui  $X(f)$  si è scisso in due parti, quella a frequenze positive ed a frequenze negative, centrate rispettivamente ad  $f_0$  e  $-f_0$ .<sup>48</sup>

Anche se in teoria dovremmo campionare  $y(t)$  a frequenza almeno pari a  $2(f_0 + W)$ , scegliamo di adottare  $f_c = f_0/2$ . Sappiamo che il risultato sarà un segnale con spettro periodico

$$Y^\bullet(f) = \sum_n Y(f - n f_c)$$

e dunque disegniamo le repliche di  $Y(f)$

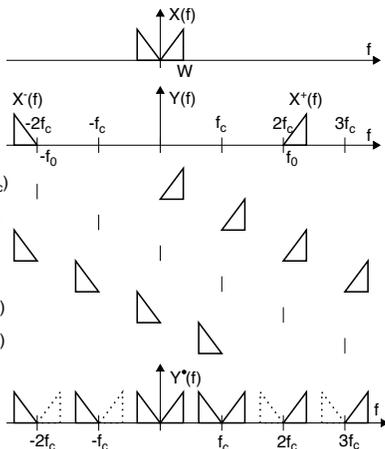
traslate in  $\pm n f_c$ , per poi all'ultima riga sovrapporle tra loro e verificare il risultato.

Osserviamo allora che non solo gli spettri  $X^+(f)$  e  $X^-(f)$  sono ancora al loro posto e possono essere recuperati mediante un filtraggio passa banda, ma addirittura si è ricomposto anche il segnale  $x(t)$  di banda base, estraibile da  $Y^\bullet(f)$  mediante filtraggio passabasso, da realizzare ovviamente per via numerica, visto che abbiamo già a disposizione i campioni.

Ci si può ora chiedere se il *trucco* funzioni solo per segnali BLU. La risposta è no, funziona anche per segnali a modulazione con *banda laterale doppia*, come ad esempio  $y(t) = x(t) \cos \omega_0 t$ , a cui corrisponde  $Y(f) = \frac{1}{2} [X(f + f_0) + X(f - f_0)]$ . Scegliendo  $f_c = f_0/k$  otteniamo

$$\begin{aligned} Y^\bullet(f) &= \sum_n Y\left(f - n \frac{f_0}{k}\right) = \frac{1}{2} \left[ \sum_n X\left(f - n \frac{f_0}{k} + f_0\right) + \sum_n X\left(f - n \frac{f_0}{k} - f_0\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_n X\left(f - \left(\frac{n}{k} - 1\right) f_0\right) + \sum_n X\left(f - \left(\frac{n}{k} + 1\right) f_0\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_n X\left(f - (n - k) \frac{f_0}{k}\right) + \sum_n X\left(f - (n + k) \frac{f_0}{k}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_m X\left(f - m \frac{f_0}{k}\right) + \sum_m X\left(f - m \frac{f_0}{k}\right) \right] = \sum_m X\left(f - m \frac{f_0}{k}\right) \end{aligned}$$

<sup>48</sup> In effetti, questo è ciò che succede nel caso di modulazione in *banda laterale unica* o BLU, vedi § 10.1.2.



ovvero lo stesso risultato a cui saremmo pervenuti campionando direttamente il segnale  $x(t)$  di banda base di partenza.

Quanto esposto costituisce di fatto una strada alternativa per demodulare (sia in forma omodina che eterodina) un segnale modulato e passare alla sua rappresentazione digitale *in un colpo solo*, secondo un approccio chiamato *software defined radio*<sup>49</sup>, in cui tutta l'elaborazione del segnale avviene in forma numerica. Oltre ad avere ovvia applicazione nella tecnologia dei nostri attuali telefonini e schede WiFi, il sottocampionamento di segnali radio è uno degli avanzamenti tecnologici che contribuiscono alla progettazione della telefonia 5G, in cui i segnali che pervengono alle *base station* collegate alle antenne sopra i palazzi e le torri, anziché essere elaborati in loco, vengono subito campionati e spediti in fibra ottica presso il *data center* più vicino, dove ciò che una volta era una *centrale telefonica* si è trasformato in un *centro di elaborazione dati*.

Vi sono alcune accortezze di cui tenere conto:

- la precisione con cui è necessario generare  $f_c$  è del tutto comparabile a quella con la quale è necessario ricostruire la portante in un ricevitore omodina;
- la banda di rumore in ingresso al campionatore si estende fino a  $f_0 + W$ , mentre la funzione del filtro anti-aliasing è ora svolta da un filtro passa banda che isola la porzione di spettro su cui effettuare il sottocampionamento;
- la durata  $\tau$  della *fase di lettura* da parte del *sample & hold* deve essere una frazione del periodo di campionamento teorico  $T_c \leq 1/2(f_0 + W)$ .

---

<sup>49</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Software-defined\\_radio](https://en.wikipedia.org/wiki/Software-defined_radio)

## Probabilità, processi, e statistica

**P**RIMA di proseguire con lo studio dei segnali, affrontiamo quello attinente alla teoria delle probabilità, i cui risultati saranno utilizzati molto estesamente nei capitoli seguenti. Dopo aver brevemente riassunto assiomi, teoremi base e concetti di teoria delle probabilità, viene definita la *variabile aleatoria*, caratterizzata mediante distribuzioni e momenti, e discusse le v.a. uniforme e gaussiana. Si passa quindi a descrivere i *processi aleatori*, le diverse modalità di definirne delle medie, e le proprietà di stazionarietà ed ergodicità. Viene poi sviluppata la teoria che consente di ottenere la descrizione probabilistica di una *trasformazione* di variabile aleatoria, introdotta la gaussiana multidimensionale e le sue proprietà, e come ultima parte sono esposti i concetti base di decisione statistica e stima di parametro.

### 5.1 Teoria delle probabilità

Tratta delle caratteristiche *regolari* di fenomeni *irregolari* o *casuali*. Una prima definizione di probabilità è quella fornita dalla teoria *frequentista*, la quale asserisce che se, ripetendo  $N$  volte un esperimento, si verifica la circostanza  $A$  per  $n_A$  volte, per essa si osserva una frequenza relativa  $n_A/N$ , da cui si deriva la probabilità di  $A$  come

$$Pr_A = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_A}{N}$$

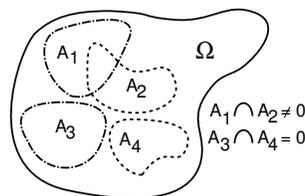
In termini più astratti, l'insieme di tutte le circostanze possibili può essere pensato come un insieme algebrico, i cui elementi (o punti) sono appunto le diverse circostanze. I punti possono essere raggruppati in sottoinsiemi (eventualmente vuoti o di un solo punto) per i quali valgono le proprietà di unione, intersezione, complemento, inclusione...

I fenomeni fisici sono posti in relazione con i punti degli insiemi suddetti mediante il concetto di *spazio campione*  $\Omega$ , che è l'unione di tutti i possibili risultati di un *fenomeno aleatorio*. Sottoinsiemi dello spazio campione sono detti *eventi*. L'intero spazio è l'*evento certo*, mentre l'insieme vuoto corrisponde all'evento impossibile  $\phi$  (od evento *nullo*). Una *unione*  $\cup$  di eventi, corrisponde all'evento che si verifica ogni qualvolta se ne verifichi *un suo componente*, mentre l'*intersezione*  $\cap$  è verificata se *tutti* i componenti lo sono. Esempio: il lancio di un dado genera uno spazio con 6 punti (eventi) disgiunti. Uno spazio campione può avere un numero di punti finito, infinito numerabile, o infinito.

#### 5.1.1 Assiomi delle probabilità

Costituiscono le basi da cui conseguono i teoremi successivi, ed affermano che:

- $0 \leq Pr(A) \leq 1$ : la probabilità di un evento è compresa tra 0 ed 1;
- $Pr(\Omega) = 1$ : la probabilità dell'evento certo è 1;
- Se  $Pr(A_i \cap A_j) = \phi$  allora  $Pr(\bigcup A_i) = \sum Pr(A_i)$ : la probabilità dell'unione di eventi *disgiunti* è la somma delle singole probabilità.



### 5.1.2 Teoremi di base

- $Pr(\phi) = 0$ : la probabilità dell'evento impossibile è nulla;
- $Pr(A \cap B) + Pr(A \cap \bar{B}) = Pr(A)$ , e  $Pr(B) + Pr(\bar{B}) = 1$ : un evento ed il suo complemento riempiono lo spazio (detto anche teorema delle *probabilità totali*<sup>1</sup>);
- $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$ : la probabilità dell'evento intersezione si conta una volta sola. Esempio alla nota<sup>2</sup>;
- Se  $B \subseteq A$  allora  $Pr(B) \leq Pr(A)$ : quando l'evento  $B$  è contenuto in  $A$  il verificarsi del primo implica il secondo.

### 5.1.3 Probabilità congiunta, condizionata e marginale

Può avvenire che il verificarsi di un evento *influenzi* il verificarsi o meno di un altro: Si dice allora che lo condiziona, ovvero che l'evento influenzato è *condizionato*. La probabilità che avvenga  $A$ , noto che  $B$  (evento *condizionante*) si sia verificato, si scrive  $Pr(A/B)$ , e si legge probabilità (condizionata) di  $A$  dato  $B$ , definita<sup>3</sup> come

$$Pr(A/B) = \frac{Pr(A, B)}{Pr(B)}$$

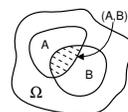
in cui  $Pr(A, B) = Pr(A \cap B)$  è la probabilità *congiunta* che  $A$  e  $B$  si verifichino entrambi, ed a patto che  $Pr(B) \neq 0$  (altrimenti anche  $Pr(A/B)$  è zero!). Viceversa, le probabilità dei singoli eventi  $Pr(A)$  e  $Pr(B)$  sono indicate come probabilità *marginali*.

**Esercizio:** Valutare la probabilità condizionata  $Pr(A/B)$  che lanciando un dado si ottenga un numero pari (evento  $A = (\text{pari})$ ), condizionatamente all'evento  $B$  che il numero sia  $> 2$ .  
Soluzione alla nota<sup>4</sup>.

<sup>1</sup>Utile per scrivere la probabilità di un evento come "1 meno" quella dell'evento complementare.

<sup>2</sup>Lanciando un dado, la probabilità  $Pr(\text{pari} \cup > 2)$  di ottenere un numero pari, oppure più grande di due, è la somma delle probabilità dei singoli eventi  $Pr(\text{pari}) = \frac{3}{6}$  e  $Pr(> 2) = \frac{4}{6}$ , meno quella che si verifichino assieme  $Pr(\text{pari} \cap > 2) = \frac{2}{6}$ . Pertanto:  $Pr(\text{pari} \cup > 2) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ .

La relazione può essere verificata ricorrendo al diagramma in figura, ed interpretando  $Pr(A/B)$  come il rapporto tra la misura di probabilità dell'evento congiunto, rispetto a quella dell'evento condizionante.



<sup>4</sup>Il risultato è pari alla probabilità  $Pr(A, B) = Pr(\text{pari}, > 2)$  che i due eventi si verifichino contemporaneamente, divisa per la probabilità  $Pr(B) = Pr(> 2)$  che il numero sia  $> 2$ .

Si rifletta sulla circostanza che la probabilità del pari  $Pr(A) = \frac{1}{2}$ , quella  $Pr(B) = \frac{4}{6}$ , o quella congiunta di entrambi  $Pr(A, B) = \frac{2}{6}$ , sono tutte riferite ad un qualunque lancio di dado, mentre  $Pr(\text{pari} / > 2)$  è relativa ad un numero ridotto di lanci, ossia solo quelli che determinano un risultato  $> 2$ . Pertanto, essendo  $Pr(B) \leq 1$ , si ottiene  $Pr(A/B) \geq Pr(A, B)$ ; infatti per l'esempio del dado si ottiene  $Pr(\text{pari} / > 2) = Pr(\text{pari}, > 2) / Pr(> 2) = \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2}$ , che è maggiore di  $Pr(\text{pari}, > 2) = \frac{1}{3}$  (i valori di probabilità sono ottenuti come rapporto tra il numero di casi favorevoli e quello dei casi possibili).

Si ottiene invece  $Pr(A/B) = Pr(A, B)$  solo se  $Pr(B) = 1$ , ossia se  $B$  corrisponde all'unione di tutti gli eventi possibili.

Invertendo la precedente definizione, la probabilità *congiunta* può essere ottenuta anche come  $Pr(A, B) = Pr(A/B) Pr(B)$ ; inoltre, gli eventi condizionante e condizionato si possono invertire di ruolo, permettendo di scrivere anche:  $Pr(A, B) = Pr(B/A) Pr(A)$ . Eguagliando le due ultime espressioni per la probabilità congiunta si ottiene la via per calcolare una probabilità *condizionata* a partire dall'altra, qualora si conoscano entrambe le *marginali*:

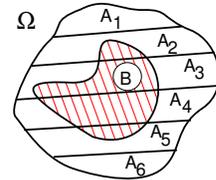
$$Pr(A/B) = \frac{Pr(B/A) Pr(A)}{Pr(B)} \quad \text{ed anche} \quad Pr(B/A) = \frac{Pr(A/B) Pr(B)}{Pr(A)} \quad (5.1)$$

### 5.1.4 Probabilità a priori e a posteriori, teorema di Bayes

A volte, non tutti i possibili eventi sono direttamente osservabili, ma se l'evento  $A$  è in qualche modo legato ad un secondo evento  $B$ , che invece possiamo osservare, la probabilità condizionata  $Pr(A/B)$  prende il nome di probabilità *a posteriori*, poiché indica un valore di probabilità valutata *dopo* la conoscenza di  $B$ . Viceversa, la probabilità marginale  $Pr(A)$  viene ora indicata come *a priori*, ovvero *presunta* senza aver ancora osservato nulla.

In generale, però, si conosce solamente  $Pr(A)$  e  $Pr(B/A)$ , e per calcolare  $Pr(A/B)$  occorre conoscere anche  $Pr(B)$ , vedi (5.1). Quest'ultima quantità si determina *saturando* la probabilità congiunta  $Pr(A, B)$  rispetto a tutti i possibili eventi marginali  $A_i$ :

$$Pr(B) = \sum_i Pr(B, A_i) = \sum_i Pr(B/A_i) Pr(A_i)$$



a patto che risulti  $Pr(A_i, A_j) = 0$  e  $\bigcup A_i = \Omega$ , ovvero che gli eventi  $A_i$  siano disgiunti e che il loro insieme  $\{A_i\}$  costituisca una partizione dello spazio degli eventi  $\Omega$ , come rappresentato in figura.

L'ultima relazione ci permette di enunciare il *teorema di Bayes*, che mostra come ottenere le probabilità *a posteriori* a partire da quelle *a priori* e da quelle condizionate *in senso opposto*:

$$Pr(A_i/B_j) = \frac{Pr(B_j/A_i) Pr(A_i)}{\sum_k Pr(B_j/A_k) Pr(A_k)}$$

Al § 13.2.1 è mostrata l'applicazione di queste considerazioni ad un problema di decisione statistica tipico delle telecomunicazioni, relativo alla ricezione binaria. Di seguito, invece, è illustrato un esempio più diretto di applicazione del teorema di Bayes.

**Esempio** Un sistema di comunicazione radio è affetto da attenuazioni supplementari causate da pioggia. Indicando con  $FS$  l'evento che il sistema vada fuori servizio, e conoscendo le probabilità condizionate  $Pr(FS/piove) = 0.5$ ,  $Pr(FS/non\ piove) = 0.05$  e la probabilità marginale  $Pr(piove) = 0.03$ , determinare:

1. La probabilità di fuori servizio  $Pr(FS)$ , indipendentemente dal verificarsi o meno dell'evento piovoso;
2. La probabilità che stia piovendo, sapendo che il sistema è fuori servizio.

Risposte alla nota<sup>5</sup>).

<sup>5</sup>La probabilità marginale di fuori servizio si calcola applicando il teorema delle probabilità totali:

$$\begin{aligned} Pr(FS) &= Pr(FS/piove) \cdot Pr(piove) + Pr(FS/non\ piove) \cdot Pr(non\ piove) = \\ &= .5 \cdot .03 + .05 \cdot .97 = .0635 = 6.35\% \end{aligned}$$

### 5.1.5 Indipendenza statistica

Si verifica quando

$$Pr(A/B) = Pr(A)$$

in quanto il verificarsi di  $B$  non influenza  $A$ . Come conseguenza, per due eventi statisticamente indipendenti avviene che

$$Pr(A, B) = Pr(A) Pr(B) \quad (5.2)$$

#### Esempi

- Quale è la probabilità che, lanciando 3 volte un dado, esca 3 volte 1? Risultato (<sup>6</sup>).
- Un'urna contiene 2 biglie bianche e 3 nere. Qual è la probabilità che su 2 estrazioni consecutive, escano le 2 biglie bianche? Risultato (<sup>7</sup>).
- Qual è la probabilità che 2 carte, estratte a caso da un mazzo da bridge da 52, siano K e Q? Risultato (<sup>8</sup>).

## 5.2 Variabili aleatorie

Finora si è parlato di *eventi* in modo astratto, mentre spesso ci si trova ad associare ad ogni punto dello spazio campione un valore numerico: lo spazio campione  $\Omega$  diventa allora l'*insieme dei numeri* e prende il nome di *variabile aleatoria*, d'ora in poi spesso abbreviato in *v.a.* Il verificarsi di un evento corrisponde ora all'assegnazione di un valore (tra i possibili) alla v.a.; tale valore "prescelto" prende dunque il nome di *realizzazione* della v.a. Distinguiamo poi tra variabili aleatorie *discrete* e *continue*, a seconda se la grandezza che descrivono abbia valori numerabili o continui<sup>9</sup>. La caratterizzazione della variabile aleatoria in termini probabilistici si ottiene indicando come la "massa di probabilità" si *distribuisce* sull'insieme di valori che essa può assumere, per mezzo delle 2 funzioni (di v.a.) seguenti.

### 5.2.1 Densità di probabilità e funzione di distribuzione

Come la massa di un oggetto *non omogeneo* è distribuita in modo più o meno denso in regioni differenti del suo volume complessivo, così la *densità di probabilità* (o *d.d.p.*) indica su quali valori della variabile aleatoria si concentra la probabilità. Ad esempio, la densità della v.a.

in quanto  $Pr(\text{non piove}) = 1 - Pr(\text{piove}) = .97$ . Applicando il teorema di Bayes si trova quindi:

$$Pr(\text{piove}/FS) = \frac{Pr(FS/\text{piove}) \cdot Pr(\text{piove})}{Pr(FS)} = \frac{.5 \cdot .03}{.0635} = .236 = 23.6\%$$

Si noti come la probabilità *a priori* che piova (3%) venga rimpiazzata dal suo valore *a posteriori* (23.6%) grazie alla nuova informazione di cui disponiamo (collegamento fuori servizio). Per una definizione precisa delle probabilità a priori ed a posteriori si veda l'appendice 13.2.1.

<sup>6</sup>E' pari al prodotto delle probabilità marginali, essendo i lanci statisticamente indipendenti, visto che il dado è "senza memoria". Pertanto il risultato è  $(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216} \simeq 4.6296 \cdot 10^{-3}$ .

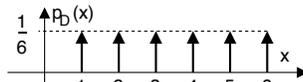
<sup>7</sup>Anche qui l'urna è senza memoria; però dopo la prima estrazione le biglie restano in 4! Pertanto ora il prodotto delle probabilità marginali risulta  $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ .

<sup>8</sup> $Pr(K, Q) = Pr(K \text{ prima}, Q \text{ seconda}) + Pr(Q \text{ prima}, K \text{ seconda}) = Pr(K \text{ prima}) \cdot Pr(Q \text{ seconda}/K \text{ prima}) + Pr(Q \text{ prima}) \cdot Pr(K \text{ seconda}/Q \text{ prima}) = 2 \left( \frac{4}{52} \frac{4}{51} \right) = \frac{8}{663} \simeq 1.2 \cdot 10^{-2}$

<sup>9</sup>Un esempio classico di v.a. discreta è quello del lancio di un dado, un altro sono i numeri del lotto. Una v.a. continua può essere ad esempio un valore di pressione atmosferica in un luogo, oppure l'attenuazione di una trasmissione radio dovuta a fenomeni atmosferici.

discreta associata al lancio di un dado può essere scritta:

$$p_D(x) = \sum_{n=1}^6 \frac{1}{6} \delta(x - n) \quad (5.3)$$



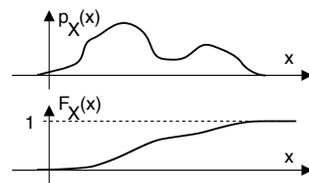
il cui significato discutiamo subito, con l'aiuto del grafico in alto, in cui  $D$  indica la v.a. (il numero che uscirà), e  $x$  una sua realizzazione (una delle 6 facce). I 6 impulsi centrati in  $x = n$  rappresentano una *concentrazione* di probabilità nei sei possibili valori, e l'area di tali impulsi è esattamente pari alla probabilità di ognuno dei sei risultati. E' facile verificare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_D(x) dx = 1 \quad \text{e che risulta} \quad \int_a^b p_D(x) dx = Pr \{a < D \leq b\}$$

ovvero pari alla probabilità che la v.a.  $D$  assuma un valore tra  $a$  e  $b$ . In particolare, non potendosi verificare una probabilità negativa, si ha  $p_D(x) \geq 0$  con  $\forall x$ .

Una funzione di v.a. strettamente collegata alla densità è la funzione di *ripartizione* o di *distribuzione*<sup>10</sup>, definita come

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\xi) d\xi = Pr \{X \leq x\} \quad (5.4)$$

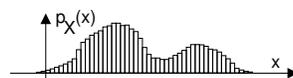


e che risulta una funzione non decrescente di  $x$ , limitata ad un valore massimo di 1, ed il cui andamento mostriamo a lato sotto a quello di  $p_X(x)$ , per la quale ovviamente risulta  $p_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$ ; nel caso invece della v.a. discreta  $D$ , la relativa funzione di distribuzione è discontinua<sup>11</sup>.

Ora è ancora più evidente la circostanza che  $p_X(x)$  è una *densità*, e diviene una probabilità solo quando moltiplicata per un intervallo di  $x$ <sup>(12)</sup>.

**Istogramma** Qualora non si disponga di una espressione analitica idonea a rappresentare il modo con cui si distribuiscono i valori di una v.a., può essere utile svolgerne una *stima* mediante un *istogramma*. Questo assume l'aspetto di una versione per così dire *quantizzata* della d.d.p. incognita, e si ottiene a partire da una serie di realizzazioni<sup>13</sup> della v.a., suddividendo il campo di variabilità della grandezza  $X$  in sotto-intervalli, e disegnandovi rettangoli verticali, ognuno di altezza pari al numero di volte che (nell'ambito del campione statistico a disposizione)  $X$  assume un valore in quell'intervallo, come rappresentato in figura.

Dividendo l'altezza di ogni rettangolo per il numero di osservazioni  $N$ , si ottiene una approssimazione di  $p_X(x)$ , via via più precisa con  $N \rightarrow \infty$ , e con una contemporanea riduzione dell'estensione degli intervalli.

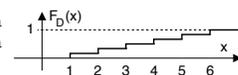


<sup>10</sup>In realtà, l'ordine storico è quello di definire prima  $F_X(x)$  come la probabilità che  $X$  sia non superiore ad un valore  $x$ , ovvero  $F_X(x) = Pr \{X \leq x\}$ , e quindi  $p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$ . Il motivo di tale "priorità" risiede nel fatto che  $F_X(x)$  presenta minori "difficoltà analitiche" di definizione (ad esempio presenta solo discontinuità di prima specie, anche con v.a. discrete).

A fianco è mostrata la  $F_D(x)$  relativa al lancio di un dado: ricordiamo infatti che la <sup>11</sup>derivata di un gradino è un impulso di area pari al dislivello, e dunque applicando la (5.4) alla (5.3) si ottiene il risultato illustrato.

<sup>12</sup>Infatti la probabilità che  $X$  cada tra  $x_0$  e  $x_0 + \Delta x$  vale  $\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} p_X(x) dx \simeq p_X(x_0) \Delta x$ .

<sup>13</sup>Ricavate ad esempio da basi di dati anagrafici, sanitari, meteorologici o quant'altro, oppure effettuando una apposita *campagna di misura* basata su di un *campione statistico* di adeguata numerosità (vedi anche § 5.6).



### 5.2.2 Valore atteso, momento e momento centrato

Indichiamo con  $g(x)$  una funzione di variabile aleatoria<sup>14</sup>.

**Valore atteso** Si definisce *valore atteso* (o *media di insieme*<sup>15</sup>) di  $g(x)$  rispetto alla variabile aleatoria  $X$  la quantità:

$$E_X \{g(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x) dx \quad (5.5)$$

che corrisponde ad una *media pesata*, in cui i valori assunti da  $g(x)$  in corrispondenza ad un certo  $x$  sono *pesati*<sup>16</sup> mediante il corrispettivo valore di probabilità  $p_X(x) dx$ ; tale operazione di media integrale è indicata con la notazione  $E_X \{.\}$ <sup>17</sup>, mediante la quale si indica a pedice la v.a. ( $X$ ) rispetto a cui eseguire la pesatura.

Nel caso di una funzione di più v.a.  $g(x, y)$ , il suo valore atteso viene calcolato in base alla d.d.p. *congiunta*, ovvero

$$E_{X,Y} \{g(x, y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p_{XY}(x, y) dx dy$$

in cui  $p_{XY}(x, y)$  si ottiene a partire dalle d.d.p. condizionate e marginali, come esposto al § 5.1.3. Inoltre, la (5.5) può essere calcolata utilizzando una d.p.p. condizionata  $p_{X/Y}(x/y)$ , ed in tal caso anche il valore atteso  $E_{X/Y} \{g(x)\}$  è detto *condizionato*, risultando una funzione di  $y$ .

**Momento** Qualora si ponga  $g(x) = x^n$ , ovvero pari alla  $n$ -esima potenza della v.a., il valore atteso prende il nome di *momento di ordine  $n$* , e si indica come

$$m_X^{(n)} = E \{x^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx$$

Nel caso di variabili aleatorie discrete, i momenti sono definiti come  $m_X^{(n)} = \sum_i x_i^n p_i$ , in cui  $p_i = Pr \{x = x_i\}$ , pesando quindi le possibili realizzazioni  $x_i$  con le rispettive probabilità.

**Media** Verifichiamo subito che  $m_X^{(0)} = 1$ , mentre il momento di *primo ordine*

$$m_X = m_X^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx$$

prende il nome di *media*<sup>18</sup> della v.a.  $X$  (a volte denominata *centroide*), mentre con  $n = 2$  si ha la *media quadratica*  $m_X^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx$ .

<sup>14</sup>Un esempio di funzione di v.a. potrebbe essere il valore della vincita associata ai 13 in schedina, che dipende dalla v.a. rappresentata dai risultati delle partite, una volta noto il montepremi e le giocate. Infatti, per ogni possibile vettore di risultati, si determina un diverso numero di giocate vincenti, e quindi un diverso modo di suddividere il montepremi. Essendo i risultati improbabili giocati da un ridotto numero di schedine, a queste compete un valore maggiore in caso di vincita, ben superiore al suo *valore atteso*, indicativo invece della vincita media.

<sup>15</sup>Per *insieme* ci si riferisce allo *spazio campione*  $\Omega$ , costituito dai possibili valori assunti dalla v.a.  $X$ .

<sup>16</sup>Notiamo che se al posto delle probabilità  $p_X(x) dx$  utilizziamo i valori di un istogramma  $Pr(x_i) = \frac{N(x_i < x \leq x_i + \Delta x)}{N} = \frac{N_i}{N}$ , l'integrale si trasforma in una sommatoria  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x) dx \Rightarrow \sum_I g(x_i) Pr(x_i)$ , il cui sviluppo evidenzia l'equivalenza con una media pesata: ponendo  $g(x) = x$  otteniamo infatti  $\hat{m}_x = \sum_I x_i Pr(x_i) = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_n N_n}{N}$  che equivale a scrivere

$$\frac{x_1 + x_1 + \dots + x_2 + x_2 + \dots + x_n + x_n + \dots}{N}$$

<sup>17</sup>In effetti, la  $E$  simboleggia la parola *Expectation*, che è il termine inglese usato per indicare il valore atteso.

<sup>18</sup>Supponiamo che  $X$  rappresenti l'altezza degli individui; l'altezza *media* sarà allora calcolabile proprio come momento del primo ordine.

**Momento centrato** Nel caso in cui  $g(x) = (x - m_X)^n$ , il relativo valore atteso è chiamato *momento centrato* di ordine  $n$ , ed indicato come

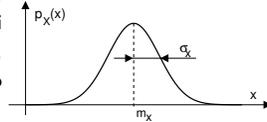
$$\mu_X^{(n)} = E\{(x - m_X)^n\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^n p_X(x) dx$$

E' immediato constatare che  $\mu_X^{(0)} = 1$  e che  $\mu_X^{(1)} = 0$ .

**Varianza** E' il nome dato al momento centrato del 2° ordine, corrispondente a

$$\sigma_X^2 = \mu_X^{(2)} = E\{(x - m_X)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p_X(x) dx$$

La radice quadrata della varianza,  $\sigma_X$ , prende il nome di *deviazione standard*. Mentre la media  $m_X$  indica dove si colloca il "centro statistico" della densità di probabilità,  $\sigma_X$  indica quanto le singole determinazioni della v.a. siano disperse attorno ad  $m_X$ .

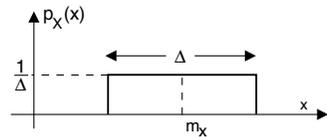


Una relazione notevole che lega i primi due momenti (centrati e non) è <sup>(19)</sup>:

$$\sigma_X^2 = m_X^{(2)} - (m_X)^2 \quad (5.6)$$

### 5.2.3 Variabile aleatoria a distribuzione uniforme

Applichiamo la definizione di momento ad un caso pratico: la variabile aleatoria *uniforme* è caratterizzata da uno stesso valore di probabilità per tutta la gamma di realizzazioni possibili, limitate queste ultime ad un unico intervallo non disgiunto; pertanto, la densità di probabilità è esprimibile mediante una funzione rettangolare:



$$p_X(x) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}_{\Delta}(x - m_X)$$

in cui  $\Delta$  rappresenta l'estensione dell'intervallo di esistenza della variabile aleatoria.

E' facile verificare che il parametro  $m_X$ , che indica l'ascissa a cui è centrato il rettangolo, corrisponde esattamente al momento di primo ordine di  $X$ . Il calcolo della varianza<sup>20</sup> invece fornisce:  $\sigma_X^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ .

### 5.2.4 Variabile aleatoria gaussiana e funzione $erfc\{\cdot\}$

Una variabile aleatoria gaussiana  $x$  è descritta da una densità di probabilità di espressione

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (5.7)$$

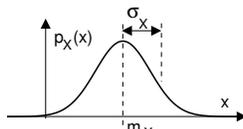
<sup>19</sup>Infatti risulta

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E\{(x - m_X)^2\} = E\{x^2 + (m_X)^2 - 2xm_X\} = E\{x^2\} + (m_X)^2 - 2m_X E\{x\} = \\ &= m_X^{(2)} + (m_X)^2 - 2(m_X)^2 = m_X^{(2)} - (m_X)^2 \end{aligned}$$

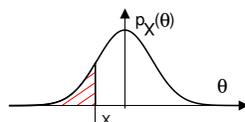
Si è preferito usare la notazione  $E\{x\}$ , più compatta rispetto all'indicazione degli integrali coinvolti; i passaggi svolti si giustificano ricordando la proprietà distributiva degli integrali (appunto), ed osservando che il valore atteso di una costante è la costante stessa.

<sup>20</sup>Anziché calcolare  $\sigma_X^2$  per la  $p_X(x)$  data, calcoliamo  $m_X^{(2)}$  per una v.a. uniforme con  $m_X = 0$ : in tal caso infatti  $m_X^{(2)} = \sigma_X^2$ . Si ha:  $m_X^{(2)} = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 \frac{1}{\Delta} dx = \frac{x^3}{3\Delta} \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{3\Delta} \left( \frac{\Delta^3}{8} + \frac{\Delta^3}{8} \right) = \frac{1}{3\Delta} 2 \frac{\Delta^3}{8} = \frac{\Delta^2}{12}$ .

il cui andamento è mostrato in figura, ove si pone in evidenza come  $m_x$  e  $\sigma_x$  (media e deviazione standard) siano in relazione la prima con la centratura orizzontale, e la seconda con la dispersione della curva attorno alla media. Oltre che da un punto di vista grafico, i primi due momenti della v.a. descrivono completamente la densità anche dal punto di vista analitico; pertanto, la stima di  $m_x$  e  $\sigma_x$  (a partire da un buon numero di realizzazioni<sup>21</sup>) è sufficiente per descrivere completamente il fenomeno aleatorio. La v.a. gaussiana descrive bene una moltitudine di fenomeni naturali, ed è dimostrabile analiticamente che la sua densità è tipica<sup>22</sup> per grandezze ottenute dalla somma di un numero molto elevato di cause aleatorie, tutte statisticamente indipendenti e con la medesima d.d.p.<sup>23</sup> (teorema centrale del limite<sup>24</sup>).



La funzione di distribuzione  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\theta) d\theta$  della gaussiana non è calcolabile in forma chiusa, e pertanto il valore dell'integrale è valutato in forma numerica, e reso disponibile mediante tabelle e grafici. Ma per evitare di dover ripetere il calcolo per ogni valore di  $m_x$  e  $\sigma_x$ , i risultati sono riferiti ad una gaussiana normalizzata, secondo il seguente approccio. Il calcolo della probabilità che  $X$  non superi un certo valore  $x$ , ovvero la definizione di  $F_X(x)$ , è pari a quello dell'area tratteggiata in figura, riferita al caso di una gaussiana a media nulla:



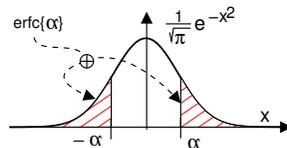
$$F_X(x) = Pr\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x p_X(\theta) d\theta = 1 - \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma_x^2}} d\theta$$

Effettuiamo ora un cambio di variabile, ponendo  $\frac{\theta}{\sqrt{2}\sigma_x} = \eta$ , per cui in corrispondenza di  $\theta = x$  si ha  $\eta = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma_x}$ , e risulta  $d\theta = \sqrt{2}\sigma_x d\eta$ . Possiamo dunque riscrivere

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - \int_{\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_x}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\eta^2} \sqrt{2}\sigma_x d\eta \\ &= 1 - \int_{\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_x}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} d\eta = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left\{\frac{x}{\sqrt{2}\sigma_x}\right\} \end{aligned}$$

Cosa significa? Abbiamo espresso l'integrale (irrisolvibile in forma chiusa) nei termini della "funzione"  $\operatorname{erfc}\{\cdot\}$ , che rappresenta la probabilità che il valore assoluto di una v.a. gaussiana a media nulla e varianza  $\frac{1}{2}$  superi il valore dato come argomento, come mostrato a lato, e pari a

$$\operatorname{erfc}\{\alpha\} = 2 \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx$$



<sup>21</sup>Disponendo di un insieme  $\{x_n\}$  di  $N$  realizzazioni di una variabile aleatoria  $X$ , possiamo effettuare le stime  $\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$  e  $\hat{m}_x^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n^2$ , il cui valore tende asintoticamente a quello delle rispettive medie di insieme, come  $N$  (la dimensione del campione statistico) tende a  $\infty$ . Al proposito, vedi § 5.6.3.1.

<sup>22</sup>Il suo scopritore, K.F. Gauss, denominò la v.a. e la sua ddp come *Normale*, indicando con questo il fatto che il suo uso potesse essere "quotidiano", e per questo è indicata anche come  $N(m, \sigma^2)$ .

<sup>23</sup>Questa condizione è anche detta di v.a. *indipendenti e identicamente distribuite*, ovvero i.i.d.

<sup>24</sup>Vedi [http://it.wikipedia.org/wiki/Teoremi\\_centrali\\_del\\_limite](http://it.wikipedia.org/wiki/Teoremi_centrali_del_limite), ovvero sperimentare presso <http://www.randomservices.org/random/apps/DiceExperiment.html>. Inoltre, considerando che al § 5.2.7 si mostra come la d.d.p. di una somma di v.a. indipendenti sia pari alla convoluzione tra le rispettive d.d.p., osserviamo che la convoluzione ripetuta di una stessa d.d.p. con se stessa, la *gaussianizza*.

I valori di  $erfc$  in funzione del suo argomento sono reperibili sia in forma di tabelle numeriche, sia in forma di diagrammi quotati<sup>25</sup>.

In linea generale quindi, volendo calcolare la probabilità che una v.a. gaussiana  $X$ , con media  $m_x$  e varianza  $\sigma_x^2$  superi in ampiezza un determinato valore  $\bar{x}$ , l'unica strada percorribile è quella di utilizzare la funzione  $erfc$ , avendo cura di porre come argomento il valore di  $\bar{x}$  debitamente scalato, per ricondursi ad una gaussiana a media nulla e varianza  $\frac{1}{2}$ :

$$Pr \{X > \bar{x}\} = \frac{1}{2} erfc \left\{ \frac{\bar{x} - m_X}{\sqrt{2}\sigma_x} \right\} \quad (5.8)$$

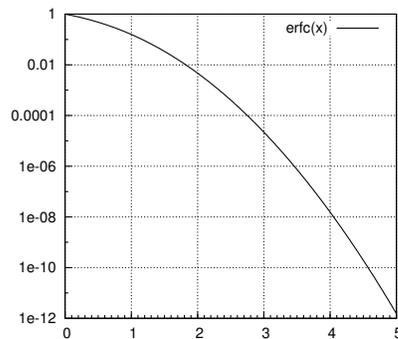


Figura 5.1: Valore di  $erfc\{\alpha\}$  per una gaussiana normalizzata

### 5.2.5 Altre variabili aleatorie

Altri tipi di variabile aleatoria prendono spesso il nome da quello di uno scienziato, ed in questo testo sono definite congiuntamente ai loro casi di utilizzo, come nel caso della v.a. esponenziale § 17.2.1, di Bernoulli § 17.1, Poisson § 17.2, Rayleigh e Rice pag. 308.

### 5.2.6 Variabile aleatoria multivariata

In questo caso la v.a. rappresenta congiuntamente un intero *vettore*  $\mathbf{x}$  di variabili aleatorie monodimensionali, ossia una loro collezione ordinata, in numero finito (ad es.  $N$ ), in relazione o meno tra loro in base a legami di tipo probabilistico.

**Densità di probabilità** Indicando con  $\mathbf{X}$  la v.a. vettoriale, e con  $\mathbf{x}$  una sua realizzazione costituita dalle  $N$  componenti  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , la v.a. multivariata è descritta per mezzo della d.d.p.  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N)$  funzione di  $N$  variabili, per la quale deve risultare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = 1$$

**Distribuzione** Anche nel caso multivariato può essere definita una funzione di distribuzione  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , anch'essa  $N$ -dimensionale, il cui valore  $F_{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}) = Pr\{\mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{x}}\}$  nel punto  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$  si calcola come

$$F_{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}) = \int_{-\infty}^{\bar{x}_1} \int_{-\infty}^{\bar{x}_2} \dots \int_{-\infty}^{\bar{x}_N} p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

<sup>25</sup>Il termine  $erfc$  sta per *funzione di errore complementare*, e trae origine dai risultati della misura di grandezze fisiche, in cui l'errore di misura, dipendente da cause molteplici, si assume appunto gaussiano. Vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_degli\\_errori](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_degli_errori).

**D.d.p. marginale** La d.d.p. *marginale*  $p_{X_i}(x_i)$  della singola v.a. *monodimensionale*  $x_i$  che prende parte al sistema di coordinate su cui  $\mathbf{X}$  è definita, può essere calcolata a partire dalla d.d.p. *congiunta*  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  mediante *saturazione* delle altre v.a., ovvero

$$p_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_N \quad (5.9)$$

$N-1$  integrali

**D.d.p. condizionata** La d.d.p. di un sotto-gruppo di v.a.  $\mathbf{x}_a = (x_1, x_2, \dots, x_a)$ , qualora il valore delle restanti coordinate  $\mathbf{x}_b = (x_{a+1}, x_{a+2}, \dots, x_N)$  di  $\mathbf{x}$  sia da ritenersi noto, si ottiene dividendo la d.d.p. congiunta  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  per quella marginale  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_b)$  che descrive gli eventi condizionanti, ovvero

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_a/\mathbf{x}_b) = \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_b)}$$

in cui  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_b)$  è ottenuta per saturazione (5.9). La separazione *ordinale* tra i due gruppi di variabili ha lo scopo di semplificare la notazione di questa definizione; in realtà, le v.a. dei due gruppi possono essere prese con un ordine qualsiasi.

**Valore atteso e momenti** Nel caso in cui si tratti del valore atteso di una funzione di una sola v.a. marginale, si utilizza ancora la (5.5) in cui la d.d.p. è quella marginale  $p_{X_i}(x_i)$  relativa alla v.a. rispetto alla quale si sta eseguendo la media di insieme. Per questa via è possibile ottenere un vettore  $m_{\mathbf{X}} = (m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_N})$  che rappresenta il valor medio della v.a. multivariata  $\mathbf{X}$ , le cui componenti  $m_{x_i}$  sono i momenti di primo ordine delle v.a. marginali, ovvero

$$m_{x_i} = E_{\mathbf{X}}\{x_i\} = \int x_i p_{X_i}(x_i) dx_i$$

Notiamo che sebbene la notazione  $E_{\mathbf{X}}\{x_i\}$  indichi un valore atteso calcolato rispetto alla variabilità di tutte le componenti della v.a.  $\mathbf{X}$  multivariata, il calcolo è svolto ricorrendo alla d.d.p. marginale, in quanto le altre v.a.  $x_j$  con  $j \neq i$  *saturano* (5.9).

D'altra parte, è possibile ora valutare anche i cosiddetti momenti *misti*, in cui cioè la media di insieme considera tutti i possibili valori di due o più componenti di  $\mathbf{X}$ , pesando ognuno di questi con il relativo valore di probabilità. Ad esempio, un momento misto di ordine  $(n, m)$  è definito come

$$m_{x_i x_j}^{(n, m)} = E_{\mathbf{X}}\{x_i^n x_j^m\} = \int \int x_i^n x_j^m p_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j$$

ed un momento misto *centrato* di ordine  $(n, m)$  come

$$\mu_{x_i x_j}^{(n, m)} = E_{\mathbf{X}}\{(x_i - m_{x_i})^n (x_j - m_{x_j})^m\} = \int \int (x_i - m_{x_i})^n (x_j - m_{x_j})^m p_{X_i X_j}(x_i, x_j) dx_i dx_j$$

in cui la  $p_{X_i X_j}(x_i, x_j)$  bidimensionale è ottenuta saturando la  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  sulle dimensioni diverse da  $i$  e  $j$ .

### 5.2.7 Funzione caratteristica e somma di v.a. indipendenti

La funzione caratteristica  $\Phi_z(w)$  di una v.a.  $z$  è definita come l'antitrasformata di Fourier della sua densità di probabilità, ovvero (equivalentemente) come il valore atteso di  $e^{jwz}$ :

$$\Phi_z(w) = \mathcal{F}^{-1}\{p_Z(z)\} = E_Z\{e^{jwz}\} = \int p_Z(z) e^{jwz} dz$$

Osserviamo che, se  $z = x + y$  è la somma di v.a. *indipendenti*, per la sua funzione caratteristica si ottiene:

$$\begin{aligned} \Phi_z(w) &= E_Z \left\{ e^{jw(x+y)} \right\} = E_Z \left\{ e^{jwx} e^{jwy} \right\} = E_X \left\{ e^{jwx} \right\} E_Y \left\{ e^{jwy} \right\} \\ &= \Phi_x(w) \Phi_y(w) \end{aligned}$$

in quanto sotto tale ipotesi la d.d.p. congiunta  $p_{XY}(x, y)$  si fattorizza nel prodotto delle d.d.p. marginali  $p_X(x)$  e  $p_Y(y)$  (vedi § 5.1.5), ed il valore atteso si scompone nel prodotto di due integrali. Pertanto, la funzione caratteristica di una somma di v.a. indipendenti, è pari al prodotto delle funzioni caratteristiche.

Effettuando ora l'operazione inversa (trasformata di Fourier della funzione caratteristica della somma), e ricordando che ad un prodotto in un dominio corrisponde una convoluzione nell'altro, si ottiene il risultato  $p_Z(z) = \mathcal{F}\{\Phi_Z(w)\} = \mathcal{F}\{\Phi_X(w)\Phi_Y(w)\} = p_X(x) * p_Y(y)$  che ci permette di enunciare:

*La densità di probabilità della somma di v.a. indipendenti è pari alla convoluzione tra le rispettive densità di probabilità marginali.*

La funzione caratteristica ha altri usi...<sup>26</sup> ma non approfondiamo oltre.

**Esempio** Se  $x$  ed  $y$  sono due v.a. a distribuzione uniforme tra  $\pm\Delta$ , la loro somma ha densità di probabilità triangolare con base  $2\Delta$ . Pertanto, nel lancio di 2 dadi il risultato più probabile è 7. Infatti può essere ottenuto come 6+1, 5+2, 4+3, 3+4, 2+5, 1+6, ovvero in 6 modi diversi, ognuno con probabilità  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$  e dunque  $Pr\{7\} = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$ .

### 5.3 Processi stazionari ed ergodici

Dopo aver descritto come caratterizzare statisticamente singoli valori (denominati variabili aleatorie), occupiamoci del caso in cui si voglia descrivere da un punto di vista probabilistico un intero segnale, la cui reale identità non sia nota a priori<sup>27</sup>.

Un segnale siffatto viene detto *membro* (o realizzazione) di un *processo aleatorio*, e può essere indicato come  $x(t, \theta)$ , mediante una descrizione formale che prevede una coppia di insiemi: il primo di questi è l'insieme  $\mathcal{T}$  degli istanti temporali (tipicamente un intervallo) su cui sono definiti i membri del processo, mentre il secondo è relativo ad una variabile aleatoria  $\Theta$ , i cui valori  $\theta$  identificano ognuno una particolare realizzazione del processo. Pertanto, una specifica realizzazione  $\theta_i$  della v.a.  $\Theta$  *indica* il processo, i cui membri  $x(t, \theta_i)$ , con  $t \in \mathcal{T}$ , sono noti solo dopo la conoscenza di  $\theta_i \in \Theta$ <sup>(28)</sup>. Il processo aleatorio è quindi definito come l'insieme dei segnali  $\{x(t, \theta)\}$ , con  $t \in \mathcal{T}$  e  $\theta \in \Theta$ .

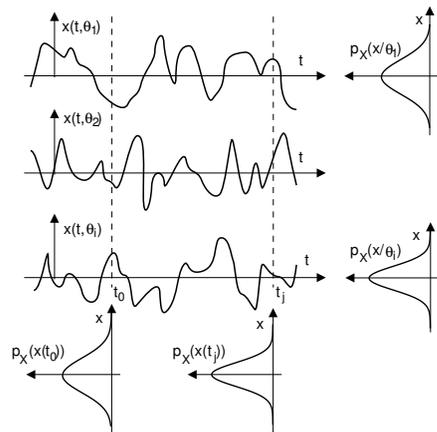


Figura 5.2: Un processo *non ergodico*

<sup>26</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_caratteristica\\_\(teoria\\_della\\_probabilita\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_caratteristica_(teoria_della_probabilita))

<sup>27</sup>Chiaramente, la maggioranza dei segnali trasmessi da apparati di TLC sono di questo tipo.

<sup>28</sup>Per fissare le idee, conduciamo parallelamente al testo un esempio "reale" in cui il processo aleatorio è costituito da... la selezione musicale svolta da un dj. L'insieme  $\mathcal{T}$  sarà allora costituito dall'orario di apertura delle discoteche (dalle 22 all'alba ?), mentre in  $\theta$  faremo ricadere tutte le caratteristiche di variabilità (umore del dj, i dischi che ha in valigia, la discoteca in cui ci troviamo, il giorno della settimana...).

Se viceversa fissiamo un particolare istante temporale  $t_j$ , il valore  $x(t_j, \theta)$  è una variabile aleatoria, la cui realizzazione dipende da quella di  $\theta \in \Theta$ ; pertanto, è definita la densità  $p_X(x(t_j))$  (indipendente da  $\theta$ ), che possiamo disegnare in corrispondenza dell'istante  $t_j$  in cui è prelevato il campione<sup>29</sup>; a tale riguardo, si faccia riferimento alla figura 5.2, che mostra le densità di probabilità definite a partire dai membri di un processo.

### 5.3.1 Momento come media di insieme

Consiste nel *valore atteso* di una *potenza n-esima* dei valori del segnale, eseguito rispetto alla variabilità dovuta a  $\Theta$ , ed è pertanto calcolata come

$$m_X^{(n)}(t_j) = E_{\Theta} \{x^n(t_j, \theta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n(t_j, \theta) p_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x(t_j)) dx$$

in cui l'ultima eguaglianza indica come la variabilità statistica di  $x^n$  sia completamente descritta dalla d.d.p.  $p_X(x(t_j))$  di  $x(t_j, \theta)$  al variare di  $\theta \in \Theta$ , mostrata in basso in fig. 5.2. Notiamo che secondo questo approccio, la media di insieme dipende dall'istante  $t_j$  in cui è prelevato un valore<sup>30</sup>.

### 5.3.2 Media temporale

In alternativa, possiamo fissare una particolare realizzazione  $\theta_i$  di  $\Theta$ , e quindi fissare l'attenzione su di un singolo membro  $x(t, \theta_i)$ , che è ora un segnale *certo*<sup>31</sup>: per esso possono quindi essere calcolate le *medie temporali*, indicate con una linea sopra alla quantità di cui si calcola la media  $\overline{(\cdot)}$ :

$$\overline{x^n(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t, \theta_i) dt$$

In particolare, troviamo il *valore medio*

$$\overline{x(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \theta_i) dt$$

e la *potenza*<sup>32</sup> (o *media quadratica*)

$$\overline{x^2(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t, \theta_i) dt$$

Notiamo che una generica media temporale:

- non dipende dal tempo;
- è una variabile aleatoria, in quanto dipende dalla realizzazione di  $\Theta$ .

<sup>29</sup>Nell'esempio,  $x(t_0, \theta)$  è il valore di pressione sonora rilevabile ad un determinato istante (es. le 23.30) al variare di  $\theta$  (qualunque dj, discoteca, giorno...).

<sup>30</sup>Ad esempio, se in tutte le serate il volume aumenta progressivamente nel tempo, la  $p_X(x(t_j))$  si *allargherà* per  $t_j$  crescenti.

<sup>31</sup> $x(t, \theta_i)$  rappresenta, nel nostro esempio, l'intera selezione musicale (detta *serata*) proposta da un ben preciso dj, in un preciso locale, un giorno ben preciso.

<sup>32</sup> $m_X^{(2)}(\theta_i)$  in questo caso rappresenta la potenza media con cui è suonata la musica nella particolare serata  $\theta_i$ .

### 5.3.3 Media temporale calcolata come media di insieme

L'estrazione da  $x(t, \theta_i)$  di un valore ad un istante casuale  $t \in \mathcal{T}$  definisce una ulteriore variabile aleatoria, descritta dalla densità di probabilità (condizionata)  $p_X(x/\theta_i)$ , che disegniamo a fianco dei singoli membri mostrati in fig. 5.2. Qualora la  $p_X(x/\theta_i)$  sia nota, le medie temporali di ordine  $n$  possono essere calcolate (per quel membro) come i rispettivi momenti:

$$\overline{x^n(t, \theta_i)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t, \theta_i) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x/\theta_i) dx = E_{X/\Theta=\theta_i} \{x^n\} = m_X^{(n)}(\theta_i)$$

Ciò equivale infatti ad effettuare una media ponderata, in cui ogni possibile valore di  $x$  è pesato per la sua probabilità  $p_X(x/\theta_i) dx$  (vedi l'osservazione alla nota 16).

### 5.3.4 Processo stazionario

Qualora  $p_X(x(t_j))$  non dipenda da  $t_j$ , ma risulti  $p_X(x(t_j)) = p_X^T(x)$  per qualsiasi  $t_j \in \mathcal{T}$ , il processo  $\{x(t, \theta)\}$  è detto stazionario<sup>33</sup> *in senso stretto*. In tal caso tutte le medie di insieme non dipendono più dal tempo, ossia  $m_X^{(n)}(t) = m_X^{(n)}$  per  $\forall t \in \mathcal{T}$ , e le  $p_X(x(t_j))$  in basso in fig. 5.2 sono tutte uguali.

Se invece sono solamente le prime due medie di insieme  $m_X(t)$  e  $m_X^{(2)}(t)$  a non dipendere da  $t$ , il processo  $\{x(t, \theta)\}$  è detto stazionario *in media ed in media quadratica*, od anche stazionario *in senso lato*<sup>34</sup>. Nel caso di un processo gaussiano (§ 5.5.3), la stazionarietà in senso lato implica quella in senso stretto<sup>35</sup>.

Supponiamo ora di suddividere il membro  $x(t, \theta_i)$  in più intervalli temporali, e di calcolare per ciascuno di essi le medie temporali, limitatamente al relativo intervallo. Nel caso in cui queste risultino uguali tra loro, e di conseguenza uguali alla media temporale  $m_X^{(n)}(\theta_i)$ , il membro è (individualmente) stazionario<sup>36</sup>. Ovviamente, se tutti i membri sono individualmente stazionari, lo è anche il processo a cui appartengono.

### 5.3.5 Processo stazionario ed ergodico

Questa importante sottoclasse di processi stazionari identifica la circostanza che *ogni membro del processo è statisticamente rappresentativo di tutti gli altri*. Ciò si verifica quando la densità di probabilità (a destra in fig. 5.2) dei valori estratti da un singolo membro  $p_X(x/\theta_i)$  è sempre la stessa, indipendentemente dal particolare  $\theta_i$ , ottenendo in definitiva  $p_X(x/\theta_i) = p_X^\Theta(x)$  indipendentemente dalla realizzazione e, per la stazionarietà, anche  $p_X(x/t_j) = p_X^T(x)$ , e dunque  $p_X^\Theta(x) = p_X^T(x) = p_X(x)$ . In questo caso le medie temporali  $m_X^{(n)}(\theta_i)$ , calcolabili come momenti sulla singola realizzazione come illustrato al § 5.3.3, sono identiche per tutti i membri<sup>37</sup>  $\theta_i$ , ed identiche anche alle medie di insieme  $m_X^{(n)}(t_j)$  calcolate per un qualunque istante. Enunciamo pertanto la definizione:

<sup>33</sup>La "serata in discoteca" stazionaria si verifica pertanto se non mutano nel tempo il genere di musica, il volume dell'amplificazione... o meglio se eventuali variazioni in alcune particolari discoteche-realizzazioni sono compensate da variazioni opposte in altrettanti membri del processo.

<sup>34</sup>In questo caso la  $p_X(x(t))$  non è nota, oppure non è stazionaria, ma le maggiori applicazioni della proprietà di stazionarietà dipendono solo da  $m_X(t)$  e  $m_X^{(2)}(t)$ , che possono essere misurati (o per meglio dire *stimati*, vedi § 5.6.3.1), e risultare stazionari anche se  $p_X(x(t))$  non lo è.

<sup>35</sup>Infatti la d.d.p. gaussiana è completamente definita qualora siano noti i valori di media e (co)varianza, vedi §§ 5.2.4 e 5.5.

<sup>36</sup>Questo accade se la selezione musicale di una particolare serata si mantiene costante (es. solo raggamuffin) oppure variata ma in modo omogeneo (es. senza tre "lenti" di fila).

<sup>37</sup>Volendo pertanto giungere alla definizione di una serata *ergodica* in discoteca, dovremmo eliminare quei casi che, anche se individualmente stazionari, sono decisamente "fuori standard" (tutto metal, solo liscio...).

Un processo stazionario è ergodico se la media temporale calcolata su di una qualunque realizzazione del processo, coincide con la media di insieme relativa ad una variabile aleatoria estratta ad un istante qualsiasi (per la stazionarietà) dall'insieme dei suoi membri.

**Esempio: la potenza di segnale** Mostriamo come il calcolo della potenza di un membro di un processo ergodico sia equivalente a quello del momento di 2° ordine del processo:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X(\theta) &= \overline{x^2(\theta)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t, \theta) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x/\theta) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx = m_X^{(2)} = E\{x^2\} = \mathcal{P}_X \end{aligned}$$

Questo risultato mostra come sia possibile calcolare la potenza di una realizzazione di un processo, senza conoscerne la forma d'onda.

**Esempio: Il valore medio** A pag. 12 è stato definito come  $\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$ , ovvero come una media *temporale* del primo ordine. Qualora  $x(t)$  sia membro di un processo ergodico, tale valore può essere calcolato anche come *valore atteso* di  $x(t)$ , ovvero momento di primo ordine  $m_x$  della v.a.  $x$  estratta dal processo:

$$\begin{aligned} \bar{x}(\theta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t, \theta) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x/\theta) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = E\{x\} = m_x \end{aligned}$$

**Potenza, varianza, media quadratica e valore efficace** In particolare osserviamo che in base alla (5.6) possiamo scrivere

$$\mathcal{P}_X = m_X^{(2)} = \sigma_x^2 + (m_x)^2 \quad (5.10)$$

e per i segnali a media nulla ( $m_x = 0$ ) si ottiene  $\mathcal{P}_X = \sigma_x^2$ ; in tal caso il valore efficace (pag. 14)  $\sqrt{\mathcal{P}_X}$  coincide con la deviazione standard  $\sigma_x$ . La radice della potenza è inoltre spesso indicata come *valore RMS* (ROOT MEAN SQUARE), definito come  $x_{RMS} = \sqrt{\overline{x^2(t)}}$ , ovvero la radice della *media quadratica* (nel tempo). Se il segnale è a media nulla,  $x_{RMS}$  coincide quindi con il valore efficace; se  $x(t)$  è membro di un processo ergodico a media nulla,  $x_{RMS}$  coincide con la deviazione standard.

### 5.3.6 Riassumendo

- Se un processo è ergodico, è anche stazionario, ma non il viceversa. Esempio: se  $x(t, \theta) = C_\theta$  pari ad una costante (aleatoria), allora è senz'altro stazionario, ma  $p_X(x/\theta) = \delta(x - C_\theta)$ , e quindi non ergodico.
- Se un processo è ergodico è possibile:
  - calcolare le medie di insieme in forma di medie temporali a partire da una singola realizzazione *oppure*
  - ottenere le medie temporali di una qualunque realizzazione a partire dalle medie di insieme, disponendo della statistica  $p_X(x)$ , e *anche*
  - stimare la d.d.p. a partire dall'istogramma dei valori estratti da un qualunque membro.

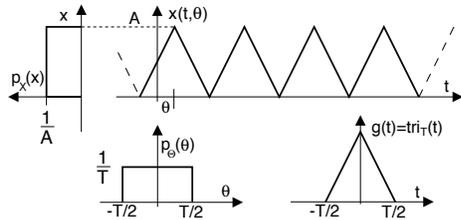
- Se l'eguaglianza tra medie di insieme e temporali sussiste solo fino ad un determinato ordine e non oltre, il processo *non è ergodico in senso stretto*. Per ciò che concerne le telecomunicazioni, è spesso sufficiente la proprietà di *ergodicità in senso lato*, ovvero limitata al 2° ordine, che garantisce  $\overline{x(t)} = E\{x\} = m_x$ ;  $\overline{x^2(t)} = E\{x^2\} = m_x^{(2)}$ .

### 5.3.7 Processo ad aleatorietà parametrica

A volte può convenire pensare un segnale certo come rappresentante di una intera classe di segnali che definiscono un processo ergodico, in modo da poter calcolare le medie temporali che lo riguardano mediante delle medie di insieme. In tal caso si rientra nella categoria di processi *parametrici*  $\{x(t, \theta)\}$  in cui la v.a.  $\theta$  compare in modo *esplicito* nella espressione analitica dei segnali membri. Ad esempio, il segnale periodico

$$x(t, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot g_T(t - \theta - nT) \tag{5.11}$$

rappresentato in figura, ha come parametro aleatorio un ritardo  $\theta$ , che ne rende imprecisata la fase iniziale. Se  $\theta$  è (come in figura) una v.a. a distribuzione uniforme tra  $-T/2$  e  $T/2$  (ovvero  $p_\theta(\theta) = \frac{1}{T} \text{rect}_T(\theta)$ ), allora il processo (5.11) risulta stazionario ed ergodico. Infatti scegliendo ad esempio una  $g(t) = \text{tri}_T(t)$  la d.d.p. per una v.a. estratta dal processo ad un istante qualunque diviene pari a<sup>38</sup>



$$p_X(x) = \frac{1}{A} \text{rect}_A(x - \frac{A}{2}) \tag{5.12}$$

uguale cioè alla d.d.p. ottenibile estraendo una v.a. da un membro qualunque.

**Esercizio** Possiamo verificare la coincidenza tra medie temporali e di insieme, osservando che il valor medio  $m_X = E\{x\}$  è pari alla media temporale  $\frac{A}{2}$ , la varianza è pari a quella della d.d.p. uniforme  $\sigma_X^2 = \frac{A^2}{12}$  (§ 5.2.3), e la potenza vale<sup>39</sup>

$$\mathcal{P}_X = \sigma_X^2 + m_X^2 = \frac{A^2}{12} + \frac{A^2}{4} = \frac{4A^2}{12} = \frac{A^2}{3} \tag{5.13}$$

Se la  $p_\theta(\theta)$  fosse stata diversa, il processo avrebbe perso stazionarietà e quindi ergodicità. Infatti, ponendo ad esempio  $p_\theta(\theta) = \frac{2}{T} \text{rect}_{\frac{T}{2}}(\theta)$  e volendo ottenere una media di insieme considerando i possibili membri del processo nell'intervallo temporale  $-T/4 < t < T/4$ , tutte le realizzazioni avrebbero valori *maggiori* del valor medio  $\frac{A}{2}$ .

<sup>38</sup>La (5.12) non è frutto di un calcolo, bensì di un ragionamento: l'impulso  $g_T(t)$  triangolare non "passa più tempo" su di un valore o su di un altro, ma passa *lo stesso* tempo su un qualunque valore tra 0 ed A. Pertanto i diversi membri del processo, ognuno relativo ad un diverso  $\theta$ , qualora valutati ad un medesimo istante  $t$ , assumono uno qualsiasi dei valori tra 0 ed A con d.d.p. uniforme.

<sup>39</sup>Verifichiamo per esercizio che il valore (5.13) corrisponda a quello calcolato come media temporale. Calcoliamo innanzitutto l'energia  $\mathcal{E}_g$  di  $g(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_g &= 2 \int_0^{-T/2} [g(t)]^2 dt = 2 \int_0^{-T/2} \left[1 - \frac{2t}{T}\right]^2 dt = 2 \int_0^{-T/2} \left[1 + \frac{4t^2}{T^2} - \frac{4t}{T}\right]^2 dt = \\ &= 2 \left( \frac{T}{2} + \frac{4}{T^2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{-T/2} - \frac{4}{T} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{-T/2} \right) = T + \frac{8}{T^2} \frac{T^3}{3 \cdot 8} - \frac{8}{T} \frac{T^2}{2 \cdot 4} = T + \frac{T}{3} - T = \frac{T}{3} \end{aligned}$$

da cui la potenza di  $x(t)$  si ottiene come  $\mathcal{P}_X = A^2 \mathcal{E}_g/T = \frac{A^2}{3}$ .

**Processo armonico** Si tratta di un processo ad aleatorietà parametrica, i cui membri hanno espressione

$$x(t, \theta) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

dove  $\theta$  è una v.a. uniforme con d.d.p.  $p_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \text{rect}_{2\pi}(\theta)$ . In tal caso il processo è stazionario ed ergodico, ed a pag. 118 si dimostra che un valore estratto a caso da un membro qualsiasi è una v.a. con d.d.p.

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} \quad (5.14)$$

mostrata in figura.

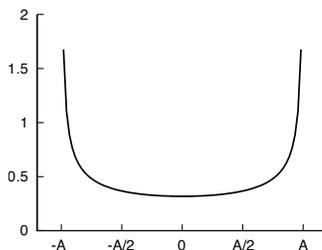


Figura 5.3: Densità di probabilità per un processo armonico

**Segnale dati** Anticipiamo l'espressione (8.1) a cui aggiungiamo un elemento di indeterminazione per quanto riguarda la relazione temporale tra l'origine dei tempi e gli istanti caratteristici, scrivendo

$$x(t, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT + \theta) \quad (5.15)$$

con  $\theta$  v.a. a distribuzione uniforme tra  $\pm \frac{T}{2}$ , in modo da rendere il processo ergodico<sup>40</sup>. Mentre il calcolo della sua densità di potenza sarà affrontato al § 6.2.5, qui ci limitiamo ad osservare che, considerando i valori  $a_n$  come determinazioni di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite, la densità di probabilità di  $x(t)$  può euristicamente essere desunta dalla analisi del corrispettivo diagramma ad occhio. Ad esempio, nel caso di  $g(t)$  rettangolare e  $a_n$  a due livelli equiprobabili (vedi fig. 8.3 a pag. 203) la  $p_X(x)$  sarà costituita da due impulsi di area  $1/2$ , mentre nei casi di limitazione in banda e/o adozione di un impulso con caratteristica a coseno rialzato, la stessa assumerà un andamento continuo<sup>41</sup>.

## 5.4 Trasformazione di variabile aleatoria e cambio di variabili

Quando più v.a. si combinano con leggi diverse dalla somma, il risultato del § 5.2.7 non è più sufficiente a fornire una espressione per la d.d.p. risultante. Illustriamo quindi il procedimento analitico generale, necessario ad ottenere una espressione per la d.d.p. di generiche funzioni di v.a.

### 5.4.1 Caso unidimensionale

Consideriamo una prima v.a.  $X$ , ed una seconda  $Y$  da essa derivata per mezzo della relazione  $y = f(x)$ , che si applica alle determinazioni  $x$  di  $X$ . Nel caso in cui  $f(x)$  sia monotona non decrescente (vedi fig. 5.4 b), e indicando con  $x = g(y)$  la corrispettiva funzione inversa, la caratterizzazione probabilistica di  $Y$  nei termini della sua d.d.p.  $p_Y(y)$  può essere ottenuta a partire da quella di  $X$ , nei termini della funzione di distribuzione di  $Y$ , come:

<sup>40</sup>In assenza del parametro  $\theta$ , e considerando la sequenza aleatoria degli  $a_n$  stazionaria ed ergodica,  $x(t, \theta = 0)$  costituisce un processo *ciclostazionario* in senso stretto (vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Cyclostationary\\_process](https://en.wikipedia.org/wiki/Cyclostationary_process)), ossia per il quale le medie di insieme di qualsiasi ordine sono periodiche di periodo  $T$ . La presenza della v.a. uniforme  $\theta$  rende  $x(t, \theta)$  un processo stazionario, ed anche ergodico.

<sup>41</sup>In una prossima edizione, potrei calcolare le ddp corrispondenti ai diagrammi ad occhio di fig. 8.7

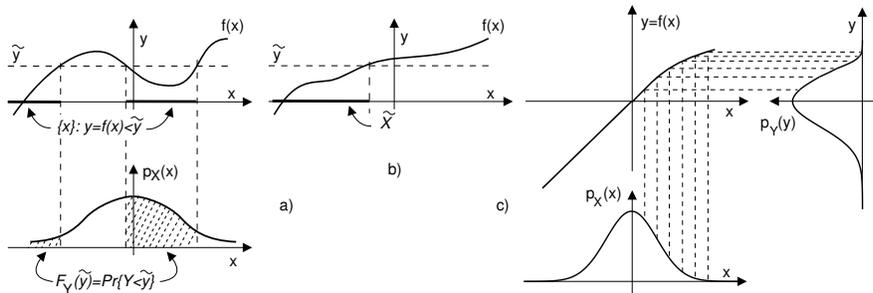


Figura 5.4: Trasformazioni tra variabili aleatorie

$$F_Y(y) = Pr\{Y \leq y\} = Pr\{X \leq g(y)\} \tag{5.16}$$

e calcolando poi  $p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$ . D'altra parte, qualora la trasformazione  $f(x)$  non sia monotona come nel caso mostrato in fig. 5.4 a), la (5.16) non è più usabile come tale, in quanto i valori  $y \leq \tilde{y}$  hanno origine da due diversi intervalli di  $X$ , in corrispondenza dei quali l'area sottesa dalla  $p_X(x)$  individua la probabilità cercata.

Procedendo con ordine, trattiamo prima il caso di  $f(x)$  *monotona crescente* come in fig. 5.4 b), in cui per ogni valore di  $\tilde{y}$  esiste un solo intervallo di  $\tilde{X} \subset X$  tale che  $y = f(x)|_{x \in \tilde{X}} \leq \tilde{y}$ , e la (5.16) può essere riscritta come

$$F_Y(y) = Pr\{X \leq g(y)\} = F_X(x = g(y))$$

che, derivata, permette di giungere alla espressione che consente il calcolo della  $p_Y(y)$ :

$$p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(x)}{dx} \Big|_{x=g(y)} \frac{dg(y)}{dy} = p_X(g(y)) \frac{dg(y)}{dy} \tag{5.17}$$

La (5.17) indica che la nuova v.a.  $y = f(x)$  possiede una d.d.p. pari a quella di  $x$ , calcolata con argomento pari alla funzione inversa  $x = g(y)$ , moltiplicata per la derivata di  $g(y)$ . La d.d.p. della v.a. risultante si presta anche ad un processo di costruzione grafica, come esemplificato in fig. 5.4 c).

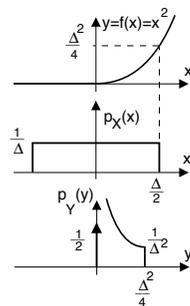
**Esempio** Determinare  $p_Y(y)$ , qualora risulti  $y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{con } x \leq 0 \\ x^2 & \text{con } x > 0 \end{cases}$ , nel caso in cui  $p_X(x) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}_{\Delta}(x)$ .

Osserviamo innanzitutto che tutte le determinazioni  $x \leq 0$  danno luogo ad un unico valore  $y = 0$ ; pertanto si ottiene  $p_Y(0) = \frac{1}{2} \delta(y)$ .

Per  $0 < y \leq \frac{\Delta^2}{4}$  (corrispondente ad  $0 < x \leq \frac{\Delta}{2}$ ) si applica la teoria svolta, ottenendo  $F_Y(y) = Pr\{x \leq \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y})$ , e dunque

$$p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(x)}{dx} \Big|_{x=\sqrt{y}} \frac{d(x = \sqrt{y})}{dy} = \frac{1}{\Delta} \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

in cui l'ultima eguaglianza tiene conto che  $\frac{dF_X(x)}{dx} = p_X(x)$ , che vale  $\frac{1}{\Delta}$  per tutti gli  $x$  nell'intervallo in considerazione. L'ultima curva mostra la d.d.p. risultante per questo esempio.



Se invece la  $f(x)$  è monotona *ma decrescente*, consideriamo semplicemente che le probabilità  $Pr\{x \leq X \leq x + dx\} = p_X(x) dx$  e  $Pr\{y \leq Y \leq y + dy\}|_{y=f(x)} = p_Y(y) dy$  devono essere uguali, ma dato che con  $f(x)$  decrescente ad un  $dx$  positivo corrisponde un  $dy$  negativo, prendiamo il valore assoluto di entrambi:  $p_X(x) |dx| = p_Y(y) |dy|$ ; sostituendo quindi  $x$  con la sua funzione inversa  $x = g(y)$  e riarrangiando si ottiene

$$p_Y(y) = p_X(g(y)) \left| \frac{dg(y)}{dy} \right| \quad (5.18)$$

che è la versione più generale del risultato (5.17).

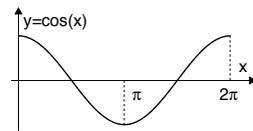
**Esempio** Nel caso in cui  $f(x)$  sia una relazione lineare  $y = ax + b$  possiamo scrivere  $x = g(y) = \frac{y-b}{a}$  e  $\frac{d}{dy}g(y) = \frac{1}{a}$ ; pertanto la (5.18) si traduce in  $p_Y(y) = \frac{1}{|a|} p_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$ , ovvero la nuova v.a.  $Y$  possiede una d.d.p. con lo stesso andamento di  $p_X(x)$ , ma traslata di  $b$  e compressa o espansa di  $a$ .

**Trasformazione non monotona** In questa circostanza due o più valori di  $X$  producono lo stesso valore di  $Y$  (vedi fig. 5.4 a), e non esiste una funzione inversa  $x = g(y)$  univoca. In tal caso si suddivide la variabilità di  $X$  in più intervalli  $i$ , in modo che per ciascuno di essi possa definirsi una  $f_i(x)$  monotona: tali intervalli individuano eventi mutuamente esclusivi, e dunque si può calcolare il lato destro di (5.18) per ogni funzione inversa  $g_i(y) = f_i^{-1}(x)$ , e quindi sommare i risultati per ottenere  $p_Y(y)$ .

**Esempio** Consideriamo la funzione  $y = f(x) = \cos(x)$  in cui  $x$  è una v.a. con d.d.p. uniforme  $p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \text{rect}_{2\pi}(x - \pi)$ . Dato che per  $0 \leq x \leq \pi$  il coseno è decrescente, mentre per  $\pi \leq x \leq 2\pi$  è crescente, applichiamo la (5.18) su questi due intervalli. Per il primo si ha  $x = g_1(y) = \arccos(y)$ , la cui derivata vale  $\frac{dg_1(y)}{dy} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ , mentre  $p_X(x)$  è costante e pari a  $\frac{1}{2\pi}$  indipendentemente da  $x$ , e dunque  $p_X(g_1(y)) = \frac{1}{2\pi}$ .

Per il secondo intervallo la funzione inversa vale ancora  $x = g_2(y) = \arccos(y)$ , così come medesime sono le altre considerazioni. Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= p_X(g_1(y)) \left| \frac{dg_1(y)}{dy} \right| + p_X(g_2(y)) \left| \frac{dg_2(y)}{dy} \right| = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \left| \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \right| = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$



### 5.4.2 Caso multidimensionale

Descriviamo questo caso per mezzo del vettore di v.a.  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , a cui è associata una d.d.p. congiunta  $p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , e di un secondo vettore aleatorio  $\mathbf{Y}$  dipendente dal primo mediante la trasformazione  $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ , ovvero

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (5.19)$$

Se esiste la relazione inversa  $\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{Y}) = \mathbf{G}(\mathbf{Y})$  univoca, composta dall'insieme di funzioni  $x_i = g_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ , allora per la d.d.p di  $\mathbf{Y}$  sussiste<sup>42</sup> un risultato formalmente molto simile a quello valido nel caso monodimensionale, e cioè

$$p_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{Y})) \cdot |\det(\mathbf{J}(\mathbf{X}/\mathbf{Y}))| \tag{5.20}$$

in cui  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{Y}))$  è la d.d.p. di  $\mathbf{X}$  calcolata con argomento dipendente da  $\mathbf{Y}$ , e  $|\det(\mathbf{J}(\mathbf{X}/\mathbf{Y}))|$  è il modulo del *jacobiano* della trasformazione inversa  $\mathbf{G}$ , ossia del determinante della matrice costituita da tutte le derivate parziali di  $\mathbf{G}$ , detta *jacobiana*<sup>43</sup>:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}/\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

Un esempio di applicazione della teoria appena discussa viene svolta al § 11.3, allo scopo di descrivere in termini probabilistici il problema della detezione di una sinusoida immersa nel rumore; tale descrizione è quindi usata al § 5.6.1 per impostare il problema della decisione statistica. Un altro caso applicativo si riferisce alla d.d.p. del prodotto tra v.a. (pag. 154).

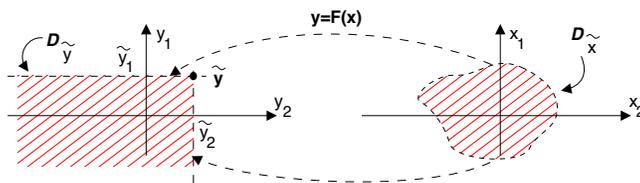
### 5.5 Gaussiana multidimensionale

Questo termine individua una v.a. vettoriale  $\mathbf{X}$  ottenuta a partire da  $n$  v.a. marginali  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  tutte gaussiane. La d.d.p. *congiunta* in questo caso è espressa in modo formalmente simile a quello del caso unidimensionale, come

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_{\mathbf{x}})}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}}) \Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})^{\top} \right\} \tag{5.21}$$

<sup>42</sup>La dimostrazione segue le medesime linee guida del caso precedente, ed è impostata sulla base della considerazione che la funzione di distribuzione di  $\mathbf{Y}$ , calcolata in un generico punto  $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)$ , rappresenta la probabilità che  $\mathbf{Y}$  appartenga alla regione (dominio) delimitata dal punto  $\tilde{\mathbf{y}}$ , indicata con  $\mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{y}}}$ :

$$F_{\mathbf{Y}}(\tilde{\mathbf{y}}) = Pr \{ \mathbf{Y} \leq \tilde{\mathbf{y}} \} = Pr \{ \mathbf{Y} \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{y}}} \}$$



Alla stessa regione  $\mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{y}}}$ , ne corrisponde una diversa  $\mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{x}}}$  nello spazio  $\mathbf{X}$ , tale che per ogni valore  $\mathbf{x}^\circ \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{x}}}$  risulti  $\mathbf{y}^\circ = \mathbf{F}(\mathbf{x}^\circ) \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{y}}}$ . Con queste posizioni, la  $F_{\mathbf{Y}}(\tilde{\mathbf{y}}) = Pr \{ \mathbf{Y} \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{y}}} \}$  si calcola a partire dalla d.d.p.  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , integrata sul dominio  $\mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ :

$$F_{\mathbf{Y}}(\tilde{\mathbf{y}}) = Pr \{ \mathbf{X} \in \mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{x}}} \} = \int_{\mathcal{D}_{\tilde{\mathbf{x}}}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

Infine, osservando che

$$p_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\partial^n F_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_n}$$

si ottiene il risultato mostrato.

<sup>43</sup> $\mathbf{J}(\mathbf{X}/\mathbf{Y})$  è indicata come *matrice jacobiana*, ed il suo determinante come *jacobiano*, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Matrice\\_jacobiana](https://it.wikipedia.org/wiki/Matrice_jacobiana)

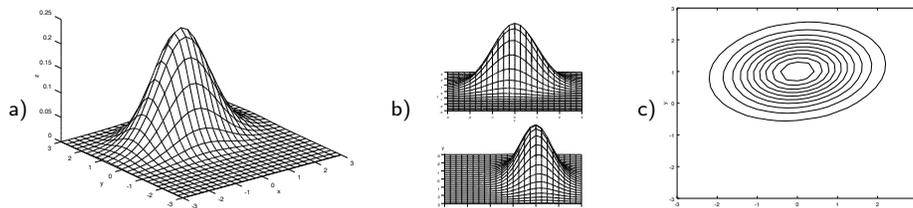


Figura 5.5: a) - d.d.p. gaussiana bidimensionale; b) - vista frontale e laterale; c) - curve di livello

in cui  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  è il vettore riga che rappresenta le  $n$  v.a. marginali,  $\mathbf{m}_x$  è il vettore dei rispettivi valori medi,  $\Sigma_x$  è la *matrice di covarianza* (vedi § 6.1.2) i cui  $n \times n$  elementi risultano pari a  $\sigma_{x_i, x_j} = E \{ (x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j}) \}$ , e  $^T$  rappresenta l'operatore di trasposizione. In tal caso le v.a. marginali  $x_i$  vengono dette *congiuntamente gaussiane*, e la conoscenza di  $\mathbf{m}_x$  e  $\Sigma_x$  ne definisce in modo *completo* la densità di probabilità. Per un approfondimento delle proprietà analitiche di  $\Sigma_x$ , si veda il § 5.7.1.

Notiamo che il termine  $1/\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_x)}$  rappresenta l'altezza di  $p_X(\mathbf{x})$  per  $\mathbf{x} = \mathbf{m}_x$ , in cui l'esponente di (5.21) si annulla. Per  $\mathbf{x} \neq \mathbf{m}_x$  lo stesso esponente è una *forma quadratica* (pag. 133) sempre positiva, e che cresce all'aumentare di  $|\mathbf{x} - \mathbf{m}_x|$ .

**Esempio** In figura 5.5-a è rappresentato il grafico 3D di una d.d.p. gaussiana bidimensionale  $p_{XY}(x, y)$ , con  $\mathbf{m} = (0, 1)$  e  $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}$ : si può notare l'asimmetria legata ai valori  $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ , e lo centratura dovuta ad  $m_y \neq 0$ . La fig. 5.5-b mostra la stessa d.d.p. da un punto di vista corrispondente agli assi, mentre la fig. 5.5-c ne riporta le *curve di livello*, che mostrano come la forma quadratica dell'esponente determini per la superficie di  $p_{XY}(x, y)$  dei contorni *ellittici*, in cui la dimensione degli assi delle ellissi è legata a  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , mentre l'inclinazione dipende dalla covarianza  $\sigma_{xy}$ .

### 5.5.1 Indipendenza statistica per v.a. gaussiane incorrelate

Affrontiamo la dimostrazione di quanto affermato in fondo al § 6.1.2, ovvero che, *unicamente nel caso di v.a. congiuntamente gaussiane*, il sussistere di incorrelazione tra le stesse ne implica l'indipendenza statistica. Osserviamo infatti che nel caso in cui le v.a. marginali siano incorrelate, ossia  $\sigma_{x_i x_j} = 0$  con  $i \neq j$ , la matrice di covarianza  $\Sigma_x$  risulta essere *diagonale*, così come la sua inversa, i cui elementi risultano in tal caso essere pari a  $1/\sigma_{x_i}^2$ ; inoltre, si ottiene che  $\det(\Sigma_x) = \prod_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2$ . Pertanto in questo caso la (5.21) si esprime come

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \prod_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_{x_i})^2}{\sigma_{x_i}^2} \right] \right\} \quad (5.22)$$

che evidentemente equivale al *prodotto* delle singole d.d.p. marginali<sup>44</sup>

$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_i}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x_i - m_{x_i})^2}{\sigma_{x_i}^2} \right\}$$

Ma dato che questo risultato è proprio la definizione di indipendenza statistica (§ 6.1.2) tra le v.a. marginali, abbiamo ottenuto la dimostrazione cercata.

<sup>44</sup>Si verifichi per esercizio che nel caso di una coppia di v.a. congiuntamente gaussiane, a media nulla ed uguale varianza, si ottiene l'espressione (11.7) di pag. 308.

Infine, osserviamo che nel caso in cui le v.a. marginali siano indipendenti, eguagliando l'esponente della (5.22) ad una costante si ottiene l'equazione di una ellisse riferita agli assi principali, ossia le curve di livello di fig. 5.5-c si dispongono con gli assi paralleli a quelli del dominio descritto dal vettore aleatorio  $\mathbf{x}$ .

### 5.5.2 Trasformazione lineare di v.a. gaussiane

Un'altra importante proprietà di questo tipo di v.a. è la sua *invarianza* rispetto alle operazioni di combinazione lineare. Se infatti indichiamo con  $\mathbf{X}$  una v.a. gaussiana multivariata, e con  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{A}$  un secondo vettore aleatorio ottenuto mediante moltiplicazione di  $\mathbf{X}$  per una matrice  $\mathbf{A}$ , fornendo  $y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$ , possiamo mostrare che anche  $\mathbf{Y}$  risulta descrivere una v.a. gaussiana. In accordo con la trattazione svolta al § 5.4.2, scriviamo la trasformazione inversa come  $\mathbf{X} = \mathbf{Y}\mathbf{B}$  in cui  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ , mentre per la d.d.p. della nuova v.a.  $\mathbf{Y}$ , in base alla (5.20) otteniamo  $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} = \mathbf{y}\mathbf{B}) \cdot \det(\mathbf{B})$ , in quanto la matrice jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{X}/\mathbf{Y})$  corrisponde alla trasposta della matrice  $\mathbf{B}$  stessa<sup>45</sup>; inoltre, risulta che  $\mathbf{m}_x = \mathbf{m}_y\mathbf{B}$ . Sostituendo questi risultati nella (5.21) si ottiene pertanto

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) &= \frac{\det(\mathbf{B})}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}\mathbf{B} - \mathbf{m}_y\mathbf{B}) \Sigma_x^{-1} (\mathbf{y}\mathbf{B} - \mathbf{m}_y\mathbf{B})^\top \right\} \\ &= \frac{\det(\mathbf{B})}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma_x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y) \mathbf{B} \Sigma_x^{-1} \mathbf{B}^\top (\mathbf{y} - \mathbf{m}_y)^\top \right\} \end{aligned}$$

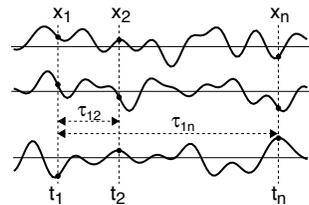
che è nuovamente l'espressione di una d.d.p. gaussiana multivariata  $\mathbf{y}$ , con media  $\mathbf{m}_y = \mathbf{m}_x\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{m}_x\mathbf{A}$  e covarianza  $\Sigma_y = \mathbf{A}^\top \Sigma_x \mathbf{A}$ <sup>46</sup>.

### 5.5.3 Processo gaussiano

Una importante classe di segnali aleatori è costituita da un processo stazionario in senso lato, la cui d.d.p. di primo ordine è gaussiana, e dai cui membri è possibile estrarre ad istanti diversi una o più v.a. gaussiane, che indichiamo collettivamente con il vettore aleatorio  $\mathbf{x}$ , descritto dalla d.d.p. multivariata (5.21).

La stazionarietà garantisce che il corrispondente vettore dei valori medi  $\mathbf{m}_x$  presenti tutti gli elementi uguali e pari a  $m_x = E\{x(t)\}$ , e che la matrice di covarianza  $\Sigma_x$  presenti elementi ottenuti valutando la covarianza  $\sigma_x(\tau) = E\{(x(t) - m_x)(x(t + \tau) - m_x)\}$  del processo (vedi eq. 6.3) in corrispondenza degli intervalli temporali  $\tau_{ij}$  tra gli istanti di campionamento nei quali sono estratte le coppie di v.a. marginali  $x_i$  e  $x_j$  descritte dalla gaussiana multivariata. In altre parole, i valori  $\sigma_{ij}$  che compaiono in  $\Sigma_x$  sono ottenuti come  $\sigma_{ij} = \sigma_x(\tau_{ij})$ , mentre su tutta la diagonale compare la varianza  $\sigma_x^2 = \sigma_x(0)$ .

Essendo il processo gaussiano, le due grandezze  $\mathbf{m}_x$  e  $\Sigma_x$  lo descrivono completamente, e se si verifica anche l'ipotesi di ergodicità, possono essere stimate a partire da una qualunque realizzazione, vedi eq. (5.23) a pag. 124.



<sup>45</sup>Infatti, potendo scrivere  $x_i = \sum_{j=1}^n b_{ji}y_j$ , l'elemento  $i, j$  della matrice  $\mathbf{J}$  risulta pari a  $j_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} = b_{ji}$ .

<sup>46</sup>Infatti risulta  $(\mathbf{B}\Sigma_x^{-1}\mathbf{B}^\top)^{-1} = (\mathbf{B}^\top)^{-1} \Sigma_x \mathbf{B}^{-1}$  che, essendo  $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}$ , fornisce il risultato per  $\Sigma_y$ .

## 5.6 Elementi di statistica

La statistica si occupa dell'utilizzo numerico di osservazioni e misure, il cui esito viene pensato come il risultato di un fenomeno aleatorio, ad es. al fine di prendere delle decisioni, o *inferire*<sup>47</sup> dai dati la plausibilità di ipotesi... Ma le cose *si rendono interessanti* per il fatto che

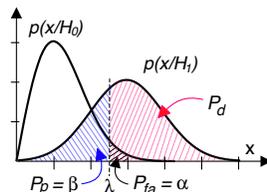
- potendo ripetere la misura e/o l'osservazione più volte, è possibile ridurre il margine di errore, e migliorare l'affidabilità della decisione;
- non è detto che la d.d.p. del fenomeno in esame sia completamente definita.

Ad esempio, la d.d.p. che produce i valori di osservazione può essere nota, a meno del valore dei suoi parametri media e varianza: compito della statistica è allora anche quello di *stimare* grandezze altrimenti ignote. Senza alcuna ambizione di affrontare compiutamente l'argomento, limitiamoci qui ad esporre brevemente questi particolari campi applicativi.

### 5.6.1 Test di verifica di ipotesi

Si tratta di stabilire se sia da ritenere valida una ipotesi  $H_1$ , oppure se al contrario non si debba ritenere valida l'ipotesi *alternativa*  $H_0$  (o ipotesi *nulla*); la decisione viene presa confrontando un grandezza di *osservazione*  $x$  che rappresenta una realizzazione di v.a.  $X$ , con un valore-soglia (*di decisione*)  $\lambda$ : se  $x > \lambda$  si decide per  $H_1$ , mentre viceversa se  $x < \lambda$  si decide per  $H_0$ . Allo stesso tempo, si desidera valutare i margini probabilistici che indicano il grado di affidabilità della decisione.<sup>48</sup>

Sviluppiamo il ragionamento basandoci sui risultati dell'analisi svolta al § 11.3.2 e riassunti dalla figura a lato, che illustra come nei due casi  $H_0$  ed  $H_1$  la v.a.  $x$  presenti due diverse d.d.p. condizionate  $p(x/H_0)$  e  $p(x/H_1)$ ; sempre in figura sono indicati i valori di  $P_d$  e  $P_p = 1 - P_d$  come probabilità (area) che  $x$  superi o meno la soglia  $\lambda$  nel caso in cui sia vera  $H_1$ , e con  $P_{fa}$  la probabilità che  $x > \lambda$  nel caso in cui sia invece vera  $H_0$ .



$P_{fa}$  viene detta *probabilità di falso allarme* in quanto rappresenta la prob. di decidere per  $H_1$  quando è vera  $H_0$ , evento detto anche *errore di primo tipo* o *livello di significatività* del test, e indicata con  $\alpha$ . La prob. di *detezione*  $P_d$  (decidere correttamente per  $H_1$ ) è invece detta *potenza* del test ed indicata come  $1 - \beta$ , dove  $\beta$  evidentemente è la probabilità di *perdita*  $P_p$  o *errore di secondo tipo*.

Conoscendo la d.d.p.  $p(x/H_0)$  della grandezza di osservazione quando è vera  $H_0$ , si pone la soglia  $\lambda$  ad un valore tale che  $Pr(x > \lambda/H_0) = \int_{\lambda}^{\infty} p(x/H_0) dx = \alpha$ , tale cioè da rendere  $P_{fa} = \alpha$ , in genere posto pari a 0.05 (ovvero il 5%). Qualora l'osservazione di  $\tilde{x} > \lambda$  faccia decidere per  $H_1$ , spesso al risultato si aggiunge anche la probabilità  $\int_{\tilde{x}}^{\infty} p(x/H_0) dx$  detta *p-value*<sup>49</sup>, che descrive quanto sia *poco probabile* osservare un valore di  $x$  che si discosti ancor più da  $H_0$  di quanto non sia avvenuto per la "nostra" osservazione  $\tilde{x}$ , e che perciò indica meglio di  $\alpha$  la significatività del test, ovvero la *discrepanza* tra i dati osservati e l'ipotesi nulla  $H_0$ . Naturalmente, per tutte le possibili osservazioni  $x > \lambda$  risulta un *p-value*  $< \alpha$ .

<sup>47</sup>Vedi ad es. [http://it.wikipedia.org/wiki/Inferenza\\_statistica](http://it.wikipedia.org/wiki/Inferenza_statistica)

<sup>48</sup>Un modello del genere si applica tanto al caso di detezione di un bersaglio radar, che può essere presente o meno, quanto ai casi di una diagnosi medica a partire dai risultati degli esami clinici, a quello di attuare o meno un investimento finanziario a partire dall'andamento delle borse, a quello se prendere o meno l'ombrello prima di uscire di casa a partire dallo scrutare il cielo...

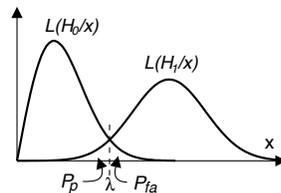
<sup>49</sup>Vedi ad es. <http://en.wikipedia.org/wiki/P-value>

### 5.6.2 Funzione di verosimiglianza

Viene definita a partire da una probabilità condizionata, qualora nella stessa espressione siano *invertiti* i ruoli di evento condizionato e condizionante, nel senso che ora illustriamo. Rimanendo nel campo della verifica di ipotesi, le d.d.p. condizionate  $p_X(x/H_0)$  e  $p_X(x/H_1)$ , qualora valutate entrambe per lo stesso  $x = \tilde{x}$  (la effettiva osservazione), possono essere interpretate come il valore di *verosimiglianza* per le ipotesi  $H_0$  ed  $H_1$ , ribaltando il loro ruolo da evento condizionante, a variabile indipendente. Ma attenzione, una verosimiglianza *non* è una probabilità, in quanto  $p_X(\tilde{x}/H_0) + p_X(\tilde{x}/H_1) \neq 1$ ! La funzione di verosimiglianza (o *likelihood*) è spesso indicata con la lettera  $\mathcal{L}$ , in modo da poter scrivere  $\mathcal{L}(H_{0,1}/\tilde{x}) = p_X(\tilde{x}/H_{0,1})$ .

#### 5.6.2.1 Decisione di massima verosimiglianza

Riprendendo il tema della verifica di ipotesi § 5.6.1, osserviamo che qualora la soglia di decisione  $\lambda$  non sia assegnata in base al livello di significatività  $P_{fa} = \alpha$  desiderato, ma in corrispondenza della intersezione tra  $p_X(x/H_0)$  e  $p_X(x/H_1)$  come mostrato alla figura che segue, la decisione stessa è detta di *massima verosimiglianza*, dato che sceglie l'ipotesi  $H_i$  per la quale la funzione di verosimiglianza  $\mathcal{L}(H_i/\tilde{x})$  è massima. Notiamo che un tale criterio di decisione comporta  $P_p = P_{fa}$  solo nel caso in cui la d.d.p. sia la stessa per entrambe le ipotesi (vedi ad es. § 8.4.2); inoltre, anche in questo caso alla decisione effettuata si può allegare il relativo *p-value*. A volte, anziché confrontare tra di loro i valori di  $\mathcal{L}$ , se ne esegue il *rapporto*, decidendo quindi in base all'esito maggiore o minore di uno (vedi ad es. pag. 351).



#### 5.6.3 Stima di parametro

Nel caso in cui si conosca il tipo di v.a. che caratterizza il fenomeno aleatorio in esame, ma non i suoi parametri (es. media  $m_x$  e varianza  $\sigma_x^2$ ), la sequenza dei valori osservati  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  può essere usata per effettuare la loro *stima*, ovvero la valutazione sperimentale (ma imprecisa) del valore di  $\hat{m}_x$  e  $\hat{\sigma}_x^2$ . Indicando con  $\theta$  il vero (incognito) valore di un parametro da stimare, il suo *stimatore*  $\hat{\theta}(\mathbf{x})$  dipende dalla variabilità di  $\mathbf{x}$  e quindi è *esso stesso* una v.a., che può essere caratterizzata nei termini della sua d.d.p.  $p_{\hat{\theta}}(\hat{\theta})$ , nonché dalla sua media  $m_{\hat{\theta}}$  e varianza  $\sigma_{\hat{\theta}}^2$ .

Anche se per uno specifico vettore di osservazione  $\mathbf{x}$  lo stimatore commette un errore  $\varepsilon(\mathbf{x}) = \hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta$ , desidereremmo che il valore atteso di tale errore fosse nullo, ovvero che  $E\{\hat{\theta}(\mathbf{x})\} = m_{\hat{\theta}} = \theta$ . Qualora ciò si verifichi lo stimatore è detto *non polarizzato*<sup>50</sup>, o *centrato*. Per quanto riguarda la varianza della stima  $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = E\{(\hat{\theta}(\mathbf{x}) - m_{\hat{\theta}})^2\}$ , vorremmo che fosse la più piccola possibile. Uno stimatore non polarizzato e che consegue la minima varianza tra i possibili stimatori è detto *efficiente* ed eguaglia il limite di Cramér-Rao<sup>51</sup>; viene inoltre detto *consistente* se  $\lim_{N \rightarrow \infty} Pr\{\hat{\theta}(\mathbf{x}) = \theta\} = 1$ , ovvero se all'aumentare della dimensione  $N$  del campione, *sicuramente*  $\hat{\theta}(\mathbf{x}) \rightarrow \theta$ . Infine, uno stimatore consistente è anche *asintoticamen-*

<sup>50</sup>Dall'inglese *unbiased*, ove con *bias* si intende una forma di *errore sistematico*. Diversi testi usano il termine *non distorto*, che qui non è adottato onde evitare confusioni concettuali con il cap. 7.

<sup>51</sup>Vedi ad es. [http://it.wikipedia.org/wiki/Disuguaglianza\\_di\\_Cramér-Rao](http://it.wikipedia.org/wiki/Disuguaglianza_di_Cramér-Rao)

te normale se all'aumentare di  $N$  la sua d.d.p. tende ad una gaussiana<sup>52</sup>, con valor medio  $\theta$  e varianza che si riduce come  $1/N$ .

Al § seguente esaminiamo una tra le diverse tecniche<sup>53</sup> che consentono di arrivare ad una formula di stima.

### 5.6.3.1 Stima di massima verosimiglianza

In questo caso il valore stimato è quello che massimizza la funzione di verosimiglianza (§ 5.6.2) calcolata in corrispondenza ai dati campionari  $\tilde{x}$ , ovvero  $\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \{ \mathcal{L}(\theta/\tilde{x}) \}$ . Ad esempio, nel caso in cui i valori osservati  $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  siano ottenuti da un fenomeno aleatorio caratterizzato da una d.d.p. gaussiana con media  $m_x$  e varianza  $\sigma_x^2$  (incognite), e gli esperimenti siano statisticamente indipendenti, la funzione di verosimiglianza risulta<sup>54</sup>

$$\mathcal{L}(m_x, \sigma_x^2/\tilde{x}) = p_X(\tilde{x}/m_x, \sigma_x^2) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - m_x}{\sigma_x}\right)^2\right\}$$

ma a questa espressione si preferisce il suo logaritmo naturale  $L = \ln \mathcal{L}$ , che essendo *monotono* non altera la massimizzazione cercata:

$$L(m_x, \sigma_x^2/\tilde{x}) = \ln \mathcal{L}(m_x, \sigma_x^2/\tilde{x}) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma_x^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - m_x}{\sigma_x}\right)^2$$

Per trovare le stime  $\hat{m}_x$  e  $\hat{\sigma}_x^2$  di massima (log)verosimiglianza, si eguagliano a zero le derivate parziali di  $L$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial m_x} &= \frac{1}{\sigma_x^2} \sum_{i=1}^N (x_i - m_x) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_x^2} &= -\frac{N}{2} \frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{2\sigma_x^4} \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2 = 0 \end{aligned}$$

ottenendo gli stimatori (o *statistiche*)<sup>55</sup>

$$\begin{cases} \hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i & \text{media campionaria} \\ \hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_x)^2 & \text{varianza campionaria} \end{cases} \quad (5.23)$$

di cui ora discutiamo singolarmente.

<sup>52</sup>Ad esempio, il teorema centrale del limite (§ 5.2.4) fa sì che la *media campionaria*  $\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ , in quanto somma di v.a. indipendenti e identicamente distribuite, tenda ad una gaussiana per  $N \rightarrow \infty$ .

<sup>53</sup>Vedi ad es. [http://en.wikipedia.org/wiki/Point\\_estimation](http://en.wikipedia.org/wiki/Point_estimation)

<sup>54</sup>Vedi § 5.5.1 per l'espressione di una gaussiana multidimensionale.

<sup>55</sup>Per quanto riguarda  $\hat{m}_x$ , imponendo  $\sum_i (x_i - \hat{m}_x) = 0$  si perviene facilmente al risultato, mentre per  $\hat{\sigma}_x^2$  l'eguaglianza a zero produce  $\frac{1}{2\hat{\sigma}_x^4} \sum_i (x_i - \hat{m}_x)^2 = \frac{N}{2} \frac{1}{\hat{\sigma}_x^2} \rightarrow \frac{1}{\hat{\sigma}_x^2} \sum_i (x_i - \hat{m}_x)^2 = N$  e quindi il risultato.

**Stima della media** La media campionaria  $\hat{m}_x$  risulta *non polarizzata*<sup>56</sup> e la sua varianza decresce<sup>57</sup> con  $N$ , ovvero

$$E\{\hat{m}_x\} = m_x; \quad \sigma_{\hat{m}_x}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N} \quad (5.24)$$

pertanto risulta essere uno stimatore *consistente e asintoticamente normale*. In particolare

- la proprietà  $\sigma_{\hat{m}_x}^2 = \sigma_x^2/N$  ci permette di ridurre a piacimento la variabilità della stima, ripetendo le osservazioni per un adeguato numero di volte;
- all'aumentare di  $N$  ed in presenza di indipendenza statistica tra i campioni, il teorema centrale del limite (§ 5.2.4) indica che  $\hat{m}_x$  è una v.a. gaussiana, indipendentemente dalla natura della v.a.  $x$  da cui è estratto il campione.

**Esercizio** Si desideri stimare il valor medio  $\hat{m}_x$  di una v.a.  $x$  di cui si conosce il valore della relativa varianza  $\sigma_x^2 = 4$ ; determinare la dimensione  $N$  del campione statistico affinché la varianza della stima sia pari a 0.1. Dalla seconda delle (5.24) risulta  $N = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{\hat{m}_x}^2} = \frac{4}{0.1} = 40$  campioni della v.a..

**Stima della varianza** I calcoli per determinare il valore atteso  $m_{\hat{\sigma}_x^2} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N(x_i - \hat{m}_x)^2\right\}$  della varianza campionaria  $\hat{\sigma}_x^2$  passano prima per la dimostrazione<sup>58</sup> che  $\sum_i(x_i - \hat{m}_x)^2 = \sum_i(x_i - m_x)^2 - N(\hat{m}_x - m_x)^2$ , in modo da ottenere

$$\begin{aligned} m_{\hat{\sigma}_x^2} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{(x_i - m_x)^2\} - \frac{N}{N} E\{(\hat{m}_x - m_x)^2\} = \\ &= \frac{1}{N} N \sigma_x^2 - \frac{\sigma_x^2}{N} = \sigma_x^2 \frac{N-1}{N} \end{aligned}$$

dato che il primo termine corrisponde all'espressione della varianza di  $X$ , ed il secondo a quella della varianza di  $\hat{m}_x$ , calcolata prima. Il risultato ottenuto indica come la varianza campionaria si riveli uno stimatore *polarizzato*. Per questo, la formula dello stimatore (di massima verosimiglianza) della varianza viene ordinariamente sostituita dalla espressione

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_x)^2 \quad (5.25)$$

<sup>56</sup>Infatti  $E\{\hat{m}_x\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i\right\} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N E\{x_i\} = \frac{1}{N}Nm_x = m_x$

<sup>57</sup>In questo caso riscriviamo  $\hat{m}_x$  come  $\hat{m}_x = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$ , consideriamo che la varianza di una somma di v.a. i.i.d. è la somma delle varianze (vedi § 6.5.2), e che  $\sigma_{aX}^2 = a^2\sigma_X^2$ : pertanto si ottiene  $\sigma_{\hat{m}_x}^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_x^2}{N^2} = \frac{\sigma_x^2}{N}$ .

<sup>58</sup>Occorre innanzitutto riscrivere  $x_i - \hat{m}_x$  come  $x_i - m_x + m_x - \hat{m}_x = (x_i - m_x) - (\hat{m}_x - m_x)$ , in modo da ottenere  $(x_i - \hat{m}_x)^2 = (x_i - m_x)^2 - 2(x_i - m_x)(\hat{m}_x - m_x) + (\hat{m}_x - m_x)^2$ . Eseguendo ora la sommatoria su  $i$  si ottiene

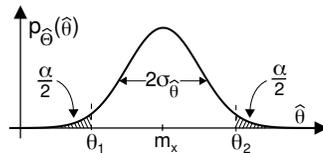
$$\begin{aligned} \sum_i (x_i - \hat{m}_x)^2 &= \sum_i (x_i - m_x)^2 - 2(\hat{m}_x - m_x) \sum_i (x_i - m_x) + \sum_i (\hat{m}_x - m_x)^2 \\ &= \sum_i (x_i - m_x)^2 - 2N(\hat{m}_x - m_x)^2 + N(\hat{m}_x - m_x)^2 = \sum_i (x_i - m_x)^2 - N(\hat{m}_x - m_x)^2 \end{aligned}$$

in quanto  $\sum_i (x_i - m_x) = \sum_i x_i - \sum_i m_x = N\hat{m}_x - Nm_x = N(\hat{m}_x - m_x)$ .

### 5.6.4 Stima di intervallo

L'esercizio precedente conferma la proprietà di *consistenza* per la media campionaria, ma mette anche in luce come per dimensioni  $N$  del campione finita, la sua accuratezza sarà necessariamente limitata. Allora, dato che la stima del parametro  $\theta$  sarà comunque erronata, può invece avere interesse stimare entro quale intervallo (detto *intervallo di confidenza*) di valori  $(\theta_1, \theta_2)$  possa ricadere  $\theta$  con sufficiente certezza, espressa quest'ultima dalla probabilità  $Pr\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\} = 1 - \alpha$ , detta *livello di confidenza*, mentre  $\alpha$  è la probabilità di errore.

**Intervallo per la media con varianza nota** Nel caso in cui lo stimatore  $\hat{\theta}$  sia espresso dalla media campionaria  $\hat{\theta} = \hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ , a pag. 125 si è osservato che per  $N$  sufficientemente elevato  $\hat{\theta}$  è una v.a. gaussiana<sup>59</sup> con media  $m_{\hat{\theta}} = m_x$  e deviazione standard  $\sigma_{\hat{\theta}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$ , come mostrato alla figura a lato; per ora, supponiamo  $\sigma_x$  nota.

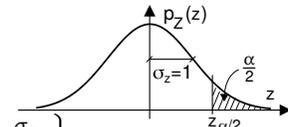


Adottando il cambio di variabile  $z = \frac{\hat{\theta} - m_x}{\sigma_{\hat{\theta}}}$  possiamo procedere utilizzando i risultati ottenuti per una v.a. gaussiana normalizzata<sup>60</sup>, in modo che la condizione  $Pr\{\theta_1 \leq m_x \leq \theta_2\} = 1 - \alpha$  possa essere riscritta<sup>61</sup> come

$$Pr\left\{-z_{\alpha/2} \leq z = \frac{\hat{\theta} - m_x}{\sigma_{\hat{\theta}}} \leq z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha \quad (5.26)$$

in cui  $z_{\alpha/2}$  è il *percentile*<sup>62</sup>  $\alpha/2$  per  $z$ , e rappresenta il valore che l'errore normalizzato di stima  $|\hat{\theta} - m_x|/\sigma_{\hat{\theta}}$  supera solo con probabilità  $\alpha$ . Una serie di riscritture<sup>63</sup> della (5.26) porta al risultato

$$Pr\left\{\hat{m}_x - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} < m_x < \hat{m}_x + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}\right\} = 1 - \alpha \quad (5.27)$$



in cui a  $\sigma_{\hat{\theta}}$  si è sostituito il suo valore  $\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$ , che dipende dalla varianza di popolazione e dalla dimensione del campione. Il valore di  $z_{\alpha/2}$  si ottiene da apposite tabelle<sup>64</sup>, come nel seguente esempio.

**Esempio** Avendo deciso il livello di confidenza  $1 - \alpha$  desiderato, dalla tabella dei percentili si determina il corrispondente valore di  $z_{\alpha/2}$ . Porre  $z_{\alpha/2} = 1$  significa voler accettare un errore massimo di stima pari a  $\sigma_{\hat{\theta}}$ , che corrisponde ad un livello di confidenza  $1 - \alpha = 68.3\%$ ; aumentando il livello fino al 95% si ottiene un valore di percentile  $z_{\alpha/2}$  pari 1.96, mentre ad un livello del 99% corrisponde un percentile di 2.58, ossia un intervallo complessivo esteso per 5.16 volte la  $\sigma_{\hat{\theta}}$ .

$z_{\alpha/2}$	$1 - \alpha$
0.5	0.383
1	0.683
1.64	0.90
1.96	0.95
2.58	0.99
3.29	0.999

<sup>59</sup>Indipendentemente alla natura di  $x$

<sup>60</sup>Ossia a media nulla e varianza unitaria, vedi § 5.2.4

<sup>61</sup>Anche grazie a fatto che la gaussiana è simmetrica, dando luogo ad intervalli centrati rispetto a  $\hat{\theta}$ .

<sup>62</sup>Il percentile  $\eta$  per una v.a. gaussiana normalizzata  $z$  è definito come il valore  $z_\eta$  tale che  $Pr\{z \leq z_\eta\} = \eta$  e quindi corrisponde alla inversa  $z_\eta = F^{-1}(\eta)$  della funzione di distribuzione della v.a.  $F_Z(z_\eta) = \int_{-\infty}^{z_\eta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \eta$ . Il termine *percentile* scaturisce dall'essere  $\eta \cdot 100\%$  pari alla percentuale delle volte che una determinazione della v.a.  $z$  risulta inferiore a  $z_\eta$ .

<sup>63</sup>

$$-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta} - m_x}{\sigma_{\hat{\theta}}} \leq z_{\alpha/2}$$

$$-z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}} \leq \hat{\theta} - m_x \leq z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$$

$$-\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}} \leq -m_x \leq -\hat{\theta} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$$

$$\hat{\theta} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}} \leq m_x \leq \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\hat{\theta}}$$

<sup>64</sup>[https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_di\\_ripartizione\\_della\\_variabile\\_casuale\\_normale](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_di_ripartizione_della_variabile_casuale_normale)

Notiamo ora che per ottenere un intervallo di confidenza di estensione ridotta esistono due vie. La prima consiste nell'aumentare  $\alpha$  in modo da ridurre il corrispondente percentile  $z_{\alpha/2}$ , ma questo equivale a ridurre il livello di confidenza della stima. La seconda via (se praticabile) è migliore e consiste nell'aumentare la dimensionalità del campione  $N$ , sfruttando così la riduzione della deviazione standard  $\sigma_{\hat{\theta}}$  con legge  $1/\sqrt{N}$ .

Approfondiamo ora il significato del risultato ottenuto alla (5.27), considerando che per ogni campione di  $N$  elementi si ottiene una *diversa* stima  $\hat{m}_x$ , a cui corrisponde un intervallo  $(\theta_1, \theta_2)$  ogni volta differente. Per ognuno di essi la probabilità che il valore vero della media  $m_x$  cada all'interno di  $(\theta_1, \theta_2)$  è pari ad  $1 - \alpha$ , ovvero esiste una probabilità  $\alpha$  che un campione statistico produca un intervallo  $(\theta_1, \theta_2)$  che *NON* contiene la vera media  $m_x$ .

**Esercizio** Si voglia stimare l'età media  $m$  degli utenti di una biblioteca civica. A questo scopo si intervista un campione casuale composto da  $N = 100$  persone, da cui si ottiene una media campionaria pari ad  $\hat{m} = 29$  anni. Adottando un valore di deviazione standard per l'età pari a  $\sigma = 8$  anni, valutare gli intervalli di confidenza per  $m$ , con un livello pari al 95% ed al 99%. **Risposta** Essendo  $N$  sufficientemente grande, assumiamo vera l'ipotesi di gaussianità per la v.a.  $\hat{m}$  e dunque applicabile la teoria esposta. Dunque il percentile  $z_{\alpha/2}$  nei due casi  $1 - \alpha = 95$  e 99% vale rispettivamente  $z_{0.025} = 1.96$  e  $z_{0.005} = 2.58$ , mentre la varianza della media campionaria risulta  $\sigma_{\hat{m}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 0.8$  fornendo in definitiva  $z_{0.025} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 1.96 \cdot 0.8 = 1.57$  e  $z_{0.005} \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = 2.58 \cdot 0.8 = 2.06$  nei due casi; pertanto si ottiene

$$\begin{cases} 27.43 < m < 30.57 & \text{con confidenza 95\%} \\ 26.94 < m < 31.06 & \text{con confidenza 99\%} \end{cases}$$

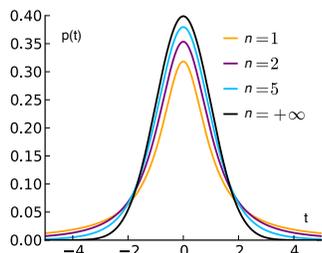
ovvero la fascia di età entro cui collocare la *vera età media*  $m$ , in base al campione a disposizione, al diminuire della probabilità che  $m$  sia in realtà *esterno* all'intervallo. **Nel caso** in cui il campione venga ridotto a sole  $N = 30$  persone, ammettendo gli stessi valori di  $\hat{m} = 29$  anni e  $\sigma = 8$  anni, dato che  $\sqrt{30} = 5.48$ , ora risulta  $z_{0.025} \cdot \sigma_{\hat{m}} = 2.86$  e  $z_{0.005} \cdot \sigma_{\hat{m}} = 3.77$ , a cui corrispondono intervalli (26.14 - 31.86) e (25.23 - 32.77) con confidenza 95 e 99% rispettivamente. **Poniamo infine** che un diverso campione di  $N' = 30$  persone produca una stima  $\hat{m} = 27$  anni anziché 29. In tal caso l'intervallo di confidenza al 95% diviene (24.14 - 29.86).

**Caso di varianza incognita** Qualora la varianza  $\sigma_x$  della v.a.  $x$  di cui vogliamo stimare la media  $m_x$  non sia nota, ad essa viene sostituito il valore della varianza campionaria non polarizzata  $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m}_x)^2$ . Una prima conseguenza è che ora  $\hat{\sigma}_x^2$  è anch'essa una v.a., ed il suo valore cambia per ogni diversa scelta del campione  $N$ , producendo intervalli di confidenza di *estensione variabile*. Essendo  $\hat{\sigma}_x^2$  uno stimatore non polarizzato e consistente, per  $N$  sufficientemente elevato l'intervallo può ancora essere ottenuto come indicato dalla (5.27).

Ma al diminuire di  $N$  la variabilità di  $\hat{\sigma}_x^2$  causa (a parità di livello di confidenza) un aumento dell'estensione dell'intervallo, in quanto ora il cambio di variabile che porta ad una v.a. normalizzata<sup>65</sup>  $t = \frac{\hat{\theta} - m_x}{\sigma_{\hat{\theta}}}$  dà luogo ad una v.a. non più gaussiana bensì di Student<sup>66</sup> con  $N - 1$  gradi di libertà, raffigurata in fig. 5.6. Per  $N \rightarrow \infty$  la v.a.  $t^{(N)}$  di Student tende ad una gaussiana, mentre per  $N$  più piccoli la sua velocità di azzeramento è ridotta, o come si dice presenta *code più pesanti*. Ciò comporta che ora il percentile da utilizzare nella (5.27) non è più lo  $z_{\alpha/2}$  re-

<sup>65</sup>Ossia con media nulla e varianza unitaria.

<sup>66</sup>Vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione\\_t\\_di\\_Student](https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_t_di_Student). La v.a.  $t = \frac{\hat{\theta} - m_x}{\sigma_{\hat{\theta}}}$  è definita come il rapporto di due v.a.: il numeratore  $\hat{\theta} - m_x$  si comporta come una gaussiana centrata in quanto la media di insieme è una somma di v.a. gaussiane, mentre il denominatore  $\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2/N}$  dipende da  $\hat{\sigma}_x^2$  che è una somma di quadrati di gaussiane, e dunque assume d.d.p. *chi quadro* o  $\chi^2$ , vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione\\_chi\\_quadrato](https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_chi_quadrato).



$N-1$	$t_{\alpha/2}^{(N-1)}$					$1 - \alpha$
	1	2	5	10	20	
	6.31	2.92	2.01	1.81	1.75	0.90
	12.71	4.03	2.57	2.23	2.09	0.95
	63.66	9.93	4.03	3.17	2.86	0.99
	636.6	31.6	6.87	4.59	3.86	0.999

Figura 5.6: Densità di probabilità di Student al variare dei gradi di libertà  $m$  e relativi percentili

lativo alla gaussiana normalizzata, bensì il valore  $t_{\alpha/2}^{(N-1)}$  relativo alla nuova d.d.p., e tabulato appresso.

Come è possibile notare confrontando le tabelle, a parità di livello di confidenza  $1 - \alpha$  i valori di  $t_{\alpha/2}^{(N-1)}$  sono sempre maggiori di quelli per  $z_{\alpha/2}$ , tanto più per bassi  $N$ , in quanto in tal caso la d.d.p. di Student è più *bassa e larga*, e per catturare la stessa area  $\alpha$  occorre *allontanarsi di più* dal valor medio. Nel caso di  $\sigma_x^2$  incognita l'espressione dell'intervallo di confidenza risulta pertanto

$$Pr \left\{ \hat{m}_x - t_{\alpha/2}^{(N-1)} \cdot \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}} < m_x < \hat{m}_x + t_{\alpha/2}^{(N-1)} \cdot \frac{\hat{\sigma}_x}{\sqrt{N}} \right\} = 1 - \alpha \quad (5.28)$$

in cui i percentili  $t_{\alpha/2}$  di Student sono ricavati dalla tabella precedente<sup>67</sup>, e  $\hat{\sigma}_x^2$  è la varianza campionaria non polarizzata.

**Esempio** Torniamo al problema della stima dell'età media dei frequentatori di una biblioteca, e svolgiamo le interviste su di un campione di soli 6 individui. I nuovi percentili per un livello di confidenza  $1 - \alpha$  pari al 95% e 99% sono rispettivamente  $t_{\alpha/2} = 2.57$  e 4.03. Pertanto, ponendo di aver anche stavolta stimato una media campionaria pari ad  $\hat{m} = 29$  anni ed una deviazione standard di  $\hat{\sigma} = 8$  anni, i nuovi intervalli di confidenza per l'età media risultano (20.6 - 37.39) e (15.83 - 42.16).

**Dimensione del campione** Il risultato (5.28) è valido, anche per per valori di  $N$  piccoli, purché la v.a. di osservazione  $x$  sia essa stessa gaussiana, dato che in tal caso la media campionaria  $\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  valuta la somma di gaussiane, anch'essa gaussiana (vedi § 5.5.2); viceversa ( $p_X(x)$  qualsiasi) è valida solo per  $N$  elevato, perché in tal caso la gaussianità di  $\hat{m}_x$  è garantita dal teorema centrale del limite. Altrimenti ( $N$  piccolo e  $x$  non gaussiana), l'intervallo di confidenza può essere determinato a seguito di una analisi specifica per le diverse d.d.p., che in alcuni casi<sup>68</sup> permettono soluzioni agevoli; un caso di particolare rilevanza è trattato al § seguente.

Abbiamo altresì osservato come all'aumento di  $N$  corrisponda una riduzione dell'intervallo di confidenza: nel caso di v.a.  $x$  gaussiana trattato finora, qualora si desideri mantenere l'estensione l'intervallo  $d = \theta_2 - \theta_1$  inferiore ad un valore  $d_M$ , dovrà risultare  $2z_{\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \leq d_M$ , e dunque  $N \geq 4\sigma_x^2 \left( \frac{z_{\alpha/2}}{d_M} \right)^2$ . Qualora la  $\sigma_x$  non sia nota, cautelativamente si usa al suo posto un multiplo fino a 4-6 volte la variabilità osservata nel campione.

<sup>67</sup> Oppure dalla tabella presente nella pagina Wikipedia citata prima.

<sup>68</sup> Ad esempio, per la d.d.p. esponenziale (§ 17.2.1) e per quella poissoniana (§ 17.2), vedi Papoulis.

**Esempio** Una precedente analisi ci informa che la durata  $x$  delle telefonate in un call center è approssimativamente una v.a. gaussiana con media  $m_x$  incognita e deviazione standard  $\sigma_x = 4$  minuti; si calcoli la dimensione minima  $N$  del campione necessaria a stimare la durata media  $m_x$  entro una precisione  $d_M$  pari a due minuti<sup>69</sup>, con confidenza del 95%. Si ottiene allora  $N \geq 4 \cdot 16 \left(\frac{1.96}{2}\right)^2 = 61.46$ , dunque  $N \geq 62$ .

### 5.6.4.1 Intervallo di confidenza per una frazione

Consideriamo ora una v.a. discreta booleana (o *dicotomica*)  $x$  che assume il valore 1 o 0 con probabilità  $p$  e  $q = 1 - p$  rispettivamente, e che può rappresentare un evento di errore, una scelta politica, o una qualunque domanda di un sondaggio, ovvero  $p$  rappresenta la *frazione* di una certa caratteristica rispetto al totale dei casi. Dato che il valore medio risulta pari a  $m_x = E\{x\} = \sum_{i=0}^1 p_i x_i = q \cdot 0 + p \cdot 1 = p$ , la media campionaria  $\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  rappresenta una stimatore  $\hat{p}$  di  $p$ . Invocando nuovamente una dimensione del campione  $N$  sufficientemente elevata,  $\hat{m}_x = \hat{p}$  è assimilabile ad una v.a. gaussiana con media  $p$  e varianza<sup>70</sup>  $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{p(1-p)}{N}$ , che ossia dipende dalla stessa quantità da stimare; utilizziamo dunque al suo posto  $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}$ . Ci troviamo quindi nel caso di applicabilità del risultato (5.27) con l'accortezza di sostituire a  $\frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$  il termine  $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}$ , dando luogo ad un intervallo di confidenza espresso come  $(\theta_1, \theta_2) = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}$  in cui  $z_{\alpha/2}$  è il quantile per la gaussiana normalizzata, con il livello di confidenza  $1 - \alpha$  desiderato. Osserviamo ora che, a parità di  $N$ , l'estensione dell'intervallo risulta maggiore per valori di  $p$  attorno allo 0.5, e si riduce fino ad annullarsi per  $p \rightarrow 0$  e  $p \rightarrow 1$ .

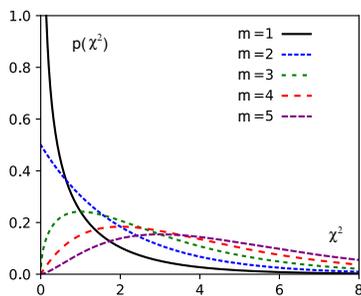
**Esempio** A seguito di una campagna pubblicitaria viene svolto un sondaggio mediante  $N = 200$  interviste chiedendo se il prodotto oggetto della campagna viene ricordato. Di queste, in 85 rispondono affermativamente, a cui corrisponde una media campionaria pari a  $\hat{p} = 85/200 = 0.425$ , affetta dalla varianza  $\sigma_{\hat{p}}^2 = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}} = \sqrt{\frac{0.425 \cdot 0.575}{200}} = 0.035$ . L'intervallo di confidenza al 95% corrisponde pertanto a  $(\theta_1, \theta_2) = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}} = 0.425 \pm 1.96 \cdot 0.035 = 0.425 \pm 0.0686$  ovvero dal 36 al 49%, ossia uno *spread* di 13 punti. Se invece le risposte affermative fossero state solo 15, avremo ottenuto  $\hat{p} = 15/200 = 0.075$  e dunque  $\sigma_{\hat{p}}^2 = \sqrt{\frac{0.075 \cdot 0.925}{200}} = 0.019$ , fornendo un intervallo  $p = 0.075 \pm 1.96 \cdot 0.019 = 0.075 \pm 0.036$  ovvero dal 3.9 all'11.1%, cioè uno *spread* di 7.2 punti.

**Dimensione campionaria** Abbiamo osservato come la variabilità  $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$  per la stima di frazione dipenda, oltre che da  $N$ , anche dallo stesso parametro  $p$  oggetto di stima. Ci si pone allora nel caso peggiore, ovvero si suppone  $p = 0.5$  a cui corrisponde  $p(1-p) = 0.25$  e una massima deviazione standard  $\sigma_{\hat{p}} = \frac{0.5}{\sqrt{N}}$ , da cui  $(\theta_1, \theta_2) = \hat{p} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{0.5}{\sqrt{N}}$ : pertanto il valore  $N$  minimo che permette di ottenere un intervallo di estensione  $d_M = 2z_{\alpha/2} \cdot \frac{0.5}{\sqrt{N}}$  al livello  $1 - \alpha$  risulta in prima approssimazione pari a  $N \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}}{d_M}\right)^2$ .

<sup>69</sup>Come dire, minuto più, minuto meno...

<sup>70</sup>Infatti, calcoliamo prima  $E\{x^2\} = p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot 0^2 = p$  e dunque troviamo  $\sigma_x^2 = E\{x^2\} - (E\{x\})^2 = p - p^2 = p(1-p)$ ; inoltre, tuttora risulta  $\sigma_{\hat{p}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$ .

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= E\{x^2\} - (m_x)^2 = p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot 0^2 - p^2 = \\ &= p - p^2 = p(1-p)\end{aligned}$$



$m$	$\chi_{\alpha}^{2,(m)}$					$1 - \alpha$
	1	2	5	10	20	
	2.71	4.61	9.24	15.99	28.41	0.9
	3.84	5.99	11.07	18.31	31.41	0.95
	6.64	9.21	15.09	23.21	37.57	0.99
	7.88	10.6	16.81	25.19	40.00	0.995

Figura 5.7: Densità di probabilità  $\chi^2$  al variare dei gradi di libertà  $m$  e relativi percentili

**Esempio** Si intende svolgere un sondaggio per stimare la proporzione degli elettori che voteranno per un certo partito politico, desiderando un intervallo di confidenza che al livello  $1 - \alpha = 0.95$  non superi l'ampiezza di 2 punti percentuali (la cosiddetta *forchetta*), ovvero  $d_M = 0.02$ . Avremo allora bisogno di un campione composto da almeno  $N \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}}{d_M}\right)^2 = \left(\frac{1.96}{0.02}\right)^2 = 9604$  soggetti.

### 5.6.5 Test chi quadro e verifica di distribuzione

Alcuni degli aspetti discussi fino ad ora pongono come condizione quella di avere a che fare con grandezze gaussiane. La tecnica che discutiamo appresso è spesso utilizzata per verificare che la frequenza dei valori osservati rispecchi quella prevista da una distribuzione di probabilità prefissata. A tale scopo, consideriamo una v.a.  $x$  di cui sono state collezionate  $N$  determinazioni, mediante le quali si costruisce un istogramma (pag. 105) suddividendo il campo di variabilità di  $x$  in  $m$  intervalli  $I_i$ , ed indichiamo con  $k_i$  il numero di realizzazioni di  $x$  che ricadono entro l'intervallo  $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , risultando  $\sum_{i=1}^m k_i = N$ .

Il test tenta di verificare l'ipotesi  $H_0$  che la v.a.  $x$  abbia effettivamente origine dalla d.d.p. prevista, nel cui caso i valori  $k_i$  dovrebbero essere molto prossimi a  $Np_i$ , in cui  $p_i = \int_{I_i} p_X(x) dx$  è la probabilità che la d.d.p. assegna all'evento  $x \in I_i$ . Pertanto se l'ipotesi  $H_0$  è vera il valore della nuova v.a.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(k_i - Np_i)^2}{Np_i} \quad (5.29)$$

dovrebbe essere vicino allo zero, mentre valori più elevati (di un valore di soglia  $\lambda$ ) suggeriscono di rigettare l'ipotesi. Se  $N$  è sufficientemente elevato<sup>71</sup> i valori  $k_i$  sono grandezze gaussiane con valore atteso  $m_{k_i} = Np_i$  e varianza  $\sigma_{k_i}^2 \simeq (Np_i)^2$ , dunque la (5.29) rappresenta la somma dei quadrati di v.a. gaussiane normalizzate, e  $\chi^2$  risulta essere una v.a. detta *chi quadro* ad  $m - 1$  gradi di libertà<sup>73</sup>, la cui d.d.p. assume l'andamento riportato in figura 5.7.

<sup>71</sup>Effettivamente è richiesto anche un numero di osservazioni  $k_i$  maggiori di 5-10 per qualunque  $i$ ; se ciò non fosse vero, è possibile ridurre il numero  $m$  degli intervalli  $I_i$ , raggruppando tra loro quelli meno popolati.

<sup>72</sup>In realtà essendo  $k_i$  il numero di casi favorevoli  $x \in I_i$  rispetto al totale  $N$ , esso ha una d.d.p. *binomiale* (§ 17.1) per la quale  $m_{k_i} = Np_i$  e varianza  $\sigma_{k_i}^2 = Np_i(1 - p_i)$ . Al crescere di  $N$ , e dunque degli intervalli  $m$ , i termini  $1 - p_i$  divergono circa unitari, e la binomiale viene approssimata da una *poissoniana* (§ 17.2), per la quale appunto  $\sigma^2 = Np_i$ . Tale approssimazione è descritta come test di *Pearson*, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Test\\_chi\\_quadrato\\_di\\_Pearson](https://it.wikipedia.org/wiki/Test_chi_quadrato_di_Pearson)

<sup>73</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione\\_chi\\_quadrato](https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_chi_quadrato). I gradi di libertà sono  $m - 1$  anziché  $m$  in virtù del vincolo  $\sum_i p_i = 1$ .

L'ipotesi sulla d.d.p. di  $x$  viene dunque accettata con un intervallo di confidenza  $1 - \alpha$  nel caso in cui il valore calcolato per  $\chi^2$  risulti inferiore ad una soglia  $\lambda$  stabilita in base alle tabelle<sup>74</sup> del percentile  $\chi_{\alpha}^{2,(m-1)}$ , che corrisponde ad una probabilità di errore (decidere  $H_0$  quando invece non è vera) pari ad  $\alpha$ . Notiamo che, a differenza dei casi precedenti, il percentile si riferisce all'intera area  $\alpha$  anziché alla sua metà, in quanto l'intervallo di confidenza è comunque delimitato a sinistra dallo zero.

**Esempio** Una moneta viene lanciata 200 volte, producendo 115 volte testa e 85 croce. Si può ritenere la moneta *non truccata*, con un livello di significatività del 95%? Evidentemente in questo caso  $m = 2$  e  $p_1 = p_2 = 0.5$ , cosicché il calcolo della (5.29) porta a  $\chi^2 = \frac{(115-100)^2}{100} + \frac{(85-100)^2}{100} = 4.5$ . Per  $m - 1 = 1$  grado di libertà la tabella dei percentili fornisce  $\chi_{0.05}^{(1)} = 3.84$ , pertanto dato che  $\chi^2 = 4.5 > \chi_{0.05}^{(1)}$ , la moneta è truccata al 95%.

### 5.6.6 Stima di forma d'onda

Ci occupiamo ora del problema di voler stimare, anziché un singolo valore (o parametro), una intera forma d'onda, ovvero l'andamento di un segnale limitato nel tempo, di cui si possono disporre di più repliche, ognuna affetta da una fonte di rumore additivo (§ 7.4), oppure qualora la realizzazione del segnale possa essere influenzata da fattori diversi da quelli che si intendono studiare. Un esempio tipico di tale esigenza si ha in campo biomedico, in cui deboli segnali elettrici (dell'ordine dei  $\mu V$ ) di natura biologica sono captati mediante elettrodi disposti sul corpo, alla ricerca ad es. di particolarità in un segnale elettrocardiografico semiperiodico<sup>75</sup>, che per sua natura presenta fisiologiche variazioni ed oscillazioni, o nel caso dei *potenziali evocati*<sup>76</sup> che si producono nelle vie nervose a seguito di stimolazione.

Allo scopo di ridurre per quanto possibile la variabilità dovuta alle cause di disturbo che potrebbero impedire il riscontro di caratteristiche del segnale  $s(t)$  di significato diagnostico, le  $N$  repliche del segnale osservato  $x_i(t) = s(t) + n_i(t)$  con  $i = 1, 2, \dots, N$  in cui  $n_i(t)$  rappresenta il disturbo ogni volta diverso, vengono *mediate* tra loro producendo

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [s(t) + n_i(t)] = s(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i(t)$$

Osserviamo subito che se il processo  $n(t)$  è a media nulla allora il risultato è *non polarizzato*, in quanto  $E\{\hat{s}(t)\} = s(t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{n_i(t)\} = s(t)$ . Per quanto riguarda la varianza di  $\hat{s}(t)$ , aggiungendo l'ipotesi di *incorrelazione* (vedi § 6.1.2) tra le possibili coppie  $(i, j)$  di realizzazioni del processo  $n(t)$  otteniamo un risultato del tutto simile a quello della media campionaria eq. (5.24), ovvero

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{s}(t)}^2 &= E\{(\hat{s}(t) - s(t))^2\} = E\left\{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i(t)\right)^2\right\} = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E\{n_i(t) n_j(t)\} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E\{n_i^2(t)\} = \frac{1}{N^2} N \sigma_n^2 = \frac{\sigma_n^2}{N} \end{aligned}$$

e quindi anche in questo caso la varianza di rumore risulta ridotta grazie all'operazione di media.

Notiamo ora che, assumendo le realizzazioni del disturbo  $n(t)$  come appartenenti ad un processo gaussiano bianco con densità di potenza  $P_n(f) = \frac{N_0}{2}$  (vedi § 6.2.4), la corrispondente varianza  $\sigma_n^2$  risulta dipendere dalla banda  $W$  del filtro passa basso che precede l'amplificatore di

<sup>74</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione\\_chi\\_quadrato#Tabella\\_dei\\_valori\\_critici](https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_chi_quadrato#Tabella_dei_valori_critici)

<sup>75</sup><https://it.wikipedia.org/wiki/Elettrocardiogramma>

<sup>76</sup>[https://it.wikipedia.org/wiki/Potenziali\\_evocati](https://it.wikipedia.org/wiki/Potenziali_evocati)

ingresso allo strumento di acquisizione, ovvero  $\sigma_n^2 = N_0W$  (vedi § 8.4.1). Essendo i segnali di interesse limitati in banda a non più di  $\sim 60$  Hz, viene tipicamente usato un filtro con frequenza di taglio pari a 100 Hz. Tale filtro diviene però fonte di correlazione tra realizzazioni di rumore<sup>77</sup> tra loro vicine, per cui le osservazioni  $x_i(t) = s(t) + n_i(t)$  devono essere effettuate facendo intercorrere tra una acquisizione e la seguente un intervallo almeno pari al doppio della durata della  $h(t)$ .

Per rimanere nel campo biomedico, difficilmente il segnale  $s(t)$  è sempre lo stesso per tutte le acquisizioni  $x_i(t)$ , bensì presenta una variabilità intrinseca legata sia alla durata dell'esame sia ad alee di origine biologica, come ad es. la latenza variabile per le risposte dei potenziali evocati: in tal caso sono necessarie ulteriori tecniche, la cui discussione trascende dagli scopi di questo testo.

## 5.7 Appendice

### 5.7.1 Matrice di covarianza e forma quadratica associata

La matrice di covarianza  $\Sigma_x$  introdotta ai §§ 5.5 e seguenti ha dimensione  $n \times n$  con elementi  $\sigma_{ij}$  definiti come

$$\sigma_{ij} = E \{ (x_i - m_{x_i}) (x_j - m_{x_j}) \}$$

in cui  $x_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  sono v.a. e  $m_{x_i}$  è la rispettiva media. Se le  $x_i$  sono congiuntamente gaussiane, la stessa  $\Sigma_x$  compare nell'espressione (5.21) della relativa d.d.p. Peraltro,  $\Sigma_x$  mantiene il suo significato indipendentemente dalla natura delle v.a. a cui si riferisce, e presenta interessanti proprietà di cui ora discutiamo, e la cui conoscenza può tornare utile in alcune circostanze, come ad esempio nella analisi delle prestazioni del *filtro di Wiener*, vedi pag. 15.4.3.

**Simmetria e autovettori** Notiamo innanzitutto che  $\Sigma_x$  è una matrice *simmetrica*, in quanto  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . In questo caso è possibile dimostrare che i suoi autovalori  $\lambda$  sono *reali*<sup>78</sup>, ed in numero pari al suo rango. Ricordiamo che gli autovalori  $\lambda$  sono definiti come le possibili radici del *polinomio caratteristico*  $q(\lambda) = |\Sigma_x - \lambda \mathbf{I}|$  di  $\Sigma_x$ , di grado  $n$ ; ad ogni autovalore  $\lambda$  corrisponde un autovettore  $\gamma$ <sup>(79)</sup> tale che

$$\Sigma_x \gamma = \lambda \gamma \quad (5.30)$$

Per le matrici simmetriche si dimostra<sup>80</sup> che gli autovettori  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$  associati ad autovalori *distinti* sono *ortogonali*, ovvero  $\gamma_i^\top \gamma_j = 0$ . Pertanto è possibile *assemblare* una matrice  $\Gamma =$

<sup>77</sup>Al § 6.4 si mostra come l'autocorrelazione  $R_{nn}(\tau)$  di un processo  $n(t)$  che attraversa un filtro divenga pari a  $R_{vv}(\tau) = R_{nn}(\tau) * R_{hh}(\tau)$ , in cui  $R_{hh}(\tau)$  è l'autocorrelazione della risposta impulsiva del filtro.

<sup>78</sup>Facciamo uso del *prodotto Hermitiano* definito come  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \bar{\mathbf{x}}^\top \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$ , in cui la soprilineatura  $\bar{\phantom{x}}$  rappresenta l'operazione di coniugazione. In generale per matrici e vettori reali risulta  $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^\top \mathbf{y} \rangle$ , ma se oltre a ciò  $\mathbf{A}$  è simmetrica si ha  $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$  e dunque  $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle$ . Indicando ora con  $\bar{\lambda}$  il coniugato di un autovalore di  $\mathbf{A}$  (per assurdo) complesso, possiamo scrivere  $\bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ , ma dato che  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  è positivo, dovrebbe essere  $\lambda = \bar{\lambda}$ , il che è impossibile: dunque tutti gli autovalori sono reali.

<sup>79</sup>Gli autovettori si considerano normalizzati  $\gamma^\top \gamma = 1$ , altrimenti ad uno stesso autovalore ne corrisponderebbero infiniti. Inoltre, sono definiti a meno di un termine di fase, dato che se  $\gamma$  è un autovettore, lo è anche  $\gamma e^{j\theta}$  con  $0 < \theta < 2\pi$ .

<sup>80</sup>Vedi ad es. [http://dssm.unipa.it/chiodi/teaching/files/Statistica3\\_First/MLAMatrix2012.pdf](http://dssm.unipa.it/chiodi/teaching/files/Statistica3_First/MLAMatrix2012.pdf)

$[\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_p]$  di  $n$  righe e  $p$  colonne pari agli autovettori  $\gamma_i$ , per la quale risulta<sup>81</sup>

$$\mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Gamma}^\top = \mathbf{I}, \quad \mathbf{\Gamma}^{-1} = \mathbf{\Gamma}^\top, \quad \text{e} \quad \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{\Sigma}_x \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Lambda} \quad (5.31)$$

in cui  $\mathbf{\Lambda}$  è una matrice quadrata  $p \times p$  diagonale, con i valori degli autovettori  $\lambda_i$  sulla diagonale. Sia  $\mathbf{\Sigma}_x$  che  $\mathbf{\Lambda}$  hanno lo stesso determinante<sup>82</sup>, e quindi  $\det(\mathbf{\Sigma}_x) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ , che dunque si annulla se qualche  $\lambda_i = 0$ ; pertanto, il numero  $p \leq n$  di autovalori non nulli determina il rango di  $\mathbf{\Sigma}_x$ .

**Forma quadratica e segno** Una *forma quadratica* individua l'espressione

$$Q(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \sigma_{ij} = \mathbf{c}^\top \mathbf{\Sigma}_x \mathbf{c} \quad (5.32)$$

che rappresenta il valore di un polinomio *omogeneo* di secondo grado nelle variabili  $c_i$ . Qualora per qualsiasi scelta di  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$  risulti  $Q(\mathbf{c}) \geq 0$ , sia  $\mathbf{\Sigma}_x$  che  $Q(\mathbf{c})$  vengono dette di segno *semidefinito positivo*<sup>83</sup>.

Condizione necessaria e sufficiente per avere  $Q(\mathbf{c}) \geq 0$  è che  $\mathbf{\Sigma}_x$  sia una *matrice di covarianza*: infatti, la varianza  $\sigma_y^2$  (non negativa per definizione) di una combinazione lineare  $y = \sum_{i=1}^n c_i x_i$  di v.a.  $x_i$  può essere espressa<sup>84</sup> in notazione matriciale appunto come  $\sigma_y^2 = \mathbf{c}^\top \mathbf{\Sigma}_x \mathbf{c}$ . Inoltre, se  $\det(\mathbf{\Sigma}_x) \neq 0$  ovvero  $\mathbf{\Sigma}_x$  ha rango pieno<sup>85</sup>, sia  $\mathbf{\Sigma}_x$  che  $Q(\mathbf{c})$  sono *definite positive*, ovvero  $Q(\mathbf{c}) > 0$ , in quanto in tal caso tutti gli  $n$  autovalori  $\lambda_i$  sono *positivi*<sup>86</sup>. Se viceversa  $\det(\mathbf{\Sigma}_x) = 0$  il rango di  $\mathbf{\Sigma}_x$  risulta  $p < n$ , con  $n - p$  autovalori nulli, e sia  $\mathbf{\Sigma}_x$  che  $Q(\mathbf{c})$  sono *semidefinite positive*.

**Analisi della convessità** La ricerca di un punto *di minimo*  $\mathbf{c}_m$  per  $Q(\mathbf{c})$  tale che  $Q(\mathbf{c}_m) < Q(\mathbf{c})$  è molto semplice. Occorre innanzitutto verificare che in tale punto si annulli il vettore gradiente  $\mathbf{g}(\mathbf{c})|_{\mathbf{c}=\mathbf{c}_m}$  con elementi  $g_i(\mathbf{c}) = \frac{\partial Q(\mathbf{c})}{\partial c_i} = 2\mathbf{\Sigma}_x \mathbf{c}$ , che corrisponde ad impostare un sistema omogeneo  $\mathbf{\Sigma}_x \mathbf{c} = \mathbf{0}$ , che come noto ammette soluzioni  $\neq \mathbf{0}$  solo se  $\det(\mathbf{\Sigma}_x) = 0$ . Quindi, se  $\mathbf{\Sigma}_x$  non ha autovalori nulli ed è definita positiva,  $\mathbf{c}_m = \mathbf{0}$  è l'unico punto singolare.

Per stabilire se si tratti di un minimo od un massimo, occorre valutare il segno della matrice *Hessiana*  $\mathbf{H}(\mathbf{c})$  con elementi  $h_{ij}(\mathbf{c}) = \frac{\partial^2 Q(\mathbf{c})}{\partial c_i \partial c_j}$ : si dimostra che se  $\mathbf{H}(\mathbf{c}_m)$  è *definita positiva* allora  $Q(\mathbf{c})|_{\mathbf{c}=\mathbf{c}_m}$  è *convessa*<sup>87</sup>, e  $\mathbf{c}_m$  corrisponde ad un minimo, oppure ad un massimo se  $\mathbf{H}(\mathbf{c}_m)$  è definita negativa. Ma dato che per  $Q(\mathbf{c})$  risulta  $\mathbf{H}(\mathbf{c}) = 2\mathbf{\Sigma}_x$  indipendentemente

<sup>81</sup>La prima relazione è conseguenza dell'ortogonalità, la seconda discende dalla prima, e la terza deriva dalla premoltiplicazione di ambo i membri della (5.30) per  $\gamma_j^\top$ , che produce  $\begin{cases} \gamma_j^\top \mathbf{\Sigma}_x \gamma_i = \lambda_i & \text{se } i = j \\ \gamma_j^\top \mathbf{\Sigma}_x \gamma_i = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

<sup>82</sup>In quanto  $\det(\mathbf{\Sigma}_x) = \det(\mathbf{\Gamma}) \det(\mathbf{\Lambda}) \det(\mathbf{\Gamma}^\top)$ , e  $\det(\mathbf{\Gamma}) = \det(\mathbf{\Gamma}^\top) = \det(\mathbf{\Gamma}^{-1}) = 1$ .

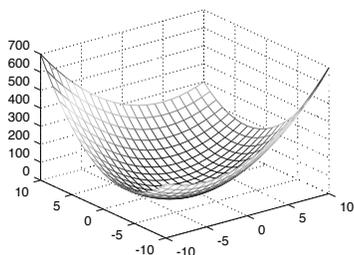
<sup>83</sup>Vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Matrice\\_definita\\_positiva](https://it.wikipedia.org/wiki/Matrice_definita_positiva)

<sup>84</sup> $\sigma_y^2 = E\{(y - m_y)^2\} = E\left\{\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{i=1}^n c_i m_i\right)^2\right\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j E\{x_i x_j\} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j m_i m_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j \sigma_{ij}$

<sup>85</sup>Ossia nessuna tra le v.a.  $x_i$  presenta dipendenza *lineare* da una o più altre.

<sup>86</sup>Tenendo infatti conto che dalla (5.31) si ottiene  $\mathbf{\Sigma}_x = \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Gamma}^\top$ , possiamo scrivere  $Q(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{\Sigma}_x \mathbf{c} = \mathbf{c}^\top \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{c}$ , che ponendo  $\mathbf{d} = \mathbf{\Gamma}^\top \mathbf{c}$  riscriviamo ancora come  $Q(\mathbf{c}) = \mathbf{d}^\top \mathbf{\Lambda} \mathbf{d} = \sum_{i=1}^p \lambda_i d_i^2$ . Se qualche  $\lambda_i$  fosse negativo o nullo, si potrebbe trovare un vettore  $\mathbf{d}$  nullo tranne per l'unica componente corrispondente al  $\lambda_i \leq 0$ , e produrre una  $Q(\mathbf{c}) \leq 0$ , in contrasto con l'ipotesi. Pertanto è vero anche il viceversa, cioè  $\mathbf{\Sigma}_x$  è definita positiva se  $\lambda_i > 0 \quad \forall i$ .

<sup>87</sup>Vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_convessa](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_convessa). La condizione sulla matrice Hessiana definita positiva è *analoga* alla proprietà nota per la derivata seconda di una funzione monovariata, ma per una dimostrazione si può visitare ad es. <http://www.statistica.unimib.it/utenti/matematica/AM2/appunti/conv.pdf>.



da  $\mathbf{c}$ , il segno di  $\mathbf{H}$  è lo stesso di  $\Sigma_x$ , e dunque se quest'ultima è definita positiva,  $Q(\mathbf{c})$  è convessa per ogni  $\mathbf{c}$ , e  $\mathbf{c}_m = \mathbf{0}$  corrisponde ad un *minimo globale*.

Nel caso di  $n = 2$  è possibile classificare  $Q(\mathbf{c})$  come un *paraboloide ellittico*<sup>88</sup>, raffigurato nella figura a lato per il caso  $\Sigma_x = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  ovvero  $Q(\mathbf{c}) = z = 2x^2 - 2xy + 3y^2$ . La superficie si dice ellittica dato che una sua intersezione con il piano  $Q(\mathbf{c}) = \text{cost}$  individua un *iper-ellissoide*.

**Interpretazione geometrica** Notiamo ora che  $Q(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^\top \Sigma_x \mathbf{c}$  può essere riscritta in forma di prodotto scalare  $\langle \Sigma_x \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle$  tra  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d} = \Sigma_x \mathbf{c}$ , il cui valore risulta  $|\mathbf{c}| |\mathbf{d}| \cos \alpha$ , ovvero positivo o negativo a seconda se  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{d}$  condividono o meno lo stesso semipiano, oppure nullo se sono ortogonali.

In definitiva, una matrice  $\Sigma_x$  definita positiva individua una trasformazione che mappa un *qualunque* vettore  $\mathbf{c}$  in uno  $\mathbf{d} = \Sigma_x \mathbf{c}$  che giace nello *stesso semipiano*, o in quello opposto per una matrice definita negativa.

<sup>88</sup>Vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Quadrica>. In particolare, la proprietà di una matrice definita positiva di avere  $n$  autovalori positivi è quella che in due dimensioni determina questo risultato, vedi <http://www.mat.uniroma2.it/~gealbis/quadriche.pdf>.

## Densità spettrale e filtraggio

**S**I descrive l'effetto del passaggio di un segnale, o di un processo, attraverso un sistema fisico, in particolare per quanto riguarda le modifiche spettrali. Per i segnali periodici e di energia siamo già in grado (vedi § 3.5.1, 3.2 e 3.7) di determinare lo spettro di ampiezza complessa dell'uscita come  $Y(f) = H(f)X(f)$ , e quindi ottenere lo spettro di densità di potenza o di energia come  $|Y(f)|^2$ ; d'altra parte se  $x(t)$  rappresenta una generica realizzazione di un processo, prima di poter definire lo spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  dei suoi membri va svolta una nuova parte di teoria, affrontata nella prima parte del capitolo, in cui la caratterizzazione probabilistica introdotta al cap. 5 viene estesa per mezzo della definizione della *funzione di autocorrelazione*  $\mathcal{R}_x(\tau)$ , la cui trasformata di Fourier è pari appunto alla densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  cercata (teorema di WIENER).

Il resto del capitolo procede applicando la teoria fin qui sviluppata a casi di pratico utilizzo, determinando lo spettro di densità di potenza per alcuni segnali di interesse, e la sua stima basata su osservazioni sperimentali. Al § 6.4 si espone una impostazione unitaria relativa al filtraggio per segnali di energia, periodici e aleatori, mentre al § 6.5 lo stesso schema è applicato alla loro somma e prodotto. Si passa quindi a descrivere un metodo di analisi e sintesi per la classe dei *filtri trasversali*, accennando poi al legame tra risposta in frequenza, analisi dei circuiti, e di Laplace. Una sezione a parte è dedicata alla teoria del *filtro adattato*, con le sue prestazioni ed applicazioni. Il capitolo termina con una appendice in cui sono riferiti ulteriori risultati, e dimostrate alcune relazioni.

### 6.1 Correlazione, covarianza e autocorrelazione

Al § 5.3.5 abbiamo discusso come per un processo  $\{x(t, \theta)\}$  stazionario ed ergodico, la conoscenza della d.d.p.  $p_X(x)$  relativa ad una v.a.  $x$  estratta da un suo membro consenta il calcolo dei corrispondenti valori attesi media  $m_X$  e varianza  $\sigma_X^2$ , nonché della potenza  $\mathcal{P}_X = E_X\{x^2\} = \sigma_X^2 + (m_x)^2$ , risultati validi per una qualunque realizzazione  $\theta$  del processo. Tali medie di insieme sono indicate come descrizioni statistiche *del primo ordine*, in quanto legate alla d.d.p. di un singolo valore estratto.

In questo § definiamo una descrizione statistica *del secondo ordine* che, come vedremo al § 6.2.1, ci metterà in grado di determinare lo *spettro di densità di potenza* delle realizzazioni del processo. Tale descrizione si basa sulla considerazione di 2 istanti  $t_1$  e  $t_2$ , in corrispondenza dei quali sono estratte due variabili aleatorie  $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$  a partire da una realizzazione  $\theta$  di un processo  $x(t, \theta)$ , come mostrato al lato sinistro di fig. 6.1. Al variare della realizzazione  $\theta \in \Theta$ , tutte le coppie di valori campionati sono altrettante determinazioni di una variabile

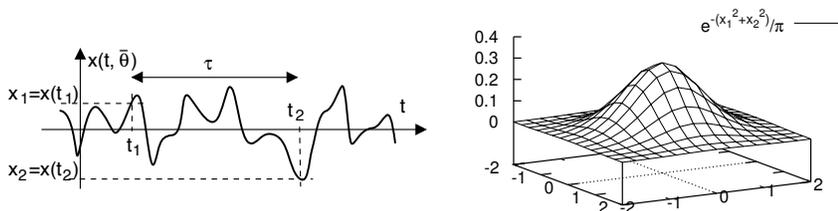


Figura 6.1: Estrazione di due variabili aleatorie da un membro di processo, e loro possibile d.d.p. congiunta

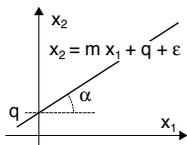
aleatoria *bidimensionale*, descritta da una densità di probabilità *congiunta*  $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; t_1 t_2)$ , che dipende anche dagli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , ed è esemplificata nella parte destra di fig. 6.1, che mostra come questa sottenda un volume unitario, e descriva con il suo andamento le regioni del piano  $x_1 x_2$  in cui cadono un maggior numero di coppie (ovvero dove la probabilità è più densa).

### 6.1.1 Correlazione tra variabili aleatorie

Ora che abbiamo a disposizione la d.d.p. congiunta  $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; t_1 t_2)$  di due v.a.  $x_1$  e  $x_2$  estratte a distanza temporale  $\tau$  dal processo  $x(t, \theta)$ , possiamo calcolare il loro *momento misto*, ovvero un valore atteso (§ 5.2.2) in cui, a differenza del caso monodimensionale, i possibili valori sono ponderati mediante la probabilità che si verifichino *assieme*. In particolare, il momento misto *di ordine (1,1)* (vedi pag. 110)  $m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2)$  tra le v.a. prende il nome di *correlazione*, ed è definito come

$$m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2) = E_{X_1 X_2} \{x_1 x_2\} = \int \int x_1 x_2 \cdot p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; t_1 t_2) dx_1 dx_2 \quad (6.1)$$

Prima di proseguire, proviamo ad approfondire il significato di questa nuova descrizione statistica. Osserviamo innanzitutto che un valore di correlazione  $m_{X_1 X_2}^{(1,1)}$  fra due variabili aleatorie<sup>1</sup>



$x_1$  e  $x_2$  *diverso da zero* indica l'esistenza di una dipendenza di tipo *lineare*, ovvero di una legge del tipo  $x_2 = m x_1 + q + \varepsilon$  in cui  $\varepsilon$  rappresenta la componente aleatoria, a media nulla e statisticamente indipendente sia da  $x_1$  che da  $x_2$ <sup>2</sup>. Come noto  $m = \tan \alpha$  è il *coefficiente angolare* della retta, e si può mostrare che ha lo stesso segno di  $m_{X_1 X_2}^{(1,1)}$ : infatti se la correlazione è maggiore di zero, significa ad es. che le due v.a. hanno frequentemente lo stesso segno, oppure diverso quando  $m_{X_1 X_2}^{(1,1)} < 0$ <sup>3</sup>. Per esemplificare cosa accade, consideriamo i diagrammi di dispersione o *scattering*<sup>4</sup> per sei diversi casi di coppie di valori  $x_1$  e  $x_2$  mostrati in fig. 6.2 assieme ai relativi valori<sup>5</sup> di correlazione  $m_{X_1 X_2}^{(1,1)}$  (*corr*), covarianza  $\sigma_{x_1 x_2}$  (*cov*), e coefficiente di correlazione  $\rho$  (§ 6.9.1). Nei casi A) e F) le coppie di valori sono legate da una legge pressoché deterministica, ma nel secondo caso si ottiene comunque una correlazione nulla

<sup>1</sup>Intese ora nel senso più generale e non necessariamente estratte da un medesimo processo, come per esempio temperatura e pressione in un punto all'interno di un motore a scoppio, oppure come pressione e velocità in un circuito idraulico, o pneumatico...

<sup>2</sup>Per approfondire il concetto si veda [https://it.wikipedia.org/wiki/Regressione\\_lineare](https://it.wikipedia.org/wiki/Regressione_lineare)

<sup>3</sup>Come intuitivamente verificabile pensando  $m_{X_1 X_2}^{(1,1)}$  come media pesata in probabilità dei possibili valori del prodotto  $x_1 x_2$ ; i termini di eguale ampiezza e segno opposto possono elidersi se equiprobabili.

<sup>4</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Grafico\\_di\\_dispersione](https://it.wikipedia.org/wiki/Grafico_di_dispersione)

<sup>5</sup>Si intendono qui valori *stimati*, ovvero ottenuti a partire dal campione statistico, per cui ad es.  $\hat{m}_{X_1 X_2}^{(1,1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_1(i) x_2(i)$ .

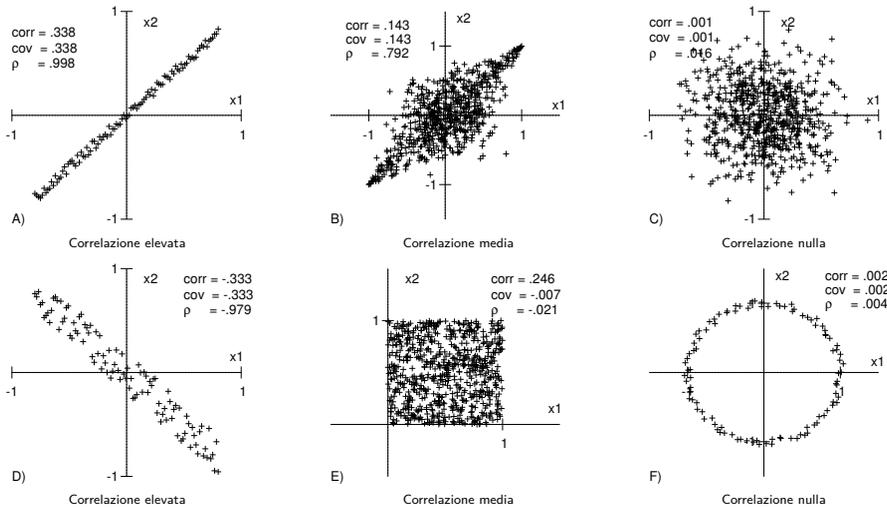


Figura 6.2: Diagramma di dispersione per coppie di variabili aleatorie

poiché la dipendenza non è lineare. Nei casi B) e D) c'è più variabilità, ma si nota ancora una certa dipendenza tra le due v.a. Nei casi C) ed E) siamo invece di fronte a due v.a. *statisticamente indipendenti*, dato che  $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$  è fattorizzabile come  $p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$ , e per le quali risulta quindi  $m_{X_1 X_2}^{(1,1)} = m_{X_1} m_{X_2}$  (vedi § successivo). Infine, osserviamo che nel caso E) si può ottenere una correlazione  $\neq 0$  anche in presenza di v.a. indipendenti, qualora queste abbiano media *non nulla*. Per gestire questo caso, occorre allora introdurre la *covarianza*, descritta di seguito.

### 6.1.2 Indipendenza statistica, covarianza e incorrelazione

Nel caso in cui le due v.a. siano *statisticamente indipendenti*, ovvero per le quali si possa scrivere  $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = p(x_1)p(x_2)$ <sup>6</sup>, l'integrale che definisce la correlazione *si fattorizza*, fornendo come risultato il prodotto delle medie della v.a.:

$$\begin{aligned}
 m_{X X}^{(1,1)}(t_1, t_2) &= \int \int x_1 x_2 p(x_1) p(x_2) dx_1 dx_2 = \int x_1 p(x_1) dx_1 \cdot \int x_2 p(x_2) dx_2 = \\
 &= E\{x_1\} E\{x_2\} = m_{X_1} m_{X_2}
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

**Covarianza** E' indicata come  $\sigma(x_1, x_2)$  e consiste nella correlazione  $m_{X X}^{(1,1)}(t_1, t_2)$  a cui è sottratto il termine  $m_{X_1} m_{X_2}$ , ottenendo il momento misto *centrato* tra le due v.a. Infatti:<sup>7</sup>

$$\begin{aligned}
 \sigma(x_1, x_2) &= E\{(x_1 - m_{X_1})(x_2 - m_{X_2})\} = \\
 &= E\{x_1 x_2\} - E\{x_1 m_{X_2}\} - E\{m_{X_1} x_2\} + E\{m_{X_1} m_{X_2}\} = \\
 &= E\{x_1 x_2\} - m_{X_1} m_{X_2} = m_{X X}^{(1,1)}(t_1, t_2) - m_{X_1} m_{X_2}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

<sup>6</sup>Omettiamo per brevità di indicare la variabile aleatoria a pedice della densità di probabilità, così come gli istanti temporali.

<sup>7</sup>Ancora una semplificazione di notazione, da intendersi ricordando che un valore atteso è in realtà un integrale che pesa l'argomento per la rispettiva d.d.p., a cui si applica la proprietà distributiva del prodotto di somme.

Siamo ora in grado di enunciare un'importante conseguenza dell'indipendenza statistica:

**Incorrelazione** Combinando i risultati (6.2) e (6.3) possiamo verificare che

*Se due variabili aleatorie  $x_1$  ed  $x_2$  sono statisticamente indipendenti, la loro covarianza  $\sigma(x_1, x_2)$  è nulla, e sono pertanto dette INCORRELATE<sup>8</sup>.*

La proprietà esposta ha valore in *una sola* direzione, in quanto se per due v.a.  $\sigma(x_1, x_2)$  risulta nulla, *non è detto* che esse siano statisticamente indipendenti<sup>9</sup>. L'unico caso in cui l'incorrelazione tra variabili aleatorie *ne implica* l'indipendenza statistica, è quello relativo a v.a. *congiuntamente gaussiane*, come mostrato al § 5.5.1.

### 6.1.3 Correlazione di processo stazionario ergodico

Qualora il processo da cui si estraggono  $x_1$  e  $x_2$  sia *stazionario* almeno *in senso lato* (§ 5.3.4), la relativa d.d.p. congiunta dipende solamente dalla differenza  $\tau = t_2 - t_1$  tra gli istanti  $t_2$  e  $t_1$  (vedi fig. 6.1), e dunque anche la correlazione (6.1) dipende solamente da  $\tau$ :

$$m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2) = E\{x_1 x_2\} = \int \int x_1 x_2 \cdot p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; \tau) dx_1 dx_2 = m_{XX}^{(1,1)}(\tau) \quad (6.4)$$

che quindi viene ora indicata come  $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$ .

Se poi il processo oltre che stazionario è anche *ergodico* (§ 5.3.5), allora la media di insieme  $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$  assume lo stesso valore della corrispondente media temporale. Pertanto nel caso in cui non si conosca la  $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; \tau)$  ma si disponga invece di qualche realizzazione del processo, anziché tramite la (6.4) la correlazione può essere ottenuta dalla *media temporale*  $x(t, \theta_i) x(t + \tau, \theta_i)$  (vedi § 5.3.2) calcolata per una qualunque realizzazione  $\theta_i$ . Tale media temporale viene ora indicata come  $\mathcal{R}_x(\tau)$ , e corrisponde a

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \theta_i) x(t + \tau, \theta_i) dt \quad \forall \theta_i \in \Theta \quad (6.5)$$

Dato che per processi stazionari ed ergodici le (6.4) e (6.5) forniscono lo stesso risultato, per essi la correlazione  $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$  è usualmente indicata con la notazione  $\mathcal{R}_x(\tau)$ . Fermo restando che nel caso in cui non si disponga di realizzazioni del processo, ma si conosca la  $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; \tau)$ , la correlazione deve essere ottenuta dall'espressione (6.4).

Prima di utilizzare (al § 6.2.1) il nuovo descrittore statistico *correlazione*  $\mathcal{R}_x(\tau)$  per giungere ad una espressione della densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  per processi ergodici, partiamo dal punto di contatto tra questi ultimi ed i segnali certi rappresentato dalle (6.4) e (6.5), per approfondire l'interpretazione di  $\mathcal{R}_x(\tau)$  nel contesto deterministico.

<sup>8</sup>Notiamo immediatamente che il termine più corretto sarebbe "incovarianzate"; l'uso (ormai storico e consolidato) dell'espressione *incorrelate* deriva probabilmente dal considerare usualmente grandezze a media nulla, per le quali le due espressioni coincidono.

<sup>9</sup>Vedi ad esempio il caso F) di fig. 6.2, in cui le variabili aleatorie risultano incorrelate, ma non sono per nulla indipendenti, dato che le coppie di valori si dispongono su di un cerchio. Ciò rappresenta un caso di dipendenza *non lineare*, in quanto l'equazione che descrive la circonferenza è quadratica.

### 6.1.4 Autocorrelazione e intercorrelazione

La media temporale di secondo ordine  $\overline{x(t)x(t+\tau)}$  calcolata per un segnale *deterministico*  $x(t)$  viene chiamata *integrale di autocorrelazione* ed indicata come  $\mathcal{R}_x(\tau)$ , proprio come la (6.5), che infatti ne esprime la definizione per un segnale *di potenza*. Nel caso di segnali *di energia* la (6.5) darebbe un risultato nullo, e per essi la definizione di *autocorrelazione* diviene

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau) dt \quad (6.6)$$

in cui l'operatore di coniugato generalizza l'espressione anche al caso di segnali complessi.

Confrontando le (6.6) e (6.5) con la (3.5) di pag. 55, notiamo come l'autocorrelazione valuti l'energia (o potenza) *mutua* (ovvero il prodotto scalare) tra un segnale  $x(t)$  ed una sua *copia anticipata*: in questo senso, un valore elevato di  $\mathcal{R}_x(\tau)$  indica che per quel valore di  $\tau$  (o di anticipo) le due copie del segnale *si somigliano*, mentre un suo valore nullo, è indice (per quella scelta di  $\tau$ ) di *ortogonalità*.

**Intercorrelazione** Gli stessi concetti di similitudine legata ad uno scorrimento temporale si applicano altrettanto bene anche se il prodotto scalare<sup>10</sup> è calcolato tra due *diversi* segnali  $x(t)$  ed  $y(t)$ ; in tal caso l'operazione prende il nome di integrale di *intercorrelazione*, che per segnali *di energia* ha espressione:

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau) dt \quad (6.7)$$

mentre per quelli *di potenza* è definito come  $\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau) dt$ .

Nel caso in cui  $\mathcal{R}_{xy}(\tau) = 0$  i segnali sono detti *ortogonali*, od anche *incoerenti*.

**Funzione di correlazione** Le espressioni (6.6) e (6.7) sono anche indicate come *funzioni di auto-* e *(inter-) correlazione*, dato che il loro argomento è un tempo (l'intervallo tra due campioni) e dunque  $\mathcal{R}_x(\tau)$  e  $\mathcal{R}_{xy}(\tau)$  possono essere viste come segnali (funzione di  $\tau$  anziché di  $t$ ). Nello studio abbiamo già incontrato un integrale (di convoluzione) il cui risultato è una funzione del tempo; la somiglianza tra i due è più profonda di una semplice analogia, in quanto si può scrivere

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau) dt = x^*(-\tau) * x(t) \quad (6.8)$$

in cui  $*$  è il consueto simbolo di convoluzione<sup>11</sup>.

<sup>10</sup>In effetti in base alle definizioni date al § 2.4.3 risulta  $\langle \bar{a}(t), \bar{b}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)b^*(t) dt$  in cui è il *secondo* segnale ad essere coniugato, e non il *primo* come per la (6.7): dunque quest'ultima espressione corrisponde (in termini di prodotto scalare) a  $\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau) dt = \langle y(t+\tau), x(t) \rangle = \langle y(t), x(t-\tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x^*(t-\tau) dt$ , equivalente alla (6.7) in quanto anziché anticipare  $y(t)$ , viene ritardato  $x(t)$ . Si preferisce comunque la definizione (6.7) per la sua somiglianza *formale* a quella di una convoluzione.

<sup>11</sup>Il risultato (6.8) si basa sul cambio di variabile  $\theta = t + \tau$  che permette di scrivere

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\theta-\tau)x(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(-(\tau-\theta))x(\theta) d\theta = x^*(-\tau) * x(\tau)$$

**Costruzione grafica** In base all'ultima osservazione otteniamo la costruzione grafica di fig. 6.3, che illustra la procedura per il calcolo di un valore dell'integrale di autocorrelazione di  $x(t) = \text{rect}_{2T}(t)$ , molto simile a quella già illustrata per la convoluzione (vedi § 3.4.3), con la differenza che ora *non si effettuano* ribaltamenti di asse, e la traslazione è *all'indietro* (o anticipo) anziché in avanti. L'esempio mostrato si riferisce ad un caso per il quale  $x(t) = x^*(-t)$ , e che fornisce dunque lo stesso risultato di  $x(t) * x(t)$ .

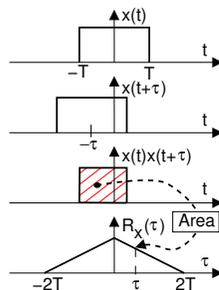


Figura 6.3: Autocorrelazione di un rettangolo

### 6.1.4.1 Proprietà dell'autocorrelazione

L'ultimo punto di questa sezione è dedicato all'analisi degli aspetti che caratterizzano la funzione di autocorrelazione, fondamentali per meglio comprendere le indicazioni che  $\mathcal{R}_x(\tau)$  può fornire a riguardo del segnale  $x(t)$ .

**Invarianza rispetto alle traslazioni temporali** Considerando i segnali  $x(t)$  e  $y(t) = x(t + \theta)$ , le rispettive autocorrelazioni  $\mathcal{R}_x(\tau)$  ed  $\mathcal{R}_y(\tau)$  sono identiche<sup>12</sup>. Notando ora che i due segnali hanno uguale modulo  $|X(f)| = |Y(f)|$  e spettro di fase che differisce per un termine lineare (pag. 57), osserviamo che l'invarianza rispetto alle traslazioni è un aspetto di un risultato più generale, ossia

*l'autocorrelazione non tiene conto dell'informazione legata alla fase dei segnali*

Infatti  $x(t)$  e  $y(t)$  hanno anche la stessa densità spettrale di energia  $\mathcal{E}_x(f) = \mathcal{E}_y(f) = |X(f)|^2$ , come approfondiremo tra breve al § 6.2.1.

**Estensione temporale** L'autocorrelazione di un segnale di durata limitata è anch'essa di durata limitata, di estensione doppia rispetto a quella del segnale originario, come mostrato in fig. 6.3. Nel caso di un segnale di energia a durata illimitata, dato che per ottenere  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$  occorre che  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ,  $\mathcal{R}_x(\tau)$  tende a zero allo stesso modo. Nel caso infine di un segnale di potenza, come per un membro di processo ergodico in cui la  $\mathcal{R}_x(\tau)$  (6.5) eguaglia la media di insieme  $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$ , dato che quest'ultima tende a zero per  $\tau \rightarrow \infty$ , lo stesso avviene anche per  $\mathcal{R}_x(\tau)$ , ad eccezione dei due casi seguenti di segnale periodico, oppure a media non nulla.

**Segnali periodici** L'autocorrelazione di un segnale periodico di periodo  $T$  è anch'essa periodica, con lo stesso periodo. Infatti per  $\tau = nT$  il secondo fattore integrando in (6.5) è traslato di un numero intero di periodi. Pertanto non occorre calcolare l'integrale su tutto l'asse dei tempi, e per questi segnali l'autocorrelazione è definita come

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x^T(\tau - nT) \quad \text{in cui} \quad \mathcal{R}_x^T(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (6.9)$$

<sup>12</sup>Infatti otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) y(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t + \theta) x(t + \theta + \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\alpha) x(\alpha + \tau) d\alpha = \mathcal{R}_x(\tau) \end{aligned}$$

**Componente continua** Qualora un segnale di potenza  $x(t)$ , od un processo stazionario, possa essere scritto come  $x(t) = x_0(t) + a$  in cui  $E\{x_0(t)\} = 0$  ed  $a$  una costante, troviamo che  $m_x = a$ , e che<sup>13</sup>  $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + a^2$ : dunque in questo caso l'autocorrelazione non si annulla per  $t \rightarrow \infty$ , ma tende al valore  $m_x^2$ .

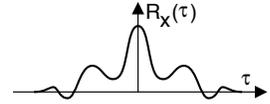
**Massimo nell'origine** Il valore della autocorrelazione ottenuto per  $\tau = 0$  è *il massimo* rispetto a qualunque altra scelta di  $\tau$ , ovvero  $\mathcal{R}_x(0) = \max_{\tau} \{\mathcal{R}_x(\tau)\}$ . In particolare,  $\mathcal{R}_x(0)$  è uguale all'energia del segnale  $x(t)$ , od alla sua potenza se  $x(t)$  è di potenza, ossia

$$\mathcal{R}_x(0) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \mathcal{E}_x > |\mathcal{R}_x(\tau \neq 0)| & \text{se } x(t) \text{ è di energia} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \mathcal{P}_x \geq |\mathcal{R}_x(\tau \neq 0)| & \text{se } x(t) \text{ è di potenza} \end{cases}$$

Notiamo inoltre che se  $x(t)$  è periodico, l'ultimo segno  $\geq$  è una eguaglianza per  $\tau$  multiplo di un periodo.

**Simmetria coniugata** E' possibile verificare<sup>14</sup> che risulta

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_x^*(-\tau)$$



e ciò consente (vedi § 3.3) di affermare che  $\mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$  è reale.

Nel caso in cui  $x(t)$  sia reale, si ottiene  $\mathcal{R}_x(-\tau) = \mathcal{R}_x(\tau)$ ,

ovvero l'autocorrelazione di un segnale reale è *reale pari*, alla stregua (come mostreremo ora) della sua trasformata di Fourier.

## 6.2 Spettro di densità di potenza

Come anticipato ad inizio capitolo, mostriamo il metodo con cui determinare lo spettro di densità di potenza nel caso di processi, noto come teorema di WIENER<sup>15</sup>. La cosa decisamente *gradevole*, è che tale risultato è valido anche per gli altri tipi di segnale.

### 6.2.1 Teorema di Wiener

*Lo spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  (o di energia  $\mathcal{E}_x(f)$ ) di un segnale  $x(t)$  certo o aleatorio è pari alla trasformata di Fourier della relativa funzione di autocorrelazione, ovvero  $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$ .*

<sup>13</sup>Adottando la notazione adatta al caso di un processo, in virtù della stazionarietà possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\tau) &= E\{(x_0(t) + a)(x_0(t + \tau) + a)\} = \\ &= E\{x_0(t)x_0(t + \tau)\} + aE\{x_0(t)\} + aE\{x_0(t + \tau)\} + a^2 = \\ &= \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + 2a \cdot 0 + a^2 = \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + a^2 \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Riscriviamo in fatti l'espressione  $\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t + \tau) dt$  operando il cambio di variabile  $t + \tau = \alpha$ , da cui  $t = \alpha - \tau$  e  $dt = d\alpha$ , ottenendo  $\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\alpha - \tau)x(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)x^*(\alpha - \tau) d\alpha = \mathcal{R}_x^*(-\tau)$ . Procedendo allo stesso modo, per la *intercorrelazione* si ottiene  $\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \mathcal{R}_{yx}^*(-\tau)$ .

<sup>15</sup>In realtà le attribuzioni di questo risultato sono molteplici, comprendendo anche *Khinchin*, *Einstein* e *Kolmogorov* - fonte [https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_di\\_Wiener-Khinchin](https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Wiener-Khinchin)

La dimostrazione del teorema per segnali di energia è straordinariamente semplice:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) X(f) e^{j2\pi f\tau} df = \\ &= \mathcal{F}^{-1} \{X^*(f) X(f)\} = \mathcal{F}^{-1} \{\mathcal{E}_x(f)\} \end{aligned}$$

in cui abbiamo prima applicato il teorema di Parseval (pag. 55), poi la proprietà di traslazione nel tempo, e quindi (vedi § 3.2) riconosciuta  $X^*(f) X(f)$  come la densità di energia  $\mathcal{E}_x(f)$ .

Come anticipato, il teorema è valido anche per segnali di potenza, per i quali la funzione di autocorrelazione  $\mathcal{R}_x(\tau)$  da cui partire è quella espressa dalla (6.5) <sup>(16)</sup>. Nel caso di processi ergodici, ogni membro del processo possiede la stessa  $\mathcal{P}_x(f)$ , che dunque può essere calcolata a partire dalla  $\mathcal{R}_x(\tau)$  di uno qualunque di essi. Nel caso di processi stazionari almeno in senso lato, infine, l'autocorrelazione da cui partire <sup>(17)</sup> è il momento misto  $m_{XX}^{(1,1)}(\tau) = E\{x(t)x(t + \tau)\}$  calcolato come media di insieme dalla (6.4), e rappresenta il modo più generale di procedere, come applicato al § 6.9.3 per il caso di un segnale dati.

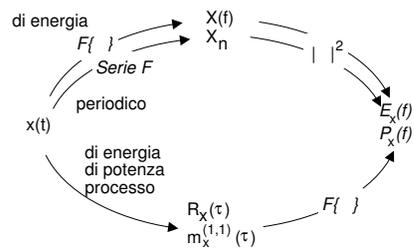
**Discussione** Il teorema di Wiener è (nella sua semplicità) uno strumento molto potente che può costituire una *strada alternativa* per verificare ed estendere risultati noti. Ad esempio, la proprietà di massimo nell'origine per l'autocorrelazione  $\mathcal{R}_x(0) = \mathcal{P}_x$  può ora essere ricavata da quella del valore iniziale eq. (3.8):

$$\mathcal{R}_x(0) = \mathcal{F}^{-1} \{\mathcal{P}_x(f)\} \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) df = \mathcal{P}_x$$

D'altra parte, la validità del teorema anche per segnali periodici e di energia consente di fare per essi una sorta di *prova del nove* nel calcolo delle corrispondenti  $\mathcal{P}_x(f)$  e  $\mathcal{E}_x(f)$ .

Dato che in virtù del teorema di Wiener, è ora possibile definire una  $\mathcal{P}_x(f)$  anche per processi e segnali di potenza, molto spesso nel testo ci si riferirà alle densità di potenza o di energia anziché alle trasformate dei segnali, in modo da applicare i risultati a tutti i casi possibili.

Applichiamo ora la relazione tra  $\mathcal{P}_x(f)$  e  $\mathcal{R}_x(0)$  appena illustrata, ad alcuni casi notevoli di segnale certo e processo aleatorio.



<sup>16</sup>In tal caso una stima della densità di potenza può essere ottenuta mediante periodogramma (§ 6.3.1) calcolato su di un segmento di segnale  $x_T(t)$  di durata  $T$  estratto da  $x(t)$ , e facendo tendere  $T \rightarrow \infty$ , ovvero  $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$ . Dato che  $|X_T(f)|^2$  è proprio la densità di energia  $\mathcal{E}_{x_T}(f)$  di  $x_T(t)$ , per il teorema di Wiener la sua anti-trasformata corrisponde alla funzione di autocorrelazione  $\mathcal{R}_{x_T}(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{\mathcal{E}_{x_T}(f)\}$  di  $x_T(t)$ , come definita dalla (6.6). Operando il passaggio al limite, si ottiene che

$$\mathcal{F}^{-1} \{\mathcal{P}_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{E}_{x_T}(f) \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{R}_{x_T}(\tau)$$

corrispondente alla autocorrelazione  $\mathcal{R}_x(\tau)$  dell'intero segnale, come espressa dalla (6.5).

<sup>17</sup>La dimostrazione di questo viene svolta al § 6.9.2; la sua validità è vincolata a processi per i quali  $\int |\tau \cdot m_{XX}^{(1,1)}(\tau)| d\tau < \infty$ , ed è basata sulla considerazione che se la  $\mathcal{P}_x^\theta(f)$  di un particolare membro  $\theta$  è valutabile come  $\mathcal{P}_x^\theta(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T^\theta(f)|^2$ , allora la sua media di insieme può scriversi come  $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_\theta \left\{ |X_T^\theta(f)|^2 \right\}$ .

### 6.2.2 Segnale periodico

In questo caso  $x(t)$  con periodo  $T$  può essere espresso mediante la relativa serie di Fourier (2.7)  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$  riferita alla frequenza fondamentale  $F = 1/T$  (o prima armonica), e sviluppando in tal senso<sup>18</sup> la (6.9) si ottiene che l'autocorrelazione di  $x(t)$  ha espressione  $\mathcal{R}_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 e^{j2\pi n F \tau}$ , ovvero può essere espressa in serie di Fourier, e quindi è a sua volta periodica, come già osservato. La relativa densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  risulta dunque pari a

$$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \delta(f - nF) \quad (6.10)$$

che costituisce una conferma del teorema di Parseval (2.12). A pag. 181 sono riportati alcuni esempi di autocorrelazione e densità di potenza per segnali periodici.

**Componente continua** Come osservato a pag. 141, se il segnale può essere scritto come  $x(t) = x_0(t) + a$  in cui  $E\{x_0(t)\} = 0$  ed  $a$  è una costante, si ottiene  $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + a^2$  e dunque  $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\} = \mathcal{P}_{x_0}(f) + a^2\delta(f)$ , ossia la relativa densità spettrale presenta un impulso nell'origine di area  $a^2$ . Ovvero, dal punto di vista *opposto*, un impulso nell'origine di  $\mathcal{P}_x(f)$  indica la presenza di una componente continua in  $x(t)$ .

### 6.2.3 Processo armonico

Si tratta del segnale sinusoidale introdotto a pag. 116 e la cui fase iniziale è aleatoria, espresso come

$$x(t, \theta) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \quad (6.11)$$

in cui il parametro  $\theta$  è una v.a. con d.d.p. uniforme tra  $-\pi$  e  $\pi$ , ovvero  $p_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \text{rect}_{2\pi}(\theta)$ . In tal caso  $x(t, \theta)$  costituisce un processo ergodico (vedi § 5.3.7), la cui d.d.p.

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}$$

è graficata a pagina 116.

Dato che a ciascuna realizzazione del processo armonico (ad esempio quella con  $\theta = 0$ ) corrisponde la medesima<sup>19</sup> densità di potenza<sup>20</sup>  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$ , possiamo ottenere l'autocorrelazione  $\mathcal{R}_x(t)$  (6.11) senza dover svolgere l'integrale (6.9), e neanche la media di insieme (6.4). Infatti, per il teorema di Wiener si ha

$$\mathcal{R}_x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_x(f)\} = \frac{A^2}{4} [e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 t)$$

<sup>18</sup>Partendo dalla (6.9)  $\mathcal{R}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t + \tau) dt$  possiamo scrivere

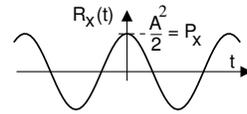
$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^* e^{-j2\pi n F t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{j2\pi m F (t+\tau)} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_n^* X_m \frac{1}{T} e^{j2\pi m F \tau} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(m-n)F t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 e^{j2\pi n F \tau} \end{aligned}$$

in cui l'ultima uguaglianza è frutto della proprietà di ortogonalità degli esponenziali (2.3).

<sup>19</sup>Infatti le diverse realizzazioni (6.11) al variare di  $\theta$  differiscono solo per una traslazione temporale, a cui in frequenza corrisponde un termine di fase lineare, che non incide sulla  $\mathcal{P}_x(f)$ .

<sup>20</sup>Il risultato si ottiene applicando la (6.10) all'unica armonica presente, e considerando che la potenza totale  $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2}$  di distribuisce per metà a frequenza positiva e per metà negativa.

Questo risultato conferma che l'autocorrelazione di un segnale periodico è periodica; riflettiamo dunque sulla circostanza che anche un seno, od un coseno con qualunque altra fase, avrebbe avuto la stessa  $\mathcal{R}_x(t)$ . Ciò è d'altra parte evidente, avendo tutti questi segnali uguale densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$ .



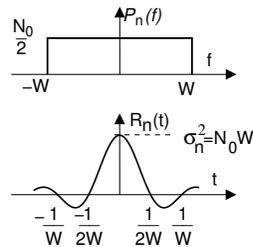
### 6.2.4 Processo gaussiano bianco limitato in banda

Un processo  $n(t)$  è chiamato *bianco* qualora la sua densità di potenza sia costante in frequenza, che quindi si esprime come

$$\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{2W}(f)$$

in cui  $W$  è l'occupazione di banda a frequenze positive. In tali ipotesi otteniamo

$$\mathcal{R}_n(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_n(f)\} = N_0W \text{sinc}(2Wt) \quad (6.12)$$



e possiamo pertanto constatare che si ottiene

$$\mathcal{R}_n(0) = \mathcal{P}_n = \int_{-W}^W \mathcal{P}_n(f) df = \int_{-W}^W \frac{N_0}{2} df = N_0W = \sigma_n^2$$

in cui l'ultima eguaglianza sussiste (vedi eq. (5.6) a pag. 107) in quanto l'assenza di impulsi nell'origine per  $\mathcal{P}_n(f)$  corrisponde ad un  $n(t)$  a media nulla. Inoltre, dato che  $\mathcal{R}_n(t)$  si azzerava per  $t = k/2W$ , osserviamo che campionando  $n(t)$  con periodo  $T_c = 1/2W$  si ottengono valori *incorrelati*, e se il processo è gaussiano, anche statisticamente indipendenti (vedi § 5.5.1). Questo risultato giustifica, almeno da un punto di vista teorico, una ipotesi che viene spesso fatta: quella di trovare, sovrapposti ai campioni di un segnale limitato in banda, dei campioni di rumore *statisticamente indipendenti*.

All'aumentare di  $W$ ,  $\mathcal{R}_n(t)$  tende a zero più rapidamente, cosicché il rumore si mantiene correlato per un tempo sempre minore, ovvero due campioni separati da uno stesso intervallo temporale  $t$  hanno una correlazione sempre minore. Un risultato simile vale anche più in generale, in quanto l'autocorrelazione  $\mathcal{R}_x(t)$  di un qualsiasi processo a media nulla (tranne nel caso periodico, riconducibile ad una combinazione di processi armonici) tende a 0 con  $t \rightarrow \infty$ , ovvero da un certo  $t$  in poi la correlazione è trascurabile.

Infine, se immaginiamo il rumore bianco limitato in banda come il risultato del transito di un processo gaussiano a banda infinita (quindi, con  $\mathcal{R}_n(t) = \delta(t)$ ) attraverso un filtro passa basso ideale con  $H(f) = \text{rect}_{2W}(f)$  (vedi § 8.4.1), ci accorgiamo che la correlazione (6.12) tra campioni di rumore in uscita presi ad istanti diversi ( $t \neq 0$ ) è una diretta conseguenza della memoria introdotta dalla risposta impulsiva  $h(t) = 2W \text{sinc}(2Wt)$  sul segnale in transito, dato che l'operazione di convoluzione tra  $n(t)$  e  $h(t)$  rende i valori in uscita una *combinazione lineare* di quelli (passati) in ingresso (vedi § 3.4.3).

### 6.2.5 Processo di segnale dati

Al § 8.1.2 descriveremo un generico segnale numerico come una somma di repliche di una funzione  $g(t)$ , ognuna moltiplicata per un diverso valore  $a_n$  rappresentativo delle informazioni da trasmettere:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT + \theta) \quad (6.13)$$

La presenza della variabile aleatoria  $\theta$  a distribuzione uniforme tra  $\pm \frac{T}{2}$  (per cui  $p_\Theta(\theta) = \frac{1}{T} \text{rect}_T(\theta)$ ), rende  $x(t)$  un processo ergodico (vedi pag. 116).

Si mostrerà in appendice (§ 6.9.3) che, nelle ipotesi in cui le ampiezze  $a_n$  siano determinazioni di variabili aleatorie *indipendenti ed identicamente distribuite*, a *media nulla* e varianza  $\sigma_A^2$ <sup>(21)</sup>, la densità spettrale di potenza del processo (6.13) risulta

$$\mathcal{P}_x(f) = \sigma_A^2 \frac{\mathcal{E}_g(f)}{T} \quad (6.14)$$

mentre nel caso in cui gli  $a_n$  siano *statisticamente dipendenti*, e/o a *media non nulla*, il risultato è più complesso (vedi eq. (6.42)). Limitandoci ad *interpretare* il risultato *semplice* espresso dalla (6.14), notiamo che  $\mathcal{E}_g(f)$  è la densità di energia di una singola replica di  $g(t)$ , la cui ripetizione, con periodo  $T$ , fornisce una densità di potenza *media*  $\frac{\mathcal{E}_g(f)}{T}$ . Se ogni replica di  $g(t)$  è moltiplicata per una v.a. indipendente a media nulla e varianza (potenza)  $\sigma_A^2$ , la densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  aumenta di egual misura (vedi § 6.5.3).

### 6.3 Stima spettrale

Il teorema di Wiener (§ 6.2.1) ci aiuta qualora si desideri conoscere la densità di potenza per un processo ergodico, e se ne conosca l'autocorrelazione  $m_X^{(1,1)}(\tau) = \mathcal{R}_X(\tau)$ . Ma spesso si ha a che fare con processi di cui, pur ricorrendo le ipotesi di ergodicità, si ignorano le statistiche di insieme: un approccio allora può essere quello di *stimare*  $\mathcal{R}_X(\tau)$  a partire dalle realizzazioni, come mostrato al § 6.5.4, e da quella ottenere  $\mathcal{P}_x(f)$ . Un diverso caso tipico è quello di un segnale che, seppur rappresentativo di molti altri, presenta caratteristiche spettrali variabili nel tempo, e sono proprio queste *variazioni* a convogliare informazione<sup>22</sup>. In tal caso conviene allora stimare direttamente  $\mathcal{P}_x(f)$  senza passare dall'autocorrelazione, a partire da un segmento temporale del segnale. Esistono al riguardo tecniche differenti, come ad es. quella riportata al § 21.1.2; per ora ci limitiamo ad un caso *semplice* ma di rilievo teorico.

#### 6.3.1 Periodogramma

Data una realizzazione  $x(t, \theta_i)$  di un processo, individuiamo un intervallo temporale  $T$  su cui definire un segnale a durata limitata  $x_T(t) = x(t, \theta_i) \text{rect}_T(t)$ . Questo segnale è di energia, con trasformata  $X_T(f)$  e densità di energia  $\mathcal{E}_{x_T}(f) = |X_T(f)|^2$ , e sotto le ipotesi di stazionarietà, da questo si può ottenere una stima  $\hat{\mathcal{P}}_x(f)$  della densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  dell'intero segnale, semplicemente dividendo  $\mathcal{E}_{x_T}(f)$  per la durata del segmento, ovvero

$$\hat{\mathcal{P}}_x(f) = \mathcal{P}_{x_T}(f) = \frac{|X_T(f)|^2}{T} \quad (6.15)$$

ottenendo una funzione della frequenza indicata come *periodogramma*, nome legato all'uso che ne fu inizialmente fatto, per scoprire tracce di periodicità in un segnale *rumoroso*. Al tendere di  $T$  ad  $\infty$ , la (6.15) tende alla *vera* densità di potenza  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} = \mathcal{P}_x(f)$  della realizzazione

<sup>21</sup>Media  $m_A$  e varianza  $\sigma_A^2$  sono qui riferite ai valori multilivello  $a^k$  (con  $k = 1, 2, \dots, L$ ) che un generico simbolo  $a_n$  può assumere, pesati con le rispettive probabilità  $p_k$ , ossia  $m_A = \sum_{k=1}^L p_k a^k$  e  $\sigma_A^2 = \sum_{k=1}^L p_k (a^k - m_A)^2$

<sup>22</sup>Un esempio può essere un segnale sonoro, ad esempio una voce recitante, per il quale vogliamo studiare le caratteristiche spettrali *dei diversi suoni* della lingua (i fonemi), per confrontarle con quelle di un altro individuo, o per ridurre la quantità di dati necessaria a trasmettere il segnale in forma numerica (vedi § 21.1.2), o per realizzare un dispositivo di riconoscimento vocale.

$x_T(t, \theta_i)$  e, se questa appartiene ad un processo ergodico<sup>23</sup>, a quella di un qualunque altro membro.

**Polarizzazione e risoluzione spettrale** Nel caso reale in cui  $T$  non tende ad infinito, si può mostrare<sup>24</sup> che usando  $\mathcal{P}_{x_T}(f)$  (eq. (6.15)) come una stima  $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$  della vera densità  $\mathcal{P}_x(f)$  del processo, si ottiene al suo posto

$$\widehat{\mathcal{P}}_x(f) = \mathcal{P}_x(f) * T(\text{sinc}(fT))^2 \quad (6.16)$$

ossia una distorsione della stessa natura di quella osservato al § 3.8.3 a riguardo del procedimento di *finestratura temporale*, e che mostra come lo stimatore è *polarizzato*<sup>25</sup>, e caratterizzato da una *risoluzione spettrale*<sup>26</sup> (§ 3.8.3) dell'ordine di  $1/T$  Hz.

**Varianza della stima** Come discusso, la stima  $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$  tende al vero  $\mathcal{P}_x(f)$  per  $T$  che aumenta, migliorando allo stesso tempo il potere di risoluzione in frequenza; d'altra parte però i valori di  $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$  per una determinata  $f$  sono pur sempre delle v.a., e la loro varianza... *non diminuisce* all'aumentare di  $T$ , rendendo lo stimatore *inconsistente*! Riprendendo la notazione della nota (24), si può infatti dimostrare<sup>27</sup> che la varianza  $\sigma_T^2$  della stima (6.15) è pari al valore di  $\mathcal{P}_x(f)$  stesso, ossia per ogni valore di frequenza, la deviazione standard del valore di  $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$  è pari a  $\sqrt{\mathcal{P}_x(f)}$ , indipendentemente da quanto sia grande  $T$ . Anche se la teoria prevede che la varianza di uno stimatore diminuisca con l'aumentare dei dati a disposizione (vedi (5.25) a pag. 125), questo non avviene. Il motivo può essere spiegato considerando che in una implementazione numerica mediante DFT (§ 4.4), all'aumentare di  $T$  aumenta anche il numero di valori in frequenza che sono calcolati, e dunque non si determina un reale *accumulo* di dati per uno stesso valore stimato.<sup>28</sup>

**Esempio** Approfondiamo il senso di quanto illustrato con l'aiuto di fig. 6.4, un cui mostriamo l'esito del calcolo del periodogramma ottenuto mediante una FFT (§ 4.4.2) su di un numero

<sup>23</sup>Nel caso contrario in cui  $x(t, \theta)$  non sia ergodico, la sua densità spettrale può essere definita come  $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left\{ \frac{|X_T(f)|^2}{T} \right\}$ .

<sup>24</sup>Per una determinata frequenza  $f_0$ , il valore  $\mathcal{P}_{x_T}(f_0) = \frac{|X_T(f_0)|^2}{T}$  è una variabile aleatoria (dipende infatti da  $\theta$ ), il cui valore atteso  $m_T = E_\theta\{\mathcal{P}_{x_T}(f_0)\}$  vorremmo fosse pari alla vera densità  $\mathcal{P}_x(f_0)$ , e la cui varianza  $\sigma_T^2 = E_\theta\{(\mathcal{P}_{x_T}(f_0) - \mathcal{P}_x(f_0))^2\}$  vorremmo che diminuisse al crescere di  $T$ . Per verificare se tali proprietà siano soddisfatte, valutiamo innanzitutto il *valore atteso* del periodogramma, a partire dalle relazioni fornite dal teorema di Wiener applicato ad  $X_T(f)$ , e cioè  $|X_T(f)|^2 = \mathcal{E}_{x_T}(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{x_T}(\tau)\}$ :

$$\begin{aligned} E_\theta\{\mathcal{P}_{x_T}(f)\} &= E_\theta\left\{\mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t, \theta) \text{rect}_T(t) x(t + \tau, \theta) \text{rect}_T(t + \tau) dt\right\}\right\} = \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} E_\theta\{x(t, \theta) x(t + \tau, \theta)\} \text{rect}_T(t) \text{rect}_T(t + \tau) dt\right\} = \\ &= \mathcal{F}\left\{\mathcal{R}_x(\tau) \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_T(t) \text{rect}_T(t + \tau) dt\right\} = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau) \cdot \text{tri}_{2T}(\tau)\} = \\ &= \mathcal{P}_x(f) * T(\text{sinc}(fT))^2 \end{aligned}$$

Osserviamo quindi come una finestra rettangolare di segnale ne produca una triangolare sull'autocorrelazione. Ma c'è comunque di buono che all'aumentare di  $T$  lo stimatore tende al valore vero, dato che  $\lim_{T \rightarrow \infty} T(\text{sinc}(fT))^2$  tende ad un impulso.

<sup>25</sup>Quando il valore atteso di uno stimatore tende al valore vero, si dice (vedi § 5.6.3) che lo stimatore è *non polarizzato* (o *unbiased*); se poi aumentando la dimensione del campione, la varianza della stima tende a zero, lo stimatore è detto *consistente*. Ci consola verificare che, come commentato alla nota precedente, per  $T \rightarrow \infty$  la polarizzazione tende a scomparire, rendendo la stima *asintoticamente non polarizzata*.

<sup>26</sup>La risoluzione spettrale in questo caso dipende dalla larghezza del lobo principale della densità di energia della funzione finestra applicata a  $\mathcal{R}_x(\tau)$ , che nel caso del  $\text{tri}_{2T}(\tau)$  risulta  $(\text{sinc}(fT))^2$ , il cui lobo principale è appunto ampio

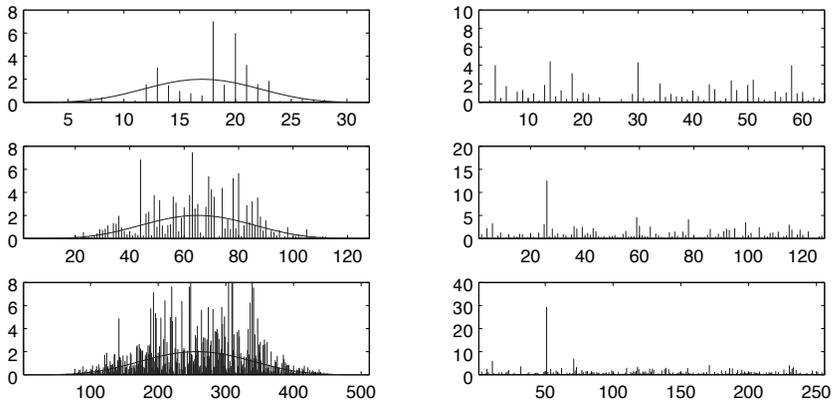


Figura 6.4: Periodogramma calcolato via FFT per rumore colorato (a sinistra) e per sinusoide immersa nel rumore (a destra), su intervalli di segnale di durata (o numero di punti) crescente (dall'alto in basso)

variabile di punti, indicati in ascissa. Sul lato sinistro della figura, il processo  $x(t, \theta_i)$  è costituito da un *rumore colorato* con  $\mathcal{P}_x(f) = (1 - \cos(4\pi f T_c))^2$ , che pure è mostrato in figura: come anticipato, il valore stimato  $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$  si discosta da quello atteso  $\mathcal{P}_x(f)$  in modo tanto maggiore quanto più questo è grande, per qualunque durata di osservazione.

Viceversa, la colonna di destra di fig. 6.4 mostra l'effettiva utilità del periodogramma per individuare segnali a banda stretta immersi nel rumore. In questo caso una sinusoide con frequenza  $f_0 = \frac{f_c}{10}$  e potenza  $\frac{1}{2}$  è stata sommata ad un rumore gaussiano bianco con  $\sigma_n^2 = 4$ , ottenendo così un *SNR* pari a  $\frac{1}{8}$ , ovvero -9 dB. Utilizzando (in alto a destra) una FFT a 128 punti (e dunque se ne mostrano la metà, vedi pag. 98), il tono presente appare difficilmente distinguibile dai valori su cui può oscillare la stima per il rumore bianco. Ma è sufficiente raddoppiare il numero di campioni per migliorare la situazione: mentre la riga a frequenza della sinusoide raddoppia (ma non la varianza della sua stima), il livello di rumore si mantiene costante (notare la diversa scala orizzontale). Ecco dunque spiegato il motivo del suo nome ☺

## 6.4 Filtraggio di segnali e processi

Il teorema di WIENER § 6.2.1 ci ha fornito un approccio unificato alla definizione di spettro di potenza in virtù del suo legame con la funzione di autocorrelazione per tutti i tipi di segnale, compresi i processi. Riprendiamo quindi l'analisi iniziata al § 3.5.1 estendendola alla classe dei segnali aleatori, per arrivare a descrivere dal punto di vista spettrale e statistico ciò che esce da un filtro con risposta impulsiva  $h(t)$ , ovvero ad  $y(t) = x(t) * h(t)$ , per i casi di segnali di energia, periodici od aleatori.

<sup>1/T</sup>. Anche la risoluzione, quindi, migliora all'aumentare di  $T$ .

<sup>27</sup>Vedi ad es. [http://risorse.dei.polimi.it/dsp/courses/ens\\_l1/books/libro07secondaparte.pdf](http://risorse.dei.polimi.it/dsp/courses/ens_l1/books/libro07secondaparte.pdf)

<sup>28</sup>Esistono diverse soluzioni a questo problema, tutte legate ad una riduzione della risoluzione spettrale. La prima è quella di smussare il  $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$  ottenuto, mediando i valori su frequenze vicine: tale operazione corrisponde ad un *filtraggio in frequenza*. Un secondo metodo prevede di suddividere l'intervallo di osservazione in diversi sottointervalli, calcolare il periodogramma su ciascuno di essi, e mediare i risultati.

### 6.4.1 Densità spettrale in uscita da un filtro

Valutiamo ora il risultato per la densità di energia  $\mathcal{E}_y(f)$  in uscita (e la rispettiva energia  $\mathcal{E}_y$ ), oppure  $\mathcal{P}_y(f)$  e  $\mathcal{P}_y$  qualora in ingresso sia presente un segnale  $x(t)$  di periodico, di potenza, od un processo.

**Segnali di energia** Sappiamo che per il teorema di Parseval risulta  $\mathcal{E}_y(f) = Y(f) Y^*(f)$ ; dato poi che  $Y(f) = X(f) H(f)$ , allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_y(f) &= X(f) H(f) X^*(f) H^*(f) = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = \\ &= \mathcal{E}_x(f) |H(f)|^2\end{aligned}$$

e dunque *la densità di energia dell'uscita è pari al prodotto tra quella in ingresso e  $|H(f)|^2$* . A questo punto, eseguendo l'antitrasformata di Fourier di ambo i membri e ricordando la (3.21), si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{E}_y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{E}_x(f) |H(f)|^2\} = \\ &= \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)\end{aligned}$$

ovvero

*l'autocorrelazione dell'uscita è pari alla convoluzione tra l'autocorrelazione dell'ingresso e quella della risposta impulsiva*

Anticipiamo che questo risultato è valido (nei rispettivi termini) anche per i casi di segnale periodico ed aleatorio. Quindi, notiamo che  $|H(f)|^2$  può essere anche vista come la *densità di energia del filtro*, ovvero  $|H(f)|^2 = \mathcal{E}_h(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_h(\tau)\}$ .

A corollario di quanto esposto, sussistono le seguenti uguaglianze<sup>29</sup>, tutte equivalenti ai fini del calcolo dell'energia totale:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_y &= \mathcal{R}_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_x(f) |H(f)|^2 df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x(\tau) \mathcal{R}_h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x(\tau) \mathcal{R}_h^*(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (6.17)$$

L'ultima uguaglianza, confrontata con l'eq. (3.5), mostra come l'energia in uscita  $\mathcal{E}_y$  possa essere interpretata come *l'energia mutua  $\mathcal{E}_{xh}$*  tra ingresso e filtro.

**Segnali periodici** Il segnale di ingresso  $x(t)$  può esprimersi mediante la serie di Fourier

$$x(t) = \sum X_n e^{j2\pi n F t}$$

a cui corrisponde una trasformata  $X(f) = \sum X_n \delta(f - nF)$  (vedi eq. (3.12) a pag. 60) ed una densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f) = \sum |X_n|^2 \delta(f - nF)$  (vedi eq. (6.10)).

Anche il segnale di uscita  $y(t)$  è periodico<sup>30</sup>, ed i suoi coefficienti di Fourier  $Y_n$  possono esprimersi nei termini di quelli dell'ingresso  $X_n$  e dei valori della risposta in frequenza (vedi § 3.5.1) come  $Y_n = X_n H(nF)$ , ovvero in modulo e fase come

$$|Y_n| = |X_n| |H(nF)|; \quad \arg(Y_n) = \arg(X_n) + \arg(H(nF))$$

<sup>29</sup>La quarta uguaglianza sussiste in virtù del teorema di Parseval associato a quello di Wiener, mentre l'ultima è valida se  $\mathcal{R}_h(\tau)$  è reale, ossia se  $h(t)$  è idealmente realizzabile e dunque reale, vedi il § 1.5.4.

<sup>30</sup>Tenendo conto della natura *lineare e permanente* del filtro, l'uscita è la combinazione degli effetti degli ingressi, che per un segnale periodico corrispondono alle armoniche.

Dato che la densità di potenza di  $y(t)$  risulta pari a  $\mathcal{P}_y(f) = \sum_n |Y_n|^2 \delta(f - nF)$ , si ottiene

$$\mathcal{P}_y(f) = \sum |X_n|^2 |H(nF)|^2 \delta(f - nF) = |H(f)|^2 \mathcal{P}_x(f)$$

Di nuovo, antitrasformando si ottiene  $\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)$ .

**Processi ergodici e segnali di potenza** Anche in questo caso, si verifica (in appendice 6.9.4) che  $m_Y^{(1,1)}(\tau) = m_X^{(1,1)}(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)$ , e dunque

$$\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 \quad (6.18)$$

Il risultato ovviamente si applica a qualunque membro del processo, per i quali come noto risulta  $m_X^{(1,1)}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau)$ , e dunque la (6.18) è valida anche per un qualunque segnale di potenza.

**Guadagno di potenza** E' il nome con cui viene più spesso indicato (vedi § 7.2.1) il rapporto

$$|H(f)|^2 = \frac{\mathcal{P}_y(f)}{\mathcal{P}_x(f)} \quad (6.19)$$

ovvero  $|H(f)|^2 = \frac{\mathcal{E}_y(f)}{\mathcal{E}_x(f)}$  nel caso di segnali di energia, e che ripropone in termini energetici il legame ingresso-uscita rappresentato da  $H(f)$  (vedi § 3.5.1). Altre volte  $|H(f)|^2$  è anche indicato come *risposta in potenza*, od anche *densità spettrale della risposta in potenza*, mentre la sua identificazione con la *densità di energia del filtro*  $\mathcal{E}_h(f)$  usata poco sopra, è una mia definizione originale (che io sappia).

**Esercizio** Sia dato il filtro in figura, con

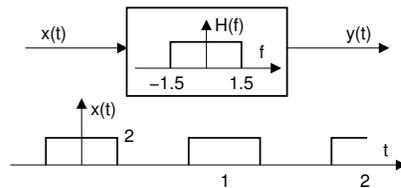
$$H(f) = \text{rect}_3(f)$$

ed al cui ingresso viene posto il segnale

$$x(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}_{\frac{1}{2}}(t - n)$$

Calcolare:

- 1) la potenza in ingresso  $\mathcal{P}_x$ ,
- 2) la potenza in uscita  $\mathcal{P}_y$ ,
- 3) l'espressione di  $y(t)$ .



**Risposte**

1) Calcoliamo la media temporale:  $\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-1/4}^{1/4} 2^2(t) dt = \frac{4}{2} = 2$ , dato che  $T = 1$ ;

2) Sappiamo che  $\mathcal{P}_y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(f) df$ , in cui  $\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2$ , ed essendo  $x(t)$  periodico, si ha  $\mathcal{P}_x(f) = \sum_n |X_n|^2 \delta(f - nF)$ . Per determinare i coefficienti della serie  $X_n$ , calcoliamo

$$X(f) = \mathcal{F}\{2\text{rect}_\tau(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\} = 2\tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$$

ed essendo  $\tau = \frac{1}{2}$  e  $T = 1$ , risulta

$$X(f) = \text{sinc}\left(\frac{f}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - n)$$

con  $X_n = \text{sinc}(\frac{n}{2})$ . Dunque, dato che gli unici impulsi che cadono entro la risposta in frequenza  $H(f)$  sono quelli per  $f = -1, 0$  e  $1$ , si ha:

$$\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 = \sum_{n=-1}^1 |X_n|^2 |H(n)|^2 \delta(f-n)$$

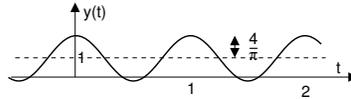
e pertanto si ottiene

$$\mathcal{P}_y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(f) df = \left(\frac{\sin -\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 1.811$$

3) Considerando nuovamente che  $T = 1/F = 1$ , e che risulta  $X_n = \{\frac{2}{\pi}, 1, \frac{2}{\pi}\}$ , si ottiene

$$y(t) = \sum_{n=-1}^1 X_n H(n) e^{j2\pi n t} = 1 + \frac{2}{\pi} (e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos 2\pi t$$

Notiamo come il filtro lasci passare solamente la componente continua e la prima armonica.



### 6.4.2 Caratteristiche statistiche in uscita da un filtro

Considerando ora l'attraversamento di un filtro da parte di un membro di un processo ergodico, per le grandezze rappresentative del processo in uscita si ottengono i seguenti risultati:

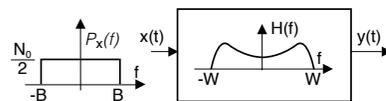
**Media** è pari a quella dell'ingresso, moltiplicata per il *guadagno in continua* del filtro:

$$\begin{aligned} m_y &= E\{y(t)\} = E\{x(t) * h(t)\} = E\{x(t)\} * h(t) = \\ &= m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = m_x H(0) \end{aligned}$$

**Varianza** la condizione di ergodicità consente di scrivere  $\mathcal{P}_y = E\{y^2(t)\} = m_y^{(2)}$  e dunque, ricordando l'eq. (5.6), si ha  $\sigma_y^2 = m_y^{(2)} - (m_y)^2 = \mathcal{P}_y - (m_y)^2$ , in cui per valutare  $\mathcal{P}_y$  si può far uso delle relazioni analoghe alle (6.17):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_y &= \mathcal{R}_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x(\tau) \mathcal{R}_h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

**Esempio** In ingresso ad un filtro  $H(f)$  viene posto un processo  $x(t)$  bianco con  $m_x = 0$  e banda  $B$ , ovvero  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{2B}(f)$  e quindi  $\mathcal{R}_x(\tau) = N_0 B \cdot \text{sinc}(2Bt)$ .



Essendo il processo a media nulla, per la varianza di uscita si ottiene

$$\sigma_y^2 = \mathcal{P}_y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-B}^B |H(f)|^2 df \leq \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_h(0)$$

con il segno di uguale se la *larghezza di banda*  $W$  di  $H(f)$  è minore di  $B$ <sup>31</sup>. Per quanto riguarda la densità spettrale di potenza dell'uscita  $y(t)$  si applica la (6.18), e quindi risulta pari a  $\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$ : dunque il relativo processo *non è più bianco*, ed in questo caso si dice *colorato*. A ciò corrisponde anche una modifica della funzione di autocorrelazione, che non è più un *sinc*, ma ora vale  $\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau) = N_0 B \cdot \text{sinc}(2Bt) * \mathcal{R}_h(\tau)$ . Ciò significa che mentre prima del filtro (per il processo bianco)

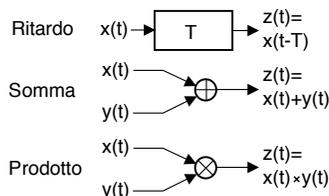
<sup>31</sup>Infatti in tal caso  $\int_{-W}^W |H(f)|^2 df$  è proprio pari all'energia della  $h(t)$ ; se viceversa  $W > B$  una parte di  $|H(f)|^2$  cade al di fuori degli estremi di integrazione  $(-B, B)$ , e non contribuisce al risultato.

due valori estratti in istanti multipli di  $1/2B$  erano incorrelati, l'operazione di filtraggio ha introdotto un legame tra i valori estratti a tali intervalli<sup>32</sup>.

**Densità di probabilità** A riguardo della  $p_Y(y)$  del processo di uscita non si può dire nulla di preciso, tranne che essa dipende dalla  $p_X(x)$  di ingresso e dalle operazioni compiute dal filtro; la sua espressione esatta va però determinata di volta in volta. Ad esempio, nel caso di un filtro trasversale (§ 6.6.1) possono applicarsi le regole di cambio variabile (§ 5.4). Un caso a parte è quello dei processi gaussiani, che se posti in ingresso ad un filtro, producono in uscita un processo anch'esso gaussiano<sup>33</sup>.

## 6.5 Operazioni elementari sui segnali

Al § 6.6 indagheremo come gli elementi filtranti possano essere realizzati mediante una combinazione delle tre operazioni elementari mostrate in figura, ovvero *ritardo*, *somma* e *prodotto*. Prima di proseguire, approfondiamo dunque il risultato della combinazione di segnali certi ed aleatori mediante gli operatori introdotti. Iniziamo osservando che per i due casi di somma e prodotto, si possono verificare le seguenti combinazioni:



- $x(t)$  segnale certo e  $y(t)$  processo aleatorio: il risultato è (*in generale*) un processo *non stazionario*, infatti ora le medie d'insieme dipendono, istante per istante, dal valore che il segnale certo assume in quell'istante;
- $x(t)$  segnale periodico e  $y(t)$  processo aleatorio: si ottiene un processo detto *ciclostazionario*, in quanto anche se le statistiche variano nel tempo, esse assumono valori *identici* con periodicità uguale a quella del segnale certo;
- $x(t)$  segnale costante pari ad  $a$  e  $y(t)$  processo aleatorio:  $z(t)$  è un processo della stessa natura di  $y(t)$ , con media  $m_z$  pari alla somma (od il prodotto) tra  $m_y$  ed  $a$ , potenza  $\mathcal{P}_z = \mathcal{P}_y + a^2$  (oppure  $\cdot a^2$ ), e autocorrelazione  $\mathcal{R}_z(\tau) = \mathcal{R}_y(\tau) \cdot a^2$  (o  $+a^2$ ).

Notiamo poi che spesso si può trattare un segnale periodico alla stregua di un processo, semplicemente ipotizzando per lo stesso una fase uniforme nell'arco di un periodo, in modo da ricondursi al caso del processo armonico, vedi § 6.2.3. Dunque nel seguito, trattiamo solo il caso dei processi.

### 6.5.1 Ritardo

Questo costituisce un caso particolare di canale perfetto (pag. 183), ed analiticamente corrisponde alla convoluzione con un impulso traslato  $z(t) = x(t) * \delta(t - T)$ . Pertanto, l'unica cosa che si modifica<sup>34</sup> è lo spettro di fase in cui compare un termine lineare, ovvero

<sup>32</sup>Questo risultato può essere analizzato ricordando che l'integrale di convoluzione calcola i singoli valori in uscita da un filtro, come dipendenti da tutti gli ingressi passati, ognuno pesato con il valore della risposta impulsiva relativo al ritardo tra ingresso passato ed uscita presente (vedi § 3.4.3). Pertanto, anche se i singoli valori in ingresso sono statisticamente indipendenti, quelli di uscita (distanti tra loro per meno della durata della risposta impulsiva) condividono una porzione di storia comune, e quindi i loro valori non sono più incorrelati.

<sup>33</sup>Questo risultato è una diretta conseguenza della proprietà di invarianza dei processi gaussiani rispetto alle trasformazioni lineari discussa al § 5.5.2. Infatti, riscrivendo l'operazione di convoluzione  $y(t) = \int x(\tau) h(t - \tau) d\tau$  in forma approssimata come una somma di infiniti termini  $y(t) = \sum_i x(\tau_i) h(t - \tau_i) \Delta\tau_i$  appare evidente come, nel caso in cui  $x(t)$  sia un processo gaussiano, l'uscita sia costituita da una combinazione lineare di v.a. gaussiane, e dunque anch'essa gaussiana.

<sup>34</sup>Vedi §§ 3.3 e 3.4.4.

$Z(f) = X(f) \cdot e^{-j2\pi fT}$ , mentre valor medio, autocorrelazione e densità di potenza/energia restano invariate, così come non cambiano la varianza e la d.d.p. per il caso di processi.

### 6.5.2 Somma tra segnali aleatori

Procediamo nel calcolo delle grandezze rappresentative avvalendoci (a parte per il valor medio) della ipotesi di indipendenza statistica tra  $x(t)$  e  $y(t)$ :

#### Valore medio

$$m_z = E\{x(t) + y(t)\} = E\{x(t)\} + E\{y(t)\} = m_x + m_y$$

Notiamo che questo risultato è valido anche in assenza di indipendenza statistica<sup>35</sup>.

#### Potenza totale

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_z &= E\{(x(t) + y(t))^2\} = E\{x^2(t)\} + E\{y^2(t)\} + 2E\{x(t) \cdot y(t)\} = \\ &= \mathcal{P}_x + \mathcal{P}_y + 2m_x m_y \end{aligned}$$

dato che per processi statisticamente indipendenti la d.d.p. congiunta  $p_{XY}(x, y)$  si fattorizza nel prodotto delle marginali  $p_X(x)p_Y(y)$ , così come si fattorizza il valore atteso del prodotto<sup>36</sup>; anche i prossimi risultati valgono unicamente sotto l'ipotesi di *indipendenza statistica*.

**Varianza** Dalle due relazioni precedenti otteniamo

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E\{(z(t) - m_z)^2\} = \mathcal{P}_z - (m_z)^2 = \mathcal{P}_x + \mathcal{P}_y + 2m_x m_y - (m_x + m_y)^2 = \\ &= \mathcal{P}_x - (m_x)^2 + \mathcal{P}_y - (m_y)^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{aligned}$$

#### Autocorrelazione

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_z(\tau) &= E\{z(t)z(t+\tau)\} = E\{(x(t) + y(t))(x(t+\tau) + y(t+\tau))\} = \\ &= E\{x(t)x(t+\tau)\} + E\{y(t)y(t+\tau)\} + E\{x(t)y(t+\tau)\} + E\{x(t+\tau)y(t)\} = \\ &= \mathcal{R}_x(\tau) + \mathcal{R}_y(\tau) + 2m_x m_y \end{aligned}$$

dato che per processi indipendenti, stazionari e congiuntamente ergodici<sup>37</sup> risulta  $E\{x(t)y(t+\tau)\} = \mathcal{R}_{xy}(\tau)$  pari cioè al prodotto delle medie  $m_x m_y$ , vedi eq. (6.2). Osserviamo anche come per  $\tau = 0$  si ritrovi il valore della potenza totale  $\mathcal{P}_z$ .

<sup>35</sup>Infatti in virtù della proprietà distributiva è possibile la saturazione di una v.a. alla volta, ovvero

$$\begin{aligned} \int \int (x+y)p(x,y) dx dy &= \int \int x \cdot p(x,y) dx dy + \int \int y \cdot p(x,y) dx dy = \\ &= \int x \cdot p(x) dx + \int y \cdot p(y) dy \end{aligned}$$

<sup>36</sup>Infatti risulta

$$\begin{aligned} E\{x(t) \cdot y(t)\} &= \int \int x \cdot y \cdot p(x,y) dx dy = \int x \cdot p(x) dx \cdot \int y \cdot p(y) dy = \\ &= E\{x(t)\} E\{y(t)\} = m_x m_y \end{aligned}$$

<sup>37</sup>La proprietà di ergodicità congiunta corrisponde a verificare le condizioni ergodiche anche per i momenti misti  $m_{XY}^{(1,1)}(x, y)$  relativi a coppie di valori estratti da realizzazioni di due differenti processi.

### Spettro di densità di potenza

$$\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_z(\tau)\} = \mathcal{P}_x(f) + \mathcal{P}_y(f) + 2m_x m_y \delta(f)$$

e rimarchiamo ancora una volta che in caso di processi *non indipendenti* il risultato *non* è valido.

**Densità di probabilità** Nel caso di  $x(t)$  ed  $y(t)$  indipendenti si ottiene che il processo somma è caratterizzato da una densità di ampiezza pari a<sup>38</sup>

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(\theta) p_Y(z - \theta) d\theta = p_X(x) * p_Y(y) \quad (6.20)$$

Tale risultato conferma quello già ottenuto al § 5.2.7 e relativo alla somma di variabili aleatorie, ovvero che la d.d.p. di una somma di v.a. indipendenti si ottiene per *convoluzione* tra le densità dei termini della somma.

Notiamo infine che se vengono sommati due processi gaussiani il risultato è ancora gaussiano, come discusso al § 5.5.2: infatti la convoluzione tra funzioni gaussiane è ancora una gaussiana, con media pari alla somma delle medie, e varianza alla somma delle varianze.

### 6.5.3 Prodotto tra segnali aleatori

Anche per il prodotto tra segnali valgono le considerazioni svolte al § 6.5. Qualora i fattori  $x(t)$  ed  $y(t)$  del prodotto  $z(t)$  siano processi statisticamente indipendenti, stazionari e congiuntamente ergodici, si ha

#### Valor medio

$$m_z = E\{z(t)\} = E\{x(t)y(t)\} = E\{x(t)\}E\{y(t)\} = m_x \cdot m_y$$

dato che come già osservato risulta  $p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$  permettendo così la fattorizzazione del valore atteso del prodotto, ossia  $\iint xy p(x, y) dx dy = \int xp(x) dx \cdot \int yp(y) dy$ .

#### Potenza totale

$$\mathcal{P}_z = E\{z^2(t)\} = E\{x^2(t)y^2(t)\} = E\{x^2(t)\}E\{y^2(t)\} = \mathcal{P}_x \cdot \mathcal{P}_y$$

#### Varianza

$$\sigma_z^2 = E\{(z(t) - m_z)^2\} = \mathcal{P}_z - (m_z)^2 = \mathcal{P}_x \cdot \mathcal{P}_y - (m_x \cdot m_y)^2$$

#### Funzione di autocorrelazione

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_z(\tau) &= E\{z(t)z(t+\tau)\} = E\{x(t)y(t)x(t+\tau)y(t+\tau)\} = \\ &= E\{x(t)x(t+\tau)\}E\{y(t)y(t+\tau)\} = \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \mathcal{R}_y(\tau) \end{aligned}$$

In particolare, notiamo che l'incorrelazione di uno dei due processi, per un certo valore di  $\tau$ , provoca l'incorrelazione del prodotto, allo stesso istante  $\tau$ .

<sup>38</sup>Dimostriamo la (6.20) con un ragionamento forse poco ortodosso ma efficace. Dalla definizione di d.d.p. abbiamo che  $z = x + y$  risulta compresa tra  $z + dz$  con probabilità  $p_Z(z) dz$ , ma affinché ciò accada è necessario che, per ogni possibile valore di  $x$ , risulti  $y = z - x$ ; per l'ipotesi di indipendenza statistica tra  $x$  ed  $y$  ciò avviene con probabilità congiunta  $p_X(x) dx \cdot p_Y(z - x) dz$ . Per ottenere  $p_Z(z) dz$  occorre quindi sommare la probabilità congiunta su tutti i possibili valori di  $x$ , ovvero  $p_Z(z) dz = \int_{\Omega_X} p_X(x) p_Y(z - x) dx dz$  in cui  $\Omega_X$  è lo spazio campionario per la v.a.  $x$ . Pertanto in definitiva si ottiene  $p_Z(z) = \int_{\Omega_X} p_X(x) p_Y(z - x) dx$  che corrisponde alla convoluzione espressa nel testo.

### Spettro di densità di potenza

$$\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_z(\tau)\} = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau) \cdot \mathcal{R}_y(\tau)\} = \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_y(f)$$

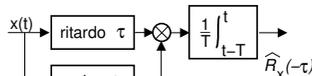
ossia è pari alla convoluzione tra le densità spettrali dei fattori. Notiamo quindi che la densità di potenza del prodotto presenta una occupazione di banda maggiore di quella dei singoli fattori.

**Densità di probabilità** Si calcola con le regole per il cambiamento di variabile, illustrate al § 5.4. Nel caso in cui i due processi  $x$  e  $y$  siano statisticamente indipendenti, il risultato è<sup>39</sup>

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(\theta) p_Y\left(\frac{z}{\theta}\right) \frac{d\theta}{|\theta|} \quad (6.21)$$

#### 6.5.4 Stima della autocorrelazione

Come primo esempio dell'uso degli operatori elementari, la figura mostra l'architettura di uno schema di elaborazione idoneo a effettuare una stima<sup>40</sup>  $\hat{\mathcal{R}}_x(\tau)$  della funzione di autocorrelazione (§ 6.1.4) di un segnale  $x(t)$  per un anticipo  $\tau$  assegnato. Variando quest'ultimo si ottiene  $\hat{\mathcal{R}}_x(\tau)$  per i diversi valori di  $\tau$ , e nel caso di segnali stazionari sarà poi possibile calcolare  $\hat{\mathcal{P}}_x(f) = \mathcal{F}\{\hat{\mathcal{R}}_x(\tau)\}$ ; se infine  $x(t)$  è un membro di un processo ergodico,  $\hat{\mathcal{P}}_x(f)$  rappresenta una stima della densità di potenza per una qualunque realizzazione.



### 6.6 Filtri digitali

Come anticipato al § 6.5, le unità elementari di elaborazione *prodotto, somma e ritardo* possono (in combinazione tra loro) essere utilmente applicate ai segnali, per produrre sugli stessi effetti filtranti. Ciò può rappresentare un modello di cause naturali<sup>41</sup>, oppure si può progettare una specifica architettura in modo da combinare questi elementi per ottenere l'effetto desiderato. Per questa classe di filtri l'integrale di convoluzione si riduce ad una sommatoria, e sebbene l'analisi che segue si basi su segnali *tempo-continui*, i filtri digitali sono di particolare rilievo perché permettono di svolgere le operazioni di filtraggio operando direttamente sui *campioni* dei segnali (vedi § 4.5.1), e dunque possono essere realizzati via software o hardware<sup>42</sup>.

<sup>39</sup>Dimostriamo la (6.21) ricorrendo al metodo illustrato al § 5.4.2, scrivendo il sistema (5.19) come  $\begin{cases} z = xy \\ w = y \end{cases}$

in modo che la trasformazione inversa risulti  $\begin{cases} x = z/w \\ y = w \end{cases}$ . A questo punto si ottiene la matrice Jacobiana  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix}$  come  $\begin{bmatrix} 1/w & z/w^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  a cui corrisponde il modulo del determinante (jacobiano)  $|\det(\mathbf{J})| = \frac{1}{|w|}$ . Dunque la d.d.p. congiunta di  $z, w$  si ottiene come  $p_{ZW}(z, w) = |\det(\mathbf{J})| \cdot p_{XY}(x, y = f(z, w)) = \frac{1}{|w|} \cdot p_{XY}\left(\frac{z}{w}, w\right) = \frac{1}{|w|} \cdot p_X\left(\frac{z}{w}\right) p_Y(w)$  in virtù della indipendenza statistica tra  $x$  e  $y$ . Non resta quindi che *saturare* la  $p_{ZW}(z, w)$  rispetto a  $w$ , ovvero  $p_Z(z) = \int \frac{1}{|w|} \cdot p_X\left(\frac{z}{w}\right) p_Y(w) dw$ , che corrisponde alla (6.21) qualora avessimo posto  $\theta = x$  anziché  $w = y$ .

<sup>40</sup>Si tratta di una *stima* (vedi § 5.6.3) in quanto l'intervallo di integrazione  $T$  è limitato.

<sup>41</sup>Ad esempio l'acustica di un ambiente (del bagno di casa come del teatro) è il risultato dei contributi legati alle diverse riflessioni dei suoni su pareti ed altri elementi, ognuna più o meno attenuata, e con un diverso tempo di propagazione tra sorgente e ascoltatore. Un fenomeno simile avviene anche alle onde radio dei cellulari, vedi § 16.3.3.5.

<sup>42</sup>Il tema delle realizzazioni numeriche dei filtri digitali è approssiata al § 6.9.5, e citiamo come fonte di approfondimento <http://www.dsppguide.com/ch14/6.htm>.

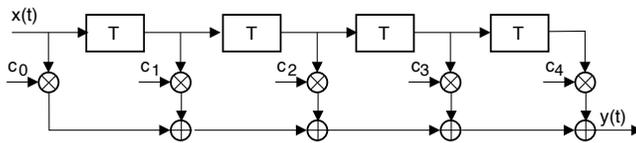


Figura 6.5: Schema simbolico di un filtro trasversale

### 6.6.1 Filtro trasversale

Prende questo nome dal modo in cui è rappresentato lo schema di calcolo, vedi la fig. 6.5, in cui l'uscita  $y(t)$  (in basso a destra) è ottenuta sommando valori di ingresso  $x(t)$  (in alto a sinistra) presi ad istanti  $t = nT$  con  $n = 0, 1, \dots, N$ , ognuno moltiplicato per un coefficiente  $c_n$ , ovvero

$$y(t) = \sum_{n=0}^N c_n x(t - nT) \quad (6.22)$$

**Analisi** Ponendo  $x(t) = \delta(t)$ , l'uscita  $y(t)$  riproduce la *risposta impulsiva* del filtro, pari a

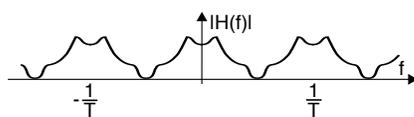
$$h(t) = \sum_{n=0}^N c_n \delta(t - nT) \quad (6.23)$$

costituita da  $N + 1$  copie dell'impulso posizionate in  $t = nT$  e con area pari ai rispettivi coefficienti  $c_n$  o *rubinetti*<sup>43</sup> del filtro. L'intero  $N$  è indicato anche come *ordine* del filtro, ed essendo finito, permette di classificare questa architettura come un filtro FIR (*finite impulse response*)<sup>44</sup>.

Applicando le relazioni note sulle trasformate, è facile valutare la risposta in frequenza corrispondente alla  $h(t)$  (6.23), ovvero

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \sum_{n=0}^N c_n e^{-j2\pi f nT} \quad (6.24)$$

Come esemplificato a lato,  $H(f)$  risulta periodica (in frequenza) con periodo  $F = \frac{1}{T}$ : infatti tutti gli esponenziali  $e^{-j2\pi f nT}$  della sommatoria (6.24) presentano la stessa periodicità.



**Sintesi** Consiste nel calcolo dei coefficienti  $c_n$  del filtro in modo da ottenere una  $H(f)$  (limitata in banda) desiderata. Il primo passo è quello di definire una  $H^\bullet(f)$  periodica, replicando  $H(f)$  a frequenze multiple di  $1/T$ . Al § 4.3 abbiamo già incontrato segnali con spettri periodici, nel caso della trasformata discreta di Fourier DTFT (eq. (4.6)), ottenuta a partire da una sequenza campionata  $h^\bullet(t)$  espressa nella forma della (6.23): pertanto,  $H^\bullet(f)$  ha l'espressione (6.24), ed i coefficienti  $c_n$  altro non sono che quelli (*nel tempo*) dello sviluppo in serie di Fourier di  $H^\bullet(f)$  (periodica *in frequenza* con periodo  $1/T$ ), ovvero (eq. (4.7))

$$c_n = T \int_{-1/2T}^{1/2T} H(f) e^{j2\pi f nT} df \quad (6.25)$$

<sup>43</sup>Uso questo termine per tradurre il termine *taps* (rubinetti) utilizzato nei testi inglesi per indicare i coefficienti  $c_n$ : come se i sommatore in basso in fig. 6.5 raccogliessero l'acqua (o la birra!) *spillata* dai rubinetti  $c_n$ , e proveniente dai *serbatoi di ritardo*  $T$ . La cosa buffa, è che può accadere di riferirsi ai rubinetti o *taps* come... *ai tappi!*

<sup>44</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_impulse\\_response](https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_impulse_response)

**Approssimazione** Ora però sorgono due problemi. Il primo è che la (6.25) è valida con  $n = -\infty, \dots, \infty$ , mentre noi ne vorremmo solamente  $N + 1$ . A questo c'è rimedio a patto di accettare una approssimazione, *finestrando*<sup>45</sup> la sequenza dei  $c_n$  e tenendo così solo quelli per  $n = -N/2, \dots, N/2$ : ovviamente più è piccolo  $N$ , e peggiore sarà l'approssimazione  $\hat{H}(f)$  di  $H(f)$ . Il secondo problema è che nella (6.24) ed in fig. 6.5 i coefficienti hanno indici  $\geq 0$ , e non negativi, come deve essere per ottenere un sistema *fisicamente realizzabile* (§ 1.5.4). A ciò si risponde eseguendo *uno scorrimento* a destra dei  $c_n$  di  $N/2$  posizioni, assegnando  $c_{n'} = c_{n+N/2}$  in modo da avere  $n' \in [0, \dots, N]$ : questo corrisponde ad introdurre un ritardo nell'uscita pari a  $\frac{N}{2}T$ , ottenendo così un segnale  $\tilde{y}(t) = y(t - \frac{N}{2}T)$ .

**Fase lineare** Un vantaggio della approssimazione ora descritta è la possibilità di ottenere un filtro detto a *fase lineare*, ovvero per cui  $\arg\{H(f)\} = e^{-j2\pi f\tau}$  e che dunque non presenta distorsione di fase (§ 12.1.3). Infatti, scegliendo  $H(f)$  *reale pari*, si ottengono valori  $c_n$  reali pari, e lo scorrimento per produrre i  $c_{n'}$  è l'unico contributo alla fase della  $\tilde{H}(f) = \hat{H}(f)e^{-j2\pi f\frac{N}{2}T}$  risultante. In definitiva, operare in questo modo determina valori dei  $c_n$  *simmetrici* rispetto ad  $N/2$ .

## 6.6.2 Realizzazione numerica del filtro trasversale

Lo schema di fig. 6.5 è completamente *analogico*, nel senso che sia  $x(t)$  che  $y(t)$  sono definiti per ogni  $t$ . D'altra parte, la presenza degli  $N$  ritardi  $T$  *tutti uguali* permette di derivarne uno schema di calcolo operante su dati campionati. A questo scopo è sufficiente scegliere  $T = T_c$  e calcolare  $y(t)$  ai soli istanti  $t = nT$ , così come *caricare la memoria* del filtro con i soli campioni  $x(nT)$ : infatti, al § 4.5.1 si mostra che se due segnali  $x(t)$  ed  $h(t)$  sono limitati in banda, e se  $T_c < 1/2W$  la *convoluzione discreta*

$$y_k = T_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n x_{k-n} \quad (6.26)$$

tra i loro campioni  $x_n$  ed  $h_n$  produce una terza sequenza  $y_k$  da cui, applicando il teorema del campionamento, si ottiene lo stesso risultato della convoluzione analogica  $y(t) = x(t) * h(t)$ . Se ora limitiamo l'indice  $n$  tra zero ed  $N$ , la (6.26) equivale alla (6.22) calcolata per  $t = kT_c$  ovvero  $y(kT_c) = \sum_{n=0}^N c_n x((k-n)T_c)$ , dopo aver posto

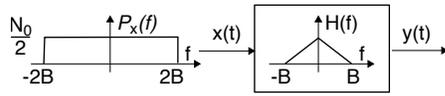
$$c_n = T_c h_n$$

Sebbene la condizione di limitatezza *temporale* dovrebbe escludere quella di limitazione *in banda*, si possono in prima approssimazione associare i valori  $h_n$  ai *campioni* (presi per  $t = nT_c$ ) della risposta impulsiva  $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$  corrispondente alla  $H(f)$  desiderata<sup>46</sup>. Ovviamente, i campioni (di  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $h(t)$ ) devono essere presi ad intervalli  $T = T_c \leq 1/2W$ , in cui ora  $W$  è la *massima frequenza massima* tra  $x(t)$  ed  $h(t)$ .

<sup>45</sup>Ricordando i risultati del § 3.8.3, a seguito della finestratura la reale risposta in frequenza risulterà  $\hat{H}(f) = H(f) * W(f)$ . Per questo, si sono individuate alcune finestre *migliori* della rettangolare, vedi ad es. <http://www.labbookpages.co.uk/audio/firWindowing.html>. E' chiaro che adottando invece una finestra rettangolare, la finestratura equivale a calcolare la (6.25) solo per gli indici  $n$  necessari; l'effetto di tale troncamento sarà la comparsa di *oscillazioni* in prossimità della regione di transizione di  $H(f)$ , del tutto analoghe a quelle evidenziate al § 2.2.2.

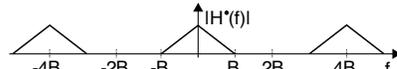
<sup>46</sup>In pratica, questa  $h(t)$  è quella che dà origine alla  $h^\bullet(t) = h(t) \cdot \sum_{n=0}^N \delta(t - nT)$  espressa dalla (6.23), vedi anche nota 28 a pag. 87.

**Esempio** Si desidera realizzare un filtro trasversale che approssimi una  $H(f) = \text{tri}_{2B}(f)$ , considerando che al suo ingresso è posto un processo bianco



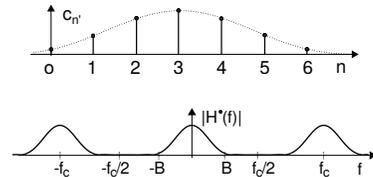
$$x(t) \text{ con densità di potenza } P_x(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{4B}(f).$$

Per poter realizzare il filtro numerico operante su dati campionati, occorre adottare una frequenza di campionamento  $f_c \geq 2W = 4B$ , e dunque un ritardo tra gli stadi del FIR pari a  $T_c \leq 1/4B$ , in modo che la corrispondente  $H^*(f)$  presenti la periodicità  $f_c = 4B$  mostrata in figura.



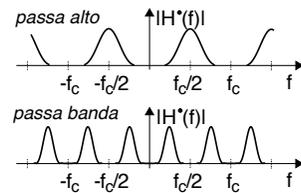
In base alle considerazioni precedenti, dopo aver ottenuto  $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = B \text{sinc}^2(tB)$ , ne calcoliamo i campioni per  $t = nT_c = n/4B$  ovvero  $h_n = B \text{sinc}^2(n/4)$ , da cui ottenere  $c_n = T_c h_n = \frac{1}{4} \text{sinc}^2(n/4)$ . A questo punto non resta che *troncare* la serie a pochi termini centrati in zero (ad es. con  $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$  tutti i campioni di

$h(t)$  sono prelevati dal *lobo principale*) accettando l'approssimazione conseguente, e *traslarli a destra* in modo da ottenere un filtro causale con sette rubinetti, nell'esempio  $c_{n'}$  con  $n' = 0, 1, \dots, 6$ . A lato sono mostrati i coefficienti ottenuti, assieme alla  $H^*(f)$  risultante dalla loro finestatura.



**Media mobile** Quando i coefficienti  $c_n$  sono tutti uguali tra loro e con valore pari ad  $\frac{1}{N+1}$ , le operazioni condotte dal filtro sono chiamate *media mobile* (da *moving average* o MA) dato che di fatto si calcola una media aritmetica tra gli ultimi valori di ingresso, ovvero  $y_k = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N x_{k-n}$ . E' il metodo comunemente usato per *smussare* serie temporali discrete, come per es. temperature (giornaliere od orarie) o quotazioni dei titoli di borsa. Corrisponde ad un filtro tempo-continuo la cui  $h(t)$  è una  $\text{rect}_{(N+1)T_c}(t)$ , ed ha un effetto passa-basso.

**Filtraggio in banda traslata** Il filtro trasversale può realizzare altrettanto bene funzioni di filtraggio di tipo *passa-banda*, o *passa alto*: è sufficiente per questo impostare la  $H^*(f)$  tenendo conto della sua periodicità in frequenza pari ad  $f_c$ , mentre la frequenza massima di segnale è  $f_c/2$ . La figura a lato esemplifica questi due tipi di filtri. Al § 12.1.2.1 si illustra il procedimento di calcolo per la  $h(t)$  corrispondente.

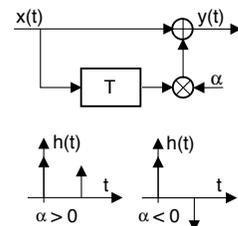


Occupiamoci ora di un paio di architetture particolarmente semplici: la prima è ancora un FIR con  $N = 1$ , mentre la seconda introduce la classe di filtri di tipo *infinite impulse response* o IIR. Anche se per entrambi è possibile una realizzazione numerica qualora il ritardo  $T = 1/f_c$  sia tale da permettere il campionamento del segnale in ingresso, analizziamo solo gli aspetti tempo-continui.

**6.6.3 Filtro trasversale del primo ordine**

Se  $N = 1$ , il filtro di fig. 6.5 può essere ridisegnato come mostrato a fianco, avendo posto  $c_0 = 1$  e  $c_1 = \alpha$ . Ad esso corrisponde una risposta impulsiva

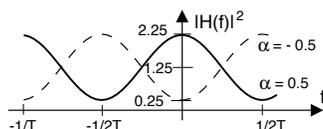
$$h(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t - T)$$



il cui andamento è mostrato a lato per i casi  $\alpha \geq 0$ , e da cui si ottiene una risposta in frequenza pari a  $H(f) = 1 + \alpha e^{-j2\pi fT}$  (47). Da questa espressione è facile ottenere<sup>48</sup> quella del guadagno di potenza  $|H(f)|^2$ , che risulta

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= (\Re\{H(f)\})^2 + (\Im\{H(f)\})^2 = (1 + \alpha \cos 2\pi fT)^2 + (\alpha \sin 2\pi fT)^2 = \\ &= 1 + 2\alpha \cos 2\pi fT + \alpha^2 (\cos^2 2\pi fT + \sin^2 2\pi fT) = \\ &= 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi fT \end{aligned}$$

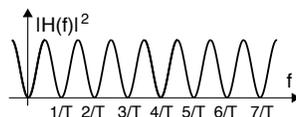
A lato è riportato l'andamento di  $|H(f)|^2$  per due valori di  $\alpha = \pm 0.5$ , ed a pag. 190 si trova la sua rappresentazione in dB.



**Applicazioni** Osserviamo che nell'intervallo di frequenze  $|f| < \frac{1}{2T}$ ,  $|H(f)|^2$  può assumere un comportamento passa-basso oppure passa-alto, in funzione del segno di  $\alpha$ .

Ponendo  $\alpha = -1$  si ottiene un *differenziatore numerico*, dato che in tal caso la sequenza di uscita  $y_n = x_n - x_{n-1}$  rappresenta la *differenza finita* di quella di ingresso. Nel caso tempo-continuo, se oltre a porre  $\alpha = -1$ , il valore di  $T$  diviene piccolo al punto da poter considerare  $T \rightarrow 0$ ,  $h(t)$  inizia ad approssimare un *doppio* (§ 3.6), e dunque (a parte un fattore di scala) l'uscita è proprio la *derivata* dell'ingresso.

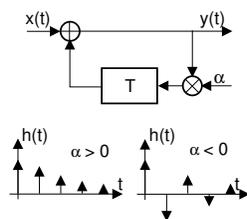
Infine, sempre per  $\alpha = -1$  e con un segnale di ingresso tempo-continuo con banda  $> 1/T$  il filtro è in grado di rimuovere una *componente periodica* di periodo  $T$ , poiché in tal caso  $|H(f)|^2 = 0$  con  $f = n/T$ , in corrispondenza delle armoniche. Un filtro del genere è detto *filtro a pettine*<sup>49</sup> o COMB FILTER.



Questo schema verrà ripreso al § 16.3.3.5 come modello della presenza di una *eco* tra sorgente e destinatario.

## 6.6.4 Filtro a risposta impulsiva infinita del primo ordine

La caratteristica più importante che differenzia lo schema di calcolo in figura da quello precedente è la presenza di un *feedback* all'indietro, per cui il valore in uscita dipende, oltre che dall'ingresso, anche dalle *uscite precedenti*. Per questo motivo la corrispondente risposta impulsiva (graficata a lato per i casi  $\alpha \leq 0$ ) ha una *durata infinita*<sup>50</sup>, ed è pari a



$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \delta(t - nT) \quad (6.27)$$

<sup>47</sup>In questo caso  $H(f)$  risulta a simmetria coniugata ( $H(f) = H^*(-f)$ ), ma è complessa. Pertanto i coefficienti  $c_k$  ottenibili dalla (6.25) sono reali, ma non necessariamente pari. Svolgendo i calcoli, si ha:  $c_k = T \int_{-1/2T}^{1/2T} (1 + \alpha e^{-j2\pi fT}) e^{j2\pi f k T} df = T \int_{-1/2T}^{1/2T} e^{j2\pi f k T} df + \alpha T \int_{-1/2T}^{1/2T} e^{j2\pi f (k-1) T} df$ . Il primo integrale è nullo per  $k \neq 0$ , mentre il secondo per  $k \neq 1$ , in quanto le funzioni integrande hanno media nulla sull'intervallo  $1/T$ ; pertanto  $c_0 = 1$  e  $c_1 = \alpha$ , esattamente come è definita la risposta impulsiva.

<sup>48</sup>Per ogni valore di  $f$ ,  $H(f)$  è pari ad un valore complesso  $z$  con  $H(f) = z = a + jb$ , e dunque il suo quadrato è pari a  $|z|^2 = a^2 + b^2$ , in cui  $a$  e  $b$  sono le parti reale ed immaginaria di  $H(f)$ , pari rispettivamente a  $1 + \alpha \cos 2\pi fT$  e  $-\alpha \sin 2\pi fT$ .

<sup>49</sup>[https://it.wikipedia.org/wiki/Filtro\\_comb](https://it.wikipedia.org/wiki/Filtro_comb)

<sup>50</sup>In questo caso si parla di filtro *ricorsivo*, o filtro *infinite impulse response* (IIR).

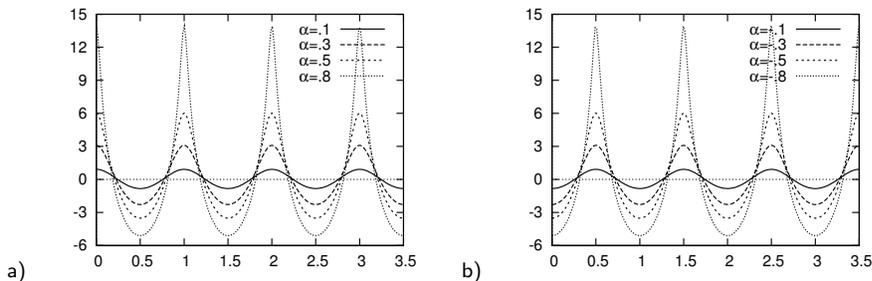


Figura 6.6: Guadagno di potenza in dB di un filtro IIR di primo ordine: a)  $\alpha > 0$ , b)  $\alpha < 0$

Applicando le consuete regole di trasformazione, otteniamo l'espressione della risposta in frequenza come  $H(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j2\pi f n T}$ , che fortunatamente converge ad una espressione più compatta, grazie all'utilizzo del risultato noto per la serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n = \frac{1}{1-\beta}$  con  $|\beta| < 1$ , che permette di scrivere

$$H(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \alpha e^{-j2\pi f T} \right)^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi f T}} \quad (6.28)$$

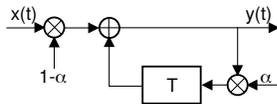
Nel caso in cui  $|\alpha| > 1$  il filtro diviene *instabile*, dato che qualunque disturbo infinitesimo in ingresso produce una uscita che via via si amplifica in modo esponenziale. Per ciò che riguarda il guadagno di potenza  $|H(f)|^2$ , passaggi simili a quelli della nota 48 portano ad ottenere

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{(1 - \alpha \cos 2\pi f T)^2 + (\alpha \sin 2\pi f T)^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos 2\pi f T}$$

**Applicazioni** In fig. 6.6 è mostrato l'andamento del guadagno di potenza in decibel, ovvero  $10 \log_{10} |H(f)|^2$ , calcolato per  $T = 1$  e diversi valori di  $\alpha$ , positivi e negativi. Osserviamo che solo con  $\alpha > 0$  si può realizzare un passa-basso, e solo con  $\alpha < 0$  un passa-alto. Notiamo poi che più  $\alpha$  si avvicina ad uno, e più aumenta il divario tra il guadagno in banda passante e quello in banda attenuata (circa 20 dB per  $|\alpha| = .8$ ), riuscendo così a realizzare un filtro a *banda stretta*, detto anche *risuonatore*. Osserviamo infine che il caso  $\alpha = 1$  corrisponde ad avere un *integratore perfetto* che, ad esempio, produce una rampa in uscita, se in ingresso c'è un gradino.

**Media mobile esponenziale** Una variante dell'IIR di primo ordine si ottiene scrivendo la relazione ingresso-uscita come

$$y(t) = \alpha y(t - T) + (1 - \alpha) x(t) \quad (6.29)$$



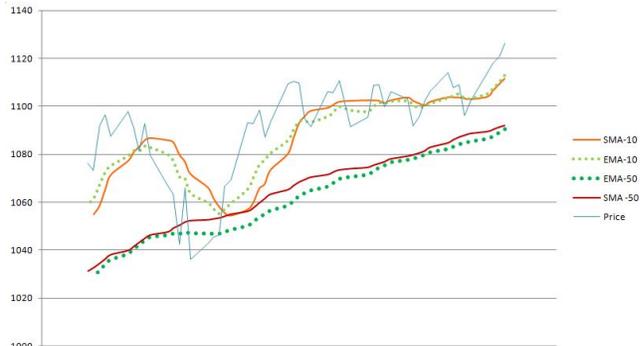
a cui corrisponde una risposta impulsiva della forma  $h(t) = (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \delta(t - nT)$ , che ha il vantaggio rispetto alla (6.27) di presentare guadagno unitario a frequenza zero<sup>51</sup>, ovvero in presenza di un ingresso costante (a parte una fase transitoria) in uscita si troverà la stessa costante. Impostando ora  $0 < \alpha < 1$  il filtro si comporta come un passa basso, e ciò permette di usare la (6.29) per eseguire una operazione di *media mobile*<sup>52</sup> al fine di ottenere i valori della grandezza  $x$  *depurati* dalle variazioni più o meno casuali ad essa sovrapposte.

<sup>51</sup>Infatti la (6.28) valutata per  $f = 0$  fornisce il valore  $H(f = 0) = \frac{1}{1-\alpha}$

<sup>52</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Moving\\_average#Exponential\\_moving\\_average](https://en.wikipedia.org/wiki/Moving_average#Exponential_moving_average)

Un contesto di utilizzo tipico è nel campo dei mercati finanziari, in cui si opera su di una sequenza tempo-discreta  $x_n$  riscrivendo<sup>53</sup> dunque la (6.29) come  $y_n = \alpha y_{n-1} + (1 - \alpha) x_n$ . La risultante sequenza  $y_n$  viene allora indicata come EMA- $N$ , in cui  $N$  rappresenta il numero medio di valori precedenti su cui è operata la media.

In realtà come sappiamo l'IR opera su di una memoria infinita, ma il valore di  $N$  serve a porre in relazione EMA- $N$  con SMA<sup>54</sup> di lunghezza  $N$ : infatti scegliendo un valore  $\alpha = \frac{N-1}{N+1}$  si ottiene la stessa età media dei valori di ingresso utilizzati. La fig. a lato mostra il confronto tra una SMA ed una EMA a parità di  $N = 10$



oppure 50 valori. Dato che attribuisce un peso maggiore ai valori di ingresso più recenti, la EMA viene spesso preferita alla SMA in quanto si dimostra più reattiva alle brusche variazioni di tendenza. Infine, notiamo che qualora si scelga di porre  $\alpha = \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$  la EMA- $N$  può essere calcolata come  $y_n = \alpha y_{n-1} + (1 - \alpha) x_n = \frac{N-1}{N} y_{n-1} + \frac{1}{N} x_n = \frac{(N-1)y_{n-1} + x_n}{N}$ .

Occupiamoci ora di una diversa classe di filtri, che in realtà è venuta prima di quelli appena studiati.

## 6.7 Filtri analogici

Operano esclusivamente su segnali tempo-continui<sup>55</sup> e sono realizzati mediante una varietà di tecniche. Il primo utilizzo dei filtri analogici si è basato su circuiti RLC a costanti concentrate, detti passivi in quanto non richiedono alimentazione, e costituiti da condensatori, induttori e resistori. La difficoltà di ottenere induttori di piccole dimensioni portò a realizzare la loro funzione per mezzo di amplificatori operazionali<sup>56</sup>, dando luogo ai filtri attivi. A frequenze più elevate si possono realizzare filtri a microonde, a cristallo o elettromeccanici: in tutti i casi si perviene ad una espressione del tipo di (6.30).

Applicando la trasformata di Laplace alle equazioni differenziali che descrivono la relazione ingresso-uscita di un circuito RLC, si ottiene una funzione di trasferimento razionale del tipo

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i s^i}{\sum_{j=0}^N b_j s^j} \quad (6.30)$$

(in cui  $M < N$ ), definita su di un piano complesso  $s = \sigma + j2\pi f$ . Ponendo  $s = j2\pi f$  si ottiene la risposta in frequenza<sup>57</sup>  $H(f) = H(s = j2\pi f)$ . Il grado  $N$  del denominatore di

<sup>53</sup>In realtà quasi ovunque la (6.29) viene riscritta come  $y_n = \beta x_n + (1 - \beta) y_{n-1}$ , in cui ovviamente  $\beta - 1 = \alpha$ .

<sup>54</sup>Con SMA- $N$  (simple moving average) si intende una media mobile eseguita da un filtro FIR di lunghezza  $N$  e coefficienti tutti uguali e pari ad  $1/N$ .

<sup>55</sup>Compreso quindi il segnale analogico (ma a contenuto di numerico) prodotto da un codificatore di linea!

<sup>56</sup>Vedi ad es. <https://it.wikipedia.org/wiki/Giratore>

<sup>57</sup>Difatti se  $s = j\pi 2f$  la definizione di trasformata di Laplace  $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$  diviene identica a quella di Fourier, ed equivale a calcolare la  $H(s)$  lungo l'asse immaginario. Questa equivalenza è valida solo se il filtro è stabile, che nel dominio di Laplace equivale a richiedere che tutti i poli di  $H(s)$  siano a sinistra di tale asse.

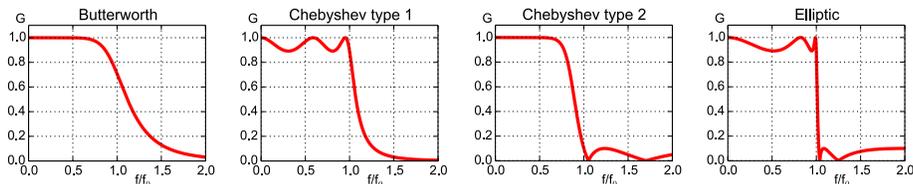
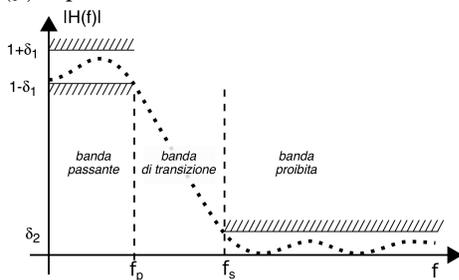


Figura 6.7: Risposta in frequenza per un filtro passa basso realizzato con diverse tecniche di sintesi

(6.30) (uguale al numero delle sue radici o *poli*) definisce l'*ordine* del filtro, ed è indicativo sia della sua complessità realizzativa, sia della rapidità di variazione della  $H(f)$ .

**Sintesi dei coefficienti** Il progetto circuitale del filtro avviene applicando tecniche di *approssimazione* dell'andamento desiderato di  $H(f)$ , espresso mediante uno *schema di tolleranza* descritto<sup>58</sup> dalla figura a lato. L'approssimazione consiste quindi nel trovare i valori dei coefficienti  $a_i$  e  $b_j$  che compaiono nella (6.30) in modo che essa (o meglio, il suo quadrato) risulti descritta in termini di *polinomi* dalle caratteristiche ben note ed il cui grafico rientri nella tolleranza specificata, dando luogo ai cosiddetti filtri di *Butterworth*, di *Chebyshev*, di *Cauer* (o ellittici) e di *Bessel*<sup>59</sup>, di cui in figura 6.7 si rappresenta il modulo della risposta in frequenza ottenibile per uno stesso ordine del filtro. Quindi una volta noti i coefficienti, la (6.30) si riscrive in forma fattorizzata, e ad ogni coppia di poli coniugati<sup>60</sup> corrisponde una diversa *cella circuitale*,<sup>61</sup> disposta in cascata con le altre.



Infine, esistono tecniche<sup>62</sup> che permettono di passare da una  $H(s)$  ad una  $H(z)$ , e di lì ad una realizzazione del filtro in forma *numerica*, come discusso al § 6.9.5.

### 6.7.1 Filtro analogico ad un polo

Occupiamoci ora del più semplice tipo di filtro analogico, costituito dal partitore RC rappresentato alla figura seguente, e che realizza una funzione di passa-basso.

<sup>58</sup>La descrizione dello schema in figura avviene nei termini della specifica di

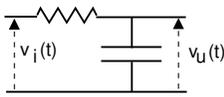
- una *banda passante* che individua la regione di frequenze da lasciar passare;
- il valore percentuale  $\delta_1$  entro cui  $H(f)$  può oscillare nella banda passante;
- una *banda proibita* in cui vorremmo che le corrispondenti componenti frequenziali in ingresso fossero attenuate di almeno il  $\delta_2\%$  rispetto a quelle della banda passante;
- una *banda di transizione* in cui la risposta in frequenza varia;
- se sia richiesta o meno al filtro la proprietà di *linearità di fase* (vedi § 12.1.3).

<sup>59</sup>Per approfondimenti, si può consultare <http://ens.di.unimi.it/dispensa/cap3.pdf> e <http://www.diegm.uniud.it/~bernardi/Didattica/Sis/Lucidi/dispensa-analogici.pdf>.

<sup>60</sup>Un polinomio  $P(s) = \sum_{j=0}^N b_j s^j$  si azzerava per gli  $N$  valori  $s = \beta_j$ , noti come con gli zeri di  $P(s)$ . Lo stesso polinomio può quindi essere scritto come  $P(s) = \prod_{j=1}^N (s - \beta_j)$ , oppure raggruppando gli zeri a coppie (eventualmente coniugate) si ottiene uno sviluppo in termini di secondo grado  $P(s) = \prod_{j=1}^{N/2} (s^2 + c_j s + d_j)$  a cui, se  $N$  è dispari, va aggiunto un fattore di primo grado.

<sup>61</sup>Tradizionalmente di tipo RLC, oppure realizzata mediante amplificatori differenziali.

<sup>62</sup>Basate su cambi di variabile che *mappano* il semipiano sinistro della variabile  $s$  all'interno del *cerchio unitario* del piano  $z$ .



Considerando la tensione  $v_i(t)$  come il segnale di ingresso al filtro, mostriamo che la corrispondente uscita  $v_u(t)$  può essere espressa come convoluzione tra  $v_i(t)$  ed una risposta impulsiva

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{con } t \geq 0 \quad (6.31)$$

Infatti, l'analisi del circuito<sup>63</sup> porta ad una espressione per la risposta in frequenza pari a

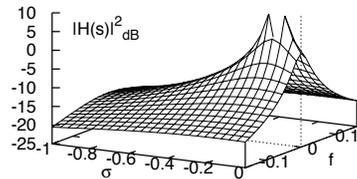
$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad (6.32)$$

di cui la (6.31) è l'antitrasformata<sup>64</sup>. Estendendo questo risultato al dominio di Laplace si ottiene

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

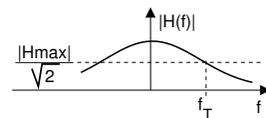
Pertanto,  $H(s)$  presenta un polo in  $s = -\frac{1}{RC}$ , e dunque risulta  $H(s)|_{s=-\frac{1}{RC}} = \infty$ .

A lato è raffigurato l'andamento di  $10 \log_{10} |H(s)|^2$  calcolato per un valore  $RC = 8$ . Come evidente,  $|H(s)|^2$  può essere pensata come una sorta di *cono vulcanico* attorno al polo sito in  $1/RC = 0.125$  e la cui sezione, ottenuta dall'intersezione con un piano verticale passante per l'asse  $j2\pi f$ , individua la risposta in frequenza  $H(f) = H(s = j2\pi f)$ . Come si vede dalla figura,  $H(f)$  risulta di tipo passa basso, con fianchi tanto più ripidi quanto più il polo è vicino all'origine.



**Frequenza di taglio** Cogliamo l'occasione per definire la *frequenza di taglio* del filtro passa basso<sup>65</sup> come la frequenza  $f_T$  per cui

$$|H(f_T)| = \frac{|H_{Max}|}{\sqrt{2}} \quad (6.33)$$



e che dunque esprime una misura della sua *banda passante*. Nel caso del filtro RC risulta che  $|H_{Max}| = H(0) = 1$ , ed esprimendo il modulo della (6.32) nella forma<sup>66</sup>

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{f}{f_T})^2}}$$

<sup>63</sup>Sappiamo che le tensioni ai capi di R e C valgono  $v_R(t) = R \cdot i(t)$  e  $v_C(t) = v_u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$  che, trasformate con Fourier forniscono  $V_R(f) = R \cdot I(f)$  e  $V_u(f) = \frac{1}{C} \frac{1}{j2\pi f} I(f)$ . Per la legge di Kirchoff alle maglie si ha  $V_i(f) = V_R(f) + V_u(f) = R \cdot I(f) + \frac{1}{j2\pi f C} I(f)$ ; la risposta in frequenza sarà pertanto

$$H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{\frac{1}{j2\pi f C} I(f)}{R \cdot I(f) + \frac{1}{j2\pi f C} I(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi f RC}.$$

<sup>64</sup>Infatti,  $\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-t/\tau - j2\pi f t} dt = \frac{1}{\tau} \frac{e^{-t/\tau - j2\pi f t}}{-1/\tau - j2\pi f} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{1/\tau + j2\pi f} = \frac{1}{1 + j2\pi f \tau}$

<sup>65</sup>Ciò non toglie la che la stessa definizione non sia adatta a descrivere anche un *passa alto*, o duplicata, per un *passa banda*.

<sup>66</sup>Ricordiamo che il modulo è il rapporto dei moduli, e quello de denominatore è  $\sqrt{\Re^2 + \Im^2}$  in cui dalla (6.32)  $\Re = 1$  e  $\Im = 2\pi fRC$ .

si pone in evidenza che  $f_T = \frac{1}{2\pi RC}$  rappresenta proprio la frequenza di taglio: infatti,  $|H(f_T)| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Infine, notiamo che dalla (6.33) si ottiene  $|H(f_T)|^2 = \frac{1}{2} H_{Max}^2$ , e quindi<sup>67</sup>  $|H(f_T)|^2|_{dB} = H_{Max}^2 (dB) - 3$ ; per questo la frequenza di taglio è indicata anche come *frequenza a 3 dB*.

## 6.8 Filtro adattato

Dopo aver illustrato le trasformazioni subite da un segnale generico che attraversa un filtro generico, ed aver descritto architetture e proprietà per alcune classi di filtri, affrontiamo lo studio di un caso in cui il filtro viene *progettato* per essere al servizio di uno *specifico segnale*.

Allo scopo di anticipare *come va a finire*, diciamo subito che questa tecnica è un modo per calcolare l'intercorrelazione  $\mathcal{R}_{yg}(\tau)$  tra il segnale (rumoroso) in ingresso  $y(t)$  e quello  $g(t)$  che ci aspettiamo di ricevere in assenza di rumore. Tale compito è svolto mediante un filtro<sup>68</sup> detto appunto *adattato* a  $g(t)$  e posto all'ingresso ad un *detettore di impulso*, ovvero un dispositivo che deve decidere per la presenza o l'assenza di una forma d'onda *nota* immersa nel rumore, in modo da rendere minima la probabilità di sbagliare. Un problema simile verrà affrontato al § 11.3.2 in relazione alla detezione *incoerente* di sinusoidi, mentre ora ci riferiamo ad una *detezione coerente*, ovvero in cui il segnale è completamente specificato, compresa la sua temporizzazione o fase.

**Schema di trasmissione** Indichiamo il segnale trasmesso come  $x(t)$ , ottenuto facendo transitare un impulso  $\delta(t)$  attraverso un filtro con risposta impulsiva  $h_T(t) = g(t)$ , con durata limitata  $0 < t < T$ . Viene ricevuto il segnale  $y(t)$ , somma di  $x(t)$  (*presente o meno*) e di un processo gaussiano bianco a media nulla  $n(t)$ , indicato come rumore, con densità spettrale  $\mathcal{P}_N(f) = \frac{N_0}{2}$ .

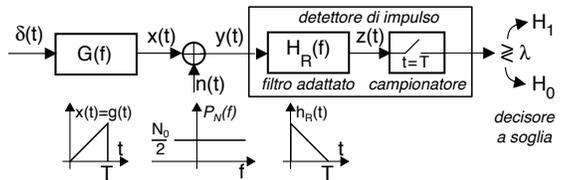


Figura 6.8: Detezione di impulso mediante filtro adattato

**Decisore a soglia** Un ricevitore basato sul filtro adattato effettua una decisione di *massima verosimiglianza* (vedi § 5.6.2.1) a riguardo della presenza (ipotesi  $H_1$ ) o assenza (ipotesi  $H_0$ ) del segnale  $x(t)$  in base all'osservazione della grandezza  $z(T)$  ottenuta (vedi figura 6.8) campionando all'istante  $t = T$  l'uscita  $z(t)$  del filtro di ricezione  $H_R(f)$ , che opera sul segnale ricevuto  $y(t)$ . Il valore osservato per  $z(T)$  è quindi confrontato con *una soglia*  $\lambda$ , determinando la decisione per  $H_1$  o  $H_0$  a seconda se  $\lambda$  sia superata o meno, e commettendo *errore* sia nel decidere per  $H_1$  in assenza di segnale, sia decidendo per  $H_0$  in sua presenza<sup>69</sup>.

**Legame tra i filtri di trasmissione e ricezione** A pag. 165 si dimostra che la probabilità di errore del decisore viene resa *minima* se  $H_R(f)$  è realizzato in modo che risulti

$$H_R(f) = G^*(f) e^{-j2\pi fT} \quad (6.34)$$

<sup>67</sup>Vedi § 7.1

<sup>68</sup>Sfruttando le analogie tra integrale di convoluzione e calcolo dell'intercorrelazione, vedi § 6.1.4.

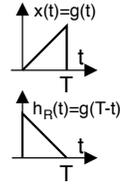
<sup>69</sup>Indicando rispettivamente con  $P_{e0}$  e  $P_{e1}$  i due tipi di errore, pari a (vedi fig. 6.9)  $P_{e0} = \int_{-\infty}^{\infty} p_Z(z/H_0) dz$  e  $P_{e1} = \int_{-\infty}^{\lambda} p_Z(z/H_1) dz$ , la probabilità di errore complessiva vale  $P_e = P_{e0}P_0 + P_{e1}P_1$ , in cui  $P_0 = Pr(H_0)$  e  $P_1 = Pr(H_1)$ .

a cui corrisponde una risposta impulsiva  $h_R(t)$  esprimibile come<sup>70</sup>

$$h_R(t) = g^*(T - t) \quad (6.35)$$

risultato che, nel caso di  $g(t)$  reale come in fig. 6.8, corrisponde ad una  $h_R(t)$  ottenuta ribaltando  $g(t)$  rispetto all'asse delle ordinate, e ritardando il risultato di  $T$ , in modo da pervenire ad una  $h_R(t)$  causale.

Prima di individuare il valore da utilizzare per la soglia  $\lambda$ , valutiamo le caratteristiche statistiche dei possibili valori per  $z(T)$  in uscita da  $h_R(t)$ , che a causa della presenza del rumore, è una realizzazione di variabile aleatoria.



**Segnale assente** In questo caso (ipotesi  $H_0$ ) nel segnale ricevuto è presente solo rumore, ovvero  $y(t) = n(t)$ , e dunque la grandezza di decisione  $z(T)$  è una v.a. gaussiana<sup>71</sup> il cui valore si calcola come

$$z^{H_0}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\tau) y(T - \tau) d\tau = \int_0^T g^*(T - \tau) n(T - \tau) d\tau = \mathcal{R}_{GN}(0)$$

ossia è pari all'intercorrelazione (eq. 6.7) calcolata nell'origine tra  $g(t)$  ribaltata ed una *finestra* di una realizzazione del processo  $n(t)$ . Indicando con  $m_{z(T)}^{H_0}$  il *valore atteso* di  $z(T)$ , troviamo<sup>72</sup> che  $m_{z(T)}^{H_0} = 0$ , mentre la *varianza* di  $z(T)$  vale<sup>73</sup>  $\sigma_{z(T)}^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$ , in cui  $\mathcal{E}_G$  è l'energia dell'impulso  $g(t)$ .

**Segnale presente** Se invece il segnale è presente (ipotesi  $H_1$ ) allora  $y(t) = g(t) + n(t)$ , e si ottiene

$$\begin{aligned} z^{H_1}(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\tau) y(T - \tau) d\tau = \int_0^T g^*(T - \tau) [g(T - \tau) + n(T - \tau)] d\tau = \\ &= \int_0^T g^*(T - \tau) g(T - \tau) d\tau + \int_0^T g^*(T - \tau) n(T - \tau) d\tau = \\ &= \mathcal{R}_G(0) + \mathcal{R}_{GN}(0) = \mathcal{E}_G + \mathcal{R}_{GN}(0) \end{aligned}$$

<sup>70</sup>Potendo scrivere  $G_T^*(f) e^{-j2\pi f T} = (G(f) e^{j2\pi f T})^*$  e ricordando la proprietà (3.11) espressa a pag. 59  $\mathcal{F}^{-1}\{X^*(f)\} = x^*(-t)$ , dalla (6.34) otteniamo

$$\begin{aligned} h_R(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H_R(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{G^*(f) e^{-j2\pi f T}\} = \mathcal{F}^{-1}\{(G(f) e^{j2\pi f T})^*\} = \\ &= g^*(\theta + T)|_{\theta=-t} = g^*(T - t) \end{aligned}$$

<sup>71</sup>Ricordiamo (vedi § 6.4.2) che l'uscita di un filtro al cui ingresso è posto un processo gaussiano, è anch'essa gaussiana.

<sup>72</sup>Infatti

$$m_{z(T)}^{H_0} = E\{z(T) / H_0\} = E\{\mathcal{R}_{GN}(0)\} = E\left\{\int_0^T g^*(t) n(t) dt\right\} = \int_0^T g^*(t) E\{n(t)\} dt$$

pari a zero se  $E\{n(t)\} = 0$ .

<sup>73</sup>Dato che  $m_{z(T)}^{H_0} = 0$ , risulta  $\sigma_{z(T)}^2 = E\{z^2(T)\} = \mathcal{R}_Z(\tau)|_{\tau=0}$ . Sappiamo che

$$\mathcal{R}_Z(\tau) = \mathcal{R}_N(\tau) * \mathcal{R}_{H_R}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) * \mathcal{R}_{H_R}(\tau) = \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_{H_R}(\tau)$$

pertanto

$$\sigma_{z(T)}^2 = \mathcal{R}_Z(\tau)|_{\tau=0} = \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_{H_R}(0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_R^*(t) h_R(t) dt = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$$

dato che  $h_R(t)$  ha la stessa energia di  $g(t)$ .

producendo ancora una grandezza di decisione  $z(T)$  gaussiana, con la stessa  $\sigma_{z(T)}^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$  (dovuta al rumore) ma con valor medio  $m_{z(T)}^{H_1} = \mathcal{E}_G \neq 0$ , dovuto alla presenza di segnale<sup>74</sup>. Notiamo esplicitamente che  $m_{z(T)}^{H_1} = \mathcal{E}_G$  non dipende dalla particolare  $g(t)$  adottata, né dalla sua durata  $T$ , ma solo dalla sua energia, proprio in virtù dell'aver *adattato* in ricezione un filtro *adattato* a quello di trasmissione.

**Soglia di decisione** La figura 6.9 mostra l'esito dei nostri calcoli nella forma della d.d.p. della v.a.  $z(T)$  nelle ipotesi  $H_0$  ed  $H_1$ , e pertanto il criterio di massima verosimiglianza (vedi § 5.6.2.1) individua come soglia di decisione ottima il valore  $\lambda = \frac{\mathcal{E}_G}{2}$ , a cui compete una probabilità di errore  $P_e$  minima qualora  $Pr(H_0) = Pr(H_1)$ , ovvero se la probabilità a priori delle due ipotesi è uguale, vedi nota 69.

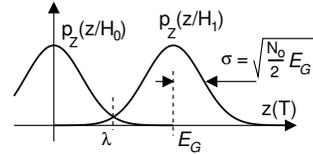


Figura 6.9: D.d.p. condizionate e soglia di decisione

**Ottimalità** Mostriamo ora che il risultato ottenuto permette la migliore separazione tra le d.d.p. condizionate alle due ipotesi, nel senso che qualsiasi altra scelta per  $H_R(f) \neq G^*(f) e^{-j2\pi fT}$  con energia  $\mathcal{E}_{H_R} = \mathcal{E}_G$  avrebbe prodotto delle d.d.p. più ravvicinate. La separazione tra le gaussiane è legata<sup>75</sup> al rapporto  $m_{z(T)}^{H_1}/\sigma_{z(T)}$  che viene reso massimo<sup>76</sup> dalla scelta (6.34), che porta a  $m_{z(T)}^{H_1} = \mathcal{E}_G = \max$ . Il quadrato  $(m_{z(T)}^{H_1}/\sigma_{z(T)})^2$  del rapporto suddetto viene indicato anche come *rapporto segnale rumore* all'istante di decisione<sup>77</sup>, e qualora  $H_R(f)$  sia adattato vale

$$SNR_{FA} = \frac{(\mathcal{E}_G)^2}{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G} = \frac{2\mathcal{E}_G}{N_0} \quad (6.36)$$

Anticipiamo subito la (6.36) è valida solo in presenza di rumore bianco, mentre se questo è *colorato*, l' $SNR$  diminuisce, ed il filtro ottimo va determinato nel modo specificato poco più avanti.

<sup>74</sup>Infatti, ora risulta  $m_{z(T)}^{H_1} = E\{\mathcal{R}_G(0) + \mathcal{R}_{GN}(0)\} = \mathcal{E}_G + E\{\mathcal{R}_{GN}(0)\}$  in cui il secondo termine è nullo come già osservato, mentre il primo è un valore certo, pari all'energia  $\mathcal{E}_G = \mathcal{R}_G(0)$  dell'impulso  $g(t)$ .

Per ciò che riguarda  $\sigma_{z(T)}^2$ , osserviamo che  $z^{H_1}(T) = \mathcal{E}_G + z^{H_0}(T)$ , dunque le v.a. *centrate* sono le stesse, e così la varianza  $\sigma_{z^{H_1}(T)}^2 = \sigma_{z^{H_0}(T)}^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$ : infatti la componente aleatoria dell'uscita è dovuta al solo  $n(t)$ .

<sup>75</sup>Il rapporto  $m_{z(T)}^{H_1}/\sigma_{z(T)}$  confronta l'uscita *attesa*  $m_{z(T)}^{H_1} = E\{\mathcal{R}_{GH_R}(0)\}$  di  $H_R$  per  $t = T$  nell'ipotesi  $H_1$ , che dipende dall'energia mutua tra  $g(t)$  ed  $h_R(t)$ , con la sua deviazione standard  $\sigma_{z(T)} = \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_{H_R}(0)$  dovuta al rumore.

<sup>76</sup>Consideriamo il caso di avere una  $H_R(f)$  generica. In presenza di solo segnale, si ottiene

$$|z(T)|^2 = \left| F^{-1}\{Z(f)\} \Big|_{t=T} \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_R(f) G(f) e^{j2\pi fT} df \right|^2$$

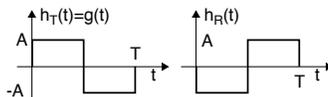
A questa espressione può essere applicata la disuguaglianza di Schwartz (a pag. 43 si enuncia la relazione  $\left| \int_{-\infty}^{\infty} a(\theta) b^*(\theta) d\theta \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |a(\theta)|^2 d\theta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |b(\theta)|^2 d\theta$ , con l'eguaglianza solo se  $a(\theta) = k \cdot b(\theta)$ ), qualora si faccia corrispondere  $H_R(f)$  ad  $a(\theta)$ , e  $G(f) e^{j2\pi fT}$  a  $b^*(\theta)$ , ottenendo così

$$|z(T)|^2 = \left( m_{z(T)}^{H_1} \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

con l'eguaglianza solo se  $H_R(f) = kG^*(f) e^{-j2\pi fT}$ , ovvero se  $h_R(t) = kg(T-t)$  (eqq. (6.34) e (6.35)), ossia se  $H_R(f)$  è *adattata* a  $G(f)$ . Scegliendo  $k = 1$ , i due integrali a prodotto hanno lo stesso valore, pari a  $\mathcal{E}_G$ , e dunque  $\left( m_{z(T)}^{H_1} \right)^2 = |z(T)|^2 = \mathcal{E}_G^2$ .

<sup>77</sup>In effetti la (6.36) non è adimensionale ma è esprimibile come  $[sec]$ , dunque non è un vero e proprio  $SNR$ , ma dato che il termine rende l'idea, questa accezione è entrata nell'uso comune.

**Esempio** Applichiamo i risultati fin qui ottenuti al caso in cui si utilizzi la  $g(t)$  mostrata a lato, in cui poniamo  $A = 2$  e  $T = 10^{-1}$ .



Un decisore a filtro adattato sarà allora caratterizzato dalla risposta impulsiva  $h_R(t)$  mostrata a fianco di  $g(t)$ . Se campioniamo l'uscita  $z(t)$  di  $h_R$  all'istante  $t = T$ , nel caso di assenza di rumore e presenza di segnale, si ottiene il valore

$$m_z = z(t)|_{t=T} = g(t) * h_R(t)|_{t=T} = \int_0^T g(\tau) h_R(T - \tau) d\tau$$

Dato che  $h_R(T - \tau) = g(\tau)$ , come rappresentato nella figura a lato, allora  $m_z = \int_0^T [g(\tau)]^2 d\tau = \mathcal{E}_G$ , pari a

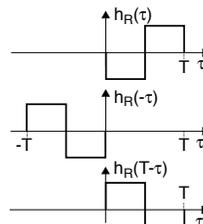
$$\mathcal{E}_G = \int_0^T [g(t)]^2 dt = A^2 \int_0^T dt = A^2 T = 4 \cdot 10^{-1}.$$

Il valore di  $m_z = \mathcal{E}_G$  rappresenta il contributo di segnale all'uscita, indipendente dal rumore.

Consideriamo ora in ingresso a  $h_R$  anche un processo di rumore gaussiano ergodico bianco, a media nulla, e densità di potenza

$\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2} = \frac{1}{2} 10^{-1}$ . Il valore atteso  $m_{z(T)}^{H_1}$  dell'uscita

campionata rimane lo stesso  $m_z = \mathcal{E}_G$ , ma ora ad esso si sovrappone la componente aleatoria dovuta al rumore, anch'essa gaussiana e caratterizzata da una varianza pari a  $\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G = \frac{N_0}{2} A^2 T = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{-1} = 2 \cdot 10^{-2}$ . Le d.d.p. condizionate mostrate in fig. 6.9 hanno dunque espressione

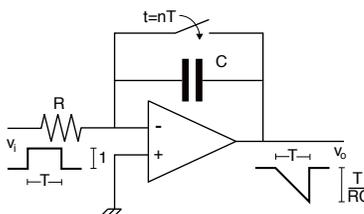


$$p(z/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} \quad p(z/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}$$

in cui  $\sigma_z = \sqrt{\sigma_z^2} = \sqrt{0.02} = 1.41 \cdot 10^{-1}$ ,  $m_z = \mathcal{E}_G = 4 \cdot 10^{-1}$ , mentre per la soglia di decisione, si trova il valore  $\lambda = \mathcal{E}_G/2 = 2 \cdot 10^{-1}$ .

**Integrate and dump** Si tratta di una soluzione circuitale<sup>78</sup> in grado di conseguire le prestazioni di detezione del filtro adattato nel caso di un  $g(t) = \text{rect}_T(t)$ , a cui corrisponde una  $h_R(t)$  anch'essa rettangolare. Infatti, il segnale in uscita vale

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(t) dt + v_o(0)$$



in cui  $v_o(0)$  può essere reso nullo e quindi, a parte il segno ed il fattore  $\frac{1}{RC}$ , il valore  $v_o(T)$  corrisponde a quello che si trova allo stesso istante in uscita da un filtro adattato<sup>79</sup> alla  $g(t)$  rettangolare. L'interruttore che scarica (dump) la capacità  $C$  per  $t = nT$  ha lo scopo di azzerare la  $v_o(0)$  prima della ricezione di un successivo impulso, rendendo possibile l'uso dello schema per la detezione ottima di flussi binari a velocità  $f_b = 1/T$ .

<sup>78</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Op\\_amp\\_integrator](https://en.wikipedia.org/wiki/Op_amp_integrator)

<sup>79</sup>Il circuito non lineare mostrato non è un filtro adattato, dato che per  $t > T$  non produce la stessa uscita (vedi <http://dsp.stackexchange.com/questions/9094/understanding-matched-filter>).

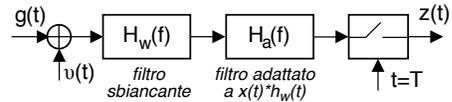
**Rumore colorato** Nel caso in cui  $\mathcal{P}_N(f)$  non sia pari ad una costante, la condizione per massimizzare (6.36) non è più la (6.34), bensì deve risultare<sup>80</sup>

$$H_R(f) = \frac{G^*(f) e^{-j2\pi fT}}{\mathcal{P}_N(f)} \quad (6.37)$$

in modo che  $H_R(f)$ , oltre ad *esaltare* le frequenze per le quali lo spettro del segnale è maggiore, riesce anche ad *attenuare* quelle per le quali la potenza di rumore è più grande. Riscrivendo la (6.37) come

$$H_R(f) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}} \frac{G^*(f)}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}} e^{-j2\pi fT} = H_w(f) H_a(f)$$

si può giungere alla interessante interpretazione illustrata in figura: il segnale ricevuto, in cui è presente sia il segnale  $g(t)$  che il rumore colorato  $v(t)$ , attraversa innanzitutto un *filtro sbiancante*<sup>81</sup> con risposta in frequenza  $H_w(f) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}}$  e risposta impulsiva  $h_w(t)$ , così chiamato perché ha lo scopo di rendere il rumore *bianco*. Quindi, viene attraversato il filtro adattato all'impulso *sbiancato*, ossia alla forma d'onda  $g_w(t) = g(t) * h_w(t)$  con trasformata  $G_w(f) = \frac{G(f)}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}}$ , risultato del transito di  $g(t)$  attraverso  $H_w(f)$ .



**Assenza di rumore** Qualora non sia presente rumore, l'andamento dell'uscita del filtro adattato è proprio pari (a meno del ritardo  $T$ ) alla funzione di autocorrelazione di  $g(t)$ , che viene campionata in corrispondenza del suo massimo.

**Probabilità di errore** Tornando al caso di rumore bianco, in base al ragionamento esposto alla nota 69 nel caso di equiprobabilità delle due ipotesi  $H_1$  e  $H_0$ , la  $P_e$  è pari alla probabilità che una v.a. gaussiana con media nulla e varianza  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$  sia maggiore di  $\frac{\mathcal{E}_G}{2}$ ; tale valore può essere calcolato applicando l'eq. (5.8) a pag. 109, in modo da ottenere  $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\mathcal{E}_G/2}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_G}{N_0}} \right\}$ .

**Esempio** con i dati riportati nell'esempio di pag. 166, per la probabilità di errore nel caso di  $H_0$  e  $H_1$  equiprobabili si ottiene  $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_G}{N_0}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-1}}{10^{-1}}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \{1\} \approx 1.5 \cdot 10^{-1}$  (si utilizzi la fig. 5.1 a pag. 109).

<sup>80</sup>La condizione (6.37) si ottiene anche in questo caso imponendo la massimizzazione di  $SNR = \left( \frac{m_{H_1}}{\sigma_{z(T)}} \right)^2 / \sigma_{z(T)}^2 = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H_R(f) G(f) e^{j2\pi fT} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_N(f) df}$  il cui denominatore tiene conto che  $\sigma_{z(T)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_Z(f) df$  è dovuta al solo rumore. Applichiamo ora a  $SNR$  la diseguaglianza di Schwartz posta nella forma

$$\frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} a(\theta) b^*(\theta) d\theta \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |a(\theta)|^2 d\theta} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |b(\theta)|^2 d\theta$$

e identifichiamo  $a(\theta)$  con  $H_R(f) \sqrt{\mathcal{P}_N(f)}$  e  $b^*(\theta)$  con  $G(f) e^{j2\pi fT} / \sqrt{\mathcal{P}_N(f)}$ . Imponendo di nuovo la condizione  $a(\theta) = k \cdot b(\theta)$  con  $k = 1$ , otteniamo il massimo  $SNR$  come  $SNR = \int_{-\infty}^{\infty} |b(\theta)|^2 d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(f)|^2}{\mathcal{P}_N(f)} df$ , e quindi scrivendo  $a(\theta) = b(\theta)$  ossia  $H_R(f) \sqrt{\mathcal{P}_N(f)} = G^*(f) e^{-j2\pi fT} / \sqrt{\mathcal{P}_N(f)}$  si ottiene il risultato (6.37).

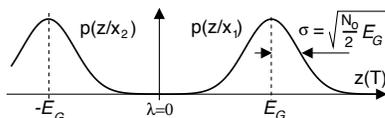
<sup>81</sup>Detto *whitening filter* in inglese.

Ma questa non è la *minima*  $P_e$  conseguibile, che si ottiene invece nel caso di *segnalazione antipodale*, molto più indicata nel caso in cui lo scopo del ricevitore non sia di individuare un solo impulso isolato, ma una sequenza simbolica binaria.

### 6.8.1 Segnalazione antipodale

Volendo distinguere tra due possibili messaggi (ad es,  $x_1$  ed  $x_2$ ), la scelta *ottima* per rendere minima la probabilità di errore consiste nell'adottare  $x_1(t) = g(t)$ ,  $x_2(t) = -x_1(t)$ , e di porre in ingresso al ricevitore un filtro adattato a  $g(t)$ .

In questo modo l'uscita del filtro all'istante di campionamento rappresenta una v.a. gaussiana  $z$  con media  $m_z = \pm \mathcal{E}_G$  (a seconda se sia stato trasmesso  $x_1$  o  $x_2$ ) e varianza  $\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$ . Pertanto ora la soglia di decisione è pari a zero, e nel caso di simboli equiprobabili, in base alla nota 69, la probabilità di errore  $P_e$  corrisponde a quella di eccedere  $\mathcal{E}_G$  per una v.a. gaussiana a media nulla: in conseguenza del risultato (5.8) di pag. 109 si ottiene quindi



$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\mathcal{E}_G}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_G}{N_0}} \right\} \quad (6.38)$$

che, come vedremo all'eq. (8.18), rappresenta anche le prestazioni ottenibili per un segnale dati binario a banda minima.

### 6.8.2 Segnalazione ortogonale

Dovendo trasmettere  $N$  diversi messaggi ( $x_1, x_2, \dots, x_N$ ), possiamo associare ad ognuno di essi una forma d'onda  $x_i(t)$  tale che  $\int x_i(t) x_j(t) dt = 0$  con  $i \neq j$ , ovvero in modo che i segnali  $x_i(t)$  siano *ortogonali*. In tal caso il ricevitore ottimo è costituito da un *banco* di filtri, ognuno adattato ad una diversa  $x_i(t)$ , in modo che, in assenza di rumore, la ricezione di una delle forme d'onda  $x_i(t)$  non produca nessuna uscita sui filtri del banco per  $j \neq i$ . In presenza di rumore, la decisione su cosa sia stato trasmesso viene presa valutando quale dei filtri presenti il valore massimo in corrispondenza dell'istante di campionamento, realizzando così un *ricevitore a correlazione* (vedi § 14.5 a pag. 394).

**Esempio** L'impulso  $\delta(t)$  entra in uno di filtri mostrati nella figura 6.10, le cui risposte impulsive  $x_i(t)$  realizzano una famiglia di funzioni ortogonali, dato che le rispettive forme d'onda non si sovrappongono nel tempo. In ricezione, solo uno dei filtri adattati con risposta impulsiva  $h_i(t)$  produce una uscita diversa da zero per  $t = T$ , come verificabile ricordando la costruzione grafica dell'operazione di convoluzione mostrata a pag. 63.

**Multiplazione a divisione di codice** La trasmissione mediante forme d'onda ortogonali può essere applicata alla tecnica di accesso multiplo a divisione di codice o CDMA<sup>82</sup>, qualora ogni utente usi una forma d'onda ortogonale a quella degli altri, ed il ricevitore usi un filtro adattato programmabile in modo da discriminare uno solo tra tutti i codici ricevuti contemporaneamente.

<sup>82</sup>(vedi § 9.1.1.3, § 14.9.2.5)

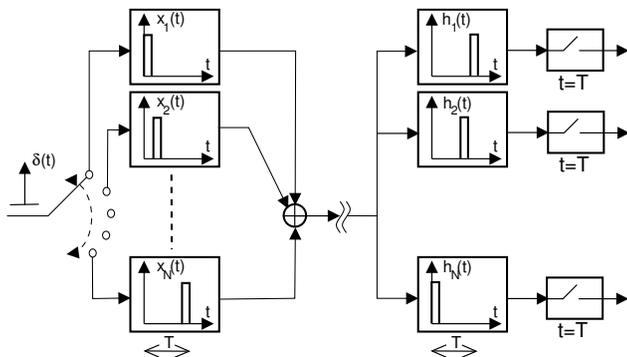
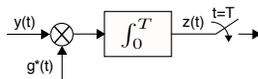


Figura 6.10: Schema di ricevitore a correlazione

**Correlatore** Si tratta di un modo alternativo di realizzare un filtro adattato, derivante dall'osservazione che il suo ruolo essenzialmente si riduce al calcolo della *intercorrelazione* (eq. (6.7)) tra il segnale ricevuto e quello atteso. Tale funzione può essere realizzata anche ricorrendo allo schema in figura, dove un integratore (implementato ad es. mediante il circuito *integrate and dump*, pag. 166) opera sul prodotto tra il segnale in arrivo ed una copia locale del coniugato<sup>83</sup> della forma d'onda trasmessa. Un caso di applicazione di questo schema si trova al § 14.5.1 a proposito del ricevitore FSK ortogonale, mentre una variante idonea a stimare l'*autocorrelazione* di  $y(t)$  è proposta al § 6.5.4.



## 6.9 Appendici

### 6.9.1 Coefficiente di correlazione

I diagrammi di esempio presentati alla di fig. 6.2 basano la valutazione di quanto una coppia di v.a.  $x$  ed  $y$  siano correlate anche sul calcolo del *coefficiente di correlazione*  $\rho_{xy}$ , che ha valori compresi tra  $+1$  e  $-1$ , ed è definito come

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

In tal modo, si opera una normalizzazione del valore della covarianza  $\sigma_{xy}$ , rispetto alle deviazioni standard  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  delle due v.a., rendendo così il valore di  $\rho$  indipendente dalla dinamica dei valori assunti da  $x$  ed  $y$ .

Il coefficiente  $\rho$  si presta ad una interessante interpretazione geometrica, una volta identificate (vedi § 2.4) la deviazione standard  $\sigma_x$  come la norma  $\|\bar{x}\|$  di  $x$ , e la covarianza  $\sigma_{xy}$  come il prodotto scalare  $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$  tra  $x$  ed  $y$ <sup>84</sup>. In tale contesto, possiamo indicare due v.a. come *ortogonali* se risulta  $\sigma_{xy} = \rho_{xy} = 0$ , mentre un valore  $\rho_{xy} = \pm 1$  indica che una delle due

<sup>83</sup> Anche se nel caso di banda base il segnale trasmesso è reale, volendo applicare la teoria esposta ad un involuppo complesso (§ 9.2.1) si rende necessario tener conto dell'operazione di coniugato.

<sup>84</sup> L'analogia non è poi troppo *peregrina*, considerando che se  $x$  è estratta da un processo ergodico a media nulla, la sua varianza  $\sigma_x^2$  coincide con la potenza del segnale da cui è estratta, mentre se  $x$  ed  $y$  sono estratte da segnali congiuntamente ergodici, la covarianza  $\sigma_{xy}$  coincide con la funzione di intercorrelazione (eq. (6.7)), ovvero con la loro *potenza mutua*.

v.a. è costantemente uguale all'altra, a meno di un coefficiente costante. Ricordiamo che l'ortogonalità  $\rho_{xy} = 0$  esprime unicamente l'assenza di legami di tipo *lineare* tra  $x$  ed  $y$ , come esemplificato dal caso F) di fig. 6.2.

Per ultima citiamo l'estensione formale del risultato noto come *diseguaglianza di Schwartz* (pag. 43), una volta che al coefficiente di correlazione  $\rho_{xy}$  sia stato associato il concetto di coseno tra  $x$  ed  $y$ : tale posizione deriva dall'essere  $-1 < \rho_{xy} < 1$ , e permette di asserire che  $|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$ .

## 6.9.2 Teorema di Wiener per processi

Sviluppiamo qui la dimostrazione<sup>85</sup> che  $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$  anche se  $x(t)$  rappresenta un generico membro di un processo, nelle condizioni espresse alla nota 17. Considerando un segmento  $x_T(t) = x(t) \text{rect}_T(t)$  di durata  $T$  estratto da un membro del processo, iniziamo dalla definizione (§ 6.3.1)  $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E\{|X_T(f)|^2\}$  in cui  $X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\}$ , e dunque

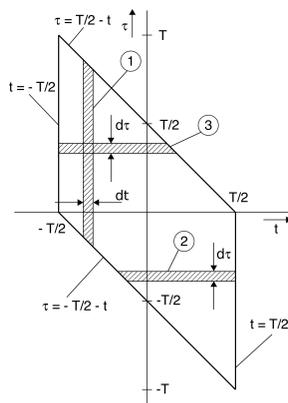
$$\begin{aligned} E\{|X_T(f)|^2\} &= E\left\{\left|\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f t} dt\right|^2\right\} = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} E\{x^*(t_1) x(t_2)\} e^{j2\pi f t_1} e^{-j2\pi f t_2} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (6.39)$$

dove riconosciamo  $E\{x^*(t_1) x(t_2)\}$  essere pari al momento misto (6.1), che indichiamo per uniformità come  $\mathcal{R}_x(t_1, t_2)$  ovvero come  $\mathcal{R}_x(t, t + \tau)$  dopo aver posto l'istante  $t_1$  pari ad un generico valore  $t$ , ed aver espresso  $t_2$  come  $t_2 = t + \tau$ . Con la nuova notazione, l'espressione (6.39) diviene<sup>86</sup>

$$\int_{t=-T/2}^{t=T/2} \underbrace{\int_{\tau=-T/2-t}^{\tau=T/2-t} \mathcal{R}_x(t, t + \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau}_{\textcircled{1}} dt$$

Teniamo ora in considerazione il dominio di integrazione mostrato a lato, dove l'area  $\textcircled{1}$  rappresenta quella dell'integrale interno, per il differenziale  $dt$ : se scambiamo l'ordine di integrazione, suddividendo l'integrale su  $\tau$  in due parti, per le quali  $\tau < 0$  e  $\tau > 0$ , e corrispondenti alle aree  $\textcircled{2}$  e  $\textcircled{3}$  in figura, otteniamo

$$\begin{aligned} &\int_{-T}^0 \underbrace{\left[ \int_{t=-T/2-\tau}^{t=T/2} \mathcal{R}_x(t, t + \tau) e^{-j2\pi f \tau} dt \right]}_{\textcircled{2}} d\tau + \\ &\int_0^T \underbrace{\left[ \int_{t=-T/2}^{t=T/2-\tau} \mathcal{R}_x(t, t + \tau) e^{-j2\pi f \tau} dt \right]}_{\textcircled{3}} d\tau \end{aligned}$$



<sup>85</sup>Tratta da D. Leon, W. Couch, *Fondamenti di telecomunicazioni*, 2004 Apogeo

<sup>86</sup>Per quanto riguarda i nuovi estremi di integrazione, osserviamo che se  $\tau = t_2 - t$ , allora per  $t_2 = \pm T/2$ ,  $\tau$  vale  $\pm T/2 - t$ . Inoltre, la somma degli esponenti risulta pari a  $-j2\pi f(t_2 - t) = -j2\pi f\tau$ .

Considerando ora il processo stazionario, scriviamo  $\mathcal{R}_x(t, t + \tau) = \mathcal{R}_x(\tau)$ , che portiamo fuori dall'integrale su  $t$ :

$$\begin{aligned} E\{|X_T(f)|^2\} &= \int_{-T}^0 \left[ \int_{-T/2-\tau}^{T/2} dt \right] \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_0^T \left[ \int_{-T/2}^{T/2-\tau} dt \right] \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \int_{-T}^0 (T + \tau) \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_0^T (T - \tau) \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \int_{-T}^T (T - |\tau|) \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned}$$

dato che per  $\tau < 0$  risulta  $\tau = -|\tau|$ . Sostituiamo l'ultimo risultato nell'espressione  $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E\{|X_T(f)|^2\}$ , ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{T - |\tau|}{T} \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \int_{-T}^T \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{|\tau|}{T} \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned}$$

in cui il secondo termine si annulla se  $\int_{-\infty}^{\infty} |\tau \mathcal{R}_x(\tau)| d\tau < \infty$ , e ciò dimostra il teorema discusso al § 6.2.1.

### 6.9.3 Densità spettrale per onda PAM

L'acronimo PAM sta per *Pulse Amplitude Modulation* (pag. 201), e individua una classe di segnali realizzati ripetendo indefinitamente uno stesso impulso elementare  $g(t)$  con periodo  $T$ , ognuno moltiplicato (o *modulato in ampiezza*) per un diverso coefficiente  $a_n$ . Sebbene in questa definizione possa rientrare anche il caso in cui gli  $a_n$  siano campioni di un segnale analogico (§ 4.1), focalizziamo la trattazione al caso in cui rappresentino invece *i simboli* di una trasmissione numerica con periodo di simbolo  $T$ , a valori reali nel caso di banda base (§ 8.1.2), o complessi nel caso di una modulazione numerica<sup>87</sup>, mentre  $g(t)$  rappresenta un *impulso dati*, del tipo a banda infinita (§ 8.2.1) oppure di Nyquist (§ 8.2.2).

Scriviamo pertanto l'onda PAM nella forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT - \theta) \quad (6.40)$$

in cui  $\theta$  è una v.a. aleatoria uniformemente distribuita tra  $\pm \frac{T}{2}$  in modo che la (6.40) rappresenti un membro di un processo stazionario ergodico (vedi pag. 116), e verifichiamo il risultato *semplice* riportato al § 6.2.5, ossia che nel caso in cui i valori discreti  $a_n$  siano realizzazioni di v.a. statisticamente indipendenti, a media nulla, identicamente distribuite e con varianza<sup>88</sup>

<sup>87</sup>In tal caso i valori degli  $a_n$  corrispondono ai *punti di una costellazione* nel piano dell'inviluppo complesso, vedi cap. 14.

<sup>88</sup>Considerando gli  $a_n$  come elementi di una sequenza aleatoria stazionaria ergodica  $A$ , con valori  $a^k$  appartenenti ad un alfabeto finito di cardinalità  $L$ , ovvero  $k = 1, 2, \dots, L$ , si definisce per essi un valor medio  $m_A = E_A\{a^k\} = \sum_{k=1}^L p_k a^k$  ed una varianza  $\sigma_A^2 = E_A\{(a^k - m_A)^2\} = \sum_{k=1}^L p_k (a^k - m_A)^2$ , in cui  $p_k$  rappresenta la probabilità del  $k$ -esimo valore. Qualora  $m_A = 0$ , si ottiene  $\sigma_A^2 = E_A\{(a^k)^2\}$ .

$\sigma_A^2 = E \{a_n^2\}$ , il segnale dati è a media nulla, e ad esso corrisponde uno spettro di densità di potenza pari a

$$\mathcal{P}_x(f) = \sigma_A^2 \frac{|G(f)|^2}{T} \quad (6.41)$$

Allo scopo di arrivare ad un risultato più generale, sviluppiamo i calcoli rimuovendo le ipotesi restrittive di indipendenza statistica e media nulla per gli  $a_n$ , per poi riapplicarle una alla volta.

**Valor medio** Essendo  $x(t)$  membro di un processo ergodico, il valor medio di una sua realizzazione può essere calcolato come valore atteso rispetto alle fonti di aleatorietà, ossia i simboli  $a_n$  ed il ritardo  $\theta$

$$m_X = E_{A, \Theta} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT - \theta) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_A \{a_n\} E_{\Theta} \{g(t - nT - \theta)\}$$

avendo assunto l'indipendenza statistica tra  $A$  e  $\Theta$ . Ponendo  $E_A \{a_n\} = m_A$ , sviluppando il valore atteso di  $g(\cdot)$ , e ricordando che  $p_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{T} \text{rect}_T(\theta)$ , otteniamo

$$\begin{aligned} m_X &= m_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - nT - \theta) p_{\Theta}(\theta) d\theta = \\ &= \frac{m_A}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} g(t - nT - \theta) d\theta = \frac{m_A}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t-nT-T/2}^{t-nT+T/2} g(u) du = \\ &= \frac{m_A}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du = \frac{m_A}{T} G(0) \end{aligned}$$

avendo posto al terzo passaggio<sup>89</sup>  $u = t - nT - \theta$ , ad avendo notato al penultimo che gli estremi di integrazione entro la sommatoria sono contigui ed abbracciano tutto il dominio di integrazione. Una prima osservazione che traiamo è che anche se la sequenza degli  $a_n$  non fosse a media nulla, è possibile ottenere  $m_X = 0$  adottando una  $g(t)$  ad area nulla, come ad esempio per un codice Manchester o differenziale (pag. 207), o per le forme d'onda adottate nell'FSK ortogonale incoerente (§ 14.12.1).

**Spettro di densità di potenza** In accordo al teorema di Wiener (§ 6.2.1), procediamo con il calcolo del momento misto  $\mathcal{R}_X(\tau) = E \{x(t) x(t + \tau)\}$  e quindi ne effettuiamo la trasfor-

<sup>89</sup>Risultando  $d\theta = -du$ , gli estremi di integrazione si invertono; quando poi  $\theta = T/2$  si ha  $u = t - nT - T/2$ , mentre a  $\theta = -T/2$  corrisponde  $u = t - nT + T/2$ .

mata di Fourier. Anche qui l'indipendenza statistica tra  $\Theta$  ed  $A$  permette di scrivere

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_X(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{a_n a_m\} E\{g(t-nT-\theta)g(t+\tau-mT-\theta)\} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(m-n) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t-nT-\theta)g(t+\tau-mT-\theta) d\theta = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \int_{-T/2}^{T/2} g(t-nT-\theta)g(t+\tau-(k+n)T-\theta) d\theta = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t-nT-T/2}^{t-nT+T/2} g(u)g(u+\tau-kT) du = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \int_{-\infty}^{\infty} g(u)g(u+\tau-kT) du = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \mathcal{R}_G(\tau-kT)
 \end{aligned}$$

in cui al secondo passaggio si è sfruttata la stazionarietà della sequenza  $a_n$  per cui  $E\{a_n a_m\} = \mathcal{R}_A(m-n)$ , al terzo si è posto  $k = m-n$ , al quarto si è posto  $u = t-nT-\theta$ , al penultimo si sono riuniti gli infiniti integrali su domini contigui in uno solo, ed all'ultimo si è riconosciuto l'integrale come quello che definisce l'autocorrelazione (traslata) di  $g(t)$ , indicata come  $\mathcal{R}_G(\tau-kT)$ . La trasformata di Fourier del risultato finale produce

$$\mathcal{P}_X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) |G(f)|^2 e^{-j2\pi f k T} = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) e^{-j2\pi f k T} \quad (6.42)$$

in cui  $|G(f)|^2 = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_G(\tau)\}$  è lo spettro di densità di energia dell'impulso  $g(t)$ , ed il termine  $e^{-j2\pi f k T}$  consegue dalla traslazione temporale di  $\mathcal{R}_G(\tau)$ . L'espressione

$$\mathcal{P}_A(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) e^{-j2\pi f k T} \quad (6.43)$$

rappresenta la DTFT (§ 4.3) di  $\mathcal{R}_A(k)$  e prende il nome di *spettro del codice*, mostrando come le caratteristiche statistiche degli  $a_n$  contribuiscano a determinare la densità spettrale per il segnale dati associato.

**Simboli incorrelati** Iniziamo a semplificare il risultato (6.42) considerando il caso in cui i simboli  $a_n$  siano statisticamente indipendenti, ma a media non nulla. In questo caso si ottiene<sup>90</sup>

$$\mathcal{R}_A(k) = \begin{cases} m_A^2 + \sigma_A^2 & k = 0 \\ m_A^2 & k \neq 0 \end{cases}$$

e quindi la (6.43) diviene

$$\mathcal{P}_A(f) = \sigma_A^2 + m_A^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f k T} = \sigma_A^2 + \frac{m_A^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (6.44)$$

<sup>90</sup>Se la sequenza  $a_n$  è stazionaria ed a simboli indipendenti, per  $k \neq 0$  si ottiene  $\mathcal{R}_A(k) = E\{a_n a_{n+k}\} = E\{a_n\} E\{a_{n+k}\} = m_A^2$ , mentre per  $k = 0$  si ha  $\mathcal{R}_A(0) = E\{(a_n)^2\} = m_A^{(2)} = m_A^2 + \sigma_A^2$  come mostrato dalla (5.6) a pag. 107.

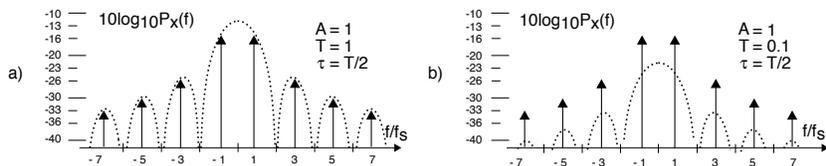


Figura 6.11: Densità di potenza per segnale RZ simmetrico: a)  $T = 1$ ; b)  $T = 0.1$

avendo sfruttato il risultato (3.30) a pag. 70 relativo alla trasformata di un treno di impulsi<sup>91</sup>. Sostituendo ora la (6.44) nella (6.43) e quindi in (6.42), per quest'ultima si ottiene

$$\mathcal{P}_X(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \left[ \sigma_A^2 + m_A^2 \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right] \quad (6.45)$$

che evidenzia la presenza nello spettro di una componente *continua*, assieme ad una componente a *righe* sulle frequenze armoniche di quella di simbolo  $f_s = \frac{1}{T}$ , descritta agli impulsi di area  $\frac{m_A^2}{T^2} |G(f)|^2$ ; scegliendo dunque un impulso dati tale che  $G(f)$  si annulli per  $f = \frac{k}{T}$ , tali righe possono essere eliminate. E' per questo motivo che (ad es.) la segnalazione di tipo RZ (vedi § 8.2.1) presenta la componente ad  $f = f_s$ , vedi l'esercizio seguente.

**Simboli a valor medio nullo** Nel caso in cui la sequenza  $a_n$  oltre ad essere incorrelata presenti anche un valor medio nullo, ovvero  $m_A = 0$ , la (6.45) si semplifica ulteriormente e fornisce il risultato *semplice* già noto:

$$\mathcal{P}_X(f) = \frac{\sigma_A^2}{T} |G(f)|^2$$

**Esempio** Applichiamo i risultati a cui siamo pervenuti ai *codici di linea* discussi al § 8.2.1, come ad esempio il codice RZ, che adotta un impulso  $g(t) = A \text{rect}_{\tau}(t)$  con  $\tau < T$ , per il quale risulta  $|G(f)|^2 = (A\tau)^2 \text{sinc}^2(f\tau)$ . Se i simboli trasmessi  $a_n$  sono equiprobabili, incorrelati, ed a valori binari 0 od 1, si ottiene che

$$m_A = E\{a\} = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0 = 1/2$$

$$\sigma_A^2 = E\{(a - m_A)^2\} = 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/4 = 1/4$$

Pertanto la (6.45) fornisce

$$\mathcal{P}_{RZ}(f) = \frac{(A\tau)^2 \text{sinc}^2(f\tau)}{T} \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right]$$

Nel caso in cui risulti  $\tau = T/2$ , la sommatoria presenta termini non nulli per i soli indici dispari, con area degli impulsi pari a  $\text{sinc}^2(k/2) = (2/k\pi)^2$ , dunque si ottiene

$$\mathcal{P}_{RZ}(f) = \frac{A^2 T}{16} \left( \text{sinc}^2\left(f \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ dispari}}}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right)$$

che presenta impulsi per  $f = 1/T, 3/T, 5/T \dots$ . Il risultato ottenuto è mostrato in fig. 6.11, in cui si è adottata una scala delle frequenze normalizzata, mentre per le ampiezze si è

<sup>91</sup>Infatti, applicando la proprietà di traslazione nel tempo scriviamo  $\mathcal{F}\{\sum_k \delta(t - kT)\} = \mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \sum_k e^{-j2\pi f k T}$ , ma in base alla (3.30) di pag. 70 risulta  $\mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$ , e dunque  $\sum_k e^{-j2\pi f k T} = \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$ .

scelta una rappresentazione in dB (§ 7.1) allo scopo di evidenziare come, all'aumentare della frequenza di simbolo  $f_s = 1/T$ , la componente a righe tende a *prevalere* rispetto a quella continua, dato che al diminuire di  $T$  la durata di  $g(t)$  è sempre minore, e così la sua energia. Notiamo inoltre che essendo i simboli *equiprobabili*, si può ottenere  $m_A = 0$  e la conseguente scomparsa delle righe spettrali semplicemente scegliendo i valori degli  $a_n$  come  $+1$  (ad esempio per l'uno) e  $-1$  (per lo zero), ovvero adottando una segnalazione *antipodale* (§ 6.8.1).

Facendo tendere  $\tau \rightarrow T$ , l'impulso si trasforma in NRZ, per il quale  $|G(f)|^2 = (AT)^2 \text{sinc}^2(fT)$ , che si azzerava esattamente ai multipli della frequenza di simbolo in cui sono centrati gli impulsi, annullando quindi tutti i termini della sommatoria, indipendentemente dalla scelta degli  $a_n$ , e dando luogo al risultato  $\mathcal{P}_{NRZ}(f) = \frac{A^2 T}{4} \text{sinc}^2(fT)$ , in accordo alla (6.41).

### 6.9.4 Autocorrelazione di un processo in uscita da un filtro

Al § 6.4.1 si è affermato che, quando un processo stazionario almeno in senso lato attraversa un filtro, il processo di uscita è caratterizzato da una autocorrelazione  $\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)$ . Mostriamo che è vero.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\} = \\ &= E\left\{\int h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha \int h(\beta)x(t+\tau-\beta)d\beta\right\} = \\ &= \int \int h(\alpha)h(\beta)E\{x(t-\alpha)x(t+\tau-\beta)\}d\alpha d\beta = \\ &= \int h(\alpha) \int h(\beta)\mathcal{R}_x(\tau+\alpha-\beta)d\beta d\alpha = \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$= \int h(\alpha)\mathcal{R}_{xy}(\tau+\alpha)d\alpha = \mathcal{R}_{xy}(\tau) * h(-\tau) \quad (6.47)$$

dato che  $\int h(\beta)\mathcal{R}_x(\tau+\alpha-\beta)d\beta$  che compare nella (6.46) è pari alla convoluzione tra  $h(t)$  e  $\mathcal{R}_x(t)$  calcolata per  $t = \tau + \alpha$ , ovvero  $\int h(\beta)\mathcal{R}_x(\tau+\alpha-\beta)d\beta = \mathcal{R}_x(t) * h(t)|_{t=\tau+\alpha}$ , che (vedi l'eq. (6.8) a pag. 139) a sua volta può essere espressa come

$$\mathcal{R}_x(t) * h(t) = x^*(-t) * x(t) * h(t) = x^*(-t) * y(t) = \mathcal{R}_{xy}(t) \quad (6.48)$$

dove all'ultimo passaggio si è applicata la definizione della intercorrelazione (6.7), oltre che la (6.8), ottenendo così la (6.47).

Per arrivare al risultato desiderato, osserviamo ora che applicando la (6.48) alla (6.47), quest'ultima può essere riscritta come

$$\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_{xy}(\tau) * h(-\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

che, una volta  $\mathcal{F}$ -trasformata, equivale a

$$\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) \cdot H(f) \cdot H^*(f) = \mathcal{P}_x(f) \cdot |H(f)|^2 = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)\} \quad (6.49)$$

Osserviamo infine che se il processo di ingresso oltre ad essere stazionario è anche ergodico, l'antitrasformata della (6.49) si riscrive come  $m_y^{(1,1)} = m_x^{(1,1)} * \mathcal{R}_h(\tau)$ .

### 6.9.5 Filtri numerici

Approfondiamo qui per via abbastanza informale<sup>92</sup> come passare dai concetti esposti al § 6.6 agli schemi di calcolo da adottare nel caso di realizzazioni completamente numeriche, associate alla elaborazione di dati campionati. Come descritto al § 6.6.2, i campioni  $y_k$  del risultato di una convoluzione  $y(t) = x(t) * h(t)$  tra segnali limitati in banda  $x(t)$  e  $h(t)$  si ottengono mediante la convoluzione discreta (6.26)

$$y_k = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n x_{k-n}$$

equivalente a campionare l'uscita  $y(t)$  di un filtro trasversale con coefficienti proporzionali ai campioni di risposta impulsiva  $c_n = T \cdot h_n$ . Anziché campionarne l'uscita, si procede allora ad una realizzazione HW o SF che esegue direttamente la convoluzione discreta

$y_k = \sum_{n=0}^N c_n x_{k-n}$ , come ad es. svolto dal codice Octave mostrato a lato.

```
x = randn(1,1000); # segnale di ingresso
Nx = 1000; # campioni di ingresso
c = [1 0.5 0.25 0.125 0.0625]; # coeff. filtro
Nc = 5; # numero coeff.
Ny = Nx+Nc-1; # campioni di uscita
y = zeros(1,Ny); # vettore di uscita

for k = 1:Ny # campioni di uscita
  for n = 1:Nc # convoluzione
    if ( (k-n+1)<=Nx && n<=k ) # controllo
      y(k) = y(k) + c(n)*x(k-n+1);
    endif
  end
end
```

#### 6.9.5.1 Campionamento della risposta impulsiva

**Finestratura della risposta analogica** In questo approccio i valori di  $h_n$  si ottengono campionando una versione *finestrata*  $h_w(t) = h(t) \cdot w(t)$  della  $h(t)$  desiderata, e quindi ritardando gli stessi al fine di ottenere un filtro causale, come discusso all'esempio di pag. 157. Come noto dal § 3.8.3, l'operazione di finestratura produce una risposta in frequenza per il filtro sintetizzato pari a  $H_w(f) = H(f) * W(f)$ , e dunque va posta particolare attenzione nella scelta di  $w(t)$ .

**Oscillazione uniforme in frequenza** E' una tecnica iterativa<sup>93</sup> volta a rendere *minimo il massimo* errore di approssimazione tra l'andamento desiderato per  $|H(f)|$ , espresso nella forma di uno schema di tolleranza (vedi pag. 161), e l'andamento ottenibile esprimendo  $|H(f)|$  come una combinazione di polinomi di Chebyshev<sup>94</sup>. Il risultato è una  $\hat{H}(f)$  che presenta oscillazioni ridotte ma a tutte le frequenze<sup>95</sup>, mentre i campioni  $h_n$  ora si ottengono mediante DFT inversa (§ 4.4) della sequenza  $H_n$  ottenuta campionando  $\hat{H}(f)$ .

#### 6.9.5.2 Trasformata zeta e filtraggio

Al § 4.4.1 abbiamo già discusso come una sequenza di campioni  $x_n = x(t)|_{t=nT}$  possa essere descritta dalla sua *trasformata zeta*

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$$

e come calcolando quest'ultima per  $z = e^{j\omega}$  si ottenga una rappresentazione spettrale

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n}$$

<sup>92</sup>Ovvero senza ambizione di rigore e completezza, essendo questi argomenti trattati anche in diversi altri corsi.

<sup>93</sup>Vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Parks-McClellan\\_filter\\_design\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Parks-McClellan_filter_design_algorithm)

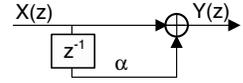
<sup>94</sup>Vedi [http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/courses/DSPDF/00700\\_OptimalFIR.pdf](http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/courses/DSPDF/00700_OptimalFIR.pdf)

<sup>95</sup>Ed il filtro risultante è detto per questo *equiripple*.

di  $\{x_n\}$  che corrisponde alla periodizzazione della  $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ , in cui l'intervallo di frequenze  $-f_c/2 < f < f_c/2$  si mappa in quello  $-\pi < \omega < \pi$ , ovvero  $f = \frac{\omega}{2\pi T}$ . Allo stesso modo possono definirsi le trasformate zeta della sequenza di uscita da un filtro  $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$  e dei suoi campioni di risposta impulsiva  $H(z) = \mathcal{Z}\{h_n\}$ , e dato che anche ora vale la corrispondenza tra convoluzione nel tempo e prodotto delle trasformate<sup>96</sup>, si può anche scrivere  $H(z) = Y(z)/X(z)$ .

### 6.9.5.3 Filtri a risposta impulsiva finita

Torniamo ora al caso del filtro FIR del primo ordine (§ 6.6.3), per il quale  $h(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t - T)$ , e considerando la sequenza impulsiva  $\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{con } n = 0 \\ 0 & \text{con } n \neq 0 \end{cases}$  al posto dell'impulso matematico  $\delta(t)$ , caratterizziamo il filtro nei termini della sequenza di risposta all'impulso  $h_n = \delta_n + \alpha\delta_{n-1}$  la cui trasformata zeta risulta<sup>97</sup>  $H(z) = 1 + \alpha z^{-1}$ . Pertanto, allo schema simbolico di pag. 157 si affianca ora quello computazionale mostrato a lato, in cui il blocco  $z^{-1}$  rappresenta il ritardo, mentre il prodotto per  $\alpha$  è ora raffigurato come una etichetta posta sull'arco da cui passa la sequenza in transito, cosicché possiamo scrivere  $Y(z) = X(z) + \alpha z^{-1} X(z) = (1 + \alpha z^{-1}) X(z)$  ovvero  $H(z) = 1 + \alpha z^{-1}$  come anticipato.



Ad un generico filtro FIR di ordine  $N$  corrisponde una  $h_n = \sum_{k=0}^N a_k \delta_{n-k}$ , e dunque

$$H_{FIR}(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = a_0 \prod_{n=1}^N (1 - c_n z^{-1}) \quad (6.50)$$

in cui gli  $N$  valori  $c_n$  rappresentano gli zeri<sup>98</sup> (reali, od in coppie complesse coniugate) di  $H(z)$ .

### 6.9.5.4 Risposta impulsiva infinita

Partendo anche questa volta dal caso del primo ordine (§ 6.6.4), notiamo che campionando l'uscita si osserva la sequenza  $y_n = x_n + \alpha y_{n-1}$  da cui, trasformando ambo i membri, si ottiene  $Y(z) = X(z) + \alpha z^{-1} Y(z)$  ovvero  $Y(z)(1 - \alpha z^{-1}) = X(z)$  e dunque  $H(z) = Y(z)/X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$  con un polo<sup>99</sup> in  $z = \alpha$ .

Ad un generico filtro IIR di ordine  $N$  corrisponde una

$$H_{IIR}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^M a_k z^{M-k}}{z^M (z^N - \sum_{k=1}^N b_k z^{N-k})} = \frac{a_0 \prod_{n=1}^M (1 - c_n z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1 - d_n z^{-1})} \quad (6.51)$$

in cui  $(a_k, b_k)$  sono i coefficienti di numeratore e denominatore<sup>100</sup>, e  $(c_n, d_n)$  le rispettive radici. Mentre il numeratore di (6.51) esprime la componente FIR, è la presenza del denominatore con

<sup>96</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata\\_zeta](https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata_zeta)

<sup>97</sup>E' sufficiente applicare la definizione  $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} = 1 + \alpha z^{-1}$ , dato che  $\mathcal{Z}\{\delta_n\} = 1$  e che un ritardo di  $m$  indici ha trasformata  $\mathcal{Z}\{x_{n-m}\} = z^{-m} X(z)$ . In particolare, un ritardo unitario corrisponde al prodotto per  $z^{-1}$  della sequenza trasformata, e dunque  $\mathcal{Z}\{\delta_{n-1}\} = z^{-1}$ .

<sup>98</sup>Si dicono zeri di un polinomio  $P(z) = \sum_{k=0}^N \beta_k z^k$  di grado  $N$  le radici  $z = b_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) dell'equazione  $P(z) = 0$ . La (6.50) può essere riscritta come  $H(z) = z^{-N} \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}{z^N}$  e dunque si azzera per  $N(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k} = 0$ , che è un polinomio a potenze positive. Una volta trovate le sue radici  $c_n$  possiamo scrivere  $N(z) = a_0 \prod_{n=1}^N (z - c_n)$  o equivalentemente  $H(z) = \frac{N(z)}{z^N} = a_0 \prod_{n=1}^N (1 - c_n z^{-1})$ .

<sup>99</sup>Ossia una radice del denominatore  $D(z)$  di  $H(z)$ , che scritta come  $H(z) = \frac{z}{z - \alpha}$  vale  $D(z) = z - \alpha$ , e si azzera in  $z = \alpha$ .

<sup>100</sup>Il rapporto tra polinomi viene normalizzato in modo da far risultare  $b_0 = 1$ .

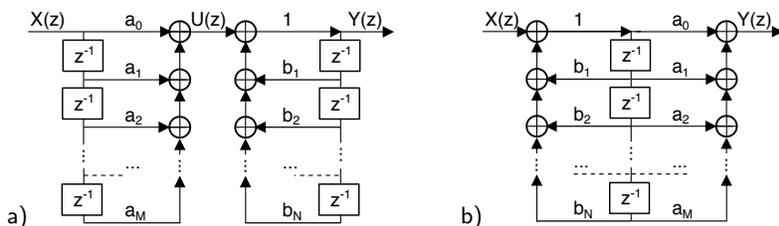


Figura 6.12: Architettura di filtri IIR: a) forma diretta; b) forma canonica

poli diversi da  $z = 0$  che determina la componente con risposta infinita. Infatti scrivendo (6.51) come rapporto tra polinomi  $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$  la relazione  $Y(z) = H(z)X(z)$  diviene  $Y(z)B(z) = X(z)A(z)$  che, antitrasformata<sup>101</sup>, da origine all'equazione *alle differenze finite*  $y_n - \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k}$  ovvero

$$y_n = \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} + \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k} \quad (6.52)$$

Questa espressione permette di descrivere il funzionamento del filtro in base al diagramma di fig. 6.12. Il secondo termine della (6.52) individua la sequenza intermedia  $u_n = \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k}$  in modo da poter scrivere  $y_n = \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} + u_n$ . La *forma diretta* di fig. 6.12-a) altro non è che lo schema di un filtro trasversale ruotato in verticale e che calcola  $u_n$  a partire da  $x_n$ , seguito dal blocco che calcola  $y_n$  a partire da se stesso e da  $u_n$ . Dato che i due blocchi esprimono relazioni lineari e dunque sono filtri, sussiste la proprietà commutativa, espressa dalla *forma canonica* di fig. 6.12-b), in cui gli elementi di ritardo sono stati messi in comune.

**Stabilità** I poli del denominatore della (6.51) devono giacere tutti all'interno del cerchio unitario  $|z| < 1$  pena l'instabilità del filtro; sebbene siano ammessi poli con modulo unitario qualora posti in corrispondenza di uno zero in modo da *cancellarne* l'effetto.

**Sensibilità alla quantizzazione** La precedente considerazione rende evidente il problema legato alla realizzazione del filtro mediante operazioni a *precisione finita*: l'effetto di quantizzazione subito dai coefficienti porta a variazioni delle posizioni di poli e zeri che possono determinare effetti indesiderati. Anche per questo motivo esistono architetture alternative<sup>102</sup> a quella canonica, legate a modi di diversi di scrivere la (6.51) come ad esempio nel prodotto di fattori, che dà luogo ad una architettura di celle in cascata.

**Comportamento della fase e complessità** Mentre per i filtri FIR esiste la possibilità di ottenere una fase lineare (vedi pag. 190) e dunque non distortore, per i filtri IIR questo non è possibile; d'altra parte i secondi permettono di ottenere una buona rapidità di variazione della risposta in frequenza pur mantenendo basso l'ordine, e dunque il carico computazionale.

<sup>101</sup>I passaggi iniziano con lo scrivere  $Y(z) \left(1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}\right) = X(z) \sum_{k=0}^M a_k z^{-k}$  ovvero  $Y(z) - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} X(z)$ ; dato ora che  $Z^{-1} \{z^{-k} X(z)\} = x_{n-k}$ , si arriva al risultato mostrato.

<sup>102</sup>Vedi ad es. <http://raffaeleparisi.site.uniroma1.it/insegnamenti/circuiti-a-tempo-discreto>, capitolo 8. Alcune architetture si dimostrano (a parità di precisione) migliori di altre nel definire la posizione di zeri e poli nel piano  $z$ .

### 6.9.5.5 Sintesi di un filtro IIR a partire da un filtro analogico

Il progetto di filtri analogici si basa su metodi consolidati ed efficienti, che danno luogo ad una rappresentazione nella variabile  $s$  del tipo<sup>103</sup>  $H_a(s) = \frac{\sum_{m=0}^M a_m s^m}{\sum_{n=0}^N b_n s^n}$ , a cui corrisponde una risposta impulsiva  $h_a(t)$ , ed una equazione differenziale  $\sum_{n=0}^N b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^M a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$ . A partire da queste grandezze sono stati individuati metodi che consentono di definire un filtro numerico *più o meno* equivalente<sup>104</sup> ad uno analogico, di cui ora ne illustriamo alcuni.

**Invarianza della risposta impulsiva** Questo approccio ottiene i campioni  $h_n$  per il filtro numerico come  $h_n = h_a(nT)$ , ovvero campionando  $h_a(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_a(f)\}$ . Qualora  $H_a(s)$  abbia  $N$  poli in  $s = d_k$ , per essa sussiste lo sviluppo in frazioni parziali  $H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - d_k}$ , a cui corrisponde una  $h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{d_k t}$  e dunque una

$$h_n = h(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{d_k nT}$$

la cui trasformata zeta vale<sup>105</sup>  $H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{d_k T} z^{-1}}$  ovvero con poli in  $z = e^{d_k T} = e^{sT}|_{s=d_k}$  (<sup>106</sup>). L'ultima osservazione comporta aver fatto uso della trasformazione<sup>107</sup>  $z = e^{sT}$ , che garantisce il mantenimento della stabilità<sup>108</sup>. La trasformazione  $z = e^{sT}$  mette inoltre in corrispondenza *periodica* l'asse immaginario nel piano  $s$  ( $s = j\Omega = j2\pi f$ ) con la circonferenza del cerchio unitario nel piano  $z$  ( $z = e^{j\omega}$ ), nel senso che ad ogni  $-\pi < \omega < \pi$  corrisponde una pulsazione  $\Omega = 2\omega \frac{1}{2T} = \frac{\omega}{T}$ ; pertanto la fascia del piano  $s$  compresa tra  $-\frac{f_c}{2} < f < \frac{f_c}{2}$  viene mappata all'interno del cerchio unitario del piano  $z$  (vedi tab. 6.1), ed anche le fasce superiori ed inferiori subiscono la medesima sorte. Questo aspetto è una manifestazione del fenomeno *dell'aliasing* che si manifesta per segnali campionati, ed avviene qualora  $H_a(f)$  non soddisfi le condizioni di stretta limitazione in banda, rendendo il metodo idoneo solo alla progettazione di filtri passa basso o passa banda. Un modo alternativo di vedere il problema si basa sulla considerazione che al filtro numerico corrisponde una  $\hat{h}_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \delta(t - nT)$ , a cui come noto (§ 4.1) a sua volta corrisponde una  $H_a^\bullet(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_a(f - \frac{n}{T})$ ; dunque se  $H_a(f)$  non è limitata in banda tra  $\pm \frac{1}{2T}$  si verifica aliasing.

**Corrispondenza di poli e zeri**<sup>109</sup> In questo metodo la relazione  $z = e^{sT}$  si estende<sup>110</sup> anche alla trasformazione degli zeri di  $H_a(s)$  in quelli di  $H(z)$ : in pratica, dopo essere arrivati alla

<sup>103</sup>Per ridurre le possibilità di confusione, adottiamo il pedice  $a$  per riferirci al *mondo analogico*.

<sup>104</sup>Nel senso che alimentando il filtro numerico con i campioni di un segnale si ottiene circa lo stesso risultato che campionando l'uscita del filtro analogico di partenza.

<sup>105</sup>Vedi esempio a pag. 91

<sup>106</sup>Infatti con alcuni passaggi  $H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{d_k T} z^{-1}} = \sum_{k=1}^N \frac{z A_k}{z - e^{d_k T}}$  può essere riscritta come  $H(z) = k \frac{\prod_{n=1}^M (z - c_n)}{\prod_{n=1}^N (z - e^{d_n T})}$  in cui però gli zeri  $c_n$  vanno calcolati.

<sup>107</sup>Seppur limitata alla sola corrispondenza per la posizione dei poli, in quanto gli zeri di  $H(s)$  non si mappano nel piano  $z$  allo stesso modo di come fanno i poli, vedi nota precedente.

<sup>108</sup>Infatti scrivendo  $s$  come  $s = \sigma + j\Omega$  si ottiene  $z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$ , e dunque i poli  $d_k = \sigma_k + j\Omega_k$  di  $H_a(s)$  che giacciono nel semipiano negativo del piano  $s$ , ovvero con  $\sigma_k < 0$ , vengono mappati all'interno del cerchio unitario nel piano  $z$ , in quanto ad essi corrispondono poli per  $H(z)$  in  $z = z_k = e^{\sigma_k T} e^{j\Omega_k T}$ , per i quali  $|z_k| = e^{\sigma_k T} < 1$ .

<sup>109</sup>Vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Matched\\_Z-transform\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Matched_Z-transform_method)

<sup>110</sup>Che ci sia qualcosa di sensato nello scrivere  $z = e^{sT}$  è motivato anche dal fatto che applicando la definizione di trasformata di Laplace ad  $h_a(t)$  otteniamo

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \mathcal{L}\{h_a(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} h_n \delta(t - nT) \right] e^{-st} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-snT} \end{aligned}$$

e, dato che  $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}$ , ne discende che  $H_a(s) = H(z)|_{z=e^{sT}}$ .

metodo	invarianza $h(t)$ , poli e zeri	eq. alle differenze	trasf. bilineare
relazione	$z = e^{sT}$	$s = \frac{1-z^{-1}}{T}$	$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
mapping			
debolezze	aliasing	si può agire solo a basse frequenze	distorsione dell'asse della frequenza

Tabella 6.1: Aspetti peculiari delle trasformazioni  $H(s) \Rightarrow H(z)$ 

forma fattorizzata  $H_a(s) = k \frac{\prod_{n=1}^M (s - c_n)}{\prod_{n=1}^N (s - d_n)}$ , ogni zero  $c_n$  (e polo  $d_n$ ) si trasforma in  $e^{c_n T}$  ( $e^{d_n T}$ ) dando luogo a

$$H(z) = k \frac{\prod_{n=1}^M (z - e^{c_n T})}{\prod_{n=1}^N (z - e^{d_n T})} = k \frac{z^M}{z^N} \frac{\prod_{n=1}^M (1 - e^{c_n T} z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1 - e^{d_n T} z^{-1})}$$

Sono mantenute le stesse corrispondenze tra piano  $s$  e piano  $z$ , così come la possibilità di aliasing. D'altra parte, i valori della risposta impulsiva  $h_n$  non corrispondono più ai campioni di  $h(t)$ .

**Equazioni alle differenze** Qui si parte dalle equazioni differenziali che sono *a monte* della  $H(s)$ , e che vengono approssimate come equazioni alle differenze finite. Ciò porta alla equivalenza  $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$  che permette di ottenere la  $H(z)$  a partire dalla  $H(s)$  mediante un cambio di variabile, e che da luogo alla corrispondenza mostrata al centro di tab. 6.1, in cui i punti dell'intero semipiano negativo del dominio  $s$  si mappano in punti interni alla circonferenza nel piano  $z$  di raggio 0.5 e centrata in  $z = 0.5$ . Pertanto ora sono evitati i problemi legati all'aliasing, ma la presenza dei poli solo nel semipiano destro del piano  $z$  impedisce l'uso del metodo per la progettazione di filtri passa-alto.

**Trasformazione bilineare** Anche quest'ultimo metodo, detto *di Tustin*, trae origine dalla approssimazione numerica di una equazione differenziale, ma può essere anche visto come una approssimazione di primo ordine<sup>111</sup> della relazione  $z = e^{sT}$  analizzata in precedenza. Il metodo di Tustin si basa sul cambio di variabile  $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ , che corrisponde a mappare l'intero semipiano destro del piano  $s$  all'interno della circonferenza di raggio unitario del piano  $z$ , come mostrato alla destra di tab. 6.1. Anche in questo caso dunque il risultato è stabile e privo di aliasing; d'altra parte si verifica invece una distorsione dell'asse delle frequenze, dato

<sup>111</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear\\_transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_transform)

che la fase  $\omega$  di  $z = e^{j\omega}$  è ora legata alla frequenza  $f$  del filtro analogico tramite la relazione  $\omega = 2 \arctan \left( \pi \frac{f}{f_c} \right)$  per cui va adottata una  $f_c = 1/T$  abbastanza più elevata delle frequenze di interesse del filtro<sup>112</sup>, oppure si progetta un filtro analogico che tenga conto in partenza della distorsione a cui verrà sottoposta la sua risposta in frequenza.

### 6.9.6 Grafici di esempio

Di seguito sono riportati i grafici della forma d'onda, dell'autocorrelazione, della densità spettrale e della densità di probabilità, per alcuni segnali tipici.

Segnale	Forma d'onda	Autocorrelazione	Densità spettrale	Densità di probabilità
Sinusoide				
Onda quadra				
Impulso rettangolare				
Triangolare				
Dente di sega				
Rumore gaussiano bianco				
Rumore gaussiano limitato in banda				

<sup>112</sup>In tal caso infatti si può ritenere l'arctangente approssimativamente lineare.

## Distorsione e rumore

**O**CCUPIAMOCI ora di descrivere la natura del peggioramento, o *distorsione*, subito da un segnale che attraversa un sistema fisico, e di voler caratterizzare quest'ultimo al fine di quantificare l'entità della distorsione introdotta. Questa analisi serve a valutare la qualità di un segnale dopo che ha attraversato circuiti (cap. 15), linee trasmissive (§ 16.2) od amplificatori, oltre che a sviluppare criteri di progetto che tentano di migliorare le prestazioni del sistema, in termini di probabilità di errore (cap. 8) e/o di rapporto segnale/rumore (cap. 11). La natura della distorsione subita da un segnale rientra in una o più delle seguenti categorie:

- distorsione *lineare* quando prodotta da un sistema lineare come un filtro;
- distorsione *non lineare*, causata da mezzi trasmissivi come la fibra ottica o dispositivi come gli amplificatori, che possono presentare comportamenti non lineari;
- distorsione dovuta a *disturbi additivi* come interferenza, quantizzazione e rumore termico, e che a differenza dei precedenti casi *non dipende* dal segnale, ma semplicemente vi si somma.

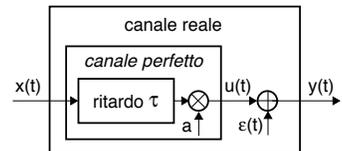
Osserviamo poi che per distorsione si intende un effetto *indesiderato*, mentre se invece il segnale viene "manipolato" di proposito, si dice che questo è *elaborato*<sup>1</sup>.

**Segnale utile, disturbo, canale perfetto ed SNR** Può essere preferibile trattare i tre fenomeni esposti in modo unificato, definendo la distorsione come un *disturbo* additivo che si sovrappone ad una componente di segnale *utile* presente nel segnale ricevuto. Tale impostazione si basa sulla considerazione che ricevere un segnale identico a quello trasmesso, tranne che per un fattore di scala ed un ritardo temporale, non altera né forma né sostanza del messaggio: pertanto, un canale che presenti una risposta impulsiva

$$h(t) = a\delta(t - \tau)$$

viene indicato come *canale perfetto*, ed il segnale ricevuto

$y(t) = u(t) = ax(t - \tau)$  è *tutto utile*. Se invece viene ricevuto qualcosa di diverso, la differenza  $\varepsilon(t) = y(t) - ax(t - \tau) = y(t) - u(t)$  viene chiamata *disturbo additivo*. Noti<sup>2</sup>  $u(t)$  e  $\varepsilon(t)$ , se ne può valutare la rispettiva potenza, e caratterizzare la qualità del segnale ricevuto



<sup>1</sup>Elaborazione di segnale è la traduzione di SIGNAL PROCESSING, e così il segnale risultante viene anche detto *processato*.

<sup>2</sup>Nella pratica, i valori  $a$  e  $\tau$  non si conoscono, mentre invece possiamo disporre di coppie di segnali  $(x(t), y(t))$ . Tali valori vengono quindi valutati come quelli che *rendono SNR massimo* ovvero  $\mathcal{P}_\varepsilon$  minimo. Considerando segnali di

nei termini del rapporto  $\frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_\varepsilon}$  tra la potenza del segnale utile e quella del disturbo, indicato come *rapporto segnale rumore* o  $SNR$ : ovviamente, la qualità è tanto migliore quanto più  $SNR$  è elevato<sup>3</sup>.

**Canale rumoroso e attenuazione** Il modello di canale costituito dalla sua componente perfetta e da un disturbo additivo si presta bene a rappresentare, oltre alle cause di distorsione lineare e *non*, anche quelle più propriamente additive, come il *rumore termico* la cui natura è descritta al § 7.4.2. In tal caso il disturbo  $\varepsilon(t)$  si manifesta in ricezione, con una potenza  $\mathcal{P}_\varepsilon$  indipendente da quella  $\mathcal{P}_u$  del segnale. Allo stesso tempo, al diminuire del fattore di scala  $a$  che caratterizza il canale perfetto, la potenza del segnale utile diminuisce con  $a^2$ , e l' $SNR$  di pari misura.

La riduzione della potenza del segnale ricevuto ( $a < 1$ ) è indicata come *attenuazione* o *affievolimento* e, pur se in presenza di un canale perfetto ovvero privo di distorsione, produce un peggioramento dell' $SNR$  ovvero della qualità del segnale ricevuto. Questo è il caso, ad esempio, dei collegamenti radio (§ 16.3), in cui oltre alla attenuazione di natura deterministica legata alla distanza, intervengono ulteriori cause di attenuazione di tipo aleatorio come quelle di natura atmosferica (pioggia o nebbia), quelle dovute al movimento, e quelle dovute alla casualità delle condizioni di propagazione in condizioni di non visibilità (§ 16.3.4.4).

L'approccio da seguire per valutare il peggioramento dovuto a diverse cause di distorsione che si verificano contemporaneamente è rinviato al § 7.4.1, mentre le cause di distorsione lineare e *non* lineare sono affrontate ai §§ 7.2 e 7.3. Di seguito si approfondisce invece il significato della scala di misura logaritmica, in cui spesso sono espresse potenze di segnale, valori di attenuazione o di guadagno, ed  $SNR$ , anche se l'uso principale che faremo dello "strumento" dB non avverrà che al capitolo 16.

## 7.1 Misure di potenza in decibel

Ci sono almeno due buoni motivi per misurare le grandezze in unità logaritmiche: il primo è che in tal modo si rappresentano in modo compatto anche grandezze dalla dinamica molto elevata, ed il secondo è che prodotti e rapporti si trasformano in somme e sottrazioni. Inoltre, c'è almeno

potenza reali, ossia processi stazionari ergodici, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\varepsilon(a, \tau) &= E \left\{ (y(t) - ax(t - \tau))^2 \right\} = E \left\{ y^2(t) \right\} + a^2 E \left\{ x^2(t) \right\} - 2a E \left\{ y(t)x(t - \tau) \right\} = \\ &= \mathcal{P}_y + a^2 \mathcal{P}_x - 2a \mathcal{R}_{xy}(\tau) \end{aligned}$$

in cui si è operata la sostituzione  $E \left\{ y(t)x(t - \tau) \right\} = \mathcal{R}_{yx}(-\tau) = \mathcal{R}_{xy}^*(\tau) = \mathcal{R}_{xy}(\tau)$ .

Il valore di  $a$  che rende minimo  $\mathcal{P}_\varepsilon(a, \tau)$  si ottiene eguagliandone a zero la derivata:  $\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{P}_\varepsilon(a, \tau) = 2a\mathcal{P}_x - 2\mathcal{R}_{xy}(\tau) = 0$  e dunque  $a_{opt} = \frac{\mathcal{R}_{xy}(\tau)}{\mathcal{P}_x}$ , che sostituita nell'espressione di  $\mathcal{P}_\varepsilon$  fornisce

$$\mathcal{P}_\varepsilon(\tau) = \mathcal{P}_y + \left( \frac{\mathcal{R}_{xy}(\tau)}{\mathcal{P}_x} \right)^2 \mathcal{P}_x - 2 \frac{\mathcal{R}_{xy}(\tau)}{\mathcal{P}_x} \mathcal{R}_{xy}(\tau) = \mathcal{P}_y - \frac{(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}{\mathcal{P}_x} = \mathcal{P}_y \left( 1 - \frac{(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}{\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y} \right)$$

Il valore di  $\mathcal{P}_\varepsilon$  evidentemente è minimo per quel valore di  $\tau = \tau_{opt}$  che rende massima  $(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2$ , ovvero per quella traslazione temporale che rende "più simili" i segnali di ingresso ed uscita.

<sup>3</sup>Una volta individuati i valori di  $a$  e  $\tau$ , è possibile valutare  $\mathcal{P}_u = E \left\{ (ax(t - \tau))^2 \right\} = a^2 \mathcal{P}_x$ , mentre per  $\mathcal{P}_\varepsilon$  è valido il risultato di cui alla precedente nota, fornendo in definitiva  $SNR = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_\varepsilon} = \frac{a^2 \mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_y \left( 1 - \frac{(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}{\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y} \right)} =$

$\frac{a^2 \mathcal{P}_x^2}{\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y - (\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}$ , che tende ad infinito qualora  $\varepsilon(t)$  sia nullo, ovvero  $(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2 = \mathcal{P}_x \mathcal{P}_y$ , mentre si azzerava se  $a = 0$ .

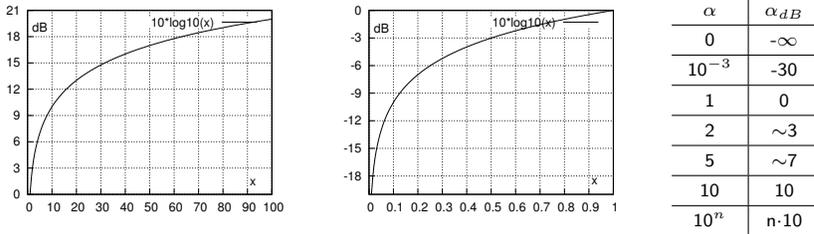


Figura 7.1: Curva di conversione da lineare a decibel, e valori tipici

un buon motivo *psicofisico*<sup>4</sup>, basato sulla conoscenza che l'intensità con cui percepiamo gli stimoli attraverso i nostri organi di senso segue naturalmente una *legge logaritmica*, in quanto per produrre una sensazione che aumenta linearmente, è necessario uno stimolo che aumenta in progressione geometrica. Ciò posto, va anche detto che l'esperienza di insegnamento mostra come, anche se le misure in dB sono qui per aiutarci nei calcoli, esse sono anche uno degli argomenti in cui lo studente medio tende più facilmente a perdersi. Proviamo quindi a fare un po' di ordine!

**La misura logaritmica** Data una qualsiasi grandezza  $\alpha$ , la sua misura in decibel<sup>5</sup> è definita come

$$\alpha_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \alpha \quad (7.1)$$

e descrive le relazioni mostrate nella figura 7.1, a sinistra per valori  $\alpha > 1$ , ed a destra per  $\alpha < 1$ , a cui corrispondono rispettivamente valori in decibel positivi e negativi. Inoltre, sempre in fig. 7.1 è mostrata una tabella con alcune corrispondenze che possono comunemente ricorrere: ad esempio, dato che  $\log_{10} 2 = 0.30102\dots$ , un valore  $\alpha$  pari a 2 equivale a circa 3 dB.

Nota una grandezza espressa in dB, si può risalire al suo valore naturale mediante l'ovvia relazione inversa

$$\alpha = 10^{\frac{\alpha_{dB}}{10}}$$

**Misura relativa dei rapporti** Per esprimere un rapporto  $R = \frac{\alpha}{\beta}$  molto grande o molto piccolo, si ricorre spesso alla *scala logaritmica* definita dai dB, calcolando direttamente il rapporto in tali termini, ovvero eseguendo la differenza tra le grandezze  $\alpha$  e  $\beta$  espresse in dB, in quanto

$$R_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \frac{\alpha}{\beta} = 10 \cdot \log_{10} \alpha - 10 \cdot \log_{10} \beta = \alpha_{dB} - \beta_{dB} \quad (7.2)$$

Se le due grandezze  $\alpha$  e  $\beta$  sono omogenee, come ad esempio due potenze di segnale  $\mathcal{P}_x$  e  $\mathcal{P}_y$  espresse in  $V^2$ , o due potenze  $\mathcal{W}_x$  e  $\mathcal{W}_y$  espresse in *Watt*, allora il loro rapporto è un *numero puro*, e la sua misura in dB esprime *di quanti dB* il numeratore è maggiore (o minore) del denominatore. Conoscendo una delle due grandezze, ed il valore del loro rapporto, si può ovviamente risalire al valore dell'altra, ovvero ad esempio

$$\alpha_{dB} = \beta_{dB} + R_{dB} \quad (7.3)$$

<sup>4</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Legge\\_di\\_Weber-Fechner](https://it.wikipedia.org/wiki/Legge_di_Weber-Fechner)

<sup>5</sup>Dunque un decibel, per come è definito, è la decima parte del Bel, ovvero  $\alpha_{Bel} = \log_{10} \alpha$ . Chissà, forse dopo che definirono il Bel, si accorsero che era troppo grande? :-)

ma, perché questa ovvia relazione possa avere una utilità pratica, occorre sapere cosa rappresenta  $\beta$ , dopodiché potremo concludere che  $\alpha$  rappresenta la stessa cosa<sup>6</sup>, ma  $R_{dB}$  decibel più grande. Per questo, si definisce la

**Misura assoluta delle grandezze** La (7.1) può essere usata per esprimere il *valore assoluto* di una grandezza, assieme alla sua unità di misura, se viene pensata come una applicazione della (7.2), ponendo il denominatore pari *all'unità di misura stessa*. Così ad esempio una potenza  $\mathcal{W}_x$  di  $\alpha$  Watt (7) viene espressa come

$$\mathcal{W}_x (dBW) = 10 \cdot \log_{10} \frac{\alpha Watt}{1 Watt} [dBW] \quad (7.4)$$

ovvero, misurandola in dB *sopra il Watt*. Quindi, una potenza misurata in *dBW* può ricondursi alla corrispondente potenza in *Watt*, calcolando

$$\beta_{Watt} = 10^{\frac{\beta_{dBW}}{10}}$$

ed allo stesso modo, si può finalmente applicare la (7.3) per ottenere una grandezza effettiva:

$$\alpha_{dBW} = \beta_{dBW} + R_{dB}$$

**Conversione tra unità di misura** Se invece che in Watt il valore  $\beta$  risulta espresso in *milli-Watt* (1 mW =  $10^{-3}$  Watt) la corrispondente misura logaritmica viene indicata come *dBm* (dB riferiti al mWatt), valutato come  $\beta_{dBm} = 10 \cdot \log_{10} \beta_{mWatt}$ . Pertanto, essendo  $\beta_{mW} = 10^3 \cdot \beta_W$ , possiamo scrivere

$$\beta_{dBm} = 10 \cdot \log_{10} \beta_{Watt} \cdot 10^3 = 10 \cdot \log_{10} \beta_{Watt} + 10 \cdot \log_{10} 10^3 = \beta_{dBW} + 30 \text{ dB}$$

e dunque per passare da una unità di misura ad un'altra, esprimendo le stesse in dB, occorre sommare (o sottrarre) il relativo fattore di scala, anch'esso espresso in dB.

**Esempio:** zero *dBW* equivalgono a 30 *dBm*, dato che 1 Watt =  $10^3$  mW.

**Misura delle densità** Qualora la grandezza da esprimere in unità logaritmiche non sia la potenza *totale* di un segnale, bensì la relativa *densità di potenza* espressa in  $\frac{V^2}{Hz}$  o  $\frac{W}{Hz}$  (a seconda se si tratti di potenza *di segnale* o *fisica*), ovvero dai multipli e sottomultipli dando luogo a densità di potenza espresse in  $\frac{mW}{Hz}$  o  $\frac{W}{MHz}$  o  $\frac{mW}{MHz}$ , è ancora possibile applicare la (7.1) purché intesa nel senso della (7.4), ossia indicando l'unità di misura di partenza, individuando così valori di densità di potenza espressi in termini *assoluti* come  $\frac{dBV^2}{Hz}$ ,  $\frac{dBW}{Hz}$ ,  $\frac{dBW}{MHz}$ ,  $\frac{dBm}{MHz}$ ...

**Esempio**

- Una densità di potenza  $\mathcal{P}(f) = 15 \frac{W}{MHz}$  corrisponde a  $\mathcal{P}(f) \simeq 1.18 \frac{dBW}{MHz}$
- $-60 \frac{dBW}{Hz}$  equivalgono a  $-30 \frac{dBm}{Hz}$ , dato che 1 W =  $10^3$  mWatt;
- $20 \frac{dBW}{MHz}$  equivalgono a  $-40 \frac{dBW}{Hz}$ , dato che 1 MHz =  $10^6$  Hz, ed i MHz sono a denominatore.

Tali unità di misura torneranno utili in sede di valutazione del *bilancio di collegamento*, affrontato al cap. 16.

<sup>6</sup> Ad esempio *Volt*<sup>2</sup>, oppure Watt.

<sup>7</sup> Al cap. 15 verrà approfondita la differenza tra potenza di segnale, espressa in *volt*<sup>2</sup> o *ampere*<sup>2</sup>, e potenza assorbita, dissipata o trasmessa, espressa in *watt*.

## 7.2 Distorsione lineare

Individua il peggioramento subito dal segnale  $x(t)$  a seguito dell'attraversamento di un sistema lineare e permanente (o filtro, pag. 22) che *non* è un canale perfetto: verifichiamo dunque innanzitutto che, in presenza di un canale perfetto, *non* si verifica distorsione lineare.

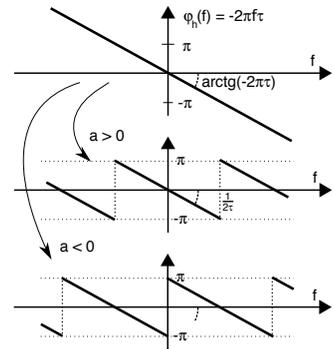
**Canale perfetto** In questo caso la risposta impulsiva ha la forma  $h(t) = a\delta(t - \tau)$  (vedi pag. 183), e dunque per esso risulta  $H(f) = |H(f)| e^{j\varphi_h(f)} = \mathcal{F}\{a\delta(t - \tau)\} = ae^{-j2\pi f\tau}$ , ovvero

$$|H(f)| = |a| \quad \text{e} \quad \varphi_h(f) = \arg\{H(f)\} = \begin{cases} -2\pi f\tau & \text{con } a > 0 \\ -2\pi f\tau + \pi \operatorname{sgn}(f) & \text{con } a < 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

e quindi la risposta in frequenza ha *modulo costante* ( $|H(f)| = |a|$ ) e *fase lineare*<sup>8</sup>: osserviamo infatti che l'espressione  $\varphi_h(f) = -2\pi f\tau$  corrisponde a quella di una retta passante per zero<sup>9</sup> e con coefficiente angolare  $-2\pi\tau$ , e come fatto notare a pag. 58, ciò determina che tutte le componenti frequenziali presentano *lo stesso ritardo*, e quindi la forma d'onda in transito *non subisce* deformazioni. Infatti, per un canale perfetto si ottiene

$$Y(f) = X(f)H(f) = X(f) \cdot ae^{-j2\pi f\tau}$$

e dunque, antitrasformando,  $y(t) = ax(t - \tau)$ .



**Canale reale** Viceversa, ad un canale *non perfetto* corrisponde  $|H(f)| \neq \text{cost.}$ , e/o  $\varphi_h(f) \neq -2\pi f\tau$ , e dunque  $y(t)$  *non* è la copia ritardata di  $x(t)$ . Pertanto, il segnale di uscita è *affetto* da distorsione lineare, e per esso si riscontra una *modifica* della forma d'onda, a causa della dipendenza delle componenti frequenziali del segnale di uscita

$$Y(f) = |Y(f)| e^{j\varphi_y(f)} \quad \text{in cui} \quad \begin{cases} |Y(f)| = |X(f)| |H(f)| \\ \varphi_y(f) = \varphi_x(f) + \varphi_h(f) \end{cases}$$

oltre che dalle componenti in ingresso, anche dai valori di  $H(f)$ , come descritto a pag. 65. La distorsione risultante è detta *lineare* in quanto risultato di una operazione *lineare* come è la convoluzione, alla quale si applica il principio di *sovrapposizione degli effetti*, e dunque la distorsione risultante per una combinazione di cause, è la combinazione dei singoli effetti.

**Banda di segnale** Se consideriamo dei segnali a banda limitata, le condizioni per l'assenza di distorsione lineare sono un po' meno stringenti, dato che in tal caso le (7.5) devono essere soddisfatte solamente nella regione di frequenza individuata dalla banda di segnale, mentre laddove il segnale è assente, il filtro può avere risposta in frequenza qualsiasi.

<sup>8</sup>Il secondo caso per  $\varphi_h(f)$  nella (7.5) tiene conto del fatto che la formula di Eulero (2.3) permette di scrivere  $-1 = e^{j\pm\pi}$ , ed il prodotto per  $\operatorname{sgn}(f)$  rende la fase una funzione *dispari* di  $f$ .

<sup>9</sup>Anche se, tenendo conto che un angolo  $\alpha$  è indistinguibile da un altro  $\beta = \alpha \pm 2\pi$ , per convenzione quando  $|\varphi_h(f)| > \pi$ , la stessa viene fatta *ruotare* di  $2\pi$ .

**Equalizzazione** Osserviamo ora come, facendo passare il segnale  $y(t)$  affetto da distorsione lineare attraverso un filtro con risposta in frequenza  $G(f) = 1/H(f)$ , si ottiene di nuovo il segnale originario  $x(t)$ . Pertanto, la distorsione lineare è un effetto *reversibile*, ed il filtraggio operato da  $G(f)$  prende il nome di *equalizzazione* (§§ 8.3, 15.4) - a patto di riuscire a sintetizzare il filtro  $G(f)$ !

**Distorsione di ampiezza e di fase** Osserviamo infine che, risultando

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)| \quad \text{e} \quad \varphi_y(f) = \varphi_x(f) + \varphi_h(f)$$

è possibile descrivere il fenomeno della distorsione lineare considerando separatamente il modulo  $|H(f)|$  e la fase  $\varphi_h(f)$  della risposta in frequenza, adottando quindi per esse delle rappresentazioni particolarmente utili a descrivere in modo sommario l'entità delle distorsioni stesse.

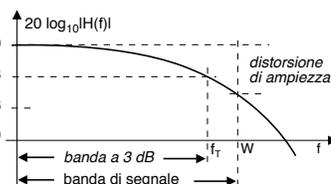
### 7.2.1 Distorsione di ampiezza

Intende misurare in modo approssimato quanto il modulo della risposta in frequenza si discosti da un comportamento perfetto. A questo scopo la definizione di misura in deciBel introdotta al § 7.1 viene applicata al guadagno di potenza (pag. 149)  $|H(f)|^2$ , definendo in questo modo il

**Guadagno di potenza in dB** come

$$G_{dB}(f) = 10 \log_{10} |H(f)|^2 = 20 \log_{10} |H(f)| \quad (7.6)$$

che consente di apprezzare il reale andamento di  $|H(f)|^2$  anche per valori molto piccoli. L'applicazione di (7.6) alla  $|H(f)|$  di un filtro, come ad esempio quello del passa-basso RC (§ 6.7.1), produrrà un risultato simile a quello mostrato a lato, in cui alla *frequenza di taglio*  $f_T$  per cui  $|H(f_T)|^2 = \frac{1}{2} |H_{Max}|^2$  corrisponde un valore pari a  $-3$  dB: alla  $f_T$  viene quindi dato nome di *banda a 3 dB*, intendendo con questo che la potenza delle frequenze di segnale che rientrano in tale banda subirà al massimo un dimezzamento. Qualora invece il segnale in transito occupi una banda maggiore, ad es.  $W$ , il valore di  $G_{dB}^{Max} - G_{dB}(f)|_{f=W}$  costituisce una misura della *distorsione di ampiezza* subita dal segnale, ovvero la distorsione delle sue componenti frequenziali più attenuate.



Infine, qualora si desideri che la massima distorsione di ampiezza non sia maggiore di una quantità preassegnata, mediante il grafico si individua la banda entro la quale  $G_{dB}(f)$  si mantiene all'interno della massima variazione (in dB) prevista, ottenendo così il valore della banda di segnale per cui la distorsione non supera quella assegnata.

### 7.2.2 Distorsione di fase

Consideriamo ora un canale privo di distorsione di ampiezza, descritto da una risposta in frequenza  $H(f) = e^{j\varphi(f)}$ , con  $\varphi(f) \neq -2\pi f\tau$ . In tal caso il segnale in uscita subisce alterazioni della *forma d'onda*, a causa del diverso ritardo subito dalle frequenze in esso presenti, come già illustrato nell'esempio di pag. 58; tale alterazione può anche produrre una notevole variazione della dinamica del segnale, nel caso in cui i diversi ritardi producano un *somma coerente* delle frequenze presenti.

**Ritardo di fase** Per illustrare questo concetto, poniamo  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  in ingresso al canale e consideriamo assente la distorsione di modulo: l'uscita sarà allora pari a<sup>10</sup>  $y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi(f_0)) = \cos\left(2\pi f_0 \left(t + \frac{\varphi(f_0)}{2\pi f_0}\right)\right) = \cos(2\pi f_0 (t - \tau_f(f_0)))$  in cui

$$\tau_f(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi f} \tag{7.7}$$

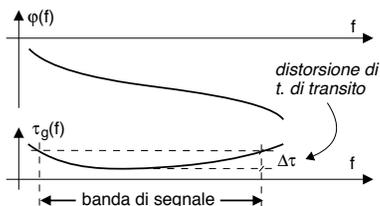
è indicato come *ritardo di fase* e misura il tempo che intercorre tra ingresso ed uscita per una specifica frequenza  $f$ . E' immediato verificare che, nel caso in cui  $\varphi(f) = -2\pi f\tau$ , si ottiene  $\tau_f(f) = \tau$ , ovvero il ritardo è lo stesso a qualsiasi frequenza. Viceversa se  $\tau_f$  dipende da  $f$ , un segnale di ingresso costituito da due o più frequenze (come le armoniche di un segnale periodico) subisce per ognuna di esse un ritardo differente, ed il segnale uscente  $y(t)$  manifesta una *deformazione* della forma d'onda.

**Ritardo di gruppo** Nel caso più generale di un segnale dallo *spettro continuo*, l'analisi viene svolta<sup>11</sup> scomponendo la banda del segnale in piccole regioni di frequenza, per ognuna delle quali il tempo di attraversamento del filtro è espresso dal *ritardo di gruppo* pari a

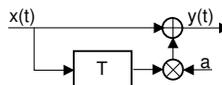
$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi(f) \tag{7.8}$$

in cui  $f$  corrisponde al *centro* della regione (o *gruppo*) di frequenze, e  $\tau_g(f)$  tiene conto della *inclinazione* di  $\varphi(f)$  per ogni  $f$ : i diversi valori di  $\tau_g$  nella banda di segnale danno quindi una *misura* della dispersione temporale subita dai diversi *gruppi* di frequenze presenti nel segnale. Anche per questo caso, se  $\varphi(f) = -2\pi f\tau$  allora  $\tau_g(f) = \tau_f(f) = \tau$  è costante, e non si verifica distorsione di fase.

Prendiamo ad esempio l'andamento di  $\tau_g(f)$  mostrato in figura, e poniamo che in ingresso al filtro sia presente un suono percussivo, di breve durata e quindi esteso in frequenza. Mentre le frequenze nella regione centrale della banda subiscono un ritardo tra loro simile, quelle agli estremi arrivano con un ritardo maggiore, causandone la *dispersione temporale* che snaturerà la qualità del suono. Per questo, la differenza  $\Delta\tau_g = \tau_g^{max} - \tau_g^{min}$  viene presa come misura dell'entità della *distorsione di tempo di transito*.



**Esempio** Il filtro trasversale in figura rappresenta un collegamento radio in cui si verifica una eco dovuta a riflessione (vedi 16.3.3.5).



Per esso il guadagno di potenza e la risposta di fase risultano pari a<sup>12</sup>

$$|H(f)|^2 = 1 + a^2 + 2a \cos 2\pi fT \quad e \quad \varphi(f) = \arctan \frac{-a \sin 2\pi fT}{1 + a \cos 2\pi fT}$$

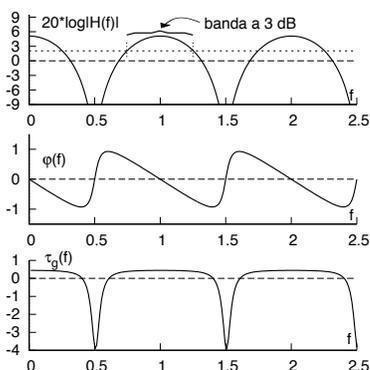
e dunque è presente sia distorsione di ampiezza che di fase. Come noto  $H(f)$  è periodica con periodo  $f = \frac{1}{T}$ , dunque lo sono il modulo, la fase, e  $\tau_g$ , mostrati tutti in figura, per  $a = .8$  e  $T = 1$ .

<sup>10</sup>Vedi la nota 23 a pag. 65.

<sup>11</sup>Tale analisi è rimandata al § 12.1.3.

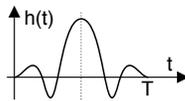
<sup>12</sup>L'espressione di  $|H(f)|^2$  è stata ricavata al § 6.6.3. La fase si ottiene come  $\varphi(f) = \arctan \frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}}$ , in cui  $H(f) = 1 + ae^{-j2\pi fT}$ .

In base ad  $|H(f)|_{dB}^2$  viene individuata la banda a 3 dB, entro la quale la fase si mantiene abbastanza lineare, e  $\tau_g$  varia relativamente poco. Viceversa, in corrispondenza delle regioni attenuate sono evidenti rapide variazioni di  $\varphi$  e  $\tau_g$ . Può destare legittima sorpresa osservare regioni di frequenza per le quali  $\tau_g < 0$ , che sembrerebbero indicare una violazione del principio di causalità. Al § 12.4.1 si mostra come la (7.8) si ottenga grazie ad una approssimazione che arresta uno sviluppo in serie di potenze al primo termine, ma che nel caso in cui  $|H(f)|$  non sia costante e/o la fase cambi rapidamente pendenza non è più lecita: pertanto si tratta solo di una inesattezza del modello analitico, e l'anticausalità è solo apparente.



D'altra parte, alcuni esperimenti mostrano che qualora  $\tau_g < 0$ , il filtro assume un comportamento *predittivo*<sup>13</sup>.

**Filtro a fase lineare** Può essere interessante chiedersi se esistano delle condizioni sufficienti ad assicurare che un filtro presenti risposta di fase lineare. La risposta è positiva, e la condizione è che la risposta impulsiva esibisca *simmetria pari* rispetto a metà della sua durata  $T$ , ovvero  $h(t)|_{0 < t < T/2} = h(T-t)|_{0 < t < T/2}$ , come esemplificato in figura. Infatti in tal caso un secondo filtro con risposta impulsiva  $g(t) = h(t + T/2)$  ottenuta anticipando  $h(t)$  di metà durata, ha *simmetria pari* rispetto a  $t = 0$ , e dunque ad esso corrisponde ad una  $G(f)$  *reale*: invertendo ora la traslazione temporale operata sulla risposta impulsiva, otteniamo che  $H(f) = G(f) e^{-j2\pi f T/2}$ , ossia una fase lineare  $\varphi(f) = -\pi f T$ . La condizione esposta è facilmente realizzabile mediante un *filtro trasversale*, vedi nota 6.6.1 al § 6.6.1.



**Caso del filtro adattato** La linearità di fase non viene ricercata sempre e comunque, come nel caso del filtro adattato (§ 6.8) in cui non è per nulla tenuta in considerazione, dato che l'unico requisito è posto nella forma  $H_R(f) = G^*(f) e^{-j2\pi f T}$  in quanto lo scopo *non* è preservare la forma d'onda in transito, ma calcolare l'intercorrelazione tra segnale in ingresso e risposta impulsiva adattata.

### 7.2.3 Effetto della distorsione lineare sui segnali

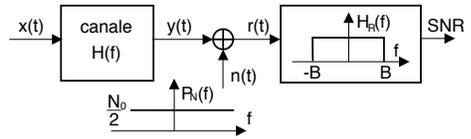
La distorsione lineare introdotta su di un segnale ad opera di un filtro produce effetti che dipendono dalla natura del segnale, e dal suo utilizzo.

**Segnale audio** Sebbene l'orecchio umano non sia sensibile allo spettro di fase per quanto riguarda i segnali periodici<sup>14</sup>, come già osservato la variazione del ritardo di gruppo  $\Delta\tau_g$  nella banda di segnale determina una *dispersione temporale* dei suoni brevi e ricchi di contenuto spettrale, e dunque la modifica del loro effetto percettivo; più un generale, la presenza di una distorsione di fase non altera l'intelligibilità del parlato, ma causa comunque un effetto percepibile. Viceversa, le alterazioni del modulo di  $H(f)$  modificano il *timbro* dei suoni, alterandone la distribuzione della potenza  $\mathcal{P}_y(f)$ .

<sup>13</sup>In questo caso l'uscita *sembra* precedere l'ingresso, tranne qualora il segnale di ingresso presenti una brusca discontinuità temporale, e quindi non sia più predicibile. In tal caso, l'effetto torna ad essere conseguenza della causa: vedi <https://inst.eecs.berkeley.edu/~ee123/sp14/NegativeGroupDelay.pdf>

<sup>14</sup>Ascolta ad esempio [https://www.youtube.com/watch?v=\\_xgurzL92Lc](https://www.youtube.com/watch?v=_xgurzL92Lc)

**Effetto sull'SNR** Se il segnale  $y(t)$  viene ricevuto in presenza di disturbi additivi con densità di potenza  $\mathcal{P}_N(f) = N_0/2$ , il ricevitore provvede innanzitutto ad eliminare le componenti di rumore esterne alla banda di segnale  $B$  mediante un filtro passabasso  $H_R(f)$ , vedi § 8.4.1.



Dato che l'attraversamento del canale con  $|H(f)| \neq \text{cost}$  ha modificato la densità  $\mathcal{P}_y(f)$  del segnale ricevuto rispetto a quella di  $\mathcal{P}_x(f)$ , la valutazione dell'SNR in ricezione deve tenere conto dell'effetto filtrante introdotto dal canale, ossia:

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_y}{\mathcal{P}_N} = \frac{\int_B \mathcal{P}_y(f) df}{\int_B \mathcal{P}_N(f) df} = \frac{\int_B \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 df}{N_0 B}$$

Allo stesso tempo, l'SNR modifica la propria dipendenza dalla frequenza, ossia  $SNR(f) = \frac{\mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2}{N_0/2}$ .

Sebbene i due casi che seguono non siano ancora stati esattamente definiti, sono comunque inserite qui le considerazioni riassuntive al loro riguardo.

**Segnale numerico** Questo tipo di segnale è introdotto al cap. 8 e poi ripreso al cap. 14. Per esso la *linearità di fase* è particolarmente importante per evitare l'insorgenza di *interferenza intersimbolica* (§ 8.1.2.2), che come vedremo è particolarmente sensibile a fenomeni di dispersione temporale, dato che questi ultimi fanno perdere le caratteristiche di Nyquist (§ 8.2.2.2) all'impulso  $g(t)$  adottato dal codificatore di linea (§ 8.1.2).

**Segnale modulato** Indicando con  $\underline{x}(t)$ ,  $\underline{y}(t)$  e  $\underline{h}(t)$  l'involuppo complesso (§ 9.2.1) di ingresso, uscita, e della risposta impulsiva di un canale, al § 12.1.1 si mostra che risulta  $\underline{y}(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) * \underline{h}(t)$ , e dunque per le componenti analogiche di bassa frequenza di  $\underline{y}(t)$  si manifesta un fenomeno indicato come *intermodulazione* delle c. a. di b. f., descritto come

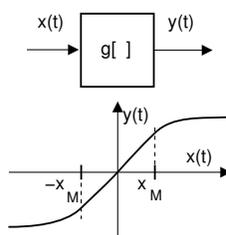
$$\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2} [x_c(t) * h_c(t) - x_s(t) * h_s(t)] \\ y_s(t) = \frac{1}{2} [x_s(t) * h_c(t) + x_c(t) * h_s(t)] \end{cases} \quad (7.9)$$

Qualora  $H(f)$  presenti simmetria coniugata rispetto ad  $f_0$  si ottiene  $h_s(t) = 0$ , riducendo l'effetto dell'intermodulazione a quanto si otterrebbe filtrando ciascuna delle c.a. di b.f. mediante  $h_c(t)$ . D'altra parte, anche quest'ultimo tipo di distorsione può essere evitato qualora  $\underline{h}(t)$  rappresenti un canale perfetto, a cui in questo caso corrisponde la condizione che, oltre a risultare  $|H(f)| = \text{cost}$ , il ritardo di gruppo  $\tau_g(f)$  sia *costante* nella banda di segnale, o in modo equivalente  $\varphi(f)$  sia *lineare* attorno alla portante  $f_0$ , cioè  $\varphi(f) = \varphi_0 - 2\pi(f - f_0)\tau$ . Ulteriori approfondimenti ai §§ 12.1.2.4 e 12.2.

### 7.3 Distorsione di non linearità

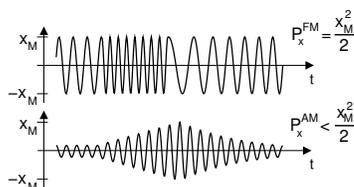
Si tratta di un fenomeno che *non dipende* da un effetto memoria o dalla frequenza, come avviene nel caso della distorsione lineare. Al contrario, quella non lineare consiste nell'effetto prodotto su di un segnale dall'attraversamento di un dispositivo la cui caratteristica ingresso-uscita *istantanea* descrive un comportamento *non lineare*, per il quale cioè la relazione ingresso-uscita è del generico tipo  $y(t) = g[x(t)] \neq ax(t) + b$ , ovvero ogni valore di uscita dipende unicamente da quello di ingresso al medesimo istante, secondo una relazione appunto *non lineare*.

**Saturazione** Ad esempio, si verifica distorsione non lineare quando un amplificatore<sup>15</sup> è alimentato da un segnale di ingresso con dinamica troppo elevata. Indicando con  $x_M$  il massimo valore di ingresso per cui l'amplificatore mantiene un comportamento lineare, valori di  $|x(t)| > x_M$  provocano il fenomeno della *saturazione*, rappresentato dalla *curva ad s* mostrata in figura.



**Limitazione di potenza** Anticipando concetti che saranno approfonditi al § 9.2.2, evidenziamo subito le conseguenze prodotte dal vincolo sulla dinamica  $x_M$  della potenza trasmessa da un amplificatore per segnali radio. Nel caso di una trasmissione a modulazione di frequenza (FM), il segnale mantiene sempre la stessa ampiezza, e dunque si può effettuare la trasmissione a piena potenza, pari a  $\mathcal{P}_x^{FM} = \frac{x_M^2}{2}$ .

Nel caso in cui invece la trasmissione avvenga mediante un segnale a modulazione di ampiezza (AM), per esso si determina un involuppo fortemente variabile nel tempo, e per evitare di operare in regione non lineare, la potenza di trasmissione del segnale deve essere ridotta (operazione indicata come *back-off*). Conseguentemente, la trasmissione AM deve operare con una potenza  $\mathcal{P}_x^{AM} < \mathcal{P}_x^{FM}$  inferiore alla massima consentita dall'amplificatore, mentre per trasmettere la stessa potenza del caso FM, è necessario ricorrere ad un amplificatore sovradimensionato.



Dato che in presenza di fenomeni non lineari decade il principio di sovrapposizione degli effetti, per descrivere il fenomeno in forma analitica si procede studiando prima il caso di un semplice segnale sinusoidale, e quindi si accenna ai risultati ottenibili per processi gaussiani. In entrambi i casi, l'analisi si basa sullo sviluppo di  $g[x(t)]$  in serie di potenze arrestato al terzo ordine, in modo da poter scrivere

$$y(t) = G [x(t) + \alpha x^2(t) + \beta x^3(t)] \quad (7.10)$$

dove<sup>16</sup>  $G = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=0}$  rappresenta il guadagno dell'amplificatore, ed i coefficienti  $\alpha = \frac{1}{2G} \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=0}$  e  $\beta = \frac{1}{6G} \left. \frac{d^3g}{dx^3} \right|_{x=0}$  tengono conto degli effetti di secondo e terzo ordine. Notiamo anche come il termine legato a  $\beta$  sia quello che tiene conto dell'effetto della *saturazione*, in virtù della simmetria *dispari* di  $x^3$ .

### 7.3.1 Ingresso sinusoidale

Ponendo  $x(t) = A \cos \omega_0 t$  la (7.10) si riscrive come<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} y(t) &= G [A \cos \omega_0 t + \alpha A^2 \cos^2 \omega_0 t + \beta A^3 \cos^3 \omega_0 t] = \\ &= GA \left[ \frac{A}{2} + \left( 1 + \frac{3}{4} \beta A^2 \right) \cos \omega_0 t + \frac{\alpha A}{2} \cos 2\omega_0 t + \frac{\beta A^2}{4} \cos 3\omega_0 t \right] \quad (7.11) \end{aligned}$$

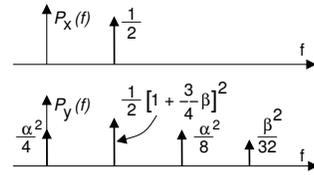
<sup>15</sup> come ad esempio è il caso dei TWTA introdotti a pag. 600

<sup>16</sup> Si applica lo sviluppo di Maclaurin  $y = g(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n g(x)}{dx^n} x^n$ , in cui  $y_0 = g(x=0) = 0$ .

<sup>17</sup> Si fa uso delle relazioni  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$  e  $\cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha$ .

che corrisponde allo spettro di densità di potenza disegnato a lato (che è uno spettro *unilatero*, e calcolato per  $A = G = 1$ ), dove si osserva la comparsa sia di termini a frequenza multipla di quella di ingresso, sia di una componente continua.

Nella pratica, la relazione  $y(t) = g[x(t)]$  non è nota, e dunque non lo sono i valori  $\alpha$  e  $\beta$ , che sono invece derivati a partire dalla relazione (7.11) ponendo in ingresso una sinusoidale di potenza nota, ed osservando la potenza delle armoniche presenti in uscita, come ora illustriamo.



**Fattori di intermodulazione** Le caratteristiche tecniche che accompagnano gli amplificatori riportano, invece di  $\alpha$  e  $\beta$ , i valori dei *fattori di intermodulazione*  $\mu_2$  e  $\mu_3$  (detti di seconda e di terza armonica), ottenuti per via sperimentale utilizzando un ingresso *sinusoidale*, misurando le potenze in uscita  $\mathcal{P}_I$ ,  $\mathcal{P}_{II}$  e  $\mathcal{P}_{III}$  oltre che alla frequenza in ingresso anche alla sua seconda e terza armonica, e definendo in base ai loro rapporti<sup>18</sup> le quantità

$$\mu_2^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{II}}{\mathcal{P}_I^2} \quad \text{e} \quad \mu_3^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{III}}{\mathcal{P}_I^3}$$

da cui i coefficienti  $\alpha$  e  $\beta$  possono essere calcolati mediante le relazioni  $\alpha \simeq 1.41 \cdot \mu_2 \cdot G$ ,  $\beta = 2 \cdot \mu_3 \cdot G^2$ , derivate alla nota<sup>19</sup>.

Scrivendo  $\mathcal{P}_{II} = \mu_2^2 \mathcal{P}_I^2$  e  $\mathcal{P}_{III} = \mu_3^2 \mathcal{P}_I^3$ , osserviamo che per piccoli valori di  $\mathcal{P}_I$  la distorsione prodotta sia da  $\mathcal{P}_{II}$  che da  $\mathcal{P}_{III}$  è trascurabile; all'aumentare di  $\mathcal{P}_I$ ,  $\mathcal{P}_{II}$  cresce con il quadrato, mentre  $\mathcal{P}_{III}$  con il cubo, e dunque quest'ultima componente finisce per divenire predominante.

Con alcuni passaggi trigonometrici si può infine mostrare che qualora il segnale in ingresso contenga più di una sinusoidale, in uscita saranno presenti anche termini a frequenza pari alla somma ed alla differenza di ogni coppia di frequenze in ingresso: tale fenomeno viene indicato come *distorsione di intermodulazione*.

### 7.3.2 Ingresso aleatorio

Allo scopo di analizzare l'effetto della distorsione non lineare su di un segnale a spettro continuo, ci poniamo in un'altra situazione-limite, studiando il caso in cui l'ingresso  $x(t)$  sia membro di un processo gaussiano stazionario a media nulla, potenza  $\mathcal{P}_x$ , e densità spettrale  $\mathcal{P}_x(f)$ . Al § 7.5.1 vengono discussi i passaggi che, in virtù di alcune proprietà dei momenti di variabili aleatorie gaussiane, consentono di giungere ad una espressione della densità spettrale

<sup>18</sup>Le relazioni mostrate si ottengono scrivendo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I &= \frac{G^2 A^2}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \beta A^2\right)^2 \simeq \frac{G^2 A^2}{2} \quad \left(\text{se } \beta \ll \frac{4}{3A^2}\right) \\ \mathcal{P}_{II} &= \frac{G^2 A^4 \alpha^2}{8} = \frac{G^4 A^4}{4} \frac{1}{G^2} \frac{\alpha^2}{2} = \mathcal{P}_I^2 \mu_2^2 \\ \mathcal{P}_{III} &= \frac{G^2 A^6 \beta^2}{32} = \frac{G^6 A^6}{8} \frac{1}{G^4} \frac{\beta^2}{4} = \mathcal{P}_I^3 \mu_3^2 \end{aligned}$$

<sup>19</sup>Le relazioni alla nota 18 definiscono i fattori  $\mu_2$  e  $\mu_3$  come  $\begin{cases} \mu_2^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{II}}{\mathcal{P}_I^2} = \frac{1}{G^2} \frac{\alpha^2}{2} \\ \mu_3^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{III}}{\mathcal{P}_I^3} = \frac{1}{G^4} \frac{\beta^2}{4} \end{cases}$  da cui si ottengono i valori

riportati nel testo, purché sia verificata la condizione  $\beta \ll 4/3A^2$ . In caso contrario decade la possibilità di risalire in modo semplice ad  $\alpha$  e  $\beta$  a partire dai fattori di intermodulazione, che restano dunque una misura *oggettiva* (in quanto ottenuti mediante una misurazione) dell'entità della distorsione non lineare.

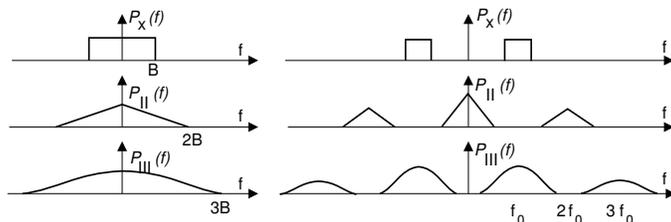


Figura 7.2: Densità spettrale di segnali affetti da distorsioni non lineari; a sinistra per banda base, a destra per segnale modulato

$\mathcal{P}_y(f)$  come  $\mathcal{F}$ -trasformata della funzione di autocorrelazione  $\mathcal{R}_y(\tau)$  del processo in uscita  $y(t) = G[x(t) + \alpha x^2(t) + \beta x^3(t)]$ . Il risultato mostra che, oltre ad un termine in continua e ad una amplificazione di  $\mathcal{P}_x(f)$ , in uscita si manifestano anche i due termini additivi

$$\mathcal{P}_{II}(f) = G^2 2\alpha^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f); \quad \mathcal{P}_{III}(f) = G^2 6\beta^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f)$$

che rappresentano l'effetto distorcente della non linearità. Notiamo che per entrambi i contributi si verifica una *convoluzione in frequenza* della  $\mathcal{P}_x(f)$  originaria con se stessa, i cui effetti discutiamo brevemente per i casi di un segnale  $x(t)$  di banda base o modulato.

Nel caso di banda base, i termini  $\mathcal{P}_{II}(f)$  e  $\mathcal{P}_{III}(f)$  occupano una banda di estensione rispettivamente doppia e tripla di quella di  $\mathcal{P}_x(f)$  (lato sin. di fig. 7.2), dunque solo una parte della potenza totale di errore giace nella stessa banda di segnale.

Nel caso invece di un segnale modulato con portante  $f_0$ , eseguendo la costruzione grafica per la convoluzione (§ 3.4.3) osserviamo che il termine  $\mathcal{P}_{II}(f)$  occupa regioni di frequenza (con banda doppia rispetto a  $\mathcal{P}_x(f)$ ) centrate ad  $f = 0$  e  $f = 2f_0$ , disgiunte dalla banda di  $\mathcal{P}_x(f)$ : pertanto  $\mathcal{P}_{II}(f)$  può essere non considerato fonte di disturbo - se non a danno di eventuali altre trasmissioni a frequenza  $2f_0$ . Infine, la convoluzione tra  $\mathcal{P}_I(f)$  e  $\mathcal{P}_{II}(f)$  fornisce una  $\mathcal{P}_{III}(f)$  costituita anch'essa da due componenti, di cui una centrata ad  $f = 3f_0$  e che, come per  $\mathcal{P}_{II}(f)$ , non produce disturbo se non ad altre trasmissioni; mentre una parte più consistente di  $\mathcal{P}_{III}(f)$  è centrata sulla stessa portante  $f_0$  di  $x(t)$ , e dunque costituisce effettivamente fonte di disturbo, come si dice, *in banda*. In definitiva, vi sono almeno tre buone ragioni per tenere d'occhio il valore di  $\beta$ , che è causa delle distorsioni di terza armonica:

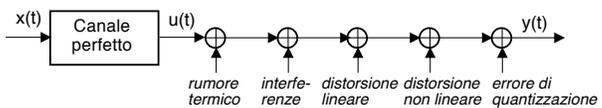
- è il coefficiente che tiene conto dei fenomeni di saturazione;
- produce interferenza *in banda* per i segnali modulati;
- produce interferenza *fuori banda* che danneggia le trasmissioni a frequenza tripla.

Al cap. 12.3.1 sono discussi gli effetti della distorsione non lineare sui segnali modulati *angolarmente*.

## 7.4 Disturbi additivi

Nella seconda parte del testo affronteremo il calcolo della potenza  $\mathcal{P}_u$  del segnale utile introdotta a pag. 183 e presente al lato ricevente di un sistema trasmissivo, applicando alla potenza  $\mathcal{P}_x$  del segnale in ingresso al canale le relazioni di trasferimento energetico discusse al capitolo 15 e dipendenti dalla tipologia del mezzo trasmissivo, come descritto al capitolo 16.

D'altra parte, il termine di errore  $\varepsilon(t) = y(t) - ax(t - \tau)$  può essere dovuto, oltre alle cause di distorsione

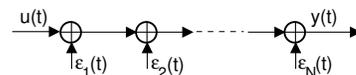


esposte fin qui, anche ad ulteriori fonti di disturbo *additivo* ed indicate per questo con il termine di *rumore* o *disturbo*, come il rumore termico (§ 7.4.2), il disturbo di natura interferente (ad es., vedi pag. 468), od il rumore di quantizzazione (§ 4.2.1.1) - anche se quest'ultimo è più propriamente un fenomeno di tipo non lineare. Le diverse fonti di disturbo vengono generalmente analizzate in forma separata e indipendente, e per ognuna di esse è definito un valore di  $SNR_i = \mathcal{P}_u / \mathcal{P}_{\varepsilon_i}$  dovuto a quella sola fonte.

### 7.4.1 Valutazione dell' $SNR$ dovuto a diverse fonti di disturbo

Per giungere ad una espressione per l' $SNR_T$  complessivo, consideriamo lo schema alla figura seguente, in cui il segnale utile  $u(t)$  è affetto da diverse cause di disturbo  $\varepsilon_i(t)$  indipendenti tra loro ed a media nulla, per ognuna delle quali è noto il valore dell' $SNR_i$  associato.

L'ipotesi di indipendenza statistica permette di affermare che la potenza di errore complessiva è la *somma*<sup>20</sup> di quella dei singoli contributi, ossia



$$\mathcal{P}_{\varepsilon_T} = E \left\{ (\sum_i \varepsilon_i)^2 \right\} = \sum_i E \{ \varepsilon_i^2 \} = \sum_i \mathcal{P}_{\varepsilon_i}$$

e dunque l'effetto di tutti i disturbi contemporaneamente attivi determina un  $SNR$  complessivo pari a  $SNR_T = \mathcal{P}_u / \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_{\varepsilon_i}$ ; considerando ora che la potenza dei singoli contributi di rumore può essere espressa come  $\mathcal{P}_{\varepsilon_i} = \mathcal{P}_u / SNR_i$ , si ottiene

$$SNR_T = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_u \sum_{i=1}^N \frac{1}{SNR_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{SNR_i}}$$

Questo risultato ricorda quello della impedenza equivalente a più impedenze poste in parallelo, il che porta a descrivere l' $SNR$  complessivo come il *parallelo* degli  $SNR$ . Una applicazione di questo risultato viene esposta ai § 15.3.1 e § 15.3.2, che descrivono rispettivamente le prestazioni dei ripetitori *trasparenti* o *rigenerativi* nei confronti del rumore.

### 7.4.2 Rumore gaussiano

Molto spesso si assume che la somma dei contributi di rumore additivo possa essere assimilata ad un *processo gaussiano* (§ 5.5.3), e ciò consente di sviluppare i calcoli sfruttando le sue ben studiate proprietà. In alcuni casi si tratta solo di una approssimazione, ma se il disturbo additivo è il risultato di una somma elevata di cause *indipendenti ed identicamente distribuite* (i.i.d.), come in presenza di molti interferenti simili, il *teorema centrale del limite* (§ 5.2.4) assicura una buona aderenza alla realtà. Un caso particolare di disturbo additivo dovuto a molteplici cause i.i.d. prende il nome di *rumore termico*, che alla gaussianità aggiunge la proprietà di esibire una densità di potenza *bianca*, come ora andiamo ad approfondire.

#### 7.4.2.1 Rumore termico nei bipoli passivi

Ai capi di un resistore  $R$  a temperatura  $T$  è presente una *tensione a vuoto*  $n(t)$ , realizzazione di un processo gaussiano a media nulla, e che è l'effetto del *moto caotico* degli elettroni all'interno

<sup>20</sup>Infatti al § 6.5.2 si mostra come il risultato della somma di processi indipendenti ed a media nulla abbia potenza pari alla somma delle potenze.

della resistenza<sup>21</sup>. Lo spettro di densità di potenza della tensione a vuoto ha espressione<sup>22</sup>

$$\mathcal{P}_n(f) = 2R \frac{\hbar f}{e^{\frac{\hbar f}{kT}} - 1} \simeq 2kTR \quad [\text{Volt}^2]$$

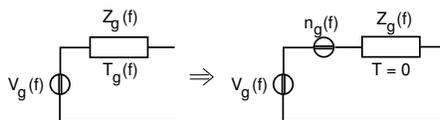
in cui  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  Joule/°K è la *costante di Boltzman* ed  $\hbar = 6.62 \cdot 10^{-34}$  Joule-sec è la *costante di Plank*: questi valori<sup>23</sup> fanno sì che alla *temperatura ambiente*  $T = T_0 = 290$  °K (pari a 17 °C) l'approssimazione  $\mathcal{P}_n(f) \simeq 2kTR$  sia valida ad ogni frequenza di interesse, ossia fino a qualche decina di GHz. Da questo punto di vista quindi il processo di rumore termico è *bianco*, ovvero costante a tutte le frequenze di interesse.

In un bipolo passivo di impedenza  $Z(f) = R(f) + jX(f)$ , solamente la parte reale (componente resistiva) concorre a generare il processo di rumore termico, che pertanto possiede una densità di potenza *di segnale*, o a vuoto,  $\mathcal{P}_n(f) \simeq 2KTR(f)$ . Nel caso in cui il bipolo contenga *più* resistori a temperature diverse, si può definire una temperatura equivalente  $T_e$ ; un bipolo passivo equivalente pertanto allo stesso bipolo non rumoroso (a temperatura zero), con in serie un generatore di rumore con densità di potenza  $\mathcal{P}_n(f) \simeq 2kT_e R(f)$ .

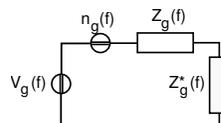
Notiamo ora che, in virtù dei conti che portano ad esprimere la parte reale dell'impedenza equivalente in funzione anche dei componenti reattivi presenti nel circuito,  $R(f)$  risulta dipendere dalla frequenza, e quindi la densità di potenza  $\mathcal{P}_n(f)$  non descrive più uno spettro bianco, bensì *colorato*.

### 7.4.2.2 Rumore termico di un generatore di segnale

Da punto di vista del ricevitore, il segnale appare provenire da una sorgente *equivalente*<sup>24</sup>, in cui è presente un generatore di segnale (a vuoto)  $v_g(t) \Leftrightarrow V_g(f)$ , ed una impedenza interna  $Z_g(f)$  che si trova alla temperatura del generatore  $T_g$ . Come abbiamo visto, a sua volta  $Z_g(f)$  presenta ai suoi capi una tensione di rumore (a vuoto)  $n_g(f)$ , e dunque il generatore sovrappone al suo proprio segnale anche quello di rumore.



**Potenza disponibile** Al § 15.1.1.3 si mostra che se il generatore con densità di potenza *di segnale*  $\mathcal{P}_g(f)$  è chiuso su di un carico *adattato*<sup>25</sup>  $Z_c(f) = Z_g^*(f)$ , la potenza da questo assorbita<sup>26</sup>  $\mathcal{W}_{dg}(f)$  sarà la massima possibile, indicata per questo come



<sup>21</sup>Possiamo pensare che gli elettroni, qualora si trovino in maggior misura in una metà della resistenza, producano una differenza di potenziale negativa in quella direzione. Allo zero assoluto (- 273 °C) il moto caotico degli elettroni cessa, e si annulla così la tensione di rumore. Di qui l'aggettivo *termico* per descrivere il fenomeno.

<sup>22</sup>Si tratta di una forma della legge di *Plank*, vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson%E2%80%93Nyquist\\_noise](https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson%E2%80%93Nyquist_noise)

<sup>23</sup>Espandendo  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$  si ottiene che per  $x \ll 1$  risulta  $e^x \simeq 1 + x$ , e quindi  $e^{\frac{\hbar f}{kT}} \simeq 1 + \frac{\hbar f}{kT}$ . Inoltre per  $T = T_0 = 290$  °K si ottiene  $\frac{\hbar f}{kT} = 1.65 \cdot 10^{-13} \cdot f$ , e almeno finché  $f < 50$  GHz si ottiene  $\frac{\hbar f}{kT} < 0.01$  e dunque  $\mathcal{P}_n(f) = \frac{2R\hbar f}{1 + \frac{\hbar f}{kT} - 1} = 2R\hbar f \cdot \frac{kT}{\hbar f} = 2kTR$ .

<sup>24</sup>Ovvero rappresentativa delle stadi di uscita del dispositivo o mezzo, a cui è connesso lo stadio di ingresso del ricevitore. L'argomento viene approfondito al cap. 15.

<sup>25</sup>Come sarà illustrato al § 15.1.1, si parla di carico *adattato* quando il suo valore determina un effetto desiderato, come il massimo trasferimento di potenza in questo caso, o l'assenza di distorsione lineare qualora  $Z_c(f) = \alpha Z_g(f)$ .

<sup>26</sup>Mentre la potenza *di segnale* (o *a vuoto*) è il quadrato di una tensione, quella assorbita dal carico è misurata in Watt, e per questo viene d'ora in poi indicata con  $\mathcal{W}$ .

potenza disponibile del generatore, e pari a

$$\mathcal{W}_{dg}(f) = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{4R_g(f)} \quad [\text{Watt}]$$

Allo stesso modo, anche il generatore di rumore cede al carico la propria potenza (di rumore) disponibile, la cui densità è pari a

$$\mathcal{W}_{dn}(f) = \frac{\mathcal{P}_n(f)}{4R_g(f)} = \frac{2kTR_g(f)}{4R_g(f)} = \frac{1}{2}kT_g \left[ \frac{\text{Watt}}{\text{Hz}} \right]$$

Notiamo quindi che la densità di potenza *disponibile* del rumore è tornata ad avere uno spettro *bianco*!

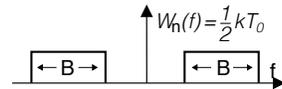
**SNR di un generatore** Nel caso in cui  $T_g = T_0 = 300$  °Kelvin (pari a 27° Celsius) il termine  $\frac{1}{2}kT_g$  è universalmente indicato con la notazione  $\mathcal{W}_{dn}(f) = \frac{1}{2}kT_0 = \frac{1}{2}N_0$ , e poiché il ricevitore si considera sempre *adattato*, il segnale emesso dal generatore presenta un *SNR intrinseco*<sup>27</sup> pari a

$$SNR_g(f) = \frac{\mathcal{W}_{dg}(f)}{\frac{1}{2}kT_0} \quad (7.12)$$

Inoltre se  $T_g = T_0$  il valore assunto da  $kT_0$  può essere *precalcolato*, ed espresso in unità logaritmiche, fornendo  $10 \log_{10}(1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300) \simeq -204 \frac{\text{dBW}}{\text{Hz}}$ ; in virtù delle regole di conversione introdotte a pag. 186 otteniamo per esso anche i valori seguenti, da utilizzare nelle formule di progetto del cap. 16:

$$kT_0 = -204 \text{ [dBW/Hz]} = -174 \text{ [dBm/Hz]} = -114 \text{ [dBm/MHz]}$$

**Esempio** All'uscita di un filtro passa-banda ideale non rumoroso<sup>28</sup> di estensione  $B = 1$  MHz si riscontra una potenza disponibile di rumore  $\mathcal{W}_{dn} = 4 \cdot 10^{-3}$  picoWatt. Infatti  $\mathcal{W}_{dn} = \mathcal{W}_{dn}(f) \cdot 2B = kT_0 \cdot B$  ovvero  $\mathcal{W}_{dn}^{\text{dBm}} = -114 \text{ [dBm/MHz]} + 0 \text{ [dBMHz]} = -114 \text{ dBm}$  e dunque  $\mathcal{W}_{dn} = 10^{-114/10} = 10^{-11.4} = 3.98 \cdot 10^{-12} \simeq 4 \cdot 10^{-12}$  mW.



## 7.5 Appendice

### 7.5.1 Densità di potenza del rumore gaussiano attraverso una non linearità

Riprendiamo il calcolo della  $\mathcal{P}_y(f)$  per un segnale  $y(t) = G[x(t) + \alpha x^2(t) + \beta x^3(t)]$  qualora  $x(t)$  sia membro di un processo stazionario gaussiano a media nulla e potenza  $\mathcal{P}_x$ . A tale scopo occorre prima determinare  $\mathcal{R}_y(\tau) = E\{y(t)y(t+\tau)\}$ , e quindi eseguirne la trasformata di Fourier. Sulla base di un risultato di teoria<sup>29</sup> che asserisce che per una coppia di

<sup>27</sup>Notiamo che lo stesso valore di  $SNR_g$  è esprimibile anche come rapporto tra le potenze di *segnale* anziché *disponibili*: infatti

$$SNR_g(f) = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{4R_g(f)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}kT_g} = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{2kT_g R_g(f)} = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{\mathcal{P}_n(f)}$$

<sup>28</sup>Si intende dire che il filtro non introduce altro rumore oltre a quello di natura termica. Al § 15.2 sarà illustrato come mediante il *fattore di rumore*  $F_{dB}$  si possa tenere conto dal rumore introdotto da una o più *reti* due porte in cascata, sia di tipo passivo come nei collegamenti, che di tipo attivo come per amplificatori e mixer.

<sup>29</sup>Noto come teorema di *Isserlis*, vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Isserlis%27\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Isserlis%27_theorem).

v.a.  $x_1, x_2$  estratte da un processo gaussiano a media nulla risulta che  $E\{x_1^i x_2^j\} = 0$  se  $i + j$  è dispari, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\} = E\{G^2(x_1 + \alpha x_1^2 + \beta x_1^3)(x_2 + \alpha x_2^2 + \beta x_2^3)\} = \\ &= G^2(E\{x_1 x_2\} + 2\beta E\{x_1 x_2^3\} + \alpha^2 E\{x_1^2 x_2^2\} + \beta^2 E\{x_1^3 x_2^3\}) \end{aligned} \quad (7.13)$$

in cui si è indicato per brevità  $x_1 = x(t)$  e  $x_2 = x(t + \tau)$ , che rappresentano le due v.a. marginali di una gaussiana multivariata a media nulla e covarianza  $\Sigma_x = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_x & \mathcal{R}_x(\tau) \\ \mathcal{R}_x(\tau) & \mathcal{P}_x \end{bmatrix}$ . A riguardo della (7.13), riconosciamo subito  $E\{x_1 x_2\}$  come la  $\mathcal{R}_x(\tau)$  in ingresso, mentre per gli altri momenti misti ci si avvale di un corollario al precedente risultato<sup>30</sup>, valido per una gaussiana multivariata, che asserisce:

$$E\{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n\} = \sum (E\{x_{p_1} \cdot x_{p_2}\} \cdot E\{x_{p_3} \cdot x_{p_4}\} \cdot \dots \cdot E\{x_{p_{n-1}} \cdot x_{p_n}\}) \quad (7.14)$$

in cui la somma è estesa a tutte le possibili permutazioni *non equivalenti* di  $(1, 2, \dots, n)$ <sup>31</sup>. In base a ciò, sviluppiamo i termini che compaiono nella (7.13), e dopo semplici ma laboriosi passaggi otteniamo

$$\begin{aligned} E\{x_1 x_2^3\} &= E\{x_1 x_2 x_2 x_2\} = 3\mathcal{P}_x \cdot \mathcal{R}_x(\tau) \\ E\{x_1^2 x_2^2\} &= E\{x_1 x_1 x_2 x_2\} = \mathcal{P}_x^2 + 2\mathcal{R}_x^2(\tau) \\ E\{x_1^3 x_2^3\} &= E\{x_1 x_1 x_1 x_2 x_2 x_2\} = 9\mathcal{P}_x^2 \cdot \mathcal{R}_x(\tau) + 6\mathcal{R}_x^3(\tau) \end{aligned} \quad (7.15)$$

in cui si è sostituito (per la stazionarietà)  $E\{x_1^2\} = E\{x_2^2\}$  con  $\mathcal{P}_x$ , e  $E\{x_1 x_2\} = E\{x_2 x_1\}$  con  $\mathcal{R}_x(\tau)$ . Sostituendo le (7.15) nella (7.13) possiamo ora scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= G^2(\mathcal{R}_x(\tau) + 2\beta \cdot 3\mathcal{P}_x \cdot \mathcal{R}_x(\tau) + \alpha^2(\mathcal{P}_x^2 + 2\mathcal{R}_x^2(\tau)) + \beta^2(9\mathcal{P}_x^2 \cdot \mathcal{R}_x(\tau) + 6\mathcal{R}_x^3(\tau))) \\ &= G^2(\alpha^2 \mathcal{P}_x^2 + (1 + 6\beta \mathcal{P}_x + 9\beta^2 \mathcal{P}_x^2) \mathcal{R}_x(\tau) + \alpha^2 2\mathcal{R}_x^2(\tau) + 6\beta^2 \mathcal{R}_x^3(\tau)) \end{aligned}$$

da cui finalmente otteniamo la  $\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_y(\tau)\}$  come somma di quattro termini  $\mathcal{P}_0(f) + \mathcal{P}_I(f) + \mathcal{P}_{II}(f) + \mathcal{P}_{III}(f)$ , in cui

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(f) &= G^2 \alpha^2 \mathcal{P}_x^2 \cdot \delta(f) \\ \mathcal{P}_I(f) &= G^2 (1 + 6\beta \mathcal{P}_x + 9\beta^2 \mathcal{P}_x^2) \cdot \mathcal{P}_x(f) \\ \mathcal{P}_{II}(f) &= G^2 \alpha^2 2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) \\ \mathcal{P}_{III}(f) &= G^2 \beta^2 6 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) \end{aligned}$$

Il termine  $\mathcal{P}_0(f)$  rappresenta una *contributo in continua* presente in  $y(t)$  (ma non in  $x(t)$ ) e di ampiezza  $G\alpha\mathcal{P}_x$ , mentre  $\mathcal{P}_I(f)$  rappresenta una *amplificazione* di  $x(t)$  di un fattore pari a  $G\sqrt{1 + 6\beta\mathcal{P}_x + 9\beta^2\mathcal{P}_x^2}$ , e rappresenta il *segnale utile*. Viceversa, i termini  $\mathcal{P}_{II}(f)$  e  $\mathcal{P}_{III}(f)$  costituiscono la *distorsione* causata dall'elemento non lineare, e sono discussi al § 7.3.

<sup>30</sup>Vedi <https://math.stackexchange.com/questions/957351/proving-isserlis-theorem-for-n-4> per la dimostrazione del caso di quarto ordine.

<sup>31</sup>Le permutazioni si definiscono *equivalenti* se accoppiano con ordine diverso o in posizione diversa le stesse v.a.. Ad esempio, per quattro v.a. si ha:

$$E\{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\} = E\{x_1 \cdot x_2\} \cdot E\{x_3 \cdot x_4\} + E\{x_1 \cdot x_3\} \cdot E\{x_2 \cdot x_4\} + E\{x_1 \cdot x_4\} \cdot E\{x_2 \cdot x_3\}$$

mentre per un momento di ordine 6 si ottengono 15 termini. Se il momento misto coinvolge un numero di v.a. inferiore al suo ordine, come per le (7.15), le permutazioni intendono indicare la *posizione* di ogni v.a., e non il suo pedice.

## Trasmissione dati in banda base

**D**OPO che i segnali sono stati convertiti in sequenze numeriche mediante campionamento (cap. 4), e queste ultime convertite in cifre binarie mediante quantizzazione (vedi § 4.2.1.1), non esiste alcuna differenza tra segnali nativamente analogici e poi numerizzati, e dati nativamente numerici, come ad es. i documenti su di un computer. In questo capitolo si affrontano gli aspetti legati alla trasmissione dei dati (di qualunque natura) mediante un *nuovo segnale analogico* realizzato a partire dai dati numerici, e sono discussi gli accorgimenti necessari alla corretta ricezione di tale segnale, in modo da poter recuperare i valori numerici trasportati.

### 8.1 Trasmissione su canale numerico

Al primo capitolo (§ 1.2.2) abbiamo illustrato come tra sorgente e destinazione di una trasmissione numerica si possa idealizzare la presenza di un *canale numerico*, che racchiude i dispositivi idonei a svolgere diverse operazioni, in modo da permettere la trasmissione di informazioni numeriche mediante un segnale analogico (indicato come *segnale dati*), che viaggia su *canale analogico*. Se quest'ultimo presenta una risposta in frequenza di tipo *passa-banda*<sup>1</sup>, anche il segnale dati dovrà presentare le medesime caratteristiche frequenziali, ed al capitolo 14 sono illustrati i principi di funzionamento dei dispositivi *modem* necessari a generare tali segnali. Nel caso in cui, invece, il canale analogico sia da considerare *passa-basso*, il segnale dati viene detto *di banda base*, ed il *modem* che lo genera è indicato come *codificatore di linea*.

#### 8.1.1 Trasmissione numerica di banda base

La figura 8.1 rappresenta lo schema generale di un canale numerico, con evidenziati i principali elementi che lo compongono, la funzione dei quali viene ora brevemente illustrata.

L'ingresso al canale è descritto, nella sua forma più generale, come un flusso (o sequenza) di *cifre binarie* con valore logico di 0 ed 1, indicate come bit (*binary digit*), e che pervengono ad una velocità (binaria) di  $f_b$  bit/secondo.

Il primo elemento del canale numerico prende il nome di *codificatore di linea* (§ 8.1.2) e produce un *segnale dati* analogico che, ogni  $T_s$  secondi, trasporta un *simbolo*, che a sua volta

<sup>1</sup>Ovvero lascia passare solo frequenze comprese in un intervallo che non comprende l'origine.

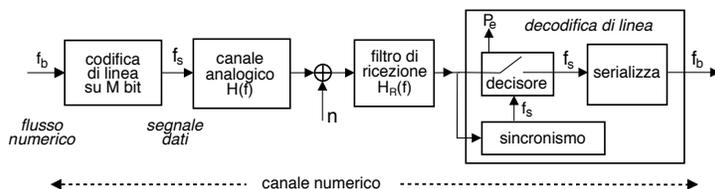
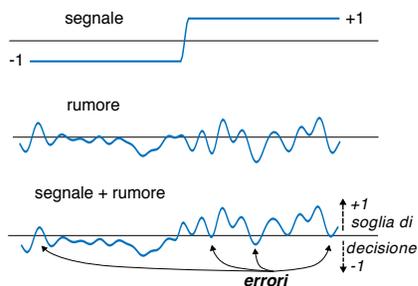


Figura 8.1: Elementi costitutivi di un canale numerico

rappresenta *uno o più bit*. Pertanto per la *frequenza di simbolo*<sup>2</sup>  $f_s = 1/T_s$  si può scrivere  $f_s \leq f_b$ , con il segno di uguale nel caso di simboli *binari*. Al contrario, se ogni simbolo rappresenta  $M > 1$  bit, come vedremo al § 8.1.2.4 si ottiene un *risparmio di banda* per il segnale uscente dal codificatore, in modo da adattare lo stesso alla *banda passante* che caratterizza la risposta in frequenza  $H(f)$  del canale<sup>3</sup>. Per qualunque scelta di  $M$ , ad ogni possibile simbolo è associato ad un diverso *livello* del segnale analogico trasmesso.

L'elemento che svolge le funzioni inverse a quelle finora descritte è il *decodificatore di linea* posto al lato ricevente, che *ricostruisce* la sequenza dei simboli trasmessi a partire dal segnale analogico ricevuto, innanzitutto *campionandolo*<sup>4</sup> (con ritmo  $f_s$ ), e quindi *decidendo* quale simbolo sia stato trasmesso all'istante  $t = nT_s$ , in base al confronto tra il valore campionato, ed alcune *soglie di decisione*.

La presenza di un processo di *rumore additivo*  $n(t)$  all'uscita del canale fa sì che il segnale preso in esame dal decisore possa superare la soglia di decisione, determinando un *errore* (con probabilità  $P_e$ ) a riguardo di quale simbolo sia stato trasmesso. La valutazione di tale probabilità viene svolta al § 8.4.3, ma anticipiamo subito che  $P_e$  è tanto maggiore quanto più è grande la potenza (e dunque l'ampiezza) del rumore in ingresso al decisore, come evidente dalla figura a lato per una trasmissione a *due livelli*. Fortunatamente la potenza di rumore può essere resa *minima* progettando adeguatamente il filtro  $H_R(f)$  di ricezione (vedi § 11.1.2), che può anche realizzare un *filtro adattato* (§ 6.8), oppure ancora un dispositivo di *equalizzazione* (§ 15.4).



Il confronto con la soglia di decisione non avviene *di continuo* come in figura, bensì agli istanti  $t = nT_s$  corrispondenti a quelli in cui sono codificati i simboli. Nello schema di fig. 8.1 è infatti presente anche un imprescindibile dispositivo di *sincronizzazione*, che osservando il segnale ricevuto<sup>5</sup> genera un *segnale di orologio* (CLOCK) che consente al decisore di operare *al passo* con il ritmo  $f_s = 1/T_s$ : al § 8.7 sono descritte alcune tecniche per affrontare questo aspetto.

<sup>2</sup>Indichiamo  $T_s$  come *periodo di simbolo*, mentre il suo inverso  $f_s = 1/T_s$  è detto *frequenza di simbolo*, *baud-rate* o *frequenza di segnalazione*, e si misura in simboli/secondo, unità di misura indicata anche come *baud*, in memoria di ÉMILE BAUDOT, vedi [http://it.wikipedia.org/wiki/Codice\\_Baudot](http://it.wikipedia.org/wiki/Codice_Baudot).

<sup>3</sup>Se non fosse preso questo provvedimento, e si trasmettesse un segnale con una occupazione spettrale maggiore della *banda passante* del canale, nel segnale ricevuto verrebbero a mancare alcune componenti frequenziali, e di conseguenza la forma d'onda del segnale risulterebbe modificata, causando così il fenomeno di *interferenza tra simboli* (vedi § 8.1.2.2).

<sup>4</sup>Sembra giusto sottolineare che questo *campionamento* non ha lo scopo discusso al cap. 4, ma si tratta piuttosto qualcosa di più simile al filtro adattato (§ 6.8), che *decide* in base al superamento di una soglia. D'altra parte, mentre la decisione operata dal quantizzatore introduce un errore, quella del ricevitore numerico discrimina tra informazioni *già discrete*.

<sup>5</sup>Oppure mediante una seconda linea di trasmissione.

Infine, nel caso in cui ogni simbolo codifichi più di un bit (vedi la trasmissione *multilivello* al § 8.1.2.4), è necessaria la presenza di un *serializzatore* che provvede ad emettere uno dopo l'altro i bit corrispondenti a ciascun simbolo ricevuto.

### 8.1.2 Codifica di linea e segnale dati

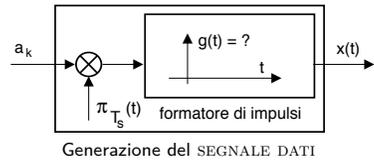
Poniamoci nel caso più generale in cui una *sorgente discreta* emetta simboli  $a_k^i$ , in cui  $i = 1, 2, \dots, L$  rappresenta l'identità del simbolo scelto tra  $L$  (o dimensione dell'alfabeto di sorgente)<sup>6</sup>, mentre il pedice  $k$  rappresenta l'indice temporale dell'istante  $t = kT_s$  in cui è stato emesso il simbolo  $a_k^i$ . I simboli sono infatti prodotti con frequenza  $f_s = 1/T_s$ , ed il codificatore di linea fa corrispondere alla sequenza  $\{a_k\}$  un *segnale dati*  $x(t)$  espresso come

$$x(t) = g(t) * \sum_k a_k \cdot \delta(t - kT_s) = \sum_k a_k \cdot g(t - kT_s) \quad (8.1)$$

a cui corrisponde lo schema simbolico mostrato a lato, in cui  $\pi_{T_s}(t) = \sum_k \delta(t - kT_s)$  è un treno di impulsi (§ 3.7) con periodo  $T_s = 1/f_s$ , schema del tutto analogo al *SAMPLE&HOLD* introdotto al § 4.1.4, tranne che ora  $g(t)$  è generico e prende il nome di *impulso dati*. Come approfondito al § 6.9.3, sotto l'ipotesi di simboli  $a_k$  statisticamente indipendenti ed a media nulla, lo spettro di densità di potenza di  $x(t)$  può essere espresso nella forma

$$\mathcal{P}_x(f) = \sigma_A^2 \frac{\mathcal{E}_G(f)}{T_s} \quad (8.2)$$

in cui  $\mathcal{E}_G(f)$  rappresenta lo spettro di densità di energia di  $g(t)$ , che quindi determina l'andamento di  $\mathcal{P}_x(f)$ , mentre  $\sigma_A^2$  è la varianza dei valori  $a_k$ , e dunque ne rispecchia la dinamica<sup>7</sup>.



**Onda PAM** Il segnale dati (8.1) è a volte indicato come *onda PAM*, acronimo di *Pulse Amplitude Modulation*, ad indicare la variazione (o modulazione) che i valori  $a_k$  determinano sugli impulsi  $a_k g(t - mT)$  che si susseguono sull'asse temporale  $\sum_m g(t - mT)$ <sup>8</sup>. Un ulteriore punto di vista è illustrato al § 19.9.5.

#### 8.1.2.1 Segnale binario e onda rettangolare

Come applicazione della (8.2) pensiamo ora di realizzare una trasmissione *binaria*, ossia  $f_s = f_b$  ed  $a_k = \{1, -1\}$  a simboli *equiprobabili* in modo che la sequenza  $\{a_k\}$  sia a media nulla, e adottando un impulso rettangolare  $g(t) = \text{rect}_\tau(t - \tau/2)$  con  $\tau \leq T_b$  in modo da mantenere la sua durata inferiore al periodo di simbolo. In tal caso si ottiene<sup>9</sup>  $\sigma_A^2 = 1$  e  $\mathcal{E}_G(f) = \tau^2 \text{sinc}^2(f\tau)$ ,

<sup>6</sup>Se  $L$  risulta essere una potenza di due ovvero  $L = 2^M$ , ogni diverso valore rappresenta un gruppo di  $M = \log_2 L$  cifre binarie (*bit*), e la trasmissione convoglia un messaggio numerico con *frequenza binaria* pari a  $f_b [\frac{\text{bit}}{\text{secondo}}] = M [\frac{\text{bit}}{\text{simbolo}}] \cdot f_s [\frac{\text{simboli}}{\text{secondo}}]$ .

<sup>7</sup>Considerando i simboli  $a_k$  come v.a. discrete, alla nota 88 di pag. 171 viene derivata l'espressione di  $\sigma_A^2$ .

<sup>8</sup>Infatti, se i valori  $a_k$  fossero tutti uguali, il segnale  $\sum_m g(t - mT)$  sarebbe semplicemente periodico, come descritto a pag. 70.

<sup>9</sup>Svolgendo i conti si ha

$$\sigma_A^2 = E \{a_k^2\} - (E \{a_k\})^2 = E \{a_k^2\} = \sum p_i (a_k^{(i)})^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

mentre per quanto riguarda  $\mathcal{E}_G(f)$  si ottiene

$$\mathcal{E}_G(f) = |G(f)|^2 = |\mathcal{F}\{g(t)\}|^2 = \left| \tau \text{sinc}(f\tau) e^{-j2\pi f\tau/2} \right|^2 = \tau^2 \text{sinc}^2(f\tau)$$

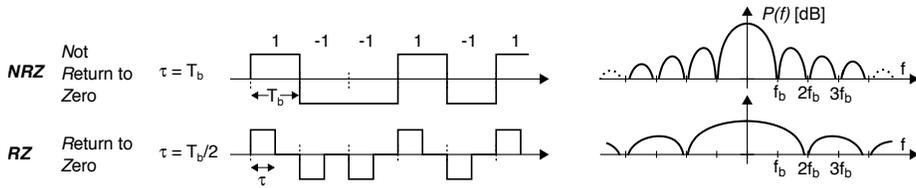


Figura 8.2: Segnale dati binario e relativa densità di potenza espressa in dB/Hz

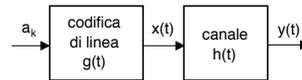
dunque la (8.2) diviene

$$\mathcal{P}_x(f) = \sigma_A^2 \frac{\mathcal{E}_G(f)}{T_b} = \frac{\tau^2}{T_b} \text{sinc}^2(f\tau)$$

e presenta l'andamento<sup>10</sup> del tipo riportato sulla destra di fig. 8.2 ed espresso in scala in deciBel (§ 7.1), per i casi  $\tau = T_b$  e  $\tau = T_b/2$ . Osserviamo che il lobo principale di  $\mathcal{P}_x(f)$  è delimitato ad  $f = \frac{1}{\tau}$ , ovvero  $f = f_b$  qualora  $\tau = T_b$ , mentre nel caso  $\tau < T_b$  la densità spettrale si dilata e si abbassa di 6 dB<sup>11</sup>. L'occupazione di banda complessiva sarà infine approssimata ad un valore pari ad alcuni multipli dell'ampiezza del primo lobo<sup>12</sup>.

### 8.1.2.2 Distorsione lineare e interferenza intersimbolica

Qualora il canale attraversato dal segnale dati  $x(t)$  (8.1) non sia un canale perfetto (§ 7), ovvero presenti una risposta impulsiva  $h(t) \neq a\delta(t - \tau)$ , si verifica il fenomeno di *distorsione lineare*, ed in uscita dal canale si presenta<sup>13</sup> un nuovo segnale dati



$$y(t) = \sum_k a_k \cdot \tilde{g}(t - kT_s) \quad \text{in cui} \quad \tilde{g}(t) = g(t) * h(t)$$

L'effetto della convoluzione tra  $g(t)$  ed  $h(t)$  è quello di *disperdere* nel tempo la forma d'onda  $g(t)$ , che anche se delimitata entro un periodo di simbolo come per il caso dell'onda rettangolare, arriva ad *invadere* gli intervalli temporali riservati ai simboli adiacenti, dando luogo al fenomeno della *interferenza intersimbolica* indicata anche come ISI, *InterSymbolic Interference*.

### 8.1.2.3 Diagramma ad occhio

<sup>10</sup>Estendiamo il risultato al caso noto di segnale periodico. Ponendo  $a_k = (-1)^k$  si genera un'onda rettangolare, il cui spettro (mancando la componente aleatoria) è a righe, con lo stesso inviluppo di tipo  $\text{sinc}^2(fT_b)$ .

<sup>11</sup>Infatti il fattore  $\frac{\tau^2}{T_b}$  passa da  $T_b$  a  $\frac{T_b}{4}$ , pari ad una riduzione di 6 dB.

<sup>12</sup>

$f_b$	apparato	$T_b$	$10/T_b$
$2.4 \cdot 10^3$	Modem (anni '80)	$4.2 \cdot 10^{-3}$	24 KHz
$28.8 \cdot 10^3$	Modem (anni '90)	$3.5 \cdot 10^{-5}$	288 KHz
$10 \cdot 10^6$	Thin Ethernet (anni '90)	$10^{-7}$	100 MHz
$100 \cdot 10^6$	Fast Ethernet	$10^{-8}$	1 GHz

Nella tabella a fianco è riportata l'occupazione di banda necessaria a contenere 10 lobi di un  $\text{sinc}(fT_b) = 1/T_b \mathcal{F}\{\text{rect}_{T_b}(t)\}$ , ovvero relativa ad una trasmissione binaria a velocità  $f_b = 1/T_b$  per alcuni casi tipici del passato: osserviamo che un'onda rettangolare può andar bene a basse velocità di trasmissione, infatti già per 10 Msimboli/sec, velocità di una LAN, occorrono 100 MHz di banda.

osserviamo che un'onda rettangolare può andar bene a basse velocità di trasmissione, infatti già per 10 Msimboli/sec, velocità di una LAN, occorrono 100 MHz di banda.

$$\begin{aligned} \text{}^{13} y(t) &= \left[ \sum_k a_k \cdot g(t - kT_s) \right] * h(t) = \left[ g(t) * \sum_k a_k \cdot \delta(t - kT_s) \right] * h(t) = \\ &= g(t) * h(t) * \sum_k a_k \cdot \delta(t - kT_s) = \tilde{g}(t) * \sum_k a_k \cdot \delta(t - kT_s) = \\ &= \sum_k a_k \cdot \tilde{g}(t - kT_s) \end{aligned}$$

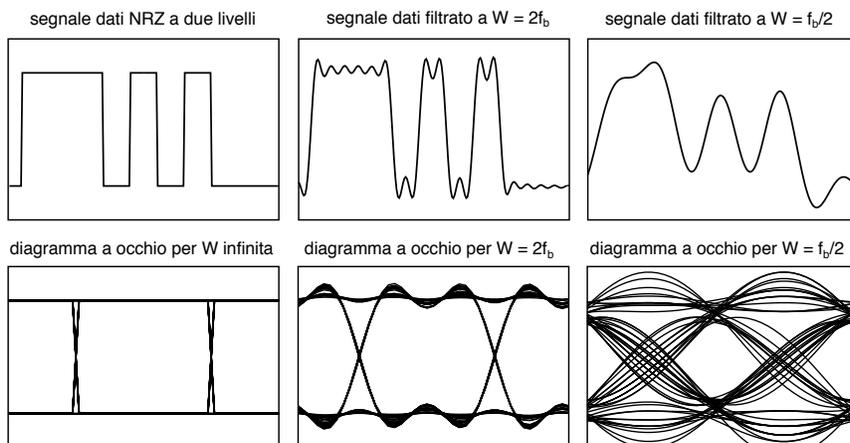
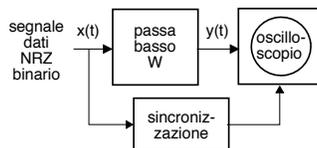


Figura 8.3: Segnale dati a banda infinita e limitata, e relativo diagramma ad occhio

Per analizzare l'effetto della distorsione lineare su di un segnale dati  $x(t)$ , raffigurato in alto a sinistra in fig. 8.3 e realizzato in versione NRZ mediante un impulso  $g(t) = \text{rect}_{T_b}(t)$  e valori  $a_k$  binari pari a 11110101000, facciamo riferimento allo schema disegnato a lato, che prevede di limitare la banda di  $x(t)$  ad una frequenza  $W$  pari a  $2f_b$  al centro di fig. 8.3, e  $f_b/2$  a destra, ossia pari al *doppio* ed alla *metà* della larghezza del primo lobo di  $\mathcal{P}_x(f)$ . Come evidente la limitazione di banda causa una deformazione della forma d'onda, ed il campionamento di  $x(t)$  produce valori diversi da quelli originari.



Il segnale distorto  $y(t)$  viene ora posto in ingresso ad un *oscilloscopio*<sup>14</sup>, la cui *base dei tempi* è sincronizzata con quella di  $x(t)$  in modo da visualizzare sullo schermo la sovrapposizione di forme d'onda corrispondenti a coppie di simboli binari. Il risultato è mostrato alla riga inferiore di fig. 8.3, e la disposizione risultante dei tracciati è detta *diagramma ad occhio* (traduzione di EYE DIAGRAM), termine che deriva dall'aspetto che assume il disegno che si forma, analogia che apparirà più evidente in seguito all'adozione di un impulso  $g(t)$  limitato in banda (figura 8.7), ed in presenza di rumore (figura 8.9).

Riservandoci di riprendere l'argomento nel seguito, osserviamo che il problema *non* si presenta se

- la frequenza di simbolo è molto inferiore alla banda del canale, *ovvero*
- la risposta impulsiva  $h(t)$  del canale ha estensione temporale molto inferiore a  $T_b$ .

#### 8.1.2.4 Trasmissione multilivello

Nel caso in cui la banda a disposizione per la trasmissione *sia scarsa*, una soluzione di semplice attuazione è quella di ricorrere ad una trasmissione non più *binaria*, ma che impieghi simboli ad  $L$  valori, detti *livelli*<sup>15</sup>. A tale scopo,  $M$  simboli binari della sequenza originaria  $a_k$

<sup>14</sup>Vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Oscilloscopio>

<sup>15</sup>Proseguiamo l'esposizione riferendoci direttamente al termine *livelli*, indicando con questo la scelta tra  $L$  possibili valori di *ampiezza* per il segnale trasmesso.

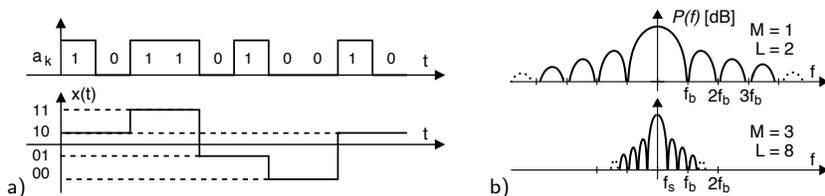


Figura 8.4: a) - codifica a quattro livelli di una sequenza binaria; b) - densità spettrale per un segnale binario ed uno ad otto livelli a parità di  $f_b$

sono raggruppati assieme, ed emessi *in contemporanea* da un dispositivo *serie/parallelo*<sup>16</sup> come una unica parola binaria di  $M$  bit, posta quindi in ingresso ad un DAC<sup>17</sup> che produce in uscita uno tra  $L = 2^M$  possibili valori, ampiezze, o livelli, che rappresentano i valori dei simboli per la nuova sequenza  $b_h$ , con  $h = \text{int}(k/M)$ . Dato che occorrono  $T_s = MT_b$  secondi per accumulare  $M$  bit, i simboli  $b_h$  della nuova sequenza sono prodotti ad una velocità indicata come frequenza di simbolo, pari a

$$f_s = f_b/M = 1/MT_b = 1/T_s$$

ed utilizzati per produrre un segnale dati  $x(t) = \sum_h b_h \cdot g(t - hT_s)$  ad  $L$  livelli e frequenza di simbolo  $f_s$ <sup>18</sup>.

Il risultato finale della codifica multilivello è esemplificato in figura 8.4-a), che mostra un segnale dati binario ad onda rettangolare NRZ, assieme al corrispondente segnale dati  $x(t)$  ottenuto per  $L = 4$ . All'aumento del periodo di simbolo  $T_s$  corrisponde quindi l'aumento della durata di  $g(t)$ , ovvero una *contrazione* della  $G(f)$  che compare nella (8.2), determinando quindi la *riduzione* della banda occupata da  $x(t)$ , come mostrato in fig. 8.4-b), relativa all'uso di  $M = 3$  bit/simbolo. Pertanto l'occupazione di banda del segnale dati può essere ridotta a piacere, semplicemente aumentando il numero  $M$  di bit raggruppati in una singola parola.

D'altra parte, al § 8.4 si mostra come, a meno di non aumentare la potenza del segnale dati, in presenza di rumore la codifica multilivello causi un *peggioramento* della probabilità di errore del decisore, in quanto a parità di dinamica complessiva del segnale, i valori dei livelli risultano ora *ravvicinati*. Questo fenomeno è raffigurato in figura 8.5, nella cui sinistra si mostra un segnale dati ad 8 livelli, al centro il diagramma ad occhio corrispondente, ed a destra lo stesso diagramma, per un segnale filtrato a meno della sua banda.

## 8.2 Scelta dell'impulso dati

Fino ad ora si è ragionato sulla base di un segnale dati generato secondo lo schema del § 8.1.2, in cui l'impulso  $g(t)$  è definito come  $g(t) = \text{rect}_\tau(t)$ , mentre nei sistemi di comunicazione

<sup>16</sup>Si tratta di un componente di elettronica digitale noto come registro a scorrimento (vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Registro\\_a\\_scorrimento](https://it.wikipedia.org/wiki/Registro_a_scorrimento)), costituito da  $M$  celle di memoria di un bit, ciascuna delle quali (con frequenza  $f_b$ ) copia il contenuto della precedente, mentre la prima è caricata (*in serie*) con un nuovo bit; al termine di  $M$  cicli i bit vengono letti tutti assieme, appunto, *in parallelo*.

<sup>17</sup>Digital to Analog Converter, vedi § 4.1.5.

<sup>18</sup>In ricezione si effettua il procedimento inverso, ripristinando la codifica binaria originaria di  $M$  bit a cui il codificatore ha associato il valore  $L$ -ario ricevuto, e quindi *serializzando* gli  $M$  bit, in modo da ri-ottenere la sequenza binaria di partenza.

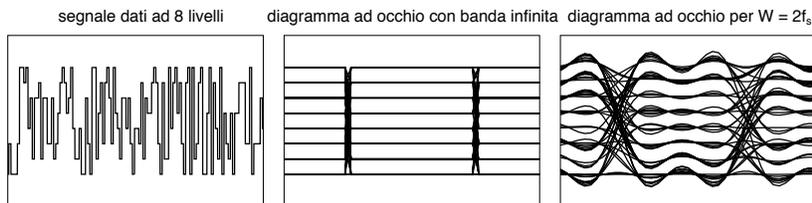


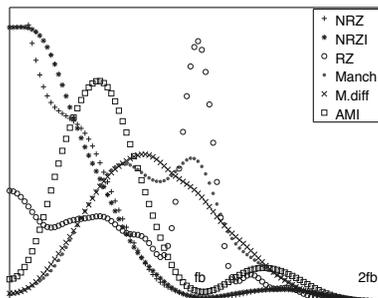
Figura 8.5: Segnale dati ad 8 livelli e diagramma ad occhio per banda infinita o limitata

questa è solamente una di diverse alternative, che ora andiamo ad illustrare.

### 8.2.1 Codici di linea a banda infinita

Come anticipato, lo spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_X(f) = \sigma_A^2 \frac{\mathcal{E}_G(f)}{T_s}$  di un segnale dati a andamento che dipende direttamente<sup>19</sup> da quello dello spettro di densità di energia  $\mathcal{E}_G(f)$  della risposta impulsiva  $g(t)$  usata nel formatore di impulsi, e dunque nel caso in cui  $g(t) = \text{rect}_\tau(t)$  si ottiene che  $\mathcal{P}_X(f)$  ha andamento di tipo  $\text{sinc}^2(f\tau)$  (vedi eq. (3.27) a pag. 69), che come noto si estingue come  $1/f^2$ , con il primo zero per  $f = 1/\tau$ . Nel caso in cui si operi a bassa velocità (ossia con  $\tau$  sufficientemente grande), si può considerare il canale come se fosse a banda infinita o perfetto, e quindi capace di riprodurre il segnale inalterato.

La figura a lato mostra lo spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  calcolato per  $f$  da zero fino al doppio di  $f_b$  per un segnale dati binario che ricade in una delle categorie illustrate di seguito. Il risultato è ottenuto generando i valori (0 o 1) per 400 simboli binari  $a_k$  in modo pseudo-casuale<sup>20</sup>, campionando il segnale dati (8.1) con 16 campioni per periodo di bit, e valutando con questi una stima spettrale<sup>21</sup>. Ogni scelta per il codice di linea ed il corrispondente impulso  $g(t)$  ha particolari proprietà, e può essere usato per trasmettere informazioni di natura binaria sotto determinate condizioni. Elenchiamo di seguito caratteristiche e proprietà di tali segnali, aiutandoci con gli esempi riportati in figura.



**Codici unipolari** Sono realizzati come segnali *sbilanciati*,<sup>22</sup> e codificano i due livelli logici 0 ed 1 rispettivamente con un valore nullo, od un valore positivo.

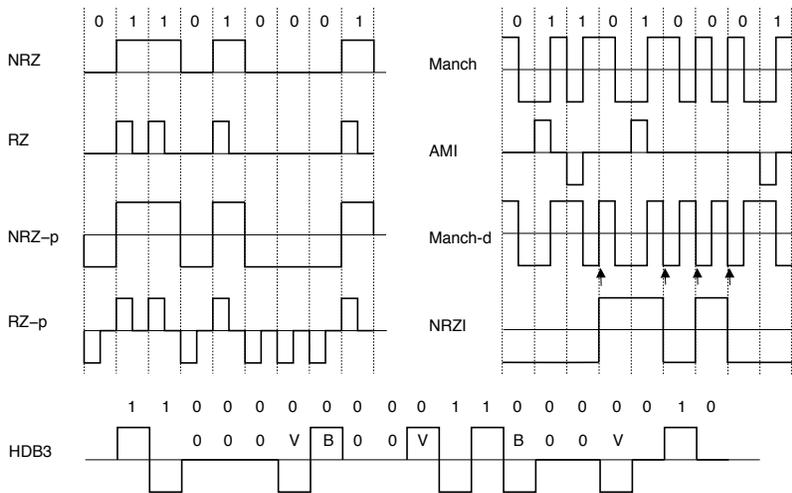
- **NRZ** o *No Return to Zero*: il suo nome significa che il segnale “non torna a zero” per tutto il periodo di bit, essendo  $g(t) = \text{rect}_{T_b}(t)$ ; pertanto lo spettro  $G(f)$  è di tipo  $\text{sinc}(fT_b)$ , con il primo zero a  $f = 1/T_b$ , e presenta una componente continua. Rimane costante per dati costanti e ciò complica la sincronizzazione (§ 8.7) del clock del ricevitore, data

<sup>19</sup>In realtà al § 6.9.3 si mostra come il risultato possa essere un po' diverso nel caso di simboli statisticamente dipendenti e/o non a media nulla.

<sup>20</sup>La non perfetta indipendenza statistica dei simboli prodotti dal generatore di numeri casuali di un computer si può riflettere su di una ridotta generalità del risultato mostrato, che tuttavia rispecchia molto bene i casi reali.

<sup>21</sup>Ottenuta applicando ai dati una finestra triangolare (§ 3.8.3) e quindi valutando il periodogramma (§ 6.3.1).

<sup>22</sup>[https://it.wikipedia.org/wiki/Linea\\_bilanciata](https://it.wikipedia.org/wiki/Linea_bilanciata)



l'assenza in questo caso di transizioni; la presenza di uno zero ad  $f = 1/T_b$  aggrava inoltre la situazione.

- **RZ** o *Return to Zero*: in questo caso l'impulso  $g(t)$  ha durata pari a  $T_b/2$ , il segnale presenta (a parità di ampiezza) minore energia di NRZ, mentre lo spettro presenta una componente pronunciata esattamente a frequenza  $f_b$ , agevolando la sincronizzazione sul bit ma occupando una banda maggiore. Ma anche questo segnale si mantiene costante per lunghe sequenze di zeri.

**Codici bipolari** Usano segnali bilanciati o *antipodali*, e sono ricevuti mediante uno stadio di ingresso differenziale<sup>23</sup>, riducendo la sensibilità al rumore. In funzione del tipo di codice, è possibile garantire l'assenza di una componente continua nel segnale.

- **NRZ polare, RZ polare**: realizzano l'impulso con polarità negativa quando associato ad un bit pari a zero, e presentano media nulla solo se i valori 0 ed 1 sono equiprobabili. RZ polare non è mai costante, facilitando il compito della sincronizzazione.
- **Manchester**: realizza una codifica *di fase*, in quanto usa un impulso RZ a piena dinamica, in salita od in discesa, in corrispondenza dei bit 1 e 0. Per questo motivo il segnale risulta sempre a media nulla. L'occupazione spettrale è intermedia tra il caso NRZ ed RZ, dato che la durata dell'impulso può essere  $T_b$  o  $T_b/2$ . L'uso del codice Manchester è prescritto dallo standard IEEE 802.3 per le LAN a bus con contesa di accesso CDMA/CD (vedi § 18.1.4).
- **AMI** o *Alternate Mark Inversion*: codifica gli 1 con polarità alternate, mediante un impulso  $g(t)$  rettangolare di estensione  $T_b$  o  $T_b/2$ , e gli zeri con assenza di segnale, garantendo assenza di valore medio. La caratteristica di alternare valori positivi e negativi gli giova il termine di codice *pseudo-ternario*, e denota la presenza di memoria. Da un punto di vista spettrale, l'AMI esibisce una occupazione di banda<sup>24</sup> ridotta rispetto a RZ, per via dei periodi silenti corrispondenti agli zeri. Se il periodo silente è prolungato, l'assenza di

<sup>23</sup>Vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Amplificatore\\_differenziale](https://it.wikipedia.org/wiki/Amplificatore_differenziale)

<sup>24</sup>La densità spettrale mostrata in figura è relativa all'uso di una  $g(t)$  di tipo RZ.

transizioni può compromettere la sincronizzazione di bit, e per questo motivo sono stati definiti ulteriori codici derivati, come ad esempio l'**HDB3**<sup>25</sup>.

**Codici differenziali** Sono ancora di tipo bipolare, ma la forma d'onda non è più legata al valore di un solo bit, bensì dipende da quello di due bit contigui (vedi anche § 14.4). Ciò permette di risolvere l'ambiguità presente qualora si scambino le polarità degli estremi del collegamento<sup>26</sup>.

- **Manchester Differenziale:** usa un impulso RZ a piena dinamica come per il Manchester, la cui polarità risulta però *invertita* rispetto all'impulso precedente se il nuovo bit è uno, mentre è mantenuta uguale nel caso arrivi uno zero (in corrispondenza delle frecce); pertanto, in presenza degli uni non si verifica transizione al confine tra i periodi di bit. Questa soluzione è utilizzata nel contesto dello standard IEEE 802.5 per LAN *Token Ring*. L'occupazione spettrale è simile a quella osservabile per la codifica Manchester.
- **NRZI:** deriva dall'NRZ, e la I sta per *Inverted*. Ora il livello del segnale permane nello stesso stato per i bit pari ad uno, e cambia stato per i bit pari a zero. L'assenza di valor medio è legata alla statistica che descrive le sequenze di uni e dunque non può essere garantita, mentre permangono i problemi legati alla sincronizzazione. La ridotta occupazione spettrale lo rende però interessante.

## 8.2.2 Segnale dati limitato in banda

Discutiamo ora come la scelta di un impulso  $g(t)$  non rettangolare permetta di ridurre l'occupazione di banda del relativo segnali dati, indipendentemente dalla codifica multilivello. Organizziamo il ragionamento analizzando per prima cosa i requisiti che deve avere l'impulso  $g(t)$  per soddisfare tre diverse esigenze parzialmente contrapposte, anticipando che la soluzione sarà necessariamente una forma di compromesso.

### 8.2.2.1 Requisiti per l'impulso di trasmissione

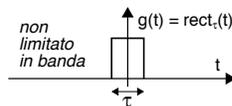
**Limitazione di banda** Abbiamo già osservato (vedi § 8.1.2) che (sotto opportune condizioni) la densità di potenza del segnale dati risulta pari a  $\mathcal{P}_x(f) = \sigma_A^2 \frac{|G(f)|^2}{T_s}$  (eq. (8.1)), e la sua ricezione inalterata è possibile solo qualora il segnale sia inviato attraverso una *canale perfetto* (pag. 7), ovvero la cui risposta in frequenza presenti modulo costante e fase lineare nella banda di frequenze occupata da  $G(f)$ . Se al contrario la banda del segnale eccede quella del canale, gli effetti di distorsione lineare introdotti su (8.1) non sono trascurabili, e gli impulsi  $g(t)$  si *deformano* (vedi § 8.1.2.2); in particolare, possono estendersi per una durata maggiore di  $T_s$ <sup>27</sup>, causando problemi di *interferenza tra simboli* (ISI).

<sup>25</sup>La codifica HDB3 è utilizzata per trasmettere il segnale PCM a 2 Mbps (vedi § 19.3.1), e l'acronimo significa *High-Density Bipolar-3-zeroes*. Come per AMI, rappresenta gli uni con polarità alternate, ma rimpiazza le sequenze di quattro zeri consecutivi forzando una *violazione* della regola dell'alternanza sull'ultimo bit dei quattro, in modo che il ricevitore, rilevando la violazione, è in grado di riportare il bit a zero. Dato però che la presenza della violazione creerebbe la comparsa di una componente continua nel segnale, sono inseriti anche dei bit di *bilanciamento*, per rimuovere quest'ultima. I bit di bilanciamento si collocano al posto del primo dei quattro zeri, e la loro polarità è scelta in modo che la sequenza delle violazioni abbia una polarità alternata; in definitiva, dopo la prima violazione, si usa sempre anche il bit di bilanciamento.

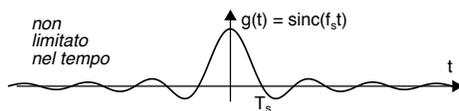
<sup>26</sup>In tal caso tutti gli zeri diventerebbero uni e viceversa, mentre con la codifica differenziale questo viene evitato.

<sup>27</sup>Come mostrato al § 8.1.2.2, il segnale dati filtrato è basato su impulsi  $\tilde{g}(t) = g(t) * h(t)$ , con una durata pari alla somma delle durate di  $g(t)$  e  $h(t)$ . Pertanto, anche se  $g(t)$  è limitato nel tempo, come nei casi descritti al § 8.2.1, l'impulso  $\tilde{g}(t)$  si può estendere a valori di  $t > T_s$ . Considerando ad esempio la trasmissione di soli due simboli  $a_0$  ed  $a_1$ , si otterrebbe  $x(t) = a_0\tilde{g}(t) + a_1\tilde{g}(t - T_s)$ , e dunque  $x(T_s) = a_0\tilde{g}(T_s) + a_1\tilde{g}(0)$  dipenderà da entrambi i simboli anziché solamente da  $a_1$ , osservando quindi un errore pari a  $a_0\tilde{g}(T_s)$ , detto appunto *interferenza tra simboli*.

Ad esempio, nel caso in cui si adotti  $g(t) = \text{rect}_\tau(t)$ , allora  $G(f) = \tau \text{sinc}(f\tau)$ , con  $\tau \leq T_s$ ; pertanto, il primo passaggio per zero è a frequenza  $\frac{1}{\tau} \geq \frac{1}{T_s} = f_s$ , e la densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  può essere considerata nulla solo dopo diversi multipli di tale valore.



**Limitazione nel tempo** Il problema della limitazione di banda potrebbe essere risolto adottando un impulso elementare di tipo  $g(t) = \text{sinc}(f_s t)$  che, essendo  $f_s = 1/T_s$ , ha trasformata  $G(f) = T_s \cdot \text{rect}_{f_s}(f)$  strettamente limitata nella banda  $W = \pm \frac{f_s}{2}$ : in tal caso il segnale dati non subisce alterazioni se il canale presenta un comportamento ideale in tale (limitato) intervallo di frequenze.

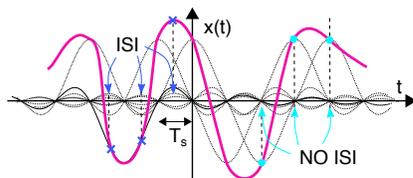


Notiamo ora che con questa scelta  $g(t)$  passa da zero per  $t = nT_s$  e quindi non provoca *interferenza* tra i simboli collocati agli istanti  $nT_s$ , come verificabile notando che in tal caso l'espressione (8.1) risulta del tutto simile alla (4.1) relativa alla ricostruzione *cardinale* di un segnale campionato. Ora però *non siamo interessati* al valore del segnale negli istanti intermedi a quelli a cui sono centrati i simboli, mentre desideriamo unicamente recuperare i valori originali  $a_k$ , che troviamo *in modo esatto* campionando il segnale dati agli istanti  $t = nT_s$ .

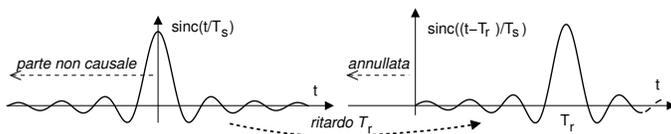
Lo svantaggio di adottare una forma d'onda  $g(t)$  limitata in frequenza è che la stessa è illimitata nel tempo, e dunque l'impulso può essere realizzato solo in modo approssimato<sup>28</sup>.

**Limitazione di precisione** Abbiamo appena mostrato come adottando una  $g(t) = \text{sinc}(f_s t)$  otteniamo un segnale dati la cui decodifica può evitare l'insorgenza di ISI purché lo stesso venga campionato *esattamente* agli istanti  $nT_s$ <sup>(29)</sup>. Infatti, al di fuori di tali istanti il valore del segnale dipende dal valore delle *code* degli impulsi  $g(t)$  centrati sugli altri simboli.

La situazione è raffigurata a lato, in cui la linea spessa rossa rappresenta il segnale dati  $x(t)$  risultato della somma dei contributi di termini  $a_k \text{sinc}(f_s(t - kT_s))$  con  $a_k = \pm 1$ . L'orologio (clock) del ricevitore deve comandare il campionario esattamente agli istanti  $kT_s$ , e non in anticipo o in ritardo, perché altrimenti si verifica ISI, tanto maggiore e da parte di tanti simboli anche lontani, quanto più lentamente si attenuano le *code* della  $g(t)$ . Pertanto, è interessante ricercare una soluzione per  $g(t)$  che, pur rimanendo



<sup>28</sup> Come noto, un sistema fisico non può presentare una risposta impulsiva  $h(t) \neq 0$  per  $t < 0$ , perché questo equivarrebbe a produrre una uscita *prima ancora* che sia applicato un segnale al suo ingresso. Dunque un segnale dati (8.1) realizzato a partire da un impulso  $g(t) = \text{sinc}(f_s t)$  di estensione temporale illimitata, può essere realizzato solo in forma approssimata, ricorrendo ad una versione ritardata e limitata  $g'(t) = \begin{cases} g(t - T_R) & \text{con } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ . Se  $T_R \gg T_s$ , l'entità dell'approssimazione è accettabile, ed equivale ad un semplice ritardo pari a  $T_R$ ; d'altro canto, quanto maggiore è la durata della risposta impulsiva, tanto più difficile (ossia costosa) risulta la realizzazione del filtro relativo.



<sup>29</sup> Al contrario, se  $g(t) = \text{rect}_{T_s}(t)$ , il campionamento può avvenire ovunque nell'ambito del periodo di simbolo, ma si torna al caso di elevata occupazione di banda.

limitata in banda, presenti oscillazioni di ampiezza ridotta, in modo da tollerare meglio modesti errori di precisione nella determinazione degli istanti di campionamento.

**Riepilogando:** vorremmo soddisfare contemporaneamente le esigenze:

1. occupare una banda contenuta,
2. ricorrere ad un filtro con  $g(t)$  di durata ridotta e quindi poco complesso,
3. ridurre la sensibilità agli errori di campionamento.

Per i punti 2 e 3, è sufficiente adottare  $g(t)$  di tipo rettangolare, generando un segnale dati del tipo  $x(t) = \sum_k a_k \cdot \text{rect}_\tau(t - kT_s)$ , che ha lo svantaggio di occupare una banda troppo elevata. Questa può essere ridotta ad un valore finito (punto 1) pur di accettare una durata per  $g(t)$  maggiore di  $T_s$ , come per il caso del *sinc*. Partendo dalla formalizzazione analitica dell'esigenza di non subire ISI, otteniamo una soluzione di compromesso a tutti e tre i problemi,

### 8.2.2.2 Criterio di Nyquist per l'assenza di ISI

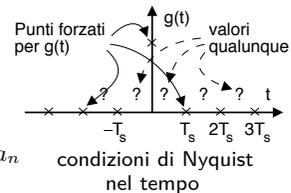
Il fatto che sia un *rect* che un *sinc* permettano di evitare interferenza intersimbolica<sup>30</sup> sembra suggerire che possano essere accomunate dal soddisfare un criterio generale: infatti, sia *rect* che *sinc* sono casi particolari di impulsi che rispettano le condizioni espresse nel seguito, e che alla fine ci permettono di *negoziare* il compromesso necessario a soddisfare le tre esigenze espresse sopra.

**Condizioni di Nyquist nel tempo** Torniamo a riferirci alla (8.1) per osservare che, affinché  $x(t)|_{t=nT_s}$  dipenda dal solo valore  $a_n$  e non dagli altri  $a_k$  con  $k \neq n$ , deve risultare

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t = mT_s \text{ con } m \neq 0 \\ \forall & \text{altrove} \end{cases} \quad (8.3)$$

e cioè  $g(t)$  deve passare da zero in tutti gli istanti multipli di  $T_s$ , tranne che per  $t = 0$  dove deve valere 1, mentre per valori di  $t$  intermedi può assumere qualunque valore. In tal caso infatti dalla (8.1) si ottiene:

$$x(nT_s) = \sum_k a_k \cdot g(nT_s - kT_s) = \sum_k a_k \cdot g((n - k)T_s) = a_n$$



Le condizioni (8.3) prendono il nome di *condizioni di Nyquist per l'assenza di interferenza intersimbolo* (ISI) nel dominio del tempo. Se una forma d'onda  $g(t)$  soddisfa tali condizioni, allora viene detta *impulso di Nyquist*<sup>(31)</sup>.

**Condizioni di Nyquist in frequenza** Dalle condizioni di Nyquist *nel tempo* (8.3) se ne derivano altre *in frequenza*, mediante i seguenti passaggi. Moltiplicando  $g(t)$  per un treno di impulsi  $\pi_{T_s}(t) = \sum_k \delta(t - kT_s)$  si ottiene

$$g(t) \cdot \pi_{T_s}(t) = \delta(t)$$

<sup>30</sup>Almeno, in assenza di distorsione lineare!

<sup>31</sup>Ad esempio, l'impulso rettangolare è di Nyquist, in quanto  $\text{rect}_{T_s}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < \frac{T_s}{2} \\ 0 & \text{se } t = kT_s \end{cases}$ .

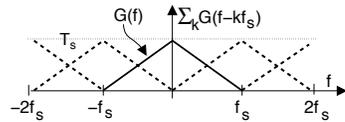
dato che  $g(nT_s) = 0$  e  $g(0) = 1$ . Trasformando (vedi § 3.7) si ottiene:

$$1 = G(f) * \frac{1}{T_s} \cdot \Pi_{\frac{1}{T_s}}(f) = G(f) * \frac{1}{T_s} \cdot \sum_k \delta\left(f - k\frac{1}{T_s}\right)$$

Indicando con  $f_s = \frac{1}{T_s}$  la frequenza di simbolo, ed eseguendo la convoluzione tra  $G(f)$  e gli impulsi centrati in  $f = kf_s$ , risulta infine

$$\sum_k G(f - kf_s) = T_s \tag{8.4}$$

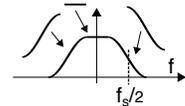
che rappresenta la condizione *in frequenza* per l'assenza di interferenza intersimbolo. Il risultato ottenuto si interpreta considerando che una qualunque  $G(f)$  va bene purché, se sommata con le sue repliche traslate di multipli di  $f_s$ , dia luogo ad una costante, ovvero se  $G(f)$  manifesta *simmetria dispari* rispetto ad  $f_s/2$ . In tal caso  $G(f)$  può essere descritta come la risposta in frequenza di un *filtro di Nyquist*. Notiamo che, seppure  $G(f)$  possa essere qualsiasi, anche non limitata in banda, il nostro interesse è appunto per le  $G(f)$  limitate in banda, come quella triangolare dell'esempio sopra.



condizioni di Nyquist in frequenza

**8.2.2.3 Filtro a coseno rialzato**

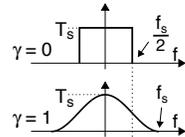
Individuala una famiglia parametrica di filtri di Nyquist limitati in banda, detti a *coseno rialzato* in quanto la  $G(f)$  è realizzata mediante 2 semiperiodi di coseno raccordati da una retta, come mostrato a lato. La fig. 8.6-a)<sup>(32)</sup> illustra l'andamento di  $G(f)$  per diverse scelte del parametro  $0 < \gamma < 1$  chiamato coefficiente di *roll-off*<sup>33</sup>, e che rappresenta l'indice di *dispersione* del ramo di coseno attorno alla frequenza  $f_s/2$ , detta *frequenza di Nyquist*<sup>34</sup>.



Espressa nei termini di  $\gamma$ , la banda occupata a frequenze positive da  $G(f)$  ha quindi espressione

$$B = \frac{f_s}{2} (1 + \gamma) = \frac{f_b}{2 \log_2 L} (1 + \gamma) \tag{8.5}$$

e varia da un *minimo*  $B|_{\gamma=0} = f_s/2$ , corrispondente a  $G(f)|_{\gamma=0} = T_s \text{rect}_{f_s}(f)$  rettangolare, ad un *massimo* pari a  $B|_{\gamma=1} = f_s$  a cui corrisponde una



$$G(f)|_{\gamma=1} = \frac{T_s}{2} [1 + \cos(2\pi \frac{1}{2f_s} f)] \cdot \text{rect}_{2f_s}(f) \quad \text{con } |f| < f_s$$

che rappresenta esattamente un periodo di coseno (in  $f$ ) di periodo  $2f_s$ , *rialzato*.

<sup>32</sup>La fig. 14.2 a pag. 379 mostra la stessa funzione su di una scala quadratica e in decibel.

<sup>33</sup>Il termine ROLL-OFF può essere tradotto come "rotola fuori".

<sup>34</sup>Molto intimamente legata alla *velocità* di Nyquist definita al § 4.1 come la *minima* frequenza di campionamento  $f_c = 2W$  per un segnale analogico di banda  $W$ , mentre la *frequenza* di Nyquist si riferisce invece a *metà della massima* frequenza di segnalazione  $f_s/2 = B$  per un segnale dati che transita su di un canale limitato in banda  $B$ , per motivi presto chiari. Come evidente due aspetti dello stesso fenomeno, ma in contesti differenti, vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist\\_rate](https://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist_rate).

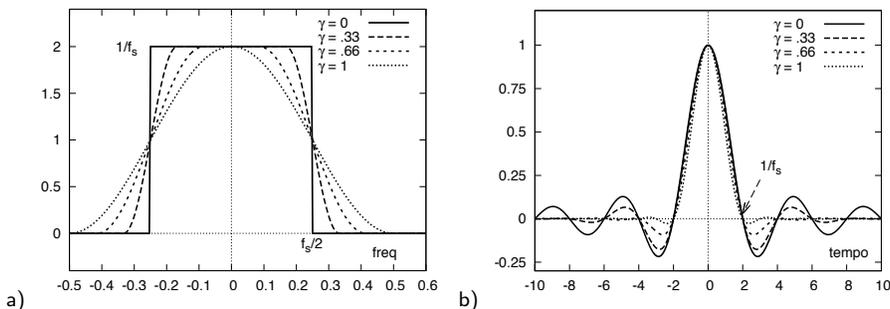
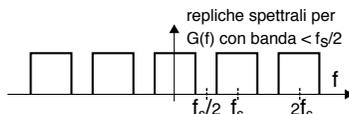


Figura 8.6: a) - filtro a coseno rialzato e b) - impulso di Nyquist per  $f_s = 0.5$ , variando  $\gamma$

**Filtro a banda minima** Il caso di  $\gamma = 0$  viene detto a *banda minima*, e (nel tempo) corrisponde ad un impulso  $g(t) = \text{sinc}(f_s t)$ , come già discusso a pag. 208 in relazione ai requisiti di limitazione nel tempo. Occupare una banda inferiore a quella minima non è possibile, perché in tal caso non sarebbero verificate le condizioni di Nyquist in frequenza, in quanto nella (8.4) resterebbero dei “buchi”.



Abbiamo già osservato alla nota (28) a pagina 208 come la realizzazione di  $G(f)$  a *banda minima* sia complicata, dato che la corrispondente  $g(t) = \text{sinc}(f_s t)$  va a zero con  $t \rightarrow \infty$  come  $\frac{1}{\pi f_s t}$ , sviluppando *code* che si estendono su di un elevato numero di simboli adiacenti: oltre a complicare la realizzazione del filtro, ciò comporta la possibilità di introdurre notevole ISI in presenza di errori negli istanti di campionamento. Ma la situazione migliora decisamente usando  $\gamma > 0$ , con  $\gamma$  via via più grande, come ora illustriamo.

**Roll off  $\gamma$  diverso da zero** In questo caso per  $g(t)$  si può ottenere l'espressione generale<sup>35</sup>

$$g(t) = \text{sinc}(f_s t) \cdot \frac{\cos \gamma \pi t f_s}{1 - (2\gamma t f_s)^2} \tag{8.6}$$

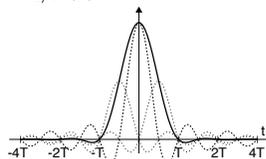
a cui corrisponde una forma d'onda *simile* a  $\text{sinc}(f_s t)$ , ma che va a zero molto più rapidamente, come verificabile osservando la parte destra di Fig. 8.6. Pertanto, se  $\gamma \rightarrow 1$  le oscillazioni di  $g(t)$  sono molto più smorzate, ed anche in presenza di errori negli istanti di campionamento  $kT_s$  ogni impulso estende la sua *influenza* ad un numero di simboli limitrofi *molto ridotto* rispetto al caso  $\gamma = 0$ .

Per verificare visivamente quanto affermato, aiutiamoci con la fig. 8.7 che in alto a sinistra mostra l'andamento di un segnale dati realizzato adottando la  $g(t)$  fornita dalla (8.6), calcolata

<sup>35</sup>Non ho trovato questi passaggi già svolti in nessun posto, qualche lettore può aiutare? Tutto quel che sono riuscito a calcolare è relativo al caso  $\gamma = 1$ , per cui  $g(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{T}{2} [1 + \cos(\pi T f)] \right\} \cdot \text{rect}_{2/T}(f)$  che fornisce

$$g(t) = \frac{T}{2} \left[ \delta(t) + \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) \right] * \frac{2}{T} \text{sinc}\left(\frac{2}{T}t\right) = \text{sinc}\left(\frac{2}{T}t\right) + \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{2}{T}\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{2}{T}\left(t + \frac{T}{2}\right)\right)$$

che una volta graficato, conferma l'andamento di fig. 8.6. Osserviamo che per  $t \rightarrow 1/2\gamma f_s$  il denominatore di (8.6) si annulla, ma lo stesso avviene anche per il numeratore, che in tal caso tende a  $\cos \frac{\pi}{2}$ , dando luogo alla forma  $\frac{0}{0}$ , ed il cui limite sembra tendere a poco meno di uno.



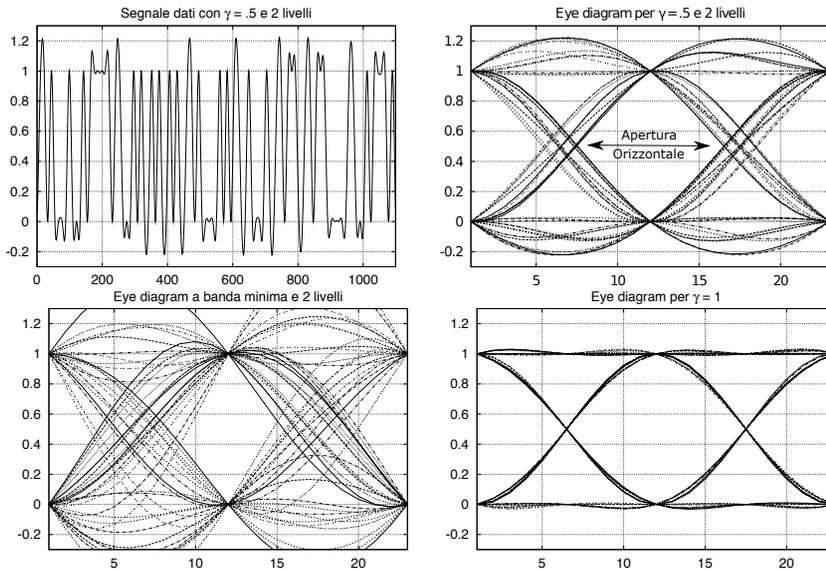


Figura 8.7: Segnale dati e *diagramma ad occhio* per diversi valori di *roll-off*

per  $\gamma = 0.5$ , e per simboli  $a_k$  a due valori, pari a 0 e 1. Notiamo che al di fuori degli istanti caratteristici  $t = kT_s$  il segnale può assumere valori arbitrari, anche oltre la dinamica degli  $a_k$ . La rappresentazione fornita dal diagramma ad occhio per questo segnale dati, mostrato in alto a destra in fig 8.7, permette di valutare meglio la precisione di temporizzazione che è necessaria per evitare ISI, e che è pari a metà della *apertura orizzontale* dell'occhio.

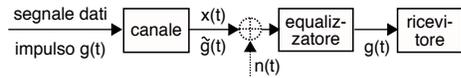
Gli ultimi due diagrammi nella parte inferiore di fig. 8.7 permettono il confronto tra le scelte relative alla banda minima e *massima*: notiamo che nel primo caso (a destra)  $g(t)$  è un *sinc*, e l'apertura orizzontale dell'occhio si è ristretta, mentre nel secondo (a sinistra, con  $\gamma = 1$ ) l'occhio è alla sua apertura massima, ed i tracciati sono quasi del tutto identici tra loro, indipendentemente dai simboli precedenti e successivi.

### 8.3 Equalizzazione

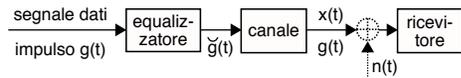
Torniamo ad occuparci del problema legato all'attraversamento da parte del segnale dati di un canale che presenta una  $H(f)$  non ideale (vedi pag. 183), subendo quindi *distorsione lineare* (§ 7.2) e causando così per il sistema di trasmissione la comparsa di ISI, dato che (vedi § 8.1.2.2) il segnale ricevuto  $x(t)$  in uscita dal canale risulta ora realizzato mediante un impulso *distorto*  $\tilde{g}(t) = g(t) * h(t)$  anziché  $g(t)$ . Fortunatamente la distorsione lineare è (almeno in linea di principio) completamente reversibile, e nel caso in cui  $H(f)$  sia nota può essere *compensata* facendo transitare  $x(t)$  attraverso un *filtro di equalizzazione*  $H_{eq}(f)$  tale che in cascata ad  $H(f)$  ripristini le condizioni di canale perfetto, cioè tale che

$$\begin{cases} H(f) H_{eq}(f) = ae^{-j2\pi f\tau} \\ h(t) * h_{eq}(t) = a\delta(t - \tau) \end{cases} \quad \text{e dunque} \quad H_{eq}(f) = \frac{ae^{-j2\pi f\tau}}{H(f)}$$

**Al ricevitore** Se il lato ricevente *conosce*  $H(f)$ , può calcolare la  $H_{eq}(f)$  teorica, e sintetizzare un filtro (vedi § 6.6) che la approssimi<sup>36</sup>. Se invece il ricevitore *non* la conosce,  $H(f)$  può essere *stimata* (producendo  $\hat{H}(f)$ ) a partire dal segnale ricevuto, facendo precedere la trasmissione vera e propria da una fase di *apprendimento*, durante la quale sono trasmessi dati che anche il ricevitore conosce, in modo da poter utilizzare il segnale di errore per stimare la distorsione lineare introdotta dal canale, ovvero la  $H(f)$ .



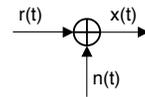
**Al trasmettitore** Il problema principale della metodica precedente è che anche il rumore presente in ingresso al canale passa attraverso il filtro di equalizzazione, trasformandosi da bianco a *colorato*, e questo peggiora le prestazioni. Pertanto, se il trasmettitore conosce *a priori* la  $H(f)$  del canale, oppure qualcuno gliela comunica, può essere preferibile attuare l'equalizzazione *in partenza*, utilizzando al posto dell'impulso  $g(t)$  *originario* un impulso definito come  $\check{g}(t) = g(t) * h_{eq}(t)$ , e tale quindi da ripresentarsi come  $g(t)$  in uscita dal canale, dato che  $h_{eq}(t) * h(t) = a\delta(t - \tau)$ .



La trattazione delle tecniche di equalizzazione prosegue al § 15.4, dove sono chiariti alcuni aspetti qui solamente accennati, e analizzate le soluzioni di tipo digitale.

## 8.4 Probabilità di errore nelle trasmissioni di banda base

Fin qui abbiamo trascurato di prendere in considerazione gli effetti del rumore additivo, a cui si è accennato al § 8.1.1, e che provoca la ricezione di un segnale  $x(t) = r(t) + n(t)$ . Al segnale utile  $r(t)$  risulta dunque sovrapposto un diverso segnale  $n(t)$  indicato come disturbo o rumore (*noise*<sup>37</sup>), *membro* di un processo ergodico (vedi § 5.3), con densità di probabilità del primo ordine *gaussiana* (vedi § 5.2.4) a media nulla, e spettro di densità di potenza *bianco*, ossia costante in frequenza.



Nel caso in cui siano presenti più cause di disturbo, anche localizzate in punti diversi del collegamento, si fa in modo (vedi § 7.4) di ricondurle tutte ad un'unica fonte di rumore (equivalente) in ingresso al decisore. Come appare dalla figura a pag. 200, l'effetto del rumore è quello di causare degli *errori* nelle decisioni sui livelli, e quindi sui simboli e sui bit ricevuti.

Sviluppiamo dunque una analisi per valutare la *probabilità* di questi errori, in funzione delle grandezze che vi contribuiscono, in modo a poter successivamente affrontare problematiche di progetto, vedi § 16.1.

### 8.4.1 Banda di ricezione e dinamica del rumore

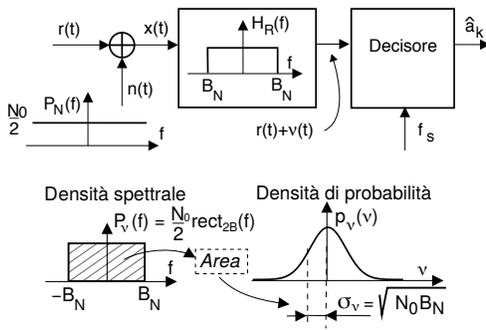
Come anticipato, il disturbo  $n(t)$  è la realizzazione di un processo gaussiano ergodico, a valor medio nullo, e con spettro di densità di potenza *bianco* o costante<sup>38</sup>

$$\mathcal{P}_N(f) = \frac{N_0}{2}$$

<sup>36</sup>Le esigenze di mantenere basso l'ordine del filtro tentando al contempo di rispondere ai requisiti sulla fase oltre che sul modulo impediscono di ottenere una sintesi perfetta di  $H_{eq}(f)$ .

<sup>37</sup>Vedi il § 7.4.2.1 per una descrizione della sua natura fisica.

<sup>38</sup>Al § 7.4.2.1 si illustra come in realtà  $\mathcal{P}_N(f)$  non è costante per qualsiasi valore di  $f$  fino ad infinito, ma occupa una banda grandissima ma limitata: altrimenti, avrebbe una potenza infinita.



e caratterizzato da una varianza  $\sigma_N^2$  pari<sup>39</sup> alla potenza  $\mathcal{P}_N$  di una sua qualunque realizzazione: tale processo è indicato come *Additive White Gaussian Noise* o AWGN<sup>40</sup>.

Allo scopo di limitare  $\mathcal{P}_N$  alla minima possibile, in ingresso al ricevitore è posto un filtro passa-basso ideale<sup>41</sup> con risposta in frequenza  $H_R(f)$  limitata in una banda  $\pm B_N$  (detta *banda di rumore*, vedi § 11.1.3), tale da lasciar passare le componenti frequenziali del segnale  $r(t)$  *per*

*intero*, e limitare la banda (e dunque la potenza) di  $\mathcal{P}_N(f)$  al minimo. Infatti la componente di rumore  $\nu(t)$  uscente da  $H_R(f)$  rappresenta anch'essa un processo gaussiano (vedi nota 33 a pag. 151) a media nulla, la cui potenza vale<sup>42</sup>

$$\mathcal{P}_\nu = \sigma_\nu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_N(f) |H_R(f)|^2 df = \int_{-B_N}^{B_N} \frac{N_0}{2} df = N_0 B_N$$

In virtù della ergodicità di  $\nu(t)$ , il valore di  $\mathcal{P}_\nu$  eguaglia quello del momento di secondo ordine  $m_\nu^{(2)} = E\{(\nu)^2\}$  di una v.a.  $\nu$  ottenuta campionando una sua qualsiasi realizzazione; dato inoltre che  $n(t)$  e dunque  $\nu$  sono a media nulla, si ha<sup>43</sup>  $m_\nu^{(2)} = \sigma_\nu^2$  e dunque  $\mathcal{P}_\nu$  individua anche la *dinamica* dei valori della v.a. di rumore sovrapposta ai valori di segnale, come esemplificato in figura.

### 8.4.2 Dinamica del segnale e decisione a massima verosimiglianza

Proseguiamo l'analisi indicando il segnale ricevuto nella forma

$$r(t) = \sum_k a[k] \cdot g(t - kT_s) \quad (8.7)$$

in cui  $g(t)$  è un impulso di Nyquist (8.3), e si assume una perfetta sincronizzazione temporale (§ 8.7), in modo da poter considerare l'ISI assente. I *simboli*  $a[k]$  sono elementi di una sequenza aleatoria, scelti tra  $L$  possibili valori  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ , distribuiti in modo *uniforme* (ossia equispaziati) entro un intervallo con dinamica pari a  $\Delta = a_L - a_1$ .

Agli istanti  $t = kT_s = k/f_s$  multipli del periodo di simbolo  $T_s$ , il decisore esamina il valore del segnale  $x(t) = r(t) + \nu(t)$ , ed anziché ritrovare i valori  $a[k]$  trasmessi, osserva la realizzazione di una variabile aleatoria gaussiana, con media pari al valore trasmesso  $a[k] = a_i$ , e varianza  $\sigma_\nu^2 = N_0 B_N$ . Quindi, per stabilire quale valore sia stato (probabilmente) trasmesso per il simbolo  $k$ -esimo, effettua una decisione di *massima verosimiglianza* o ML (vedi

<sup>39</sup>In virtù dell'ergodicità e della media nulla.

<sup>40</sup>Le due proprietà non sono necessariamente sempre verificare assieme, nel senso che un processo può essere gaussiano ma non bianco, o bianco ma non gaussiano!

<sup>41</sup>Al § 8.4.10 si descrive un diverso modo di progettare  $H_R(f)$ , in modo da minimizzare la probabilità di errore anziché la potenza di rumore, e che di fatto realizza un *filtro adattato*, descritto al § 6.8. Come vedremo al § 8.4.10, nel caso di un impulso a *banda minima* i due approcci portano al medesimo risultato.

<sup>42</sup>Per i dettagli relativi al filtraggio di processi, ci si può riferire al § 6.4.1.

<sup>43</sup>vedi eq. (5.6) a pag. 107

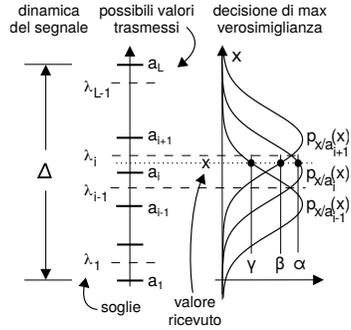
§ 5.6.2.1) confrontando tra loro le densità di probabilità *condizionate* alle diverse ipotesi che sia stato trasmesso uno tra i simboli  $a_i$ :

$$P_{X/a_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\nu} e^{-\frac{(x-a_i)^2}{2\sigma_\nu^2}} \quad (8.8)$$

e scegliendo per l' $\hat{a}_i$  tale che  $P_{X/\hat{a}_i}(x)$  è la più grande.

Il criterio di massima verosimiglianza equivale pertanto (vedi figura) a definire  $L - 1$  soglie di decisione  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, L - 1$ , poste *a metà* tra i valori  $a_i$  ed  $a_{i+1}$ <sup>44</sup>, e decidere per il valore  $a_i$  se il segnale ricevuto  $x$  cade all'interno dell'intervallo compreso tra  $\lambda_{i-1}$  e  $\lambda_i$  (<sup>45</sup>), dato che (con riferimento alla notazione in figura) ciò corrisponde ad imporre

$$\alpha = P_{X/a_i}(x) > \beta = P_{X/a_{i+1}}(x) > \gamma = P_{X/a_{i-1}}(x)$$

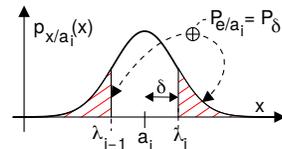


### 8.4.3 Probabilità dell'errore gaussiano

Dopo aver applicato il criterio di massima verosimiglianza, il decisore commette errore all'istante  $kT_s$  quando, a fronte della ricezione di un simbolo  $a[k] = a_i$ , il processo di rumore additivo presenta un valore abbastanza elevato da far sì che  $x(kT_s) = r(kT_s) + \nu(kT_s)$  oltrepassi una soglia di decisione, ovvero se il campione di rumore filtrato e campionato all'istante  $k$  è (in modulo) più grande di  $\delta = |\lambda_i - a_i| = \frac{\Delta}{2(L-1)}$ . La probabilità con cui si commette questo errore si dice *condizionata* alla trasmissione di  $a_i$ , e vale

$$P_{e/a_i} = 2 \int_{\lambda_i}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\nu} e^{-\frac{(x-a_i)^2}{2\sigma_\nu^2}} dx = P_\delta \quad (8.9)$$

che chiameremo  $P_\delta$ , e che rappresenta (vedi figura) la somma delle aree tratteggiate. Lo stesso valore  $P_\delta$  è valido per tutti gli indici  $i$  compresi tra 2 ed  $L - 1$ , mentre per  $a_1$  ed  $a_L$  la probabilità di errore è dimezzata, in quanto in tali casi esiste solamente una delle due soglie il cui superamento determina una decisione errata, e dunque scriviamo  $P_{e/a_1} = P_{e/a_L} = \frac{1}{2}P_\delta$ .



Applicando ora alla (8.9) il cambiamento di variabile descritto al § 5.2.4, si ottiene  $P_\delta = \text{erfc} \left\{ \frac{\lambda_i - a_i}{\sqrt{2}\sigma_\nu} \right\}$ , ed esprimendo l'intervallo  $\lambda_i - a_i$  in funzione della dinamica di segnale  $\Delta$ , troviamo

$$P_\delta = \text{erfc} \left\{ \frac{\Delta}{2\sqrt{2}\sigma_\nu(L-1)} \right\} \quad (8.10)$$

Per arrivare all'espressione della probabilità di errore *incondizionata*, ovvero indipendente dall'identità del simbolo trasmesso, occorre eseguire una operazione di *valore atteso* (§ 5.2.2) ri-

<sup>44</sup>La proprietà di *equidistanza* delle soglie dal valore di simboli, deriva dalla *simmetria pari* della d.d.p. gaussiana rispetto al suo valor medio: in generale, le soglie sono poste in modo da rendere eguali le probabilità di *falso allarme* e di *perdita*, vedi § 5.6.1.

<sup>45</sup>Chiaramente, tutti i valori  $x$  minori di  $\lambda_1$  provocano la decisione a favore di  $a_1$ , e quelli maggiori di  $\lambda_{L-1}$  indicano la probabile trasmissione di  $a_L$ .

petto a tutti gli indici  $i$ , con  $i = 1, 2, \dots, L$ , cioè pesare le diverse probabilità di errore condizionate, con le rispettive probabilità degli eventi condizionanti. Nel caso in cui i valori  $a_i$  siano equiprobabili, con probabilità  $Pr(a_i) = \frac{1}{L}$ , si ottiene:

$$P_e = E_{a_i} \{P_{e/a_i}\} = \sum_{i=1}^L Pr(a_i) P_{e/a_i} = \frac{1}{L} \left[ (L-2) P_\delta + 2 \frac{1}{2} P_\delta \right] = \left( 1 - \frac{1}{L} \right) P_\delta \quad (8.11)$$

in cui si è tenuto conto del diverso valore della probabilità condizionata per i livelli intermedi e per i due agli estremi.

#### 8.4.4 Parametri di sistema e di trasmissione

Il risultato ottenuto, benché già idoneo a valutare la  $P_e$  con i dati con cui è stata impostata l'analisi, deve subire qualche ulteriore passaggio per poterla esprimere in funzione dei parametri di sistema<sup>46</sup> potenza di segnale  $\mathcal{P}_R$ , densità di potenza di rumore  $\mathcal{P}_\nu(f) = N_0/2$ , e velocità binaria  $f_b$ , nonché dei parametri di trasmissione<sup>47</sup>  $L$  e  $\gamma$ , in modo da poter affrontare gli aspetti di *bilancio di collegamento* (cap. 16). Vediamo come.

**Legame tra potenza del segnale  $\mathcal{P}_R$  e sua dinamica  $\Delta$**  Al § 8.8.1 si ottiene che, sotto le ipotesi (che manterremo valide anche nel seguito) in cui

- si adotti un impulso di Nyquist a coseno rialzato con roll-off  $\gamma$ ;
- i simboli  $a[k]$  siano statisticamente indipendenti, con i possibili valori  $a_i$  equiprobabili, a media nulla, e distribuiti uniformemente su  $L$  livelli, con dinamica  $a_L - a_1 = \Delta$ ;

la relazione tra  $\mathcal{P}_R$  e  $\Delta$  risulta<sup>48</sup>

$$\mathcal{P}_R = \frac{\Delta^2}{12} \frac{L+1}{L-1} \left( 1 - \frac{\gamma}{4} \right) \quad (8.12)$$

Essendo il termine  $\frac{L+1}{L-1} \left( 1 - \frac{\gamma}{4} \right)$  decrescente per  $L \geq 2$  e  $\gamma \geq 0$ , il caso di trasmissione binaria a banda minima ( $L = 2$  e  $\gamma = 0$ ) consegue una  $\mathcal{P}_R = \frac{\Delta^2}{4}$ , che è *la massima* al variare di questi due parametri. Per essere utilizzata nella (8.10), la (8.12) deve prima essere invertita, in modo da esprimere  $\Delta$  in funzione di  $\mathcal{P}_R$ :

$$\Delta = \sqrt{12 \frac{L-1}{L+1} \frac{\mathcal{P}_R}{(1-\gamma/4)}} \quad (8.13)$$

Facciamo ora entrare in gioco anche la conoscenza di  $f_b$ , introducendo un nuova grandezza:

<sup>46</sup>Di sistema in quanto  $\mathcal{P}_R$  è imposta da amplificatori e mezzi trasmissivi,  $\mathcal{P}_\nu(f)$  dall'entità dei disturbi additivi presenti in uscita dal canale, mentre  $f_b$  è imposta dal contratto di servizio con il produttore di contenuti, o sorgente informativa.

<sup>47</sup>Di trasmissione in quanto *negoziati* allo scopo di ottemperare ai vincoli relativi alla banda occupata ed alla precisione del temporizzatore.

<sup>48</sup>Anche se il risultato sarà dimostrato al § 8.8.1, merita comunque un commento: osserviamo che  $\mathcal{P}_R$  diminuisce all'aumentare di  $\gamma$  (si *stringe* infatti l'impulso nel tempo); inoltre  $\mathcal{P}_R$  diminuisce al crescere di  $L$ , in quanto nel caso di più di 2 livelli, la forma d'onda assume valori molto vari all'interno della dinamica di segnale, mentre con  $L = 2$  ha valori molto più *estremi*.

**Energia per bit o  $E_b$**  Dato che la potenza rappresenta l'energia sviluppata per unità di tempo, e che in un secondo entrano  $f_b$  bit, possiamo pensare  $\mathcal{P}_R$  suddivisa tra i bit presenti, in modo da definire una quantità detta *energia per bit*

$$E_b = \mathcal{P}_R T_b = \frac{\mathcal{P}_R}{f_b} \quad (8.14)$$

che riassume in sé sia i parametri di sistema *potenza di segnale* che *velocità binaria*, mentre non dipende dai *parametri di trasmissione*  $L$  e  $\gamma$ . Pertanto nella (8.13) si può sostituire  $\mathcal{P}_R = E_b f_b$ .

**Dipendenza di  $\mathcal{P}_\nu$  da  $L$  e  $\gamma$**  Ora nella (8.10) l'unico termine rimasto incognito sembra essere  $\sigma_\nu$ , pari a  $\mathcal{P}_\nu$  per via del valor medio nullo del rumore. D'altra parte, la potenza di rumore  $\mathcal{P}_\nu = N_0 B_N$  dipende anche da  $L$  e  $\gamma$  attraverso la (8.5) ovvero  $B_N = \frac{f_b(1+\gamma)}{2 \log_2 L}$ , ma vorremmo mantenere separati i contributi dei parametri *di sistema* da quelli *di trasmissione*. Allora, anziché tentare di esprimere la (8.10) in funzione di  $SNR = \frac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_\nu}$ , introduciamo un diverso *rapporto di qualità*:

**Definizione di  $E_b/N_0$  e suo contributo all'SNR** Esprimendo le potenze  $\mathcal{P}_\nu$  e  $\mathcal{P}_R$  in funzione di  $T_b = 1/f_b$ , e considerando sempre un segnale dati a coseno rialzato, le eq. (8.5) e (8.14) permettono di scrivere

$$\mathcal{P}_\nu = N_0 B_N = \frac{N_0(1+\gamma)}{T_b 2 \log_2 L} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_R = \frac{E_b}{T_b} \quad (8.15)$$

in modo da ottenere

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_\nu} = \frac{E_b T_b 2 \log_2 L}{T_b N_0 (1+\gamma)} = \frac{E_b 2 \log_2 L}{N_0 (1+\gamma)} \quad (8.16)$$

Quindi, mentre  $SNR$  dipende anche da  $L$  e da  $\gamma$ , il rapporto  $\frac{E_b}{N_0}$  coinvolge solo i parametri di sistema  $\mathcal{P}_R$ ,  $f_b$  ed  $N_0$ : sarà questa la variabile *indipendente* rispetto alla quale valutare la  $P_e$ .

### 8.4.5 Probabilità di errore per simbolo

Non resta ora che inserire la (8.13) nella espressione di  $P_\delta$  (eq. 8.10), ricordare che  $\sigma_\nu^2 = \mathcal{P}_\nu$ , e tenere conto della (8.16), in modo da ottenere la probabilità di decidere per un simbolo  $a_j$  diverso da quello trasmesso<sup>49</sup>:

$$P_e^{simb} = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \frac{3 \log_2 L}{(L^2 - 1)(1+\gamma)(1 - \frac{\gamma}{4})}} \right\} \quad (8.17)$$

<sup>49</sup>Per completezza sviluppiamo i passaggi, piuttosto banali anche se non ovvi:

$$\begin{aligned} P_e &= \left(1 - \frac{1}{L}\right) P_\delta = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\Delta}{2\sqrt{2}\sigma_\nu(L-1)} \right\} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{12 \frac{L-1}{L+1} \frac{\mathcal{P}_R}{(1-\gamma/4)} \frac{1}{2\sqrt{2}\mathcal{P}_\nu(L-1)}} \right\} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ 2\sqrt{3 \frac{L-1}{L+1} \frac{1}{(1-\gamma/4)} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_\nu} \frac{1}{(L-1)}}} \right\} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} \frac{L-1}{L+1} \frac{1}{(L-1)^2} \frac{1}{(1-\gamma/4)} SNR} \right\} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{L^2-1} \frac{1}{(1-\gamma/4)} \frac{E_b}{N_0} \frac{2 \log_2 L}{1+\gamma}} \right\} = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \frac{3 \log_2 L}{(L^2-1)(1+\gamma)(1-\frac{\gamma}{4})}} \right\} \end{aligned}$$

che è graficata alla Fig 8.8, in funzione di  $\left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{dB}$  per tre condizioni operative (per una introduzione ai dB, si veda § 7.1). In particolare, notiamo che per  $L = 2$  e  $\gamma = 0$  si ottiene:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\} \quad (8.18)$$

mentre, a parità di  $E_b/N_0$ , scelte progettuali diverse da  $L = 2$  e  $\gamma = 0$  determinano immancabilmente un peggioramento della  $P_e$ : tali scelte possono essere ugualmente adottate per soddisfare esigenze di risparmio di banda (aumentando  $L$ )<sup>50</sup>, e per ridurre i termini di interferenza intersimbolica (aumentando  $\gamma$ ).

Due domande riassuntive:

- perché  $P_e$  peggiora se aumento i livelli? *Risposta* <sup>(51)</sup>.
- perché  $P_e$  peggiora se aumento  $\gamma$ ? *Risposta* <sup>(52)</sup>.

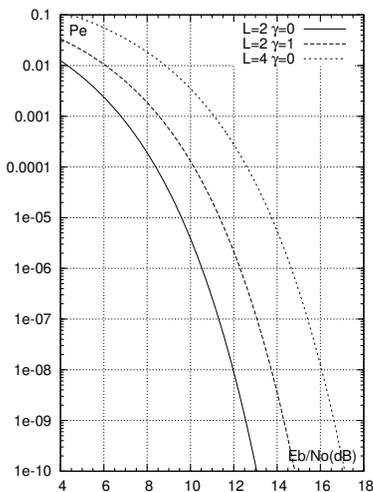


Figura 8.8: Andamento di  $P_e$  vs.  $E_b/N_0$

#### 8.4.6 Relazione con il filtro adattato

Qualche lettore può chiedersi come mai si sia utilizzato come filtro di ricezione un semplice passa basso, anziché operare come descritto al § 6.8. Tale opzione viene esplorata al § 8.4.10, ma possiamo notare fin da subito l'equivalenza tra i risultati (8.18) e (6.38). Infatti, l'energia di un singolo impulso  $\mathcal{E}_G$  equivale all'energia per bit  $E_b$ , ed un segnale dati a media nulla e simboli binari corrisponde ad una segnalazione antipodale. Quanto all'adozione di un impulso di Nyquist a coseno rialzato con  $\gamma = 0$ , ovvero a *banda minima* (§ 8.2.2.3), ciò corrisponde ad aver posto  $G(f) = T_s \operatorname{rect}_{f_s}(f)$ , ovvero proprio il passa basso ideale qui adottato in ricezione, che si rivela essere anche *adattato* nel caso appunto di trasmissione binaria a banda minima. Viceversa, il passa basso ideale non è più adattato qualora si scelga  $g(t)$  con  $\gamma > 0$ , e questo è il motivo della dipendenza della (8.17) dal parametro  $\gamma$ .

#### 8.4.7 Compromesso banda - potenza

Osservando le fig. 8.8 e 8.10 notiamo che al crescere di  $L$ , e dunque occupando una banda minore, si può ottenere la stessa  $P_e$  solo a patto di aumentare  $E_b/N_0$ , ovvero (a parità di  $f_b$ ) aumentando la potenza trasmessa: questo è un aspetto di un risultato più generale della *teoria dell'informazione*. Si può infatti dimostrare (vedi pag. 358) che *è possibile trasmettere senza errori* (ricorrendo a tecniche di codifica di canale ottimali) purché la velocità di trasmissione  $f_b$  non ecceda la *capacità di canale*, definita come

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{\mathcal{P}_R}{N_0 B} \right) \quad (8.19)$$

<sup>50</sup>Aumentando  $L$ , l'argomento di (8.17) diminuisce, in quanto  $(L^2 - 1)$  cresce più velocemente di  $\log_2 L$ .

<sup>51</sup>Perché a parità di  $\mathcal{P}_R$  gli intervalli di decisione sono più ravvicinati. Le "code" della gaussiana sottendono un'area maggiore, e questo peggioramento prevale sul miglioramento legato alla diminuzione di  $\sigma_\nu$ , conseguente alla riduzione della banda di rumore.

<sup>52</sup>Perché occorre aumentare la banda del filtro di ricezione e dunque far entrare più rumore. D'altra parte questo peggioramento è compensato dalla riduzione dell'ISI.

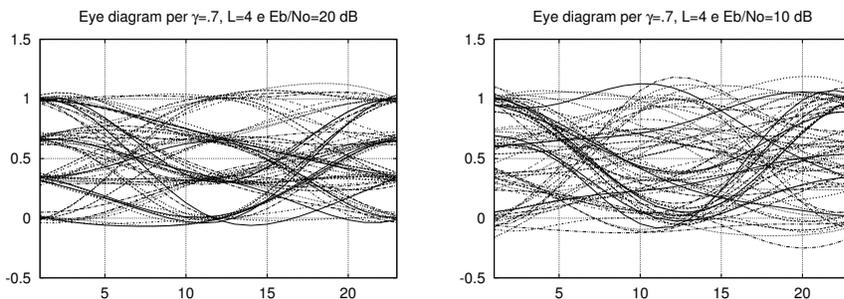


Figura 8.9: Diagramma ad occhio con  $E_b/N_0$  pari a 20 e 10 dB,  $\gamma = .7$ ,  $L = 4$

in cui  $B$  è la banda del canale,  $\mathcal{P}_R$  la potenza ricevuta, e  $N_0B$  la potenza del rumore. Un secondo canale, con minor *banda passante*  $B$ , dispone di una minore capacità, in quanto anche se in tal caso l'argomento di  $\log_2(\cdot)$  aumenta, il logaritmo cresce più lentamente di quanto non decresca  $B$  che compare a fattore nella (8.19); pertanto, per mantenere la stessa capacità, è necessario trasmettere con una maggiore potenza di segnale  $\mathcal{P}_R$ . Per questo motivo, nel caso in cui sussistano limitazioni di potenza ma non di banda, come ad esempio nelle *comunicazioni satellitari*, conviene occupare la maggior banda possibile, mantenendo  $L = 2$ , in modo da risparmiare potenza. L'argomento verrà approfondito a pag. 359.

Coerentemente con queste osservazioni, un ulteriore aumento di banda occupata può derivare dall'aggiunta di bit di ridondanza, come avviene applicando le tecniche di *codifica di canale* discusse ai § 8.5 e 13.2, dato che a ciò corrisponde un *aumento* della velocità di trasmissione complessiva. Mostreremo in tale sede come ciò consenta di *ridurre* la probabilità di errore, e dunque migliorare la *fedeltà* del flusso binario, anche a parità di potenza ricevuta.

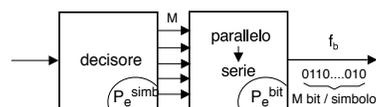
### 8.4.8 Diagramma ad occhio in presenza di rumore

Si tratta dello stesso tipo di grafico già descritto a pag. 212, e che ora ci aiuta a valutare in modo visivo la qualità di una trasmissione numerica. In fig. 8.9 sono riportati i grafici per un segnale dati a 4 livelli, in presenza di due diversi valori per la potenza di rumore: notiamo che al peggiorare del rapporto  $\frac{E_b}{N_0}$  da 20 a 10 dB, la zona priva di traiettorie (*l'occhio*) riduce la sua estensione verticale (*tende a chiudersi*). Pertanto, disponendo di un segnale numerico di qualità sconosciuta, questa può essere valutata in modo approssimato, qualora si disponga di un oscilloscopio, esaminando il *grado di apertura dell'occhio*.

### 8.4.9 Valutazione della $P_e$ per bit

La probabilità di errore  $P_e^{simb}$  (8.17) si riferisce all'evento di decidere per la ricezione del *simbolo*  $a_i$  quando invece ne è stato trasmesso un altro, mentre ora intendiamo valutare la probabilità che sia errato *un qualunque bit* presente nel flusso a velocità  $f_b$ , ricostruito dopo la *serializzazione* (vedi nota 18 a pag. 204) della codifica binaria associata ai simboli ricevuti.

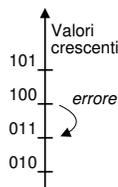
Iniziamo considerando che quando si commette errore decidendo per  $a_i$ , in pratica significa che è stato trasmesso  $a_{i-1}$  o  $a_{i+1}$  e non un altro simbolo qualsiasi, dato che la probabilità che il rumore provochi il salto di *due o più* livelli è molto inferiore a



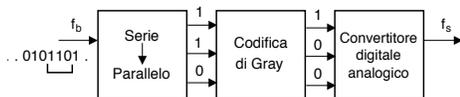
quella di *un salto singolo*. Questa circostanza ha permesso di ideare un procedimento che assegna ad ogni simbolo (o livello) una particolare codifica binaria, in grado di rendere minimo il numero di bit errati (per ogni simbolo errato), e che ora illustriamo.

### 8.4.9.1 Codice di Gray

Si applica al caso delle trasmissioni multilivello (§ 8.1.2.4), in cui i simboli del segnale dati presentano valori (analogici, prodotti dal DAC) che corrispondono al valore *numerico* dell'uscita del convertitore serie-parallelo (vedi fig. a pagina 204), cosicché livelli contigui sono associati a configurazioni di bit *in sequenza naturale*, come mostrato alla figura a lato. Per inquadrare il problema, consideriamo ad esempio di trasmettere il livello associato a 100, e che il decisore a causa del rumore commetta l'errore di ritenere di aver ricevuto il livello inferiore, che rappresenta la sequenza 011: in tal caso, avremmo sbagliato tutti e tre i bit!



Il *codice di Gray* consiste in una tabella di conversione che sostituisce i bit uscenti dal convertitore serie-parallelo del codificatore con una diversa configurazione di bit. Possiamo immaginare l'operazione come quella di un *accesso a memoria*, in cui la parola originaria costituisce l'indirizzo per mezzo del quale si individua la parola codificata da trasmettere al suo posto, come esemplificato nella figura a lato.



Le parole del codice di Gray hanno la proprietà di rappresentare livelli di segnale adiacenti mediante configurazioni di bit che differiscono tra loro *in una sola posizione*, ovvero per un solo bit. Con riferimento alla tabella a lato, osserviamo che (ad esempio) per trasmettere la sequenza 110 di ingresso, si usa il livello numero 100, ossia il quinto, lo stesso dell'esempio precedente.

Ingresso binario	Uscita (livello)
100	111
101	110
111	101
110	100
010	011
011	010
001	001
000	000

**Decodifica** In ricezione si attua la trasformazione inversa, utilizzando la tabella al contrario, che essendo biunivoca, permette di riottenere la sequenza binaria originale, individuando nella seconda colonna la riga in cui compare la *codifica binaria* associata al livello ricevuto, e sostituendo ad essa i bit della prima colonna. Continuando con l'esempio (trasmettiamo 100), consideriamo che il decisore commetta lo stesso errore precedente, e ritenga di aver ricevuto il quarto livello 011. A questo il *decodificatore* di Gray che opera dal lato ricevente associa la sequenza 010, che infatti differisce dall'originale per un solo bit (il primo).

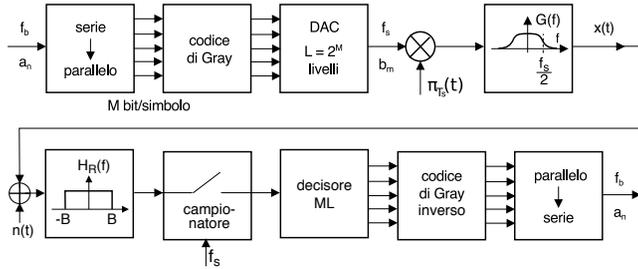
In presenza di un errore sul simbolo, il procedimento illustrato produce un solo bit errato. Ciò comporta che adottando  $M$  bit a simbolo, la probabilità di osservare un bit errato si riduce di  $1/M$  rispetto a quella di errore sul simbolo, ossia è pari a  $P_e^{bit} = P_e^{simb}/M$ , dato che in tal caso si ottiene

$$P_e^{bit} = \frac{\text{n.bit errati}}{\text{n.bit totali}} = \frac{\text{n.simboli errati}}{M \cdot \text{n.simboli}} = P_e^{simb} \frac{1}{M}$$

**Riassumendo** La figura che segue mostra la sequenza generale delle operazioni da intraprendere per generare un segnale dati multilivello, con codifica di Gray, e con caratteristica a coseno rialzato, e quindi riceverlo, e recuperare la sequenza trasmessa. Ricordiamo che mentre al flusso binario  $a_n$  compete una velocità di  $f_b$  bit/secondo, la sequenza multilivello  $b_m$  possiede invece un ritmo pari a  $f_s = \frac{f_b}{M} = \frac{f_b}{\log_2 L}$  simboli/secondo, ed il segnale dati

risultante  $x(t)$  occupa una banda a frequenze positive (vedi eq. 8.5)

$$B = \frac{f_s(1 + \gamma)}{2} = \frac{f_b(1 + \gamma)}{2 \log_2 L} \quad (8.20)$$



#### 8.4.9.2 Probabilità di errore per bit

Qualora i dispositivi di codifica e decodifica di linea adottino il codice di Gray, ogni simbolo errato contiene un solo bit errato, e quindi l'evento di errore *sul bit* si verifica quando il simbolo a cui appartiene è errato, e il bit è quello errato, ovvero:  $Pr\{\text{bit errato}\} = Pr\{\text{simbolo errato}\} \cdot Pr\{\text{bit errato/simbolo errato}\} = P_e^{simb} \cdot \frac{1}{\log_2 L}$ . Ad esempio, con  $L = 256$  livelli, la  $P_e$  sul bit si riduce di  $\log_2 L = 8$  volte. L'espressione (8.17) della  $P_e$  per bit nel caso si adotti una codifica di Gray, diviene quindi:

$$P_e^{bit} = \frac{1}{\log_2 L} \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \frac{3 \log_2 L}{(L^2 - 1)(1 + \gamma)(1 - \frac{\gamma}{4})}} \right\} \quad (8.21)$$

Le curve in fig. 8.10 mostrano il valore di  $P_e^{bit}$  così determinato, per  $\gamma = 0$ , in funzione di  $\frac{E_b}{N_0}$  espresso in dB, per diversi valori di  $L$ . Valori di  $\gamma \neq 0$  equivalgono ad un peggioramento<sup>53</sup> per  $\frac{E_b}{N_0} \Big|_{dB}$  pari a  $10 \log_{10} (1 + \gamma) (1 - \frac{\gamma}{4})$ , o detto in altri termini, conseguono la stessa  $P_e^{bit}$  del caso  $\gamma = 0$ , a patto di incrementare  $\frac{E_b}{N_0} \Big|_{dB}$  della stessa quantità..

**Dimensionamento di una trasmissione numerica** Una tipica metodologia operativa di progetto può basarsi sull'imporre un determinato valore di  $P_e^{bit}$ , una volta nota la banda disponibile  $B$  e la velocità  $f_b$  richiesta. In tal caso

- in base a  $B$  e  $f_b$  si può determinare il valore di  $L$  mediante la (8.20), nell'ipotesi di adottare  $\gamma = 0$ ;
- in base alle curve di fig. 8.10 ed al valore di  $L$  individuato, si determinano i valori di  $E_b/N_0$  (in dB) necessari per ottenere la  $P_e^{bit}$ ;
- noto il livello di rumore  $N_0$ , si determina  $E_b$ ;
- note le esigenze di precisione nella temporizzazione, si impone un valore del roll-off  $\gamma$ , e conseguentemente si aumenta il valore di  $E_b$ ;
- si determina la minima potenza che è necessario ricevere, come  $W_{Rmin} = E_b \cdot f_b$ .

A pag. 243 viene proposto un esercizio riassuntivo, che comprende anche alcuni concetti introdotti alla sezione seguente.

<sup>53</sup>Infatti con  $\gamma > 0$  l'argomento di  $\operatorname{erfc}\{\cdot\}$  si riduce. Ma non di molto: per  $\gamma = 1$  il peggioramento risulta di 1.76 dB.

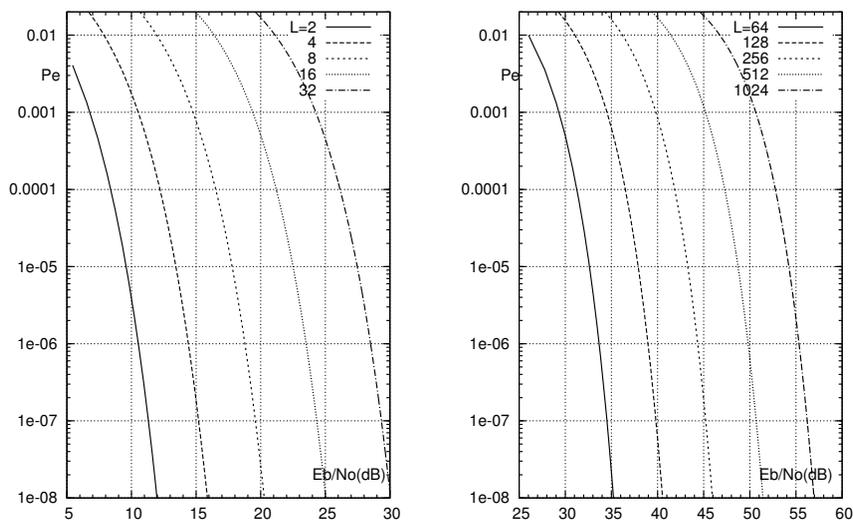


Figura 8.10: Probabilità di errore sul bit per trasmissione multilivello a banda minima e con codifica di Gray

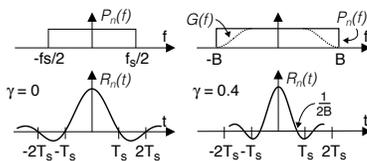
### 8.4.10 Ricevitore ottimo

In questa sezione rimettiamo in discussione i risultati ottenuti ai § 8.2.2.3 e 8.4.5. Infatti, come è stato illustrato al § 6.8 in relazione al *filtro adattato*, in presenza di rumore bianco il valore di  $SNR$  presente nel punto di decisione è *massimo* se si usa un filtro di ricezione  $h_R(t)$  *adattato* alla forma dell'impulso trasmesso  $g(t) = h_T(t)$ , ovvero (a meno di traslazioni temporali) per il quale risulti  $H_R(f) = G^*(f)$ . Al contrario, nello schema adottato per la figura a pag. 214 il filtro di ricezione possiede il solo scopo di limitare la banda del rumore, ed è sempre un passa-basso ideale, indipendentemente dalla scelta fatta per  $g(t)$ . In tal caso, se si adotta una  $G(f)$  di Nyquist *non* a banda minima, i campioni di rumore (sovrapposti a quelli di segnale) danno luogo a v.a.  $x(kT_s)$  gaussiane ma *non più indipendenti*<sup>54</sup>, e quindi la  $P_e$  che si ottiene *non* è la minima possibile<sup>55</sup>.

<sup>54</sup>Infatti, il segnale  $n(t)$  uscente da  $H_R(f) = \text{rect}_{2B}(f)$  ha autocorrelazione  $\mathcal{R}_N(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|H_R(f)|^2\} = 2B \text{sinc}(2B\tau)$  (vedi § 6.2.4), che passa da zero per  $\tau = \frac{1}{2B}$ .

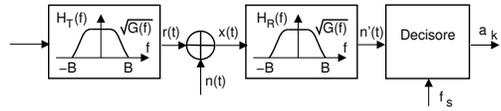
Se si utilizza una  $G(f)$  a coseno rialzato con  $\gamma > 0$ , occorre estendere la banda di ricezione a  $B = \frac{f_s}{2}(1 + \gamma)$ , a cui corrispondono campioni di rumore incorrelati se prelevati a distanza multipla di  $\tau = \frac{1}{2B} = \frac{1}{f_s(1 + \gamma)}$ . Invece, il rumore è campionato con frequenza pari a quella di simbolo  $f_s$ , e dunque con campioni a distanza  $\tau = T_s = \frac{1}{f_s}$ . Pertanto, i campioni di rumore sono correlati, con autocorrelazione pari a  $\mathcal{R}_N(T_s) = 2B \text{sinc}(1 + \gamma)$ .

<sup>55</sup>Al § 5.5.1 si dimostra come delle v.a. gaussiane incorrelate siano anche statisticamente *indipendenti*, mentre nel nostro caso i campioni di rumore sono correlati, proprio a causa della dipendenza statistica. Pur non entrando nei dettagli dei metodi di *predizione lineare* (introdotti al § 21.1.2.2), osserviamo che questa *dipendenza statistica* tra campioni di rumore implica la possibilità di ridurre l'incertezza relativa ai nuovi valori a partire dalla conoscenza dei valori passati. Il vero valore di un campione di rumore può essere calcolato *sottraendo* al valore del segnale ricevuto ad un istante di simbolo, il valore del simbolo *deciso* senza commettere errore; da questa stima, è quindi possibile *predire* il successivo campione di rumore come  $\hat{n}_k = n_{k-1} \frac{\mathcal{R}_N(T_s)}{\mathcal{R}_N(0)}$ , ed anche se la predizione non è esatta, diminuisce comunque l'ampiezza del rumore



Per rendere incorrelati i campioni di rumore, e ridurre la  $P_e$  al minimo, realizzando al contempo le condizioni di Nyquist in ricezione, tentiamo di verificare anche le condizioni  $H(f) =$

$G^*(f)$  di filtro adattato, decomponendo il filtro a coseno rialzato  $G(f)$  in parti uguali tra trasmettitore e ricevitore, e dando quindi luogo allo schema di figura, in cui



$$H_T(f) = H_R(f) = \sqrt{G(f)}$$

In tal modo, al decisore giunge esattamente lo stesso segnale di prima<sup>56</sup>, mentre la densità di potenza del rumore non è più costante, ma ora vale

$$\mathcal{P}_N(f) = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} G(f)$$

Pertanto, i campioni di rumore presi a distanza  $T_s$  sono incorrelati (e quindi statisticamente indipendenti perché gaussiani, vedi § 5.5.1), in quanto  $\mathcal{R}_N(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_N(f)\}$  è ora un impulso di Nyquist, che passa da zero per  $\tau = kT_s$ . Notiamo che, essendo  $G(f)$  reale pari, la fattorizzazione di  $G(f)$  realizza effettivamente la condizione  $H_R(f) = H_T^*(f)$  che definisce un filtro adattato.

Per determinare le nuove prestazioni nel caso in cui  $G(f)$  sia a coseno rialzato, notiamo che mentre la banda passante di  $H_R(f)$  (e dunque del rumore) si è mantenuta pari a  $B = \frac{f_s}{2}(1 + \gamma)$ , la potenza del rumore ora vale<sup>57</sup>

$$\mathcal{P}_N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} G(f) df = \frac{N_0}{2} f_s = \frac{N_0}{2T_b \log_2 L}$$

riducendosi di un fattore  $(1 + \gamma)$  se confrontata con (8.15), e causando un aumento equivalente per l' $SNR$ ; lo stesso fattore  $(1 + \gamma)$  è quindi rimosso anche nella (8.21), portando a

$$P_e^{bit} = \frac{1}{\log_2 L} \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \frac{3 \log_2 L}{(L^2 - 1) \left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)}} \right\} \quad (8.22)$$

il valore della probabilità di errore sul bit adottando il ricevitore ottimo ed il codice di Gray. Dato che al massimo  $1 + \gamma = 2$ , questo corrisponde ad un *miglioramento massimo* di 3 dB nel valore di  $E_b/N_0$ , permettendo di usare ancora le curve di fig. 8.10. D'altra parte, il fatto che la (8.22) coincida con la (8.21) per  $\gamma = 0$  non è un risultato inatteso: infatti, se  $\gamma = 0$  si attua una trasmissione a banda minima, e dunque un  $H_R(f)$  rettangolare passabasso costituisce proprio il filtro adattato!

**Conseguenze** L'adozione di un filtro di trasmissione  $H_T(f) = \sqrt{G(f)}$  comporta che ora nel segnale trasmesso è presente ISI, che può essere rimossa solo mediante filtraggio dello stesso attraverso il filtro adattato  $H_R(f) = \sqrt{G(f)}$ .

residuo, ovvero la sua varianza, e quindi la probabilità di errore del decisore.

<sup>56</sup>Infatti, se  $G(f)$  è tutta al trasmettitore, il segnale generato (e ricevuto) ha espressione (8.7) (vedi anche la (8.1)); indicando ora  $g^\vee(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\sqrt{G(f)}\}$ , ed eseguendo un calcolo del tutto analogo a quello svolto in § 8.1.2.2, si ottiene che il segnale ricevuto nel caso di scomposizione di  $G(f)$  ha espressione

$$r(t) = h_T(t) * h_R(t) * \sum_k a_k \cdot \delta(t - kT_s) = \sum_k a[k] \cdot g(t - kT_s)$$

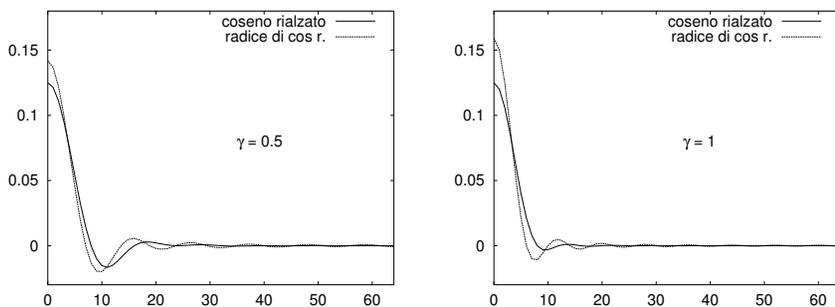
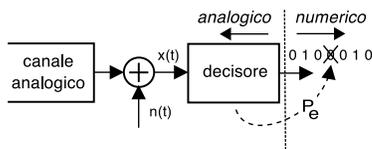


Figura 8.11: Confronto della risposta impulsiva del filtro ottimo e subottimo

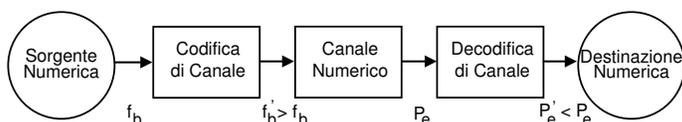
La figura 8.11 mostra l'andamento di  $g^\vee(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\sqrt{G(f)}\}$  a confronto con una  $g(t)$  a coseno rialzato, per valori di roll-off pari a 0.5 ed 1, ottenuto mediante IFFT della corrispondente risposta in frequenza di modulo unitario nell'origine. Notiamo un aumento sia della durata che della ampiezza delle oscillazioni: questa circostanza determina una maggiore complessità realizzativa del filtro di trasmissione, che deve avere una risposta impulsiva più lunga<sup>58</sup>. Una seconda considerazione può essere svolta qualora il canale di trasmissione presenti una risposta in frequenza  $H(f)$  non ideale: in tal caso occorre realizzare un filtro di trasmissione  $H_T(f)$  tale che  $H_T(f)H(f) = \sqrt{G(f)}$ . Spesso l'equalizzazione è invece svolta al lato ricevente, in modo da ottenere  $H_{eq}(f)H(f) = \sqrt{G(f)}$ , ottenendo però una soluzione *sub-ottima*, dato che si perde l'incorrelazione dei campioni di rumore, vedi § 6.2.4, ma anche § 15.4.

## 8.5 Gestione degli errori di trasmissione

La figura a lato, già proposta a pag. 6, ricorda ancora una volta come le conseguenze prodotte dagli errori del decisore siano alcuni bit *diversi* da quelli trasmessi. Al § 8.4.9.2 siamo giunti al calcolo probabilità di errore  $P_e^{bit}$  dovuta a rumore additivo, mentre al § 8.2.2.3 è stato illustrato come anche una non perfetta temporizzazione, od una alterazione dell'impulso  $g(t)$ , possano causare errori di decisione dovuti all'ISI.



Sempre al primo capitolo è proposta anche la figura replicata appresso, che illustra come la  $P_e$ , di qualunque natura, possa essere *ridotta* adottando tecniche di *codifica di canale e controllo di errore*, che sono discusse di seguito.



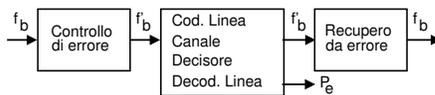
in quanto  $h_T(t) * h_R(t) = g^\vee(t) * g^\vee(t) = g(t)$  per la proprietà di prodotto in frequenza.

<sup>57</sup>Il risultato si può ottenere visivamente, a partire dalla  $G(f)$  a coseno rialzato mostrata in fig. 8.6 a pag. 211, considerando la risposta di ampiezza nominale pari ad 1, e in base alle sue proprietà di simmetria attorno a  $\pm f_s/2$ : non è nient'altro che l'area di un rettangolo.

<sup>58</sup>Per una analisi degli effetti della limitazione temporale dell'impulso  $g^\vee(t)$ , vedere il contributo disponibile presso <https://engineering.purdue.edu/~ee538/SquareRootRaisedCosine.pdf>.

### 8.5.1 Controllo di errore

Con questo termine si individuano le strategie atte a *proteggere* le informazioni da trasmettere, aumentando il numero effettivo dei bit inviati (che passano da  $f_b$  a  $f'_b > f_b$  bit/secondo, vedi figura), in modo che i bit aggiunti siano *dipendenti* dagli altri, permettendo la gestione degli eventuali errori di trasmissione. Vedremo che la quantità di bit aggiunti, indicata anche come *ridondanza* (§ 8.5.2.1), può essere appena sufficiente a permettere di *accorgersi* della presenza di errori di trasmissione, o (se più elevata), può mettere il lato ricevente in grado anche di *correggere* fino ad una certa percentuale dei bit errati. Sussistono dunque due diverse modalità di gestione degli errori:



**Forward error correction o FEC** Qualora il sistema di trasmissione sia da considerare *unidirezionale*<sup>59</sup>, e dunque sprovvisto di un canale di ritorno idoneo a chiedere la *ritrasmissione* dei dati errati, l'unica soluzione consiste nell'aggiunta di una ridondanza sufficiente a correggere direttamente la maggior parte degli eventuali errori. La soluzione prende il nome di correzione di errore *in avanti* o FEC, e si è sviluppata nel contesto della *codifica di canale* (vedi § 8.5.2), appannaggio del mondo delle telecomunicazioni.

**Automatic repeat request o ARQ** Se al contrario è presente un canale di comunicazione *a ritroso*, e non sussistono rigidi vincoli temporali sul massimo ritardo tra trasmissione e ricezione corretta, allora ci si può accontentare di un minor grado di ridondanza, sufficiente ad *accorgersi* degli errori, ovvero a *rivelarli*, ma non a correggerli. Infatti, ora è possibile invocare la *ritrasmissione* del dato errato, dando luogo ad una *strategia di richiesta* di ripetizione<sup>60</sup> o ARQ (vedi § 8.6): tale approccio si è sviluppato nel contesto delle reti di computer e della trasmissione dati, ed ha dato origine ai *protocolli a finestra*.

**Suddivisione in parole** Le unità informative su cui operano FEC e ARQ in generale non sono i singoli bit, ma loro gruppi denominati *parole* o *WORD*<sup>61</sup>, e per questo siamo interessati a valutare come la  $P_e^{bit}$  calcolata al § 8.4.9.2 influenzi il *numero* di errori in una parola, dato che da ciò dipende la possibilità di rilevarli e/o correggerli.

#### 8.5.1.1 Errori su parole

Occupiamoci quindi di determinare la probabilità  $P(i, n)$  che *in una parola* di  $n$  bit ve ne siano  $0 \leq i \leq n$  errati, qualora ciascuno di essi possa essere errato con probabilità  $p = P_e^{bit}$  e

<sup>59</sup>Oltre al caso banale in cui la comunicazione sia effettivamente *half-duplex* (pag. 5), il canale deve essere considerato unidirezionale anche qualora la trasmissione a distanza riguardi informazioni generate in *tempo reale* e consumate immediatamente in ricezione, come nel caso televisivo o telefonico, in cui l'attesa di una ritrasmissione introdurrebbe, oltre ad una temporanea interruzione, anche un ritardo aggiuntivo a tutto ciò che viene dopo, impossibile da sostenere in una applicazione interattiva.

Un altro caso di applicazione della tecnica FEC riguarda ad es. il caso di informazioni memorizzate in forma numerica su *data storage*, come ad esempio *CD/DVD*, *chip di memoria*, *hard disk*... in cui, pur se possibile ri-leggere le informazioni, l'operazione non produrrebbe risultati, in quanto l'errore è attribuibile al supporto rovinato, e non al rumore. Per questo, i dispositivi di memoria aggiungono una ridondanza ai propri dati, usata per rimediare al possibile deterioramento della loro conservazione, o per segnalare la cella di memoria come inaffidabile.

<sup>60</sup>L'aggettivo *automatic* si riferisce al fatto che spesso la gestione della ritrasmissione avviene a carico di uno strato protocollare di livello *inferiore* a quello che effettivamente consuma il messaggio, che in definitiva neanche si avvede della presenza del meccanismo di ritrasmissione.

<sup>61</sup>In generale questo raggruppamento è indipendente da quello in simboli operato dal codificatore di linea multilivello., così come non riflette altre unità semantiche come i bit di un campione quantizzato, o gli intervalli temporali di una moltiplicazione (§ 19.2) mediante trame (§ 19.3.1) o pacchetti § 17.5.1.

nell'ipotesi che gli eventi di errore siano statisticamente indipendenti (§ 5.1.5), ovvero che il verificarsi o meno di un errore su di un bit non condizioni gli altri.

Per i casi  $i = 0$  (tutti giusti) ed  $i = n$  (tutti sbagliati) il risultato è immediato, in quanto risulta  $P(0, n) = (1 - p)^n$  e  $P(n, n) = p^n$ . Per  $0 < i < n$  ci troviamo in un classico caso di *prove ripetute*, in quanto si tratta di osservare l'evento di errore (con probabilità  $p$ ) su  $n$  ripetizioni. La probabilità che ci siano esattamente (ad es. i primi)  $i$  bit errati ha valore  $p^i (1 - p)^{n-i}$ , ma dato che i bit errati possono essere comunque distribuiti su  $n$ , e che vi sono  $\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$  modi di scegliere  $i$  oggetti su  $n$ , il risultato cercato è espresso dalla d.d.p. di Bernoulli (vedi § 17.1)

$$P(i, n) = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} p^i (1-p)^{n-i} \quad (8.23)$$

che, se  $np < 0.1$ , può essere approssimata come<sup>62</sup>

$$P(i, n) \approx \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} p^i \quad (8.24)$$

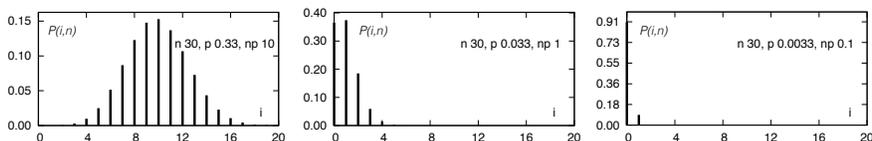
La (8.24) applicata al caso di un singolo errore ( $i = 1$ ) su  $n$  fornisce  $P(1, n) \simeq np$ <sup>63</sup>, ovvero la probabilità di *un solo* bit errato su  $n$  è circa pari ad  $n$  volte la  $P_e^{bit}$  nel flusso binario. D'altro canto, per la probabilità di *due* bit errati su  $n$  la (8.24) fornisce  $P(2, n) \simeq \frac{1}{2}n(n-1)p^2$  e, sempre se  $np < 0.1$ , osserviamo che  $P(2, n) \ll np \simeq P(1, n)$ , ovvero inferiore a quella di un solo bit errato. Più in generale, risulta che

$$P(i+1, n) \ll P(i, n) \quad (8.25)$$

e quindi si può considerare la probabilità di ricevere  $i$  o *più* bit errati su  $n$ , praticamente uguale a quella di osservare solo  $i$  errori. All'aumentare di  $p$  e/o di  $n$ , l'approssimazione perde validità, e la probabilità  $P(i, n)$  può invece *aumentare* con  $i$ , e in tal caso il sistema di trasmissione è praticamente inusabile. E' questo il motivo per cui non è opportuno che la dimensione delle parole<sup>64</sup> ecceda il limite imposto dalla  $P_e^{bit}$  offerta dal collegamento.

L'esposizione prosegue descrivendo per prime le soluzioni che realizzano la *correzione* degli errori, il cui approfondimento prosegue al § 13.2. In § 8.5.3 sono poi illustrate tre tecniche comunemente utilizzate per la *detezione* di errore, mentre al § 8.6 sono descritti i protocolli ARQ adottati nel contesto della trasmissione dati.

<sup>62</sup>Dal confronto tra (8.23) e (8.24) osserviamo che l'approssimazione consiste nel considerare  $(1-p)^{n-i} \simeq 1$ . Per verificare che ciò sia lecito qualora  $np \ll 1$ , cerchiamo il valore di  $p$  tale che  $(1-p)^n > 0.9$ , da cui discende anche  $(1-p)^{n-i} > 0.9$  per qualunque  $i$ . Dato che per  $0 < p < 1$  si può scrivere  $(1-p)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k > 1 - np$ , otteniamo la condizione  $(1-p)^n > 1 - np > 0.9$ , da cui si ottiene  $np < 1 - 0.9 = 0.1$ : ad esempio, se  $n = 1000$  occorre che sia almeno  $p = 10^{-4}$ . Altrimenti l'approssimazione non è valida, e la (8.25) deve essere verificata; qui sotto mostriamo la d.d.p. di Bernoulli (8.23) per diversi valori di  $np$ , evidenziando come qualora  $np < 0.1$  essa risulti monotona decrescente con  $i$ .



<sup>63</sup>In linea di principio, dato che la probabilità che solo il *primo* bit su  $n$  sia sbagliato è pari a  $p(1-p)^{n-1}$  e che lo stesso risultato si ottiene anche per gli altri  $n-1$  casi possibili, la probabilità  $P(1, n)$  di *un solo* (generico) bit sbagliato su  $n$  è pari a  $P(1, n) = np(1-p)^{n-1}$ , che si approssima come  $np$  qualora si consideri  $(1-p)^{n-1} \simeq 1$  in virtù della condizione  $np \ll 1$ .

<sup>64</sup>Così come non è opportuno aumentare di troppo la dimensione di un *pacchetto dati*, anche se in tal modo si riduce l'*overhead*, vedi § 17.5.1.

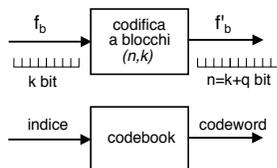
## 8.5.2 Correzione di errore e codifica di canale

Approfondiamo i principi con cui scegliere i bit di ridondanza allo scopo di realizzare un sistema di tipo FEC basato sulle tecniche di *codifica di canale*, peraltro idonee ad essere utilizzate anche per il caso dei sistemi ARQ. Quindi, descriviamo due semplici metodi di correzione di errore, ossia il *codice a ripetizione* e l'*interleaving*. L'argomento viene ripreso al § 13.3, dove sono illustrate tecniche più avanzate.

### 8.5.2.1 Codice a blocchi

La *codifica a blocchi* opera raggruppando  $k$  bit consecutivi del messaggio originale, distinti dai precedenti e dai successivi blocchi di  $k$ . Per ogni  $k$  bit da trasmettere, il codificatore produce  $n = k + q$  bit in uscita, dipendenti ovviamente dai  $k$  di ingresso, e che sono dunque trasmessi al loro posto.

**Codeword e codebook** L'operazione compiuta dal codificatore può essere pensata o realizzata come l'accesso ad una tabella (o memoria) denominata CODEBOOK (o *cifrario*), dove i  $k$  bit da codificare rappresentano un *indice* che individua  $2^k$  differenti righe, in cui si trovano scritte le *parole di codice* (CODEWORD), costituite ognuna da  $n = k + q$  bit. Un codice siffatto è detto *codice*  $(n, k)$ .



**Ridondanza** E' proporzionale al numero dei  $q$  bit di protezione aggiunti, essendo definita come rapporto tra  $q$  ed il numero di bit di informazione  $k$ , ovvero

$$\rho = \frac{q}{k} \cdot 100 \%$$

ed è una misura del grado di protezione offerto dal codificatore di canale.

**Esempio** In una trasmissione con ridondanza del 50%, per ogni coppia di bit di informazione ne viene inserito uno di protezione.

La presenza di ridondanza fa sì che il numero  $2^k$  di codeword esistenti sia *inferiore* a quello delle  $2^n$  possibili configurazioni di  $n$  bit, in modo che se un bit di una codeword viene modificato a causa di un errore del decisore, gli  $n$  bit corrispondenti finiscono per presentare una configurazione che nel codebook *non esiste*, permettendo così di rivelare e/o correggere l'errore. Ma cosa succede se avviene più di un errore per codeword?

**Distanza di Hamming** Indica la *dissimilarità*  $d_H(c_i, c_j)$  tra due qualsiasi codeword  $c_i, c_j$  espressa come il numero di posizioni di bit in cui esse sono diverse. E' calcolato effettuando l'*OR esclusivo* delle rispettive rappresentazioni binarie, e contando il numero di *uni* del risultato.

**Esempio** Con  $c_i = 011010$  e  $c_j = 010110$  si ha  $\begin{matrix} 011010 \oplus \\ 010110 \end{matrix} = 001100$  ovvero le codeword differiscono su due posizioni di bit, e dunque  $d_H(c_i, c_j) = 2$ .

**Distanza del codice** Individua la *minima* distanza di Hamming  $d_H$  tra tutte le possibili coppie di codeword di uno stesso codebook

$$d_m = \min_{i \neq j} d_H(c_i, c_j)$$

e permette di valutare la capacità di rivelazione e correzione del codebook, in quanto rappresenta il minimo numero di errori necessario a trasformare una codeword in un'altra, almeno nel caso peggiore di due parole a distanza  $d_m$ .

**Rivelazione e correzione di errore** Un codice con distanza  $d_m$  può

- *rivelare* al massimo  $d_m - 1$  errori, in quanto se ne avvengono di più *si finisce* in un'altra codeword, e
- *correggere* fino a  $\frac{d_m-1}{2}$  errori, oltre i quali *si finisce più vicini* ad una altra codeword.

Mentre la prima azione è possibile ogniqualvolta si osservi una codeword  $c_\alpha$  non presente nel codebook, per intraprendere la seconda occorre operare una decisione relativa a quale sia la codeword  $\hat{c}$  *realmente* trasmessa, decisione affidata ad un criterio di *minima distanza*, scegliendo la codeword più vicina a quella ricevuta, ovvero

$$\hat{c} = \arg \min_{c_i} d_H(c_i, c_\alpha)$$

**Esempio** Nel caso in cui  $d_m = 3$ , la presenza di *un solo* bit errato su  $n$  fa sì che la codeword ricevuta differisca da quella trasmessa per *un* bit, mentre mantiene almeno *due bit* di differenza rispetto a tutte le altre possibili, permettendo così al ricevitore di *correggere* l'errore. Se sono invece presenti *due* errori, la parola ricevuta diviene più vicina ad una codeword *diversa* da quella trasmessa, ed in tal caso la procedura di correzione sceglierebbe una codeword errata.

E' quindi un po' come se attorno ad ogni codeword fosse costruita *una sfera* contenente tutte le *non-codeword* lunghe  $2^n$  bit e distanti dalla codeword al massimo  $\frac{d_m-1}{2}$  bit: la ricezione di ciascuna di esse comporta la decisione per la codeword al centro della sfera.

**Massima distanza minima** Per un generico codice a blocchi  $(n, k)$ , la distanza del codice  $d_m$  rispetta la diseuguaglianza

$$d_m \leq q + 1$$

ovvero  $d_m \leq n - k + 1$  dato che  $n = k + q$ . Infatti i  $2^k$  bit da proteggere sono qualunque e dunque la loro distanza è uno, che aumenta al più di una unità per ognuno dei  $q$  bit aggiunti.

**Esempio** Aggiungendo  $q = 3$  bit di ridondanza si  $d_m \leq q + 1 = 4$ , e se per una particolare scelta del codebook (ad es. di Hamming, § 13.3.1.1) si ottiene  $d_m = 3$ , saremo in grado di correggere un errore e rivelarne 2.

**Probabilità di errore residua per codeword** Da quanto illustrato poc' anzi, occorre stabilire *a priori* se utilizzare il codice a fini di correzione oppure di detezione. Indicando con  $e_M$  il massimo numero di errori corretti o rivelati, per una codeword può essere definita una probabilità *residua* di errore *su parola*  $P_e^r$  per descrivere il caso in cui, anche dopo l'esecuzione delle procedure di controllo di errore<sup>65</sup>, siano ancora presenti errori, perché in numero superiore ad  $e_M$  e dunque eccedenti la capacità correttiva del codice. Risulta quindi che  $P_e^r = P(i > e_M, n)$  che, nelle condizioni di validità della (8.24), è pari a  $P(e_M + 1, n)$ . In linea generale, la valutazione dell'errore residuo *sul bit* dipende dal tipo di controllo di errore attuato.

<sup>65</sup>Che nel caso di rivelazione richiede la ritrasmissione della parola errata.

**Efficienza** L'efficienza del codice è misurata dal *tasso di codifica* (CODE RATE)

$$R_c = \frac{k}{n} < 1$$

che rappresenta la frazione di bit informativi sul totale di quelli trasmessi, e che consente di scrivere la velocità di uscita dal codificatore come

$$f'_b = \frac{f_b}{R_c} > f_b \quad (8.26)$$

**Esempio** In una trasmissione con un tasso di codifica pari a 0.5, il numero di bit uscenti (per unità di tempo) dal codificatore di canale è il doppio del numero dei bit entranti.

L'argomento dei codici a blocchi è molto vasto<sup>66</sup>, e fornisce molteplici soluzioni, la cui trattazione esauriente eccede il livello di approfondimento del presente capitolo (vedi però il § 13.3.1); gli stessi tre casi di controllo di errore trattati al § 8.5.3 (parità, somma di controllo e CRC) possono essere inquadrati nel contesto dei *codici a blocchi*. Qui ci limitiamo ad un esempio di codice a correzione molto elementare, il codice *a ripetizione*, mentre al § 13.3.1.1 è illustrata una tecnica nota come codice *di Hamming*, in grado di conseguire una efficienza di gran lunga migliore.

### 8.5.2.2 Codice a ripetizione n:1

Realizza un codice a blocchi molto semplice e con proprietà correttive, per il quale  $k = 1$  e le uniche due codeword sono pari a  $n$  bit tutti uguali ad ogni bit in ingresso; in tal modo (se gli errori sono indipendenti) il decisore può effettuare la correzione in base ad una "votazione a maggioranza" (*majority voting*). Ponendo ad esempio  $n = 3$  si ha il codice a ripetizione 3 : 1 con codeword 000 ed 111, per le quali risulta  $d_m = 3$ : il codice è pertanto in grado di correggere un errore e rivelarne due<sup>67</sup>. Notiamo inoltre come questo codice sia particolarmente poco efficiente, dato che per esso si ottiene un tasso di codifica  $R_c = \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$ ; d'altra parte, il codice a ripetizione è uno dei pochi per cui  $d_m = q + 1$ , e non meno.

**Esercizio** Calcolare la probabilità di errore residua  $P^r$  per un codice a ripetizione 3:1, in presenza di una  $P_e^{bit} = p$ . **Risp.** Come discusso il codice può correggere un errore singolo, mentre in presenza di un errore doppio la decisione a maggioranza modifica anche il terzo bit, ed un errore triplo passa inosservato. La (8.24) approssima la probabilità che due o più bit su tre siano errati come<sup>68</sup>  $P(2, 3) \simeq \frac{1}{2} 3 \cdot 2p^2 = 3p^2$  che è la  $P^r$  cercata *per codeword*. Dato che per il codice a ripetizione ad ogni codeword corrisponde un solo bit del messaggio originario, lo stesso valore di  $P^r = 3p^2$  è anche la  $P_e^{bit}$  residua. Ad esempio, in corrispondenza di una  $p = 10^{-4}$  iniziale, dopo decodifica si ottiene una  $P_e^{bit} = 3 \cdot 10^{-8}$ .

**Compromesso banda - potenza** Torniamo su questo argomento (§ 8.4.7) perché di fatto l'introduzione del codice di canale aumenta la  $f_b$  eq. (8.26), e dunque l'occupazione di banda eq. (8.5); non solo, ma a parità di potenza ricevuta  $\mathcal{P}_x$  l'aumento di  $f_b$  comporta la riduzione di  $E_b = \mathcal{P}_x / f_b$  e dunque di  $E_b / N_0$  della stessa frazione, e quindi un *peggioramento* della  $P_e$  di base su cui opera il decodificatore di canale. Evidentemente il miglioramento apportato da quest'ultimo sopperisce anche al peggioramento dovuto all'aumento di banda, che la teoria

<sup>66</sup>Senza pretesa di esaustività, possiamo annoverare l'esistenza dei codici di Hamming, di Hadamard, BCH, Reed-Solomon, Reed-Muller, di Golay, di Gallager, turbo, a cancellazione, a fontana, punturati...

<sup>67</sup>Poniamo di dover trasmettere 0110. La sequenza diventa 000 111 111 000 e quindi, a causa di errori, ricevo 000 101 110 100. Votando a maggioranza, ricostruisco la sequenza corretta 0 1 1 0.

<sup>68</sup>Volendo svolgere i conti esatti, la probabilità di 2 bit errati su 3 è data dalla distribuzione di Bernoulli ed è pari a  $\binom{3}{2} p^2 (1-p) = 3p^2 (1-p)$ , a cui va sommata la probabilità di 3 bit errati, pari a  $p^3$ . Pertanto  $P^r = 3p^2 (1-p) + p^3 = 3p^2 - 3p^3 + p^3 = 3p^2 - 2p^3 \simeq 3p_e^2$ , approssimazione legittima se  $np = 3p \ll 1$ .

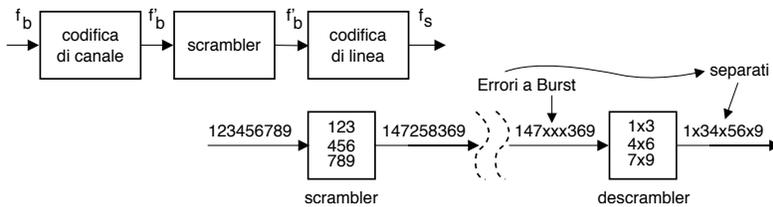


Figura 8.12: Schema di principio della trasmissione a dati intercalati

dell'informazione prevede possa essere ripagato da un minor bisogno di potenza per ottenere le stesse prestazioni.

**Esercizio** Proseguendo l'esercizio precedente, osserviamo che il codice a ripetizione determina una  $f_b$  tripla, e dunque un  $E_b/N_0$  ridotto di un terzo, ovvero di circa -4.7 dB inferiore rispetto al caso non codificato. Dalle curve di fig. 8.10 riscontriamo che il miglioramento sulla  $P_e$  (da  $10^4$  a  $3 \cdot 10^{-8}$ ) dovuto al codice corrisponde più o meno allo stesso numero di dB. Per codici più efficienti (con minore aumento di banda come ad esempio il codice di Hamming, vedi § 13.3.1.1) il bilanciamento tra i due effetti conferma il risultato anticipato dal compromesso banda-potenza, qui applicato alla codifica di canale.

### 8.5.2.3 Errori a burst ed interleaving

Le capacità di correzione fino ad ora discusse sono valide purché gli eventi di errore siano *staticamente indipendenti*. In realtà gli errori possono presentarsi in maniera *non* indipendente, e concentrati in un breve intervallo di tempo: questa circostanza è indicata come *caso degli errori a pacchetto*<sup>69</sup>. In tal caso, si usa ricorrere alla tecnica nota come *scrambling*<sup>70</sup> o *interleaving*<sup>71</sup>, attuabile a patto di accettare un ritardo di trasmissione. Si tratta infatti di modificare l'ordine dei dati inviati, in modo che gli errori che occorrono su bit *vicini* si riflettano in errori su bit... *lontani*, e quindi appartenenti a codeword differenti, come illustrato in fig. 8.12 in cui i bit sono scritti per righe e letti per colonne. Ovviamente, occorre prevedere un processo inverso (*descrambling* o *deinterleaving*) all'altro capo del collegamento. E' appena il caso di notare che lo scrambler (similmente al codice di Gray) *non altera* il numero dei bit trasmessi, e dunque *non è* una forma di codifica FEC.

### 8.5.3 Detezione di errore

In questo caso ci si limita a mettere il ricevitore in grado di *accorgersi* della presenza di errori, senza poterli correggere. Le parole errate possono essere scartate, oppure può esserne richiesta la ritrasmissione.

#### 8.5.3.1 Controllo di parità

Viene comunemente usato nell'ambito della trasmissione asincrona (§ 8.7.1) e sincrona orientata al carattere (pag. 242) per rivelare errori sul bit, e consiste nell'aggiungere alla parola da

<sup>69</sup>In inglese, errori a *burst* (*scoppio*). Dovuti a rumori e disturbi di tipo *impulsivo*, ad esempio a causa di scintille come per motori elettrici o candele di accensione.

<sup>70</sup>Letteralmente: arrampicamento, ma anche "arruffamento", vedi *scrambled eggs*, le uova strapazzate dell'*english breakfast*.

<sup>71</sup>LEAVE = *fogliare, sfogliare, rastrellare*, ed il termine potrebbe essere tradotto come *intercalamento*.

trasmettere un unico ulteriore bit, in modo che in totale ci sia un numero *pari* di uni<sup>72</sup>, applicando così una regola di *parità pari* (EVEN). Il caso opposto, ossia l'aggiunta di un bit in modo da rendere *dispari* il numero di uni, prende nome di *parità ODD*.

In entrambi i casi<sup>73</sup> dopo aver raggruppato i bit pervenuti il ricevitore esegue un *controllo* detto appunto *di parità*, semplicemente contando<sup>74</sup> il numero di uni, ed accorgendosi così se nella parola si sia verificato un errore (uno zero divenuto uno o viceversa). In tal caso, il ricevitore invierà all'altro estremo del collegamento una richiesta di ritrasmissione del gruppo di bit errato. Se invece si è verificato un errore che coinvolge *due* bit della parola, questo passerebbe inosservato, in quanto la parità prescritta verrebbe mantenuta. Infatti, la *distanza di Hamming* (vedi pag. 227) relativa ad un codebook ottenuto aggiungendo ad ogni possibile parola di  $k$  bit il corrispondente di parità, è pari a due<sup>75</sup>.

**Esempio:** indicando la probabilità di errore sul bit con  $p$  (es  $10^{-3}$ ) ed applicando la (8.24) si ottiene che la probabilità di  $i = 2$  errori su  $n = 10$  bit vale  $P_e^{word} = \frac{1}{2}n(n-1)p^2 = 4.5 \cdot 10^{-5}$ , che rappresenta il *tasso residuo di errore su parola* legato all'uso di un bit di parità: essendo due i bit errati su 10, la  $P_e^{bit} = P\{err/word_e\} \cdot P_e^{word}$  risulta pari a  $\frac{2}{10} \cdot 4.5 \cdot 10^{-5} = 0.9 \cdot 10^{-5}$ , un bel risultato rispetto al  $10^{-3}$  di partenza.

Il concetto di parità può essere esteso calcolando  $q$  bit di parità, ognuno a partire da un *diverso sottoinsieme* dei  $k$  bit di ingresso, con sottoinsiemi eventualmente sovrapposti. Un codice del genere prende il nome di codice di *Hamming*, descritto al § 13.3.1.1.

### 8.5.3.2 Somma di controllo o checksum

Quando il messaggio è composto da  $M$  diverse parole di  $N$  bit, la probabilità che almeno una di queste sia errata aumenta in modo circa proporzionale ad  $M$ , in base ad un ragionamento del tutto analogo a quello della nota 63.

Per aumentare le capacità di rivelazione del controllo di parità applicato sulle singole parole (indicato ora come parità *di riga*, o *trasversale*), si aggiunge al gruppo di  $M$  parole una ulteriore parola (detta *somma di controllo* o *checksum*), i cui bit si ottengono applicando il controllo di parità a tutti i bit "omologhi" delle  $M$  parole incolonnate, generando così una parità *di colonna* (o *longitudinale*), come esemplificato in figura.

000010	0	}	parità di riga (ODD)
010100	1		
100011	0		
010000	0		
010101	1		
100000	0		
110011	1		
000011	1		
100001	1		
000011	1		
100001	1	←	parità di colonna (EVEN)

A volte, si preferisce calcolare la somma di controllo mediante una operazione di somma *modulo uno*<sup>76</sup>, direttamente realizzabile in software in modo veloce. In tal caso, il ricevitore calcola una nuova somma di controllo longitudinale, includendo anche la somma di controllo originaria: in assenza di errori, il risultato deve fornire zero.

### 8.5.3.3 Codice polinomiale e CRC

L'utilizzo di una somma di controllo può produrre risultati scadenti nel caso di una distribuzione

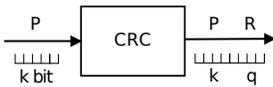
<sup>72</sup>Ad esempio, alla sequenza 001001 verrà aggiunto uno 0, mentre a 010101 si aggiungerà ancora un 1, perché altrimenti gli uni complessivi sarebbero stati 3, che è dispari.

<sup>73</sup>Il ricevitore deve comunque essere al corrente del fatto se la parità sia ODD o EVEN !

<sup>74</sup>La *conta* può essere realizzata in forma algoritmica o circuitale, eseguendo la somma modulo due di tutti i bit che compongono la parola (ovvero complementando il risultato, nel caso di parità *dispari*). La somma modulo due è equivalente all'operazione di OR esclusivo, viene a volte indicata con il simbolo  $\oplus$ , e corrisponde alla regola  $0 \oplus 0 = 0$ ,  $0 \oplus 1 = 1$ ,  $1 \oplus 0 = 1$ ,  $1 \oplus 1 = 0$ .

<sup>75</sup>Considerando parole di 3 bit, le codeword (di 4 bit, in cui l'ultimo è una parità pari) risultano: (0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111). E' facile constatare che ognuna di esse differisce da tutte le altre per almeno due bit.

<sup>76</sup>La somma modulo uno è l'equivalente binario dell'operazione di somma (decimale) tradizionale, comprese quindi le operazioni di riporto verso le cifre più elevate. Il riporto finale viene poi nuovamente sommato al risultato della somma.



temporale dei bit errati particolarmente sfavorevole, mentre la tecnica nota come *Cyclic Redundancy Check* (o CRC)<sup>77</sup> garantisce prestazioni *più uniformi*. Questo metodo consiste nell'aggiungere ad una parola  $P$  di  $k$  bit che si desidera

trasmettere, un gruppo  $R$  di  $q < k$  ulteriori bit di *protezione*, calcolati a partire dai primi  $k$ , in modo da permettere la detezione di eventuali errori; sotto questo aspetto, il CRC rientra nella categoria dei *codici a blocchi* (§ 8.5.2.1).

L'aggettivo *polinomiale* trae origine dalla associazione tra un numero binario  $B$  di  $n + 1$  bit, indicati con  $b_i, i = 0, 1, \dots, n$ , ed un polinomio<sup>78</sup>  $B(x)$  a coefficienti binari nella variabile  $x$ , di grado  $n$ , con espressione

$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0$$

Un *codice polinomiale* è definito a partire da un *polinomio generatore*  $G(x)$  di grado  $q$ , i cui coefficienti binari identificano una parola  $G = g_q g_{q-1} \dots g_1 g_0$  di  $q + 1$  bit.

Indicando ora con  $P$  la sequenza dei  $k$  bit  $p_i$  da proteggere, *aggiungiamo* a destra di questi un gruppo di  $q$  bit pari a zero, ottenendo una nuova parola  $P \cdot 2^q$  lunga  $k + q$  bit, che quindi dividiamo per  $G$  (mediante aritmetica modulo due<sup>79</sup>), ottenendo un quoziente  $Q$ , ed un resto  $R$  con al massimo  $q$  bit. Pertanto, possiamo scrivere

$$\frac{P \cdot 2^q}{G} = Q \oplus \frac{R}{G}$$

Le sequenze  $Q$  ed  $R$  costituiscono rispettivamente i coefficienti dei polinomi quoziente  $Q(x)$  e resto  $R(x)$ , ottenibili dalla divisione di  $P(x) \cdot 2^q$  per  $G(x)$ . I  $q$  bit  $R$  del resto sono quindi utilizzati come *parola di protezione*, in modo da esprimere la sequenza  $T$  da trasmettere come  $T = P \cdot 2^q \oplus R$  di  $k + q$  bit, ovvero con i  $k$  bit più significativi pari a  $P$  ed i  $q$  bit in coda pari ad  $R$ . Il ricevitore effettua anch'esso una divisione, stavolta tra  $T$  e  $G$ , che in assenza di errori produce un *resto nullo*

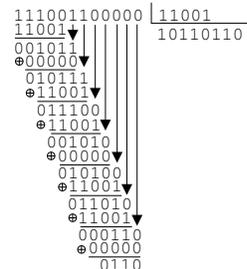
$$\frac{T}{G} = \frac{P \cdot 2^q \oplus R}{G} = \frac{P \cdot 2^q}{G} \oplus \frac{R}{G} = Q \oplus \frac{R}{G} \oplus \frac{R}{G} = Q$$

<sup>77</sup>Tale denominazione indica un'azione di controllo (*check*) realizzata mediante l'aggiunta di una *ridondanza* ottenuta applicando un codice *ciclico* - vedi § 13.3.1.2.

<sup>78</sup>L'insieme di tutti i polinomi di grado minore od uguale ad  $n$  costituisce un particolare spazio algebrico, per il quale è possibile dimostrare una serie di proprietà, la cui verifica trascende dallo scopo di questo testo, e che consentono di stabilire le capacità del codice di rivelare gli errori.

<sup>79</sup>Per fissare le idee, consideriamo  $k = 8$  bit a da proteggere, pari a  $P = 11100110$ ,  $q = 4$  bit di CRC, ed un generatore  $G = 11001$ . La sequenza  $P \cdot 2^q$  risulta pari a 11100110 0000, e la divisione modulo 2 tra  $P$  e  $G$  fornisce un quoziente  $Q = 10110110$  (che viene ignorato) ed un resto  $R$  pari a 0110. Pertanto, viene trasmessa la sequenza  $T = P \cdot 2^q \oplus R = 11100110 0110$  con  $k + q = 12$  bit.

La divisione modulo 2 si realizza come mostrato nella figura a lato: considerando i bit più significativi di  $P \cdot 2^q$  e  $G$ , l'uno nell'uno ci sta una volta, e scriviamo uno come primo bit di  $Q$ . Ripetiamo ora  $G$  sotto  $P \cdot 2^q$ , ed anziché sottrarre i bit, ne calcoliamo l'OR-ESCLUSIVO  $\oplus$  bit-a-bit, ottenendo 00101, a cui aggiungiamo un uno *abbassando* l' successivo bit (1) di  $P \cdot 2^q$ . Stavolta l'uno nello zero ci sta zero volte, e dunque aggiungiamo uno zero a  $Q$ , riportiamo cinque zeri (come la lunghezza di  $G$ ) allineati sotto al resto parziale, eseguiamo l'EXOR, ed abbassiamo un'altra cifra (1) di  $P$ . Il confronto ora è tra il quinto bit da destra del resto parziale (1) ed il bit più significativo (il quinto, 1) di  $G$ , ottenendo la terza cifra di  $Q$  (1). Ripetiamo il procedimento, e quando tutti i bit del divisore sono stati usati, l'ultima operazione  $\oplus$  fornisce il resto  $R$  cercato.



in quanto sommando in aritmetica modulo due un numero per se stesso, si ottiene un risultato nullo. Pertanto, se  $T/G = Q$  con resto nullo, la parola  $P$  è riottenuta semplicemente shiftando  $T$  a destra di  $q$  posizioni.

Nel caso invece in cui si siano verificati errori, indichiamo con  $E$  la sequenza binaria di errore, di lunghezza  $k + q$  bit, ognuno dei quali è pari ad uno se in quella posizione si verifica errore, o zero in caso contrario, in modo da rappresentare il segnale ricevuto  $R$  come  $R = T \oplus E$ . Se  $E \neq 0$  la divisione operata al ricevitore ora fornisce

$$\frac{R}{G} = \frac{T \oplus E}{G} = \frac{T}{G} \oplus \frac{E}{G} = Q \oplus \frac{E}{G} \quad (8.27)$$

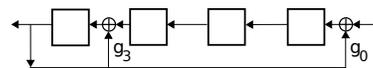
e quindi si verifica la presenza di un resto diverso da zero<sup>80</sup>, che indica appunto la presenza di errori, tranne nei casi in cui  $E$  risulti perfettamente divisibile per  $G$ , evento con bassa probabilità se  $G$  è scelto opportunamente. Nel caso in cui  $q = 1$  si ricade nel caso del controllo di parità (§ 8.5.3.1), a cui corrisponde  $G(x) = x + 1$ .

Per applicare il metodo, sia il trasmettitore che il ricevitore devono utilizzare lo stesso generatore  $G(x)$ , per il quale esistono diverse scelte standardizzate<sup>81</sup>. Si può dimostrare che scegliendo  $G(x)$  in modo opportuno, il metodo discusso permette di rivelare

- tutti gli errori singoli;
- se  $G(x)$  contiene il termine noto  $+1$ , tutti gli errori a burst che si estendono per  $q$  o meno bit;
- se  $x + 1$  è un fattore di  $G(x)$ , tutti gli errori in numero dispari;
- se  $G(x)$  è un polinomio primitivo<sup>82</sup>, tutti gli errori doppi;
- se  $G(x)$  è un polinomio primitivo di grado  $q - 1$  moltiplicato per il fattore  $x + 1$ , tutti gli errori doppi entro un intervallo di  $2^{q-1} - 1$  bit, e tutti gli errori in numero dispari.

**Calcolo del CRC** L'aspetto che ha reso popolare questo metodo è la maniera in cui è possibile calcolare i  $q$  bit di controllo, che vengono essi stessi indicati come CRC. Infatti la divisione binaria illustrata alla nota 79 è realizzabile a livello circuitale in modo relativamente semplice<sup>83</sup>.

Si tratta di utilizzare un registro a scorrimento *controtreazionato* (vedi figura a lato), in cui i  $k$  bit da proteggere sono immessi ad uno ad uno da destra verso



sinistra, seguiti da  $q$  zeri consecutivi. Per ogni valore immesso, quelli già presenti *scorrono* a sinistra nel registro, ed il bit che *trabocca*, oltre a rappresentare una cifra del quoziente, alimenta gli OR esclusivi presenti nel registro; questi ultimi sono posti in corrispondenza dei coefficienti di  $G(x)$  pari ad uno, tranne che per quello corrispondente ad  $x^q$ .

Al termine dell'inserimento dei  $k + q$  bit di  $P \cdot 2^q$ , lo stato del registro a scorrimento costituisce proprio il resto  $R$ , da usare come CRC. L'esempio in figura rappresenta il caso mostrato

<sup>80</sup>Dalla (8.27) sembrerebbe che il resto sia  $E$ , ma dato che  $E(x)$  può avere grado  $> q$ , esso è divisibile per  $G(x)$ , e dunque il resto *non* è  $E$  - altrimenti, sarebbe possibile correggerlo!!

<sup>81</sup>Ecco quattro scelte utilizzate nei sistemi di trasmissione:

CRC-12  $G(x) = x^{12} + x^{11} + x^3 + x^2 + x + 1$

CRC-16  $G(x) = x^{16} + x^{15} + x^2 + 1$

CRC-CCITT  $G(x) = x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$

CRC-32  $G(x) = x^{32} + x^{26} + x^{23} + x^{22} + x^{16} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$

Come discusso, un polinomio di ordine  $q$  genera un CRC di  $q$  bit; pertanto il CRC-12, che è usato per caratteri a 6 bit, genera 12 bit di CRC, mentre CRC-16 e CRC-CCITT, utilizzati in America ed in Europa rispettivamente per caratteri a 8 bit, producono 16 bit di CRC. In alcuni standard di trasmissione sincrona punto-punto, è previsto l'uso di CRC-32.

<sup>82</sup>[https://it.wikipedia.org/wiki/Polinomio\\_primitivo](https://it.wikipedia.org/wiki/Polinomio_primitivo)

<sup>83</sup>Vedi ad es. [http://en.wikipedia.org/wiki/Computation\\_of\\_cyclic\\_redundancy\\_checks](http://en.wikipedia.org/wiki/Computation_of_cyclic_redundancy_checks)

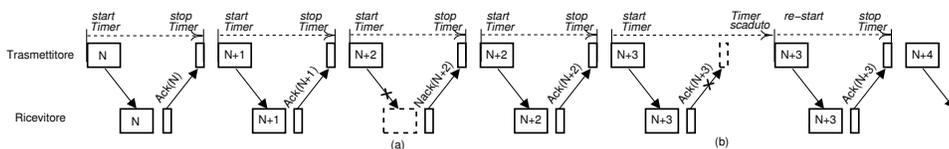


Figura 8.13: Richieste di ritrasmissione per un protocollo send and wait

alla nota 79, in cui di  $G(x) = x^4 + x^3 + 1$ : con un po' di pazienza, è possibile verificare che il circuito effettivamente svolge i calcoli prescritti dalla procedura di divisione, e che si ottiene lo stesso risultato.

## 8.6 Protocolli a richiesta automatica

Le trasmissioni ARQ (pag. 225) prevedono l'esistenza di un canale di ritorno, mediante il quale chiedere la ri-trasmissione delle trame ricevute con errori<sup>84</sup>; pertanto i dati anche se già trasmessi, devono essere temporaneamente memorizzati al trasmettitore, per rispondere alle eventuali richieste del ricevitore. Viene illustrato per primo un metodo molto semplice, ma potenzialmente inefficiente. Adottando invece buffer (detti *finestre*) di ricezione e trasmissione di dimensioni opportune, si riesce a conseguire una efficienza maggiore.

### 8.6.1 Send and wait

Viene trasmessa una trama alla volta, e si attende un riscontro (*ACKnowledgment*) di corretta ricezione prima di trasmettere la seguente. Nel caso in cui il ricevitore rilevi un errore, si genera invece un riscontro negativo (NACK), che causa la ritrasmissione della trama trasmessa in precedenza. Se il NACK giunge illeggibile, il trasmettitore attende fino allo scadere di un *allarme a tempo* (TIMEOUT) e quindi ritrasmette comunque l'ultimo dato inviato.

In figura 8.13 è riportata una tipica sequenza di passaggi, in cui (a) la trama  $N + 2$  è ricevuta con errore, causando un primo NACK; quindi (b) è l'ACK( $N + 3$ ) ad arrivare errato, causando lo scadere del timeout, e la ritrasmissione della trama  $N + 3$ . Notiamo che le trame devono essere etichettate con un numero di sequenza, in modo da permettere al ricevitore, nel caso (b), di riconoscere la trama come duplicata, e scartarla (l'ACK è inviato comunque per permettere la risincronizzazione del trasmettitore).

**Utilizzo del collegamento** Considerando l'intervallo di tempo  $t_T$  che intercorre tra la trasmissione di due trame consecutive, la trasmissione vera e propria dura solamente  $t_{Tx}$  istanti, dopodiché occorre attendere  $2 \cdot t_p$  istanti ( $t_p$  è il tempo di *propagazione*) prima di ricevere l'ACK. Trascurando gli altri tempi (di trasmissione dell'ACK, e di elaborazione delle trame), si definisce una efficienza di utilizzo

$$U = \frac{t_{Tx}}{t_T} \simeq \frac{t_{Tx}}{t_{Tx} + 2 \cdot t_p} = \frac{1}{1 + 2 \cdot t_p/t_{Tx}} = \frac{1}{1 + 2 \cdot a}$$

in cui il parametro  $a$  che determina il risultato, può assumere valori molto diversi, in funzione della velocità di trasmissione e della lunghezza del collegamento.

<sup>84</sup>Queste tecniche hanno origine a scopo di controllo degli errori nei collegamenti punto-punto per i quali si osserva una *probabilità di errore* non trascurabile. Successivamente, sono stati utilizzati nelle reti a pacchetto, in cui è possibile la *perdita totale* dei pacchetti in transito. Per questo le implementazioni attuali dei ARQ, specie se applicati da un estremo all'altro di una rete, privilegiano l'uso di *timeout* piuttosto che quello di riscontri negativi.

**Esempio** Una serie di trame di  $N = 1000$  bit viene trasmessa utilizzando un protocollo *send-and-wait*, su tre diversi collegamenti:

- un cavo ritorto di 1 km,
- una linea dedicata di 200 km,
- un collegamento satellitare di 50000 km.

Sapendo che la velocità di propagazione è di  $2 \cdot 10^8$  m/sec per i casi (a) e (b), e di  $3 \cdot 10^8$  m/sec per il caso (c), determinare l'efficienza di utilizzo  $U = \frac{1}{1+2 \cdot a}$ , per le due possibili velocità di trasmissione  $f_b$  di 1 kbps ed 1 Mbps.  $\square$

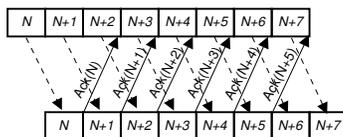
Il tempo necessario alla trasmissione  $t_{Tx} = \frac{N}{f_b}$ , risulta pari ad 1 sec ed 1 msec alle velocità di  $10^3$  e  $10^6$  bps rispettivamente. Il tempo di propagazione  $t_p = \frac{\text{spazio}}{\text{velocità}}$  risulta pari a  $5 \cdot 10^{-6}$  sec,  $1 \cdot 10^{-3}$  sec e 0.167 sec nei tre casi (a), (b), e (c) rispettivamente. Pertanto:

- si ottiene  $a = \frac{t_p}{t_{Tx}} = 5 \cdot 10^{-6}$  e  $a = 5 \cdot 10^{-3}$  per le velocità di 1 kbps ed 1 Mbps rispettivamente, e quindi per entrambe  $U \simeq 1$ ;
- per  $f_b = 1$  kbps si ottiene  $a = 10^{-3}$  e quindi  $U \simeq 1$ , per  $f_b = 1$  Mbps risulta  $a = 1$  e quindi  $U = 0.33$ ;
- per le velocità di 1 kbps ed 1 Mbps si ottiene  $a = 0.167$  ed  $a = 167$  rispettivamente, a cui corrispondono efficienze pari a  $U = 0.75$  e  $U = 0.003$ .

Sulla base del risultato dell'esempio notiamo che, considerando fissa la dimensione di trama, le prestazioni di un collegamento nei confronti di un protocollo ARQ possono essere caratterizzate, oltre che dal parametro  $a$ , anche dal cosiddetto *Prodotto Banda-Ritardo*  $PBR = f_b \cdot t_p$ , che infatti nei sei casi in esame vale  $5 \cdot 10^{-3}$ , 5, 1,  $10^3$ , 160,  $1.6 \cdot 10^5$ . Pertanto, abbiamo dimostrato come la trasmissione *send and wait* possa essere idonea per basse velocità e/o collegamenti brevi, in virtù della sua semplicità realizzativa; in caso contrario, è opportuno ricorrere ad uno dei metodi seguenti.

## 8.6.2 Continuous RQ

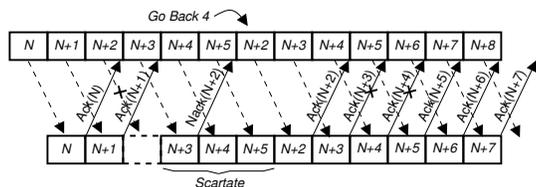
A differenza del protocollo *send-and-wait*, ora il trasmettitore invia le trame ininterrottamente, senza attendere la ricezione degli ACK. In presenza di trame ricevute correttamente, il ricevitore riscontra positivamente le stesse, consentendo al trasmettitore di liberare i buffer di trasmissione. In presenza di trame ricevute con errori, la quantità di memoria tampone utilizzata al ricevitore determina la scelta di due possibili strategie di richiesta di ritrasmissione, denominate *go-back-N* e *selective-repeat*.



### 8.6.2.1 Go back N

In questo caso, il ricevitore dispone di una sola posizione di memoria, dove trattiene la trama appena ricevuta, per il tempo necessario al controllo di errore. In presenza di un errore di ricezione della trama  $N + i$ , rilevato<sup>85</sup> dopo la corretta ricezione di  $N + i + 1$ , il ricevitore invia un  $\text{NACK}(N + i)$ , chiedendo con ciò al trasmettitore di *andare indietro*, ed inizia a scartare tutte le trame con numeri maggiori di  $N + i$ , finché non riceve la  $N + i$ , e riprende le normali operazioni.

<sup>85</sup> Sottolineiamo nuovamente l'importanza dei numeri di sequenza, che permettono al ricevitore di capire il numero della trama corrotta, grazie alla discontinuità dei numeri stessi.



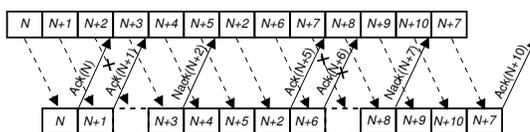
le quali non si sono ricevuti riscontri. Il trasmettitore deve quindi mantenere memorizzate tutte le trame trasmesse e non ancora riscontrate, fino ad un numero massimo, raggiunto il quale la trasmissione si arresta.

Una variante del metodo, idonea al caso in cui fenomeni di congestione di rete possano determinare la perdita dei NACK, prevede l'uso di un timer al trasmettitore, per re-inviare le trame non riscontrate.

### 8.6.2.2 Selective repeat

L'origine di questo nome deriva dal fatto che non è più richiesto al trasmettitore di *tornare indietro* completamente, ma è sufficiente ritrasmettere solamente la trama che ha dato origine ad errore in ricezione, grazie alla capacità del ricevitore di memorizzare temporaneamente più trame, anche se ricevute fuori sequenza.

Come si nota in figura, a seguito della ritrasmissione della trama  $N + 2$  per cui si è ricevuto il NACK, il trasmettitore continua ad inviare nuove trame, fino al numero massimo previsto; in assenza di ulteriori ACK, un timer determina la ritrasmissione delle trame non riscontrate.



Quando al ricevitore perviene la trama  $N + 2$ , questo emette un  $ACK(N + 5)$ , consentendo al trasmettitore di rilasciare tutta la memoria occupata dalle trame in sospeso, e di proseguire la trasmissione. La perdita di uno o più ACK è gestita allo stesso modo che per *go-back-N*, così come per ogni NACK inviato si inializza un timer, allo scadere del quale ed in assenza di nuove trame ricevute, il NACK è re-inviato.

Dal punto di vista del ricevitore, questo è più complicato che nel caso *go-back-N*, dato che adesso occorre riordinare le trame ricevute, che possono arrivare sequenziate con un ordine differente da quello naturale. Per questo motivo, anche il ricevitore deve predisporre delle memorie temporanee dove salvare le trame correttamente arrivate, successivamente a quella che invece conteneva errori, e di cui si attende la ritrasmissione.

### 8.6.2.3 Efficienza dei protocolli a richiesta automatica

Mentre con le tecniche FEC siamo obbligati ad aumentare la  $f_b$  dei dati trasmessi per poter inserire i bit di ridondanza, potrebbe sembrare che nel caso ARQ ciò non si verifichi. Ma anche se la ridondanza introdotta è effettivamente inferiore, anche la possibilità di dover ritrasmettere un intero pacchetto penalizza la velocità trasmissiva. Valutiamo di quanto.

Indichiamo con  $p$  la probabilità di dover chiedere la ritrasmissione di una trama<sup>86</sup> per la

<sup>86</sup>Nel caso in cui l'integrità della trama sia protetta da un codice a blocchi  $(n, k)$  con  $d_m = l + 1$ , la probabilità che la trama contenga più di  $l$  errori e che quindi venga accettata dal ricevitore anche se errata, vale approssimativamente  $P(l + 1, n) = \binom{n}{l+1} P_e^{l+1}$  (vedi formula (8.24)). Dato che il ricevitore accetta le trame che *non hanno* errori, oppure che hanno più di  $l$  errori, la probabilità che venga richiesta una ritrasmissione risulta  $p = 1 - P(0, n) - P(l + 1, n)$ .

quale si sono rilevati errori di trasmissione, e con  $m$  il numero totale di trasmissioni necessarie alla sua corretta ricezione. Osserviamo quindi che  $m$  è una variabile aleatoria discreta, caratterizzata dalle probabilità

$$\begin{aligned} p_M(1) &= Pr(m=1) = 1-p \\ p_M(2) &= p(1-p) \\ p_M(3) &= p^2(1-p) \\ &\vdots \\ p_M(m) &= p^{m-1}(1-p) \end{aligned}$$

che descrivono come sia possibile ricevere la stessa trama come errata  $m-1$  volte, finché all' $m$ -esima trasmissione non si rilevano più errori. Pertanto, il numero medio di trasmissioni per una stessa trama è pari a

$$\begin{aligned} \bar{m} &= E\{m\} = \sum_{m=1}^{\infty} mp_M(m) = \sum_{m=1}^{\infty} mp^{m-1}(1-p) = \\ &= (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot p^n = (1-p) \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{1}{1-p} \end{aligned}$$

in cui alla quarta eguaglianza si è posto  $n = m-1$ , ed alla quinta si è utilizzato il risultato noto della serie geometrica<sup>87</sup> per ottenere

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p^n &= \sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} np^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p} p^n = \\ &= \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^{\infty} p^n = \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{1-p} = \frac{1}{(1-p)^2} \end{aligned}$$

Quindi, per trasmettere una frequenza binaria di  $f_b$  bps (comprensivi di CRC e *overhead* dei numeri di sequenza, vedi § 8.6.3.3), occorre in realtà inviare dati ad una velocità *media* pari a  $f_b/(1-p)$  bps<sup>88</sup>. Questo risultato approssimato si applica ad un protocollo di tipo *selective repeat*, e trascurando gli errori sul canale a ritroso.

### 8.6.3 Controllo di flusso

Si è illustrato che nei protocolli ARQ il trasmettitore, dopo un po che non riceve nuovi ACK, cessa a sua volta di inviare trame, dato che esaurisce la memoria temporanea in cui memorizzare le trame già inviate ed in attesa di riscontro. Nel caso in cui il ricevitore non sia in grado di smaltire in tempo i dati ricevuti, può scegliere di sospendere temporaneamente l'invio di riscontri, con il risultato di rallentare la velocità di invio dei dati. Questo meccanismo prende il nome di *controllo di flusso*, per l'evidente analogia idraulica, in cui una condotta viene ristretta al fine di ridurre il flusso di liquido in transito.

Considerando ora che  $P(l+1, n) \ll P(0, n)$  (vedi eq. 8.24), si ottiene  $p \simeq 1 - P(0, n) = 1 - (1 - P_e)^n \simeq nP_e$ , in cui  $P_e$  è la probabilità di errore sul bit (dato che  $(1 - P_e)^n \simeq 1 - nP_e$  se  $nP_e \ll 1$ ).

<sup>87</sup>  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$  se  $|\alpha| < 1$

<sup>88</sup> Dato che  $p$  aumenta con  $n$  (vedi pag. 225), l'efficienza del protocollo ARQ *peggiora* con l'aumentare della dimensione delle trame. Questo risultato determina l'esigenza di ricercare una soluzione di compromesso, dato che l'incidenza dell'*overhead* sulla dimensione complessiva della trama invece *si riduce* all'aumentare di  $n$ .

Dato che il ritardo tra la sospensione dell'invio degli ACK, e l'interruzione dell'invio di trame, dipende dalla dimensione delle memorie temporanee, e che questa dimensione incide allo stesso tempo anche sulla efficienza di utilizzo temporale del collegamento in condizioni di ricezione a piena velocità, svolgiamo alcune riflessioni sull'argomento.

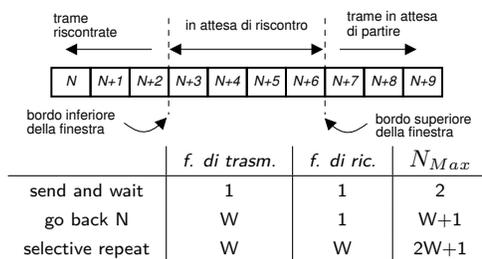
### 8.6.3.1 Round trip time

E' il tempo che intercorre tra l'inizio della trasmissione di una trama, e l'arrivo del relativo ACK. La sua valutazione spesso si avvale della ipotesi di poter trascurare il tempo di trasmissione dell'ACK, e quindi si ottiene  $RTT = t_{Tx} + 2t_p$ . Se la trasmissione avviene a velocità  $f_b$ , allora in un tempo pari a  $RTT$  possono essere trasmessi  $N_{ba} = f_b \cdot RTT$  bit, che possono essere pensati come il numero di *bit in aria*<sup>89</sup>. Se la memoria temporanea del trasmettitore ha dimensioni  $W \geq N_{ba}$ , allora la trasmissione (senza errori) può avvenire senza soluzione di continuità, impegnando costantemente il collegamento.

### 8.6.3.2 Finestra scorrevole

La quantità massima di dati  $W$  che è possibile trasmettere senza ricevere un riscontro è indicata come *finestra di trasmissione* per il motivo che ora illustriamo. In figura si mostra un gruppo di trame oggetto di una trasmissione; quelle già trasmesse ed in attesa di riscontro (da  $N + 3$  a  $N + 6$  in figura) sono racchiuse tra due confini, i *bordi* della finestra. Ogni volta che ne viene trasmessa una, il bordo *superiore* della finestra è spostato a destra, *allargandola*; ogni volta che si riceve un riscontro, è il bordo *inferiore* ad essere spostato a destra, *restringendo* così la finestra. In definitiva, il termine *finestra* trae origine dal fatto che, allo spostarsi dei bordi inferiore e superiore, la finestra *si apre e si chiude*.

La condizione di *massima apertura* della finestra identifica la quantità di memoria necessaria al trasmettitore per realizzare un protocollo ARQ, che quindi può essere ri-classificato in questi termini come indicato dalla tabella precedente, dove la colonna *finestra di ricezione* indica anche i requisiti di memoria al lato ricevente<sup>90</sup>. Notiamo infatti che mentre per *send-and-wait* è sufficiente la memoria di una sola trama, per *go-back-N* il trasmettitore deve ricordare fino ad un massimo di  $W$  trame in attesa di riscontro, e per *selective repeat* anche il ricevitore ha lo stesso vincolo, allo scopo di riordinare le trame ricevute fuori sequenza.



<sup>89</sup>L'espressione "*bit in aria*" trae spunto dalla metafora di una coppia di giocolieri, posti ai due estremi di una piazza, che si lanciano una serie di clave. Il primo ne lancia in continuazione, e quando iniziano ad arrivare al secondo, questi le rilancia verso il primo. Nel momento in cui la clava partita per prima torna nelle mani del primo giocoliere, un certo numero di clave sono sospese a mezz'aria, e corrispondono approssimativamente al numero di bit trasmessi in un tempo di pari durata, con una frequenza pari al ritmo di lancio delle clave, e non ancora riscontrati.

<sup>90</sup>La ricezione di una sequenza di trame corrette, determina l'avanzamento alternato dei due bordi della finestra al ricevitore, che è inizialmente vuota, quindi contiene solo la trama ricevuta (avanza bordo superiore), e quindi è di nuovo svuotata, non appena viene trasmesso l'ACK (ed avanza il bordo inferiore). In presenza di errori, il bordo inferiore non avanza, ma resta fermo sulla trama ricevuta con errori, e di cui si attende la ritrasmissione. Mentre il trasmettitore continua ad inviare trame, il ricevitore le memorizza e fa avanzare il bordo superiore, finché non siano state ricevute tutte quelle trasmissibili senza riscontro, e pari alla dimensione massima della finestra in trasmissione.

### 8.6.3.3 Numero di sequenza

Dato che non possono essere inviate più trame della dimensione della finestra, la loro numerazione può avvenire in forma ciclica, ossia utilizzando un contatore modulo  $N_{Max}$ , come indicato alla tabella precedente. Ad esempio, per *send-and-wait* è sufficiente un contatore binario  $(0 - 1)$  perché, nel caso in cui l'ACK sia corrotto, il ricevitore possa riconoscere la trama ricevuta come duplicata anziché nuova; un ragionamento simile<sup>91</sup> determina la necessità di usare  $W + 1$  numeri  $(0 - W)$  nel caso *go-back-N*, e  $2W + 1$  numeri  $(0 - 2W)$  nel caso *selective repeat*.

L'uso di un numero di bit ridotto per indicare il numero di sequenza, permette di limitare la dimensione dell'*overhead* di trama; ad esempio, con una finestra di dimensione 7, l'uso di *go-back-N* richiede 8 diversi numeri di sequenza, che quindi possono essere codificati utilizzando 3 bit.

## 8.7 Sincronizzazione dati

Come mostrato al § 8.1.1 il segnale dati deve essere campionato al ricevitore con cadenza pari alla frequenza di simbolo  $f_s$  il più possibile in prossimità del centro dell'intervallo di simbolo, in modo da contrastare gli effetti della limitazione di banda (vedi fig. 8.3) e dell'ISI (§ 8.2.2.2); per questo motivo occorre che il temporizzatore mostrato in fig. 8.1 determini gli istanti di campionamento più idonei, effettuando la *sincronizzazione di simbolo*<sup>92</sup>. Le diverse scelte per l'onda elementare  $g(t)$  discusse al § 8.2.1, determinano differenti gradi di "difficoltà" nel conseguimento di tale obiettivo.

Un diverso aspetto della sincronizzazione riguarda il problema di ricostruire la struttura *sintattica*<sup>93</sup> del segnale binario, in primo luogo per permettere il corretto svolgimento delle operazioni di decodifica FEC e di controllo di errore. Inoltre, la sequenza di bit al ricevitore è spesso il risultato della serializzazione (al lato del trasmettitore) di informazioni *a carattere* (o *parola*, o *word*), come nel caso di un *file* di testo oppure dei campioni di un segnale<sup>94</sup>, oltre alle quali possono essere state introdotte ulteriori strutture sintattiche legate ai protocolli di moltiplicazione sia a circuito (§ 19.3.4 e § 19.4) che a pacchetto (§ 17.5.1). Lo *strato di collegamento*, il secondo della pila ISO-OSI, si occupa appunto di segmentare il flusso di bit ricevuto in accordo a tali strutture, coinvolgendo essenzialmente il sotto-strato MAC (§ 18.1.4), che deve quindi essere in grado di conseguire la sincronizzazione di *simbolo*, di *parola* e di *trama*.

Nel seguito, analizziamo le esigenze e le soluzioni di sincronizzazione che emergono nell'ambito di due diverse tecniche di trasmissione, indicate come *asincrona* e *sincrona*, che si differenziano per il fatto che mentre nella prima le parole sono separate tra loro, nella seconda fluiscono senza interruzione.

<sup>91</sup>Se il trasmettitore invia tutte le  $W$  trame, ma tutti gli ACK sono corrotti, allora la  $(W + 1)$ -esima trama trasmessa è un duplicato della prima, ritrasmessa per time-out, ed il ricevitore può accorgersene solo se la trama reca un numero differente da quello della prima.

Per il caso *selective repeat*, vale un ragionamento simile, ma che per le differenze nella definizione del protocollo, porta ad un risultato diverso.

<sup>92</sup>In alternativa al recupero del sincronismo da parte del ricevitore, l'informazione di temporizzazione può essere trasmessa su di una diversa linea, come avviene nel caso di dispositivi ospitati su di una stessa *motherboard*.

<sup>93</sup>Una sintassi definisce un linguaggio, prescrivendo le regole con cui possono essere costruite sequenze di simboli noti (l'alfabeto), e l'analisi delle sequenze eseguita nei termini degli elementi definiti dalla sintassi, ne permette una interpretazione semantica. Il parallelismo linguistico porta spontaneamente ad indicare i simboli trasmessi come *alfabeto*, gruppi di simboli come *parole*, e gruppi di parole come *frasi*, od in alternativa, *trame* (FRAME, ovvero *telai*o).

<sup>94</sup>In appendice 8.8.2 è riportata la codifica in termini di sequenze binarie dei caratteri stampabili, definita dallo standard ASCII; al § 19.3.1 si mostra la struttura della *trama PCM*, che trasporta i campioni di più sorgenti analogiche campionate.

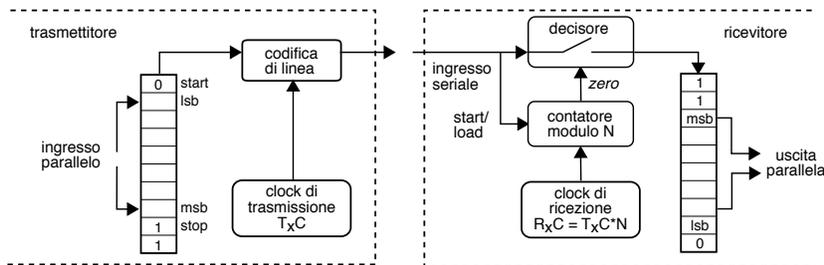
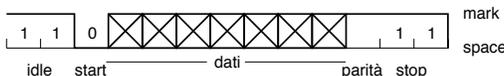


Figura 8.14: Trasmissione asincrona

### 8.7.1 Trasmissione asincrona

Viene adottata, ad esempio, nel caso di un terminale *stupido*<sup>95</sup> collegato ad un computer centrale: la trasmissione in questo caso avviene in modo discontinuo, ossia quando l'operatore *digita* sui tasti del terminale, e per questo la modalità di trasmissione è indicata come *asincrona*. In tal caso, la linea di comunicazione permane abitualmente in uno stato di libero (IDLE), contraddistinta da uno stato di tensione positiva, indicato anche come stato *mark*<sup>96</sup>.

Quando è pronto un carattere da trasmettere, il segnale viene portato nello stato *zero* (detto SPACE) per la durata di 1 simbolo, che prende il nome di *bit di start*: la transizione *in discesa* viene rilevata dal ricevitore, che si predispone a contare un numero fisso di simboli (7 in figura) basandosi su di un suo orologio indipendente. Segue poi un bit di *parità* (se prevista, vedi § 8.5.3.1) ed uno o due di *stop* (realizzati come MARK), presenti per assicurare una durata minima dello stato di IDLE, prima della trasmissione del carattere successivo.



Il vantaggio di una simile modalità operativa è che il ricevitore non ha bisogno di generare con estrema esattezza la temporizzazione del segnale entrante; si basa infatti su di un proprio orologio locale, di precisione non elevata<sup>97</sup>, che viene *risvegliato* in corrispondenza del bit di start. Tale semplicità operativa produce una inefficienza, in quanto oltre ai dati ed al bit di parità, si introduce anche lo start e lo stop, utili solo ai fini della sincronizzazione ma privi di contenuto informativo.

In fig. 8.14 è mostrato uno schema di funzionamento per trasmettitore e ricevitore, che mostra come le parole entrino in modo parallelo nel trasmettitore, che produce un segnale dati in forma seriale a velocità  $f_s$  pari al clock  $T_x\text{Clock}$  di trasmissione, con un bit di start, la parola dal *less* al *most significant bit*, e quindi due bit di stop.

**Sincronizzazione di bit e di parola** Il ricevitore dispone di un orologio interno operante ad un ritmo ( $R_x\text{Clock}$ ) multiplo di quello di trasmissione  $T_x\text{Clock}$ , che incrementa un contatore modulo  $N$ , il quale quindi *divide* l'orologio per  $N$ , e che quando si azzerà determina l'istante di decisione per un bit, il suo caricamento nel registro di ricezione, e lo scorrimento in basso dei contenuti dello stesso. In corrispondenza della transizione che precede il bit di start, il

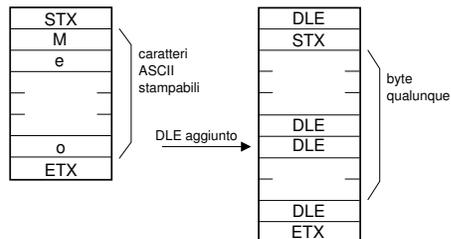
<sup>95</sup>Un DUMB TERMINAL non ha capacità di calcolo, e provvede solo alla visualizzazione di informazioni testuali. Fino agli anni '70, è stato l'unico meccanismo di interazione (comunque migliore delle schede perforate !!!) con un computer. Per lungo tempo ogni computer disponeva di interfacce seriali RS-232 che possono funzionare sia in modalità asincrona che sincrona, oggi soppiantate dalle prese USB.

<sup>96</sup>In tal caso la linea "... IS MARKING TIME" (sta *marcando* il tempo).

<sup>97</sup>Ovviamente, occorre stabilire un accordo a priori a riguardo la velocità, sia pure approssimata, della trasmissione.

contatore è inizializzato con il valore  $N/2$ , in modo che il suo azzeramento avvenga a metà del periodo di bit. A seguito dell'azzeramento, il contatore torna a dividere  $R_xC$  per  $N$ , ed i suoi successivi azzeramenti avvengono sempre a metà del periodo di bit, fino alla ricezione di una intera parola. Al suo termine (segnalato dall'arrivo in prima posizione del bit di start a zero), il registro di ricezione è letto in modo parallelo, recuperando una intera parola.

**Sincronizzazione di trama** I caratteri trasmessi possono far parte di messaggi più estesi, come ad esempio i paragrafi di un *file* di testo. Per questo motivo, può essere necessario inserire dei caratteri speciali tra quelli trasmessi, con lo scopo di delimitare i gruppi di caratteri che appartengono ad uno stesso messaggio. Se le diverse parole da trasmettere non sono tutte quelle possibili in base alla



lunghezza di parola adottata<sup>98</sup>, la delimitazione può essere attuata mediante l'uso di caratteri speciali (di controllo) che non compaiono nel messaggio, come ad esempio i caratteri STX (*Start of Text*) e ETX (*End of Text*) dell'insieme ASCII (pag. 248), come mostrato nella figura precedente.

Se invece le parole trasmissibili sono qualsiasi, come nel caso della trasmissione di campioni di segnale, allora il carattere speciale ETX potrebbe essere *simulato* dai dati trasmessi<sup>99</sup>, causando un *troncamento* prematuro del messaggio. In tal caso, sia STX che ETX vengono fatti precedere da un terzo carattere speciale, il DLE (*Data Link Escape*). Il trasmettitore, dopo aver inserito la coppia DLE-STX iniziale, ispeziona ogni carattere da inviare, e se questo *simula* un DLE, *inserisce* un secondo DLE, attuando una procedura detta CHARACTER (o BYTE) STUFFING. Il ricevitore a sua volta, per ogni DLE ricevuto, controlla se la parola successiva è un ETX, nel qual caso considera terminata la trasmissione; altrimenti, controlla se è un secondo DLE, che è stato inserito dal trasmettitore, e lo rimuove. Altri casi non sono possibili, e se si verificano, rivelano la presenza di un errore di trasmissione.

## 8.7.2 Trasmissione sincrona

La trasmissione dei bit di start e di stop necessaria per effettuare una trasmissione asincrona è fonte di inefficienza, e per questo a velocità più elevate si preferisce non inframmezzare i dati da trasmettere con delimitatori aggiuntivi. Ciò comporta l'esigenza di adottare in ricezione soluzioni apposite per individuare gli istanti di decisione corretti, e quindi conseguire il sincronismo di simbolo. Il successivo sincronismo di parola si basa in generale sull'uso di parole di lunghezza costante, mentre quello di trama prevede due possibili soluzioni, l'una orientata al carattere, e l'altra al bit.

### 8.7.2.1 Sincronizzazione di simbolo

La figura 8.15-a mostra uno schema idoneo ad estrarre la temporizzazione  $R_xC$  dal segnale ricevuto, basata sull'uso di un circuito DPLL (*Digital Phase Locked Loop*), il cui funzionamento

<sup>98</sup>Una parola di  $M$  bit descrive uno spazio di  $2^M$  diversi elementi. Se le parole trasmissibili non sono tutte le  $2^M$  possibili, alcune di queste (che non compariranno mai all'interno del messaggio) possono essere usate per la sua delimitazione.

<sup>99</sup>Cioè, i dati trasmessi, che ora riempiono tutto lo spazio delle configurazioni possibili, contengono al loro interno la configurazione che è propria del carattere ETX.

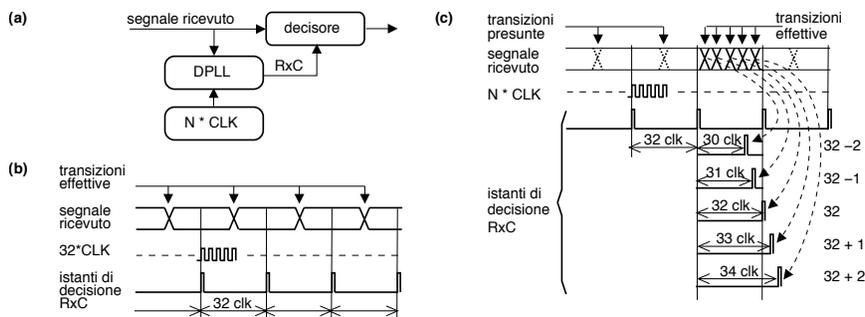


Figura 8.15: Funzionamento del *DPLL*: (a) schema circuitale; (b) condizione di sincronismo; (c) correzione di fase

richiede la presenza di *transizioni* nel segnale ricevuto. Analogamente allo schema già analizzato nel caso di trasmissione asincrona, un orologio locale opera ad una frequenza  $N$  volte più elevata di quella nominale, e il *DPLL* (fig. 8.15-b) ne divide l'orologio per  $N$ , fornendo il segnale *RxC* necessario al decisore per individuare gli istanti posti al centro di un intervallo di simbolo. La divisione per  $N$  è realizzata all'interno del *DPLL* mediante un contatore *all'indietro*, che al suo azzeramento produce il segnale *RxC* di sincronismo, e la ricarica del contatore con la costante  $N$ . Nel caso in cui si verifichi uno *slittamento di fase* tra il segnale ricevuto e l'orologio locale, questo può essere rilevato osservando che la transizione (quando presente) nel segnale non ricorre nella posizione presunta, ossia a metà del conteggio, ma in anticipo od in ritardo (fig. 8.15-c). In tal caso, il contatore che realizza la divisione viene inizializzato con un numero rispettivamente minore o maggiore di  $N$ , in modo che il successivo impulso di sincronismo *RxC* risulti spostato verso il centro del periodo di simbolo<sup>100</sup>.

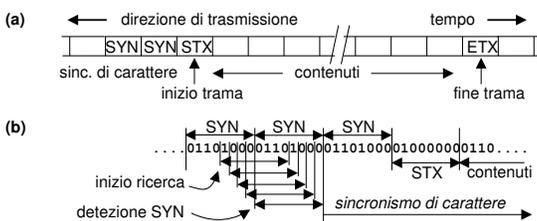
Nel caso di una differenza di velocità tra l'orologio di ricezione ed il ritmo di segnalazione, le correzioni avvengono di rado, e sono di entità ridotta. Al contrario, all'inizio di una trasmissione la differenza di fase può essere qualsiasi: per questo motivo, prima dei dati veri e propri, viene trasmessa una sequenza di dati fittizi o *trailer*, allo scopo di permettere appunto l'acquisizione del sincronismo di simbolo. La durata del trailer dipende dalla velocità di convergenza della procedura, per accelerare la quale sono imposte correzioni di maggiori entità in corrispondenza di errori di fase più elevati.

### 8.7.2.2 Sincronizzazione di parola e di trama

**Trasmissione orientata al carattere** La trasmissione orientata al carattere è usata principalmente nel caso di contenuti testuali, come per i file ASCII. In assenza dei bit di start e di stop, la sincronizzazione di carattere è ottenuta per mezzo della trasmissione, prima dei dati veri e propri, di una sequenza di caratteri *syn* (*Synchronous Idle*), che permette sia di conseguire (o mantenere) il sincronismo di bit, che di consentire l'individuazione dei confini di carattere, e quindi il sincronismo di carattere.

<sup>100</sup>In termini generali, questo circuito è assimilabile ad un circuito di controllo, in quanto il suo principio di funzionamento si basa sul tentativo di *azzerare* una grandezza di errore. Infatti, la sincronizzazione dell'orologio del decisore di ricezione con il periodo di simbolo del segnale ricevuto, avviene effettuando un confronto tra la *velocità* dell'orologio locale ed un *ritmo* presente nel segnale in arrivo: questo segnale di errore alimenta quindi un circuito di controeazione, che mantiene il clock locale *al passo* con quello dei dati in arrivo. Un diverso caso particolare di questo stesso principio è analizzato al § 14.11.1, ed anche ai §10.2.2.2 e 10.3.2.1 a proposito del PLL.

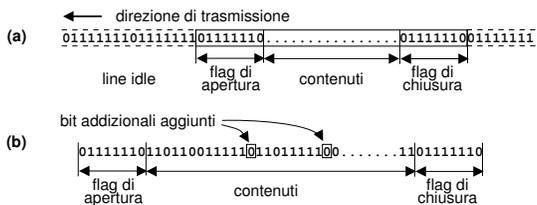
La figura a lato mostra (a) che la sincronizzazione di trama è ottenuta come per il caso asincrono, racchiudendo il blocco da trasmettere entro una coppia di caratteri STX-ETX. Una volta che il ricevitore ha conseguito il sincronismo di bit, passa in una modalità di ricerca, verificando (b) se l'allineamento di 8 bit consecutivi corrisponde al carattere SYN, ed in caso negativo, ripete il tentativo bit a bit.



Dopo aver individuato il SYN, il ricevitore consegue l'allineamento sul carattere, ed inizia ad attendere il carattere STX, che indica l'inizio della trama, la quale è terminata da un ETX. Nel caso in cui la trasmissione contenga caratteri qualunque, e dunque l'ETX possa essere simulato dai dati, si ricorre alla stessa soluzione del caso asincrono, e cioè sia l'sTX che l'ETX vengono fatti precedere da un DLE, ed all'interno dei dati si esegue il *byte stuffing*, sostituendo gli eventuali DLE simulati con una coppia di DLE.

**Trasmissione orientata al bit** Questa tecnica viene preferita sia nel caso in cui i dati da trasmettere non siano organizzati in caratteri, sia per ridurre l'inefficienza legata all'uso di caratteri di controllo aggiuntivi, nonché per evitare la dipendenza da quei particolari caratteri, così da trasportare l'informazione in modo più universale e *trasparente*. Nella trasmissione orientata al bit, la sincronizzazione di bit e di trama non impiega i caratteri SYN e STX, bensì degli *idle bytes* 01111111 nei periodi di inattività, e dei *flag byte* 01111110 per indicare sia l'inizio che la fine di una trama.

La figura che segue mostra in (a) un esempio di trama, ed in (b) la soluzione del *bit stuffing*, necessaria ad evitare che il *flag byte* possa essere simulato dal contenuto della trasmissione. Ora i dati trasmessi non devono essere necessariamente in numero multiplo della lunghezza di carattere, ed ogni qualvolta sono presenti 5 bit pari ad uno consecutivi, il trasmettitore inserisce forzatamente un bit pari a zero. Viceversa, quando il ricevitore osserva un bit pari a 0 preceduto da 5 bit pari ad uno consecutivi, lo rimuove, conseguendo così la *trasparenza dai dati*, e permettendo il corretto rilevamento del flag byte di fine trama. Ovviamente, la procedura di bit stuffing/destuffing è applicata solamente al *contenuto* della trama.



La procedura ora descritta può fallire qualora applicata ad un flusso binario affetto da errori, ed in tal caso occorre attendere la successiva opportunità di sincronizzazione. Tale problematica può essere risolta evitando la necessità del *flag byte* finale grazie alla presenza di un campo *lunghezza* nella intestazione di pacchetto, come avviene ad es. per la trama *ethernet*, vedi § 18.1.4.2.

## 8.8 Appendici

**Esercizio** Un sistema di trasmissione basato sul campionamento e sulla trasmissione numerica è rappresentato in figura 8.16. Il canale riportato all'estremità destra è considerato ideale entro una banda  $\pm B = \pm 31.5$  KHz, purché la potenza al suo ingresso non superi il valore

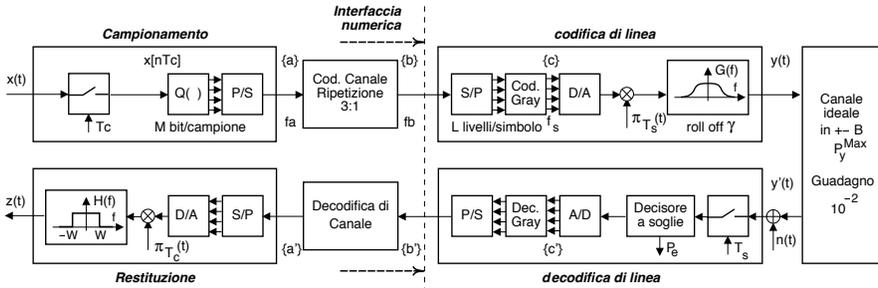


Figura 8.16: Sistema di trasmissione a cui si riferisce l'esercizio

$\mathcal{P}_y^{Max} = 1 \text{ Volt}^2$ ; in tal caso la potenza in uscita risulta  $\mathcal{P}_{y'} = 0.01 \cdot \mathcal{P}_y$ . Al segnale ricevuto è sovrapposto un rumore additivo gaussiano bianco stazionario ergodico a media nulla, con spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_N(f) = \frac{N_0}{2} = 4.61 \cdot 10^{-14} \text{ Volt}^2/\text{Hz}$ , e limitato nella banda  $\pm B$ .

- 1) Se  $G(f)$  è a coseno rialzato con  $\gamma = .5$ , determinare la massima frequenza di simbolo  $f_s = \frac{1}{T_s}$ .
- 2) Desiderando una  $P_e = P_e^c$  per la sequenza  $\{c'\}$  pari a  $P_e = 10^{-4}$ , determinare il massimo numero di livelli/simbolo  $L$ .
- 3) Indicare la frequenza binaria  $f_b$  per la sequenza  $\{b'\}$ .
- 4) Valutare  $P_e^b$  per la sequenza  $\{b'\}$  e mostrare che il numero di errori per unità di tempo in  $\{b'\}$  è lo stesso che in  $\{c'\}$ .
- 5) Mostrare che, adottando una codifica di canale a ripetizione 3 : 1, la probabilità di errore  $P_e^a$  per la sequenza  $\{a'\}$  risulta pari a circa  $P_e^a \simeq 3 (P_e^b)^2$ .
- 6) Indicare la frequenza binaria  $f_a$  per le sequenze  $\{a\}$  ed  $\{a'\}$ .

Supponiamo ora che  $P_e^a = 0$ , e si desideri un  $SNR_Q = \mathcal{P}_x/\mathcal{P}_{z-x} = 10000$ . Nel caso in cui  $x(t)$  sia un processo con densità di probabilità  $p(x)$  uniforme, ed indicando con  $W$  la banda di  $x(t)$ ;

- 7) Determinare il minimo numero di bit/campione  $M$ .
- 8) Determinare la massima banda  $W$ .
- 9) Se la banda è ridotta a  $W' = \frac{1}{2}W$ , determinare il nuovo valore di  $SNR_Q$  ottenibile.

**Svolgimento 1)** La banda  $B$  occupata dal segnale  $y$  vale  $B = \frac{f_s}{2} (1 + \gamma)$ , e quindi deve risultare  $f_s = \frac{2B}{1+\gamma} = \frac{2 \cdot 31.5 \cdot 10^3}{1.5} = 42 \cdot 10^3 = 42.000 \text{ baud}$  (*baud = simboli/secondo*).

- 2) Osserviamo che in questo caso la (8.17) non può essere applicata direttamente, in quanto non essendo ancora nota la  $f_b$ , non è possibile calcolare il valore di  $E_b = \frac{\mathcal{P}_{y'}}{f_b}$ . Notiamo però che essendo  $f_b = f_s \cdot \log_2 L$ , indicando con  $y$  l'argomento dell'*erfc*  $\{ \cdot \}$ , questo può essere riscritto come

$$y = \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \frac{3 \log_2 L}{(L^2 - 1)(1 + \gamma) \left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{y'}}{f_s \cdot \log_2 L} \frac{1}{N_0} \frac{3 \cdot \log_2 L}{(L^2 - 1) 1.31}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{y'}}{f_s \cdot N_0} \cdot \frac{2.29}{L^2 - 1}}$$

avendo tenuto conto che se  $\gamma = 0.5$ , allora  $(1 + \gamma)(1 - \frac{\gamma}{4}) \simeq 1.31$ . Inoltre, se  $L \gg 1$  (come verificheremo), la (8.17) può essere approssimata come  $P_e \simeq \text{erfc}\{y\}$ , e dunque per  $P_e = 10^{-4}$  la figura di pag. 109 ci permette di individuare il valore di  $y \simeq 2.7$ , e pertanto

$$\frac{\mathcal{P}_{y'}}{f_s \cdot N_0} \cdot \frac{2.29}{L^2 - 1} = y^2 = (2.7)^2 = 7.29$$

e, conoscendo i valori di  $f_s$ ,  $\mathcal{P}_{y'}$  e  $N_0$ , scriviamo

$$\begin{aligned} L^2 &= 1 + \frac{\mathcal{P}_{y'}}{f_s \cdot N_0} \cdot \frac{2.29}{7.29} = 1 + \frac{10^{-2}}{42 \cdot 10^{-3} \cdot 4.61 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.31 \\ &= 1 + 5.16 \cdot 10^6 \cdot 0.31 \simeq 1.6 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

e quindi  $L = \sqrt{1.6 \cdot 10^6} = 1265$  che, essendo un valore massimo, limitiamo a  $L = 1024$  livelli

3) Dato che ad ogni simbolo di  $\{c\}$  ad  $L$  livelli, con frequenza di emissione pari a  $f_s$ , corrisponde ad un gruppo di  $N_b = \log_2 L = 10$  bit della sequenza  $\{b\}$ , la frequenza  $f_b$  è di 10 volte  $f_s$ , e quindi  $f_b = 10 \cdot f_s = 10 \cdot 42 \cdot 10^3 = 420$  Kbps.

4) Grazie all'adozione del codice di Gray, in caso di errore tra livelli contigui per i simboli di  $\{c'\}$ , nella sequenza  $\{b'\}$  solo uno (tra  $N_b$ ) dei bit associati ad un simbolo è errato; il bit errato è uno qualsiasi del gruppo di  $N_b$ , e pertanto la probabilità che un bit specifico sia errato (quando è errato il simbolo di  $\{c'\}$ ) è  $\frac{1}{N_b}$ . Pertanto  $P_e^b = P_e^{b/c} P_e^c = \frac{1}{N_b} P_e^c$ , in cui  $P_e^{b/c}$  è la probabilità condizionata che un generico bit di  $\{b'\}$  sia sbagliato quando è sbagliato il simbolo di  $\{c'\}$  da cui ha origine.

- Il numero di bit (della sequenza  $\{b'\}$ ) errati per unità di tempo è dato da  $P_e^b \cdot f_b$ ; sostituendo:  $P_e^b \cdot f_b = \frac{P_e^c}{N_b} \cdot f_b = P_e^c \cdot \frac{f_b}{N_b} = P_e^c \cdot f_s$ , ovvero è numericamente pari ai simboli errati (nella sequenza  $\{c'\}$ ) per unità di tempo;

• risulta dunque infine:

$$\begin{aligned} - P_e^b &= \frac{P_e^c}{N_b} = \frac{10^{-4}}{10} = 10^{-5}; \\ - P_e^b \cdot f_b &= P_e^c \cdot f_s = 10^{-5} \cdot 420 \cdot 10^3 = 10^{-4} \cdot 42 \cdot 10^3 = 4.2 \frac{\text{errori}}{\text{secondo}} \end{aligned}$$

5) Ogni bit di  $\{a'\}$  è sbagliato solo se sono sbagliati 2 o più bit in un gruppo di 3; come mostrato al § 8.5.1.1, la probabilità di 2 bit errati su 3 è calcolabile dalla distribuzione di Bernoulli, e vale  $\binom{3}{2} p_e^2 (1 - p_e) = 3p_e^2 (1 - p_e)$ , a cui va sommata la probabilità di 3 bit errati, pari a  $p_e^3$ . Pertanto  $p_e^a = 3p_e^2 (1 - p_e) + p_e^3 = 3p_e^2 - 3p_e^3 + p_e^3 \simeq 3p_e^2$  in cui ovviamente  $p_e = P_e^b$ , e l'approssimazione è legittima in quanto se  $p_e = 10^{-5}$  allora  $p_e^2 = 10^{-10}$  e  $p_e^3 = 10^{-15}$ , trascurabili rispetto a  $p_e$ . Lo stesso risultato si ottiene osservando che 2 bit errati su 3 hanno probabilità  $p_e^2 (1 - p_e)$ , e questi possono essere scelti in tre modi diversi ( $1^\circ$  e  $2^\circ$ ,  $1^\circ$  e  $3^\circ$ ,  $2^\circ$  e  $3^\circ$ ). In definitiva, risulta  $P_e^a \simeq 3(P_e^b)^2 = 3 \cdot 10^{-10}$ .

6) Dato che ad ogni 3 bit di  $\{b'\}$  corrisponde un solo bit di  $\{a'\}$ , si ottiene  $f_a = \frac{f_b}{3} = \frac{420 \cdot 10^3}{3} = 140$  Kbps, a cui corrisponde  $P_e^a \cdot f_a = 3 \cdot 10^{-10} \cdot 140 \cdot 10^3 = 4.2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{errori}}{\text{secondo}}$ .

7) Sappiamo che per un processo uniforme l' $SNR_q$  di quantizzazione risulta approssimativamente  $SNR_q = (L - 1)^2$ , in cui  $L$  è il numero di livelli del quantizzatore, a cui corrisponde l'utilizzo di  $M = \log_2 L$  bit/campione. Risulta pertanto  $L = 1 + \sqrt{SNR_q} = 1 + \sqrt{10^4} = 101$  livelli. Per ottenere un numero intero di bit/campione ed un  $SNR_q$  migliore od uguale a quello desiderato, determiniamo l'intero superiore:  $M = \lceil \log_2 L \rceil = 7$  bit/campione (equivalente a 128 livelli).

- 8) Come sappiamo, la frequenza di campionamento  $f_c = \frac{1}{T_c}$  non può essere inferiore a  $2W$ ; inoltre, la frequenza binaria  $f_a$  risulta pari al prodotto dei bit/campione per i campioni a secondo:  $f_a = f_c \cdot M$ ; pertanto  $f_c = \frac{f_a}{M} = \frac{140 \cdot 10^3}{7} = 20$  KHz e dunque la  $W$  massima risulta  $W_{Max} = \frac{f_c}{2} = 10$  KHz.
- 9) Nel caso in cui  $W' = \frac{1}{2}W$ , allora si può dimezzare anche la frequenza di campionamento  $f'_c = \frac{f_c}{2} = 10$  KHz, e pertanto utilizzare un  $M' = 2M$  per ottenere la stessa  $f_a$ . Pertanto il nuovo  $SNR_q$  risulta  $SNR'_q = (L' - 1)^2 = (2^{2M} - 1)^2 = (2^{14} - 1)^2 \simeq 2.68 \cdot 10^8$ , ovvero  $SNR'_q$  (dB) = 84.3 dB.

### 8.8.1 Potenza di un segnale dati

Al § 8.4.4 si è affermato che ad un segnale dati

$$s(t) = \sum_n a[n]g(t - nT)$$

(in cui  $g(t)$  è la risposta impulsiva di un filtro a coseno rialzato con roll-off  $\gamma$ , e  $a[n]$  è una sequenza di v.a. discrete, statisticamente indipendenti, a media nulla ed uniformemente distribuite su  $L$  valori in una dinamica  $-\frac{\Delta}{2} \leq a_i \leq \frac{\Delta}{2}$ ) corrisponde una potenza

$$\mathcal{P}_s = \frac{\Delta^2}{12} \frac{L+1}{L-1} \left(1 - \frac{\gamma}{4}\right) \quad (8.28)$$

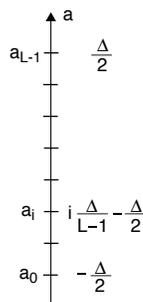
Svolgiamo qui i passi necessari per arrivare al risultato (8.28). Al § 6.9.3 si è mostrato che per lo stesso segnale risulta  $\mathcal{P}_s(f) = \sigma_A^2 \frac{|G(f)|^2}{T}$ , e dunque

$$\mathcal{P}_s = \int \mathcal{P}_s(f) df = \int \sigma_A^2 \frac{|G(f)|^2}{T} df$$

Si può mostrare<sup>101</sup> che

$$\int |G(f)|^2 df = T \left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)$$

e quindi  $\mathcal{P}_s = \sigma_A^2 \left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)$ ; resta pertanto da calcolare  $\sigma_A^2 = E_A \{(a - m_A)^2\} = E_A \{a^2\}$  in virtù della media nulla. I valori che la v.a.  $a$  può assumere corrispondono a quelli dei diversi livelli del segnale dati, esprimibili come  $a_i = i \cdot \frac{\Delta}{L-1} - \frac{\Delta}{2}$  (vedi figura), in modo che per  $i = 0, 1, \dots, L-1$  corrispondano ad  $L$  valori uniformemente spaziatati entro l'intervallo  $(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})$ ; inoltre, ogni possibile valore  $a_i$  ricorre con probabilità  $p(a_i) = p_i = 1/L$ . Possiamo dunque sviluppare i conti:



$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= E_A \{a_i^2\} = \sum_{i=0}^{L-1} p_i \cdot a_i^2 = \\ &= \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \left(i \frac{\Delta}{L-1} - \frac{\Delta}{2}\right)^2 = \frac{\Delta^2}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \left(\frac{i^2}{(L-1)^2} + \frac{1}{4} - \frac{i}{L-1}\right) = \\ &= \frac{\Delta^2}{L} \left(\frac{1}{(L-1)^2} \sum_{i=0}^{L-1} (i)^2 + \frac{L}{4} - \frac{1}{L-1} \sum_{i=0}^{L-1} i\right) = (102) = \end{aligned}$$

<sup>101</sup>La dimostrazione sarà sperabilmente sviluppata in una prossima edizione... è una delle poche a mancare in questo libro! ..al momento, la fonte che trovo più in accordo con questa tesi, è ancora una volta [https://en.wikipedia.org/wiki/Raised-cosine\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Raised-cosine_filter)

<sup>102</sup>Facciamo uso delle relazioni  $\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$  e  $\sum_{n=1}^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ , che sono ovviamente ancora valide anche qualora la somma parta da  $n = 0$ .

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Delta^2}{L} \left( \frac{L}{4} - \frac{1}{L-1} \frac{L(L-1)}{2} + \frac{1}{(L-1)^2} \frac{(L-1)L(2(L-1)+1)}{6} \right) = \Delta^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2L-2+1}{6(L-1)} \right) = \\
&= \Delta^2 \frac{6L-6-12L+12+8L-8+4}{24(L-1)} = \Delta^2 \frac{2L+2}{24(L-1)} = \frac{\Delta^2}{12} \frac{L+1}{L-1}.
\end{aligned}$$

### 8.8.2 Codifica di carattere

Il codice ASCII (*American Standard Code for Information Inter-change*) è un codice a 7 bit, e molti codici ad 8 bit (come l'ISO 8859-1) si riducono ad ASCII nella loro metà bassa (con il bit più significativo a zero); i primi 32 codici corrispondono a caratteri *non stampabili*, detti codici di controllo, ottenibili su di una tastiera mediante la pressione del tasto CONTROL, e che hanno un significato speciale, come il *carriage return* (CR), il *line feed* (LF), *start of text* (STX), *backspace* (BS), *data link escape* (DLE). La tavola 8.1 mostra i 128 caratteri ASCII. La controparte internazionale dell'ASCII è nota come ISO 646; lo standard è stato pubblicato dallo *United States of America Standards Institute* (USASi) nel 1968.

#### 8.8.2.1 Codifica UNICODE

Dal 2004 ISO/IEC non si occupa più della manutenzione delle codifiche di carattere ad 8 bit, supportando invece attivamente il consorzio UNICODE nella definizione dello *Universal Character Set*, che contiene centinaia di migliaia di caratteri di praticamente tutte le lingue del mondo, ognuno identificato in modo non ambiguo da un nome, e da un numero chiamato *Code Point*. Mentre per enumerare tutti i caratteri previsti occorre una parola di ben 21 bit, sono state definite codifiche a lunghezza variabile, la più diffusa delle quali prende il nome di UTF-8, in base alla quale

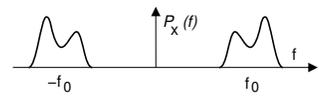
- i primi 127 CodePoints, che corrispondono all'alfabeto ASCII, sono rappresentati da un singolo byte; pertanto un file ASCII è anche un file UTF-8 corretto
- i valori numerici associati ai caratteri dell'insieme ISO 8859-1 corrispondono ai CodePoints degli stessi caratteri
- i primi 1792 CodePoints, mediante i quali sono rappresentati i caratteri usati dalla totalità delle lingue occidentali, sono rappresentati (esclusi gli ASCII) mediante due byte
- i 65536 CodePoints del *Piano di Base* entro cui ricade la quasi totalità delle assegnazioni fatte finora, sono rappresentati (esclusi i casi precedenti) mediante tre byte
- i restanti CodePoints sono rappresentati mediante quattro byte

<i>dec</i>	<i>hex</i>	<i>char</i>									
0	00	NUL	32	20		64	40	@	96	60	'
1	01	SOH	33	21	!	65	41	A	97	61	a
2	02	STX	34	22	"	66	42	B	98	62	b
3	03	ETX	35	23	#	67	43	C	99	63	c
4	04	EOT	36	24	\$	68	44	D	100	64	d
5	05	ENQ	37	25	%	69	45	E	101	65	e
6	06	ACK	38	26	&	70	46	F	102	66	f
7	07	BEL	39	27	'	71	47	G	103	67	g
8	08	BS	40	28	(	72	48	H	104	68	h
9	09	HT	41	29	)	73	49	I	105	69	i
10	0A	LF	42	2A	*	74	4A	J	106	6A	j
11	0B	VT	43	2B	+	75	4B	K	107	6B	k
12	0C	FF	44	2C	,	76	4C	L	108	6C	l
13	0D	CR	45	2D	-	77	4D	M	109	6D	m
14	0E	SO	46	2E	.	78	4E	N	110	6E	n
15	0F	SI	47	2F	/	79	4F	O	111	6F	o
16	10	DLE	48	30	0	80	50	P	112	70	p
17	11	DC1	49	31	1	81	51	Q	113	71	q
18	12	CD2	50	32	2	82	52	R	114	72	r
19	13	CD3	51	33	3	83	53	S	115	73	s
20	14	DC4	52	34	4	84	54	T	116	74	t
21	15	NAK	53	35	5	85	55	U	117	75	u
22	16	SYN	54	36	6	86	56	V	118	76	v
23	17	ETB	55	37	7	87	57	W	119	77	w
24	18	CAN	56	38	8	88	58	X	120	78	x
25	19	EM	57	39	9	89	59	Y	121	79	y
26	1A	SUB	58	3A	:	90	5A	Z	122	7A	z
27	1B	ESC	59	3B	;	91	5B	[	123	7B	{
28	1C	FS	60	3C	<	92	5C	\	124	7C	
29	1D	GS	61	3D	=	93	5D	]	125	7D	}
30	1E	RS	62	3E	>	94	5E	^	126	7E	~
31	1F	US	63	3F	?	95	5F	_	127	7F	DEL

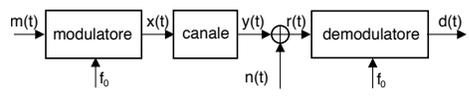
Tabella 8.1: codici ASCII

# Segnali modulati

**S**ONO indicati anche come segnali *passa banda* o *in banda traslata*, dato che esibiscono una occupazione spettrale circoscritta ad una regione di frequenze contigua ad un valore  $f_0$  detto *frequenza portante*. Sono il risultato del processo di *modulazione* (§ 3.5.2), che effettua la trasformazione di un segnale  $m(t)$  *modulante* (o di *banda base*, come quelli studiati finora) in un secondo segnale  $x(t)$  *modulato*, allo scopo di renderne il contenuto spettrale idoneo alla trasmissione mediante il canale a disposizione.



Il segnale *ricevuto*  $r(t)$ , a cui è sovrapposto un processo di rumore  $n(t)$ , deve quindi essere *demodulato* (operazione che, se applicata ad  $x(t)$ , restituirebbe  $m(t)$ ) per ottenere  $d(t)$ , che rappresenta il segnale trasmesso, più eventuali *distorsioni*  $\varepsilon(t)$ . Per evidenziare la situazione, scriviamo il segnale demodulato come  $d(t) = m(t) + \varepsilon(t)$ , in cui  $\varepsilon(t) = Dem\{n(t)\} + Dem\{y(t) - x(t)\}$ : evidentemente, le distorsioni hanno origine sia dal risultato della demodulazione del rumore in ingresso, sia dagli effetti prodotti dalla demodulazione sulle alterazioni introdotte dal canale sul segnale in transito.



Il processo di modulazione è spesso associato ad una trasmissione radio, ma può rendersi necessario e/o utile anche per trasmissioni via cavo. In generale, individuiamo almeno tre situazioni in cui è necessario l'impiego di segnali modulati:

- il canale non permette la trasmissione di frequenze contigue all'origine, presenti invece nel segnale;
- il canale presenta un comportamento ideale (modulo costante e fase lineare) solo in determinati intervalli di frequenza;
- il canale presenta disturbi additivi (ovvero altre trasmissioni) solo in determinate regioni di frequenza.

## 9.1 Contesti applicativi e prime definizioni

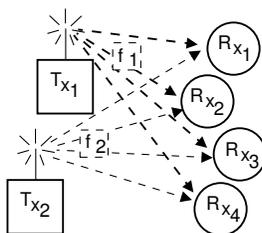
Prima di addentrarci nei dettagli analitici del § 9.2, svolgiamo un breve *excursus* relativo alle modalità ed alle motivazioni di questo tipo di trasmissioni.

### 9.1.1 Moltiplicazione a divisione di frequenza o FDM

Consiste in una tecnica di trasmissione in cui più comunicazioni avvengono in contemporanea, condividendo lo stesso mezzo fisico, ma impegnando ognuna una diversa banda di frequenze, per il semplice motivo che se utilizzassero tutte la stessa banda, costituirebbero termini di *interferenza reciproca*<sup>1</sup>. Molto spesso tutti i segnali moltiplicati sono di natura simile, ed ognuno è il risultato di una modulazione operata con una diversa frequenza portante. Portiamo ad esempio tre casi:

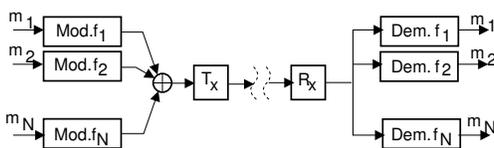
#### 9.1.1.1 Collegamenti punto-multipunto

Si tratta della modalità adottata ad esempio nel caso di trasmissioni televisive o radiofoniche (dette trasmissioni *broadcast*), in cui ogni emittente (in figura indicata come  $T_x$ ) trasmette a tutti i ricevitori ( $R_x$ ) sintonizzati sulla propria portante (i cosiddetti *canali della TV*), mentre altre emittenti utilizzano contemporaneamente lo stesso mezzo trasmissivo, occupando canali centrati ad altre frequenze. Nel caso di trasmissione TV analogica (§ 20.1) e di radio FM (§ 20.2) vi è una corrispondenza 1:1 tra frequenza portante ed emittente, mentre ad es. nella tv digitale sulla stessa portante vengono trasmesse (o meglio *multiplate*) più emittenti (§ 21.3.2.1).



#### 9.1.1.2 Collegamenti punto-punto

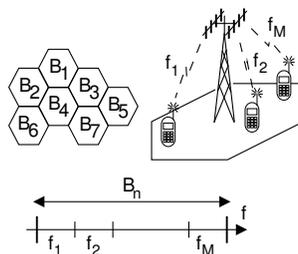
E' una forma di moltiplicazione per mezzo della quale un collegamento tra due località distanti viene *condiviso* per il trasporto di più comunicazioni. Un insieme di  $N$  segnali  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , transita quindi su di uno stesso mezzo trasmissivo, occupando ognuno una differente banda centrata su di una diversa portante  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , e può essere individualmente demodulato e separato in ricezione.



La trasmissione può avvenire sia mediante un collegamento in cavo, che mediante una trasmissione radio; in questa seconda evenienza, il collegamento è spesso indicato come *ponte radio*.

#### 9.1.1.3 Accesso multiplo

E' la tipica strategia di *accesso* alla rete (pag. 566) per le *comunicazioni mobili*, ovvero per la telefonia cellulare e l'accesso wifì. Nel primo caso il territorio è suddiviso in *celle*, per ognuna delle quali viene utilizzata una diversa banda ( $B_n$ ) di frequenze radio, dedicata alla comunicazione tra i terminali ed un unico ripetitore. All'interno della cella la banda a disposizione è ulteriormente suddivisa tra più canali, ognuno associato ad una diversa portante ( $f_i$ ), usati a turno dai terminali che desiderano comunicare<sup>2</sup>.



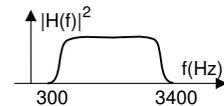
<sup>1</sup>Ma non sempre questo impedisce la comunicazione, vedi § 14.9.

<sup>2</sup>Senza entrare nei dettagli, specifichiamo semplicemente che celle limitrofe adottano regioni di frequenza differenti, onde evitare interferenze tra celle; inoltre (per il sistema GSM) nell'ambito di una stessa portante  $f_i$  è realizzata una

Sotto certi aspetti questo caso è in qualche modo antitetico rispetto al § 9.1.1.1, e potrebbe essere indicato come collegamento *multipunto-punto*. In effetti la situazione è un po' più complessa, e gli aspetti qualificanti da un punto di vista sistemistico sono la sincronizzazione tra radiomobili e stazione base, e i protocolli di rete necessari per consentire le fasi di richiesta di accesso, la negoziazione dei parametri di trasmissione, la localizzazione dei radiomobili, e la corretta gestione dell'*handover* (il cambio di cella)<sup>3</sup>.

## 9.1.2 Canale telefonico

Le caratteristiche del collegamento offerto dalla comune linea telefonica (§ 19.9.1) rivestono molteplici aspetti. Uno di questi, forse il principale<sup>4</sup>, è la limitazione della banda del canale, che rende la trasmissione garantita solo in un intervallo di frequenze comprese tra i 300 ed i 3400 Hz, mentre la banda *nominalmente* occupata è posta pari a 4000 Hz<sup>5</sup>: discutiamo brevemente le origini storiche di tali limitazioni.



L'assenza della regione  $-300 \div 300$  Hz è legata alla presenza, all'interno del telefono, di un componente (detto *ibrido*<sup>6</sup>) che di fatto impedisce la trasmissione di frequenze molto basse, assieme alla scelta operata nel *vecchio* metodo di multiplexione FDM punto-punto<sup>7</sup>, per il quale i singoli canali sono modulati AM-BLU (vedi § 10.1.2), che pure impone di rimuovere le componenti frequenziali più basse.

La stessa FDM ha inoltre determinato la limitazione per le frequenze da 3400 Hz in poi, in quanto è necessario separare tra loro i segnali multiplati mediante dei *filtri di canale* che, per essere economicamente realizzabili, devono presentare una regione di transizione di estensione apprezzabile. Pertanto, tra due canali contigui è prevista la presenza di un intervallo di

---

struttura di trama, in modo da permettere l'utilizzo dello stesso canale da parte di più terminali contemporaneamente, multiplati a divisione di tempo.

<sup>3</sup>Un minimo di approfondimento (per il GSM) però ci può stare... Accade che la scelta della portante su cui comunicare avviene in base alle condizioni di ricezione del singolo radiomobile che, per effetto dei cammini multipli (§ 16.3.3.5) che caratterizzano il canale radio tra lo stesso e l'antenna della cella, può ricevere *meglio* certe portanti che non altre.

La trasmissione che ha luogo su di una portante, inoltre, può aver origine da più terminali, che si ripartiscono lo stesso canale a divisione di tempo, in accordo ad una suddivisione di trama dell'asse dei tempi. Pertanto, dopo che un terminale si è aggiudicato una portante ed un intervallo temporale, la trasmissione (attuata mediante una modulazione numerica) ha luogo solo per brevi periodi, in corrispondenza del time-slot di propria pertinenza.

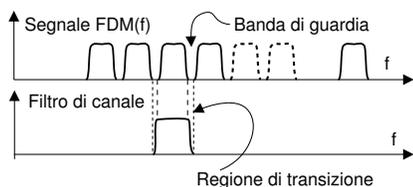
Dato che i singoli terminali si trovano a distanze diverse dal ripetitore di cella, diversi sono i tempi di propagazione del segnale di sincronismo di trama e di time-slot, e dunque l'intervallo temporale che viene "riempito" da ogni terminale giunge al ripetitore con un ritardo variabile. Per questo motivo, i time-slot della trama sono separati da piccoli periodi di inattività, chiamati *intervalli di guardia*, che garantiscono l'assenza di sovrapposizioni temporali delle trasmissioni originate dai diversi terminali.

<sup>4</sup>Un altro fattore rilevante è la *limitazione della potenza* che è possibile immettere su di un singolo collegamento telefonico e che, associato al precedente, caratterizza il canale telefonico come limitato sia in banda che in potenza, e dunque con capacità (§ 13.2.4)  $C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P_s}{N_0 W} \right)$  dipendente solo dal livello di rumore. La limitazione in potenza è motivata storicamente da problemi di *diafonia* (pag. 468) dovuti a fenomeni di induzione elettromagnetica, mentre attualmente è determinata dalla limitata dinamica del segnale che viene campionato e trasmesso in forma numerica.

<sup>5</sup>Questo valore massimo nominale determina che la frequenza di campionamento del PCM telefonico è pari a  $2 \cdot 4000 = 8000$  campioni al secondo. Utilizzando 8 bit/campione, si ottiene la velocità binaria  $f_b = 64000$  campioni/secondo. Velocità inferiori si possono conseguire adottando metodi di codifica di sorgente per il segnale vocale, vedi § 21.1.

<sup>6</sup>L'ibrido telefonico è un trasformatore con quattro porte, che realizza la separazione tra le due vie di comunicazione che viaggiano sullo stesso cavo (vedi § 19.9.1). Nel caso di una linea ISDN, invece, il telefono stesso effettua la conversione numerica, ed i campioni di voce viaggiano nei due sensi (tra utente e centrale) secondo uno schema a divisione di tempo (vedi § 19.9.2).

<sup>7</sup>Nel secolo scorso venne definita una vera e propria *gerarchia* di multiplexione, i cui livelli detti di *gruppo*, *super gruppo*, *gruppo master* e *gruppo jumbo* accolgono rispettivamente 12, 60, 600 e 3600 canali voce, per essere trasmessi su doppino, cavo coassiale, o ponte radio. Un approfondimento presso <https://www.vialattea.net/content/883/> e <https://en.wikipedia.org/wiki/L-carrier>.



frequenze detto *banda di guardia* (pari a 900 Hz), che determina la limitazione a 3400 Hz per la massima frequenza di segnale, in modo da ottenere  $300 + (4000 - 3400) = 900$  Hz. In assenza di tale intervallo, all'uscita di un filtro di canale si troverebbe anche parte del segnale presente su di un canale contiguo, producendo interferenza tra comunicazioni diverse.

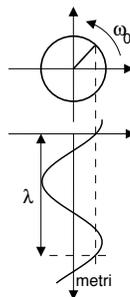
La limitazione in banda di un canale telefonico tra 300 e 3400 Hz è dunque il motivo per cui la connessione telefonica tra un computer ad un fornitore di connettività Internet *richiedeva* (in tempi pre-ADSL) l'uso di un dispositivo *modem*, che effettua una forma di modulazione sul segnale da trasmettere sul cavo, che arrivava in tale forma fino al provider. Al contrario, nel caso dell'accesso ADSL (vedi § 19.9.4) la connettività numerica inizia direttamente nella centrale del chiamante; d'altra parte, il segnale prodotto dal modem ADSL occupa ora una banda *disgiunta* da quella del canale telefonico, usando tutta la capacità del doppino (§ 16.2.3.1) che è ad uso esclusivo dell'utente.

### 9.1.3 Antenne e lunghezza d'onda

La trasmissione di un segnale via onda radio necessita di un'antenna di dimensione comparabile alla lunghezza d'onda. Quest'ultima quantità (indicata con  $\lambda$ ) è pari allo spazio percorso dall'onda in un tempo pari ad un periodo: dato che *spazio = velocità · tempo*, e considerando che le onde elettromagnetiche si propagano alla velocità della luce ( $c = 3 \cdot 10^8$  m/s), si ha

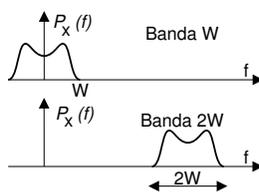
$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$$

Nel caso di segnali modulati il valore di  $f$  è quello della portante, in quanto il segnale modulato occupa una banda ristretta attorno ad essa. Trasmissioni con portanti più elevate necessitano di antenne di dimensioni ridotte; d'altra parte se per assurdo trasmettessimo con portante di 300 Hz, occorrerebbe una antenna di dimensioni  $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{300} = 10^6$  m = 1000 Km!<sup>8</sup>



### 9.1.4 Banda di segnale

La banda occupata da un segnale è la regione di frequenze al di fuori della quale non vi sono componenti energetiche; la sua misura in Hz è indicata come *larghezza di banda*. Per segnali reali l'occupazione di banda è espressa in termini del solo contenuto a frequenze positive; dato che in tal caso lo spettro di potenza è una funzione pari di  $f$ , la banda totale è doppia. Tale definizione è pertanto non ambigua, ed in accordo alla comune accezione di frequenza (positiva); pertanto, viene spesso indicata come *banda a frequenze positive*.



<sup>8</sup>Antenne più corte hanno una efficienza ridotta, ma sono ancora buone. Altrimenti la radio AM (540 - 1600 KHz) avrebbe bisogno di  $\frac{3 \cdot 10^8}{1000 \cdot 10^3} = 300$  metri! Al § 16.5.1 è riportata una tabella dei valori di  $\lambda$  per i diversi servizi di TLC.

## 9.2 Rappresentazione dei segnali modulati

Terminata la parte introduttiva, affrontiamo gli sviluppi analitici basati sulla possibilità di esprimere un segnale modulato  $x(t)$  nella forma

$$x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (9.1)$$

in cui, se  $f_0$  è scelta entro la banda occupata dal segnale,  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  sono segnali *limitati in banda* con banda contigua all'origine, e le alterazioni prodotte sul segnale modulato da parte del messaggio modulante  $m(t)$  possono essere descritte mediante operazioni condotte su  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$ . Ciò significa che  $x(t)$  potrà essere sintetizzato, ed il messaggio recuperato, agendo su segnali con banda molto ridotta rispetto alla massima frequenza di  $x(t)$ . Iniziamo a mostrare come  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  siano in realtà la parte reale ed immaginaria di un terzo segnale di banda base, chiamato...

### 9.2.1 Involuppo complesso

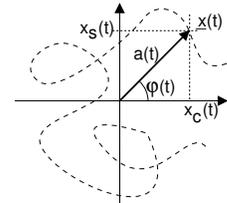
È definito come un segnale *complesso* legato a  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  dalla relazione

$$\underline{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t) \quad (9.2)$$

ed è una estensione tempo-variante del concetto di *fasore* (vedi § 2.1.3), che a sua volta consente di rappresentare un segnale del tipo  $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$ <sup>9</sup> per mezzo del numero complesso  $\underline{x} = ae^{j\varphi}$ , mediante la relazione  $x(t) = \Re\{\underline{x}e^{j\omega_0 t}\}$ . In modo simile, l'*inviluppo complesso*  $\underline{x}(t)$  può essere pensato come un fasore per il quale il modulo  $a$  e la fase  $\varphi$  sono funzioni del tempo, ovvero

$$\underline{x}(t) = a(t) e^{j\varphi(t)} \quad (9.3)$$

come rappresentato nella figura a fianco assieme ad una sua possibile traiettoria temporale. Ad  $\underline{x}(t)$  possiamo quindi associare un segnale *reale*



$$x(t) = \Re\{\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t}\} = \Re\{a(t) e^{j(\omega_0 t + \varphi(t))}\} = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (9.4)$$

in cui il termine  $e^{j\omega_0 t}$  corrisponde ad imprimere ad  $\underline{x}(t)$  una rotazione in senso *antiorario* a velocità angolare  $\omega_0$ . D'altra parte, sviluppando la rappresentazione polare (9.3) come

$$\underline{x}(t) = a(t) e^{j\varphi(t)} = a(t) \cos \varphi(t) + ja(t) \sin \varphi(t)$$

osserviamo che  $x_c(t) = \Re\{\underline{x}(t)\} = a(t) \cos \varphi(t)$  e  $x_s(t) = \Im\{\underline{x}(t)\} = a(t) \sin \varphi(t)$ , permettendoci di dimostrare che la (9.4) è equivalente alla (9.1), in quanto<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re\{\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t}\} = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = \\ &= a(t) [\cos \omega_0 t \cos \varphi(t) - \sin \omega_0 t \sin \varphi(t)] \\ &= x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (9.5)$$

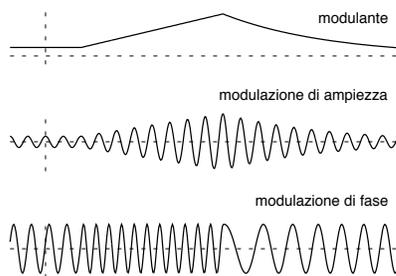
<sup>9</sup>Per brevità, qui e nel seguito adottiamo a volte la notazione  $2\pi f_0 = \omega_0$ .

<sup>10</sup>Si faccia uso della relazione  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ .

## 9.2.2 Modulazione di ampiezza, di fase e di frequenza

L'involuppo complesso è un potente strumento che permette di descrivere il processo di modulazione in modo semplice ed omogeneo. Ad esempio, la moltiplicazione del segnale  $a(t)$  di banda base per un coseno a frequenza (*portante*)  $f_0$  (vedi § 3.5.2)  $x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t)$  corrisponde a scrivere l'eq. (9.3) come  $\underline{x}(t) = a(t)$ , ovvero corrisponde ad un involuppo complesso  $\underline{x}(t) = a(t)$  a fase nulla, e prende il nome di *modulazione di ampiezza*<sup>11</sup> dato che appunto è l'ampiezza della portante a variare in accordo al segnale  $a(t)$ . Se al contrario consideriamo un involuppo complesso con modulo costante  $\underline{x}(t) = ae^{j\varphi(t)}$ , l'andamento della fase  $\varphi(t)$  imprime alla portante un diverso tipo di modulazione, detta ora *modulazione di fase*<sup>12</sup> o *angolare* in quanto il segnale modulante ( $\varphi(t)$  in questo caso) altera l'argomento del coseno, ottenendo dalla (9.4) il segnale modulato  $x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$ .

Prima di proseguire riflettiamo sull'esempio mostrato in figura, in cui si considera un segnale modulante  $m(t)$  prima costante, poi a rampa lineare, e quindi decrescente. Ponendo  $\underline{x}(t) = m(t)$  si ottiene una portante modulata in ampiezza, mentre con  $\underline{x}(t) = e^{jm(t)}$  la portante modulata angolarmente  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + m(t))$  presenta una ampiezza costante, ed una frequenza che (nell'intervallo in cui  $m(t)$  aumenta linearmente) cambia in un valore più elevato, per poi diminuire. In pratica, se  $m(t) = \alpha t$ , allora l'argomento del coseno diviene  $2\pi f_0 t + \alpha t = 2\pi(f_0 + \frac{\alpha}{2\pi})t$  e dunque la frequenza portante *aumenta* di  $\frac{\alpha}{2\pi}$ .



Per meglio descrivere il caso di modulazione angolare, indichiamo l'argomento del coseno come *fase istantanea*

$$\psi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t)$$

e la sua derivata normalizzata come *frequenza istantanea*

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \psi(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \varphi(t) \quad (9.6)$$

In questi termini, la modulazione angolare viene distinta in *modulazione di fase* propriamente detta quando  $m(t)$  si limita ad alterare la fase della portante in modo diretto, ovvero

$$\varphi(t) = k_\varphi m(t)$$

mentre viene detta *modulazione di frequenza* quando la fase dipende dall'integrale di  $m(t)$ , ovvero

$$\varphi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \quad (9.7)$$

dato che in questo caso è la frequenza *istantanea* (9.6) a dipendere direttamente dal segnale modulante:  $f_i(t) = f_0 + k_f m(t)$ .

<sup>11</sup>Indicata anche come AM (*amplitude modulation*).

<sup>12</sup>Indicata anche come PM (*phase modulation*).

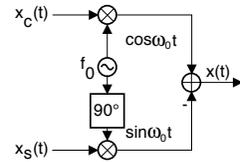
### 9.2.3 Componenti analogiche di bassa frequenza

Sono anch'esse definite a partire da  $a(t)$  e  $\varphi(t)$  come

$$x_c(t) = a(t) \cos \varphi(t) \quad \text{e} \quad x_s(t) = a(t) \sin \varphi(t) \quad (9.8)$$

e mentre l'eq. (9.2) le identifica con la parte reale ed immaginaria dell'involuppo complesso  $\underline{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t)$ , l'eq. (9.5) permette loro di descrivere completamente un segnale modulato nella forma  $x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t$ : quest'ultima espressione motiva la scelta dei pedici  $c$  ed  $s$ , così come l'appellativo di componente *in fase* (per  $x_c(t)$ ) ed *in quadratura* (per  $x_s(t)$ ) del segnale modulato.

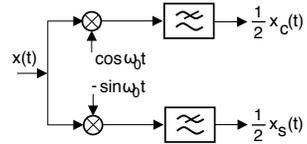
Osserveremo tra breve come, scegliendo per  $f_0$  una frequenza al centro della banda  $2W$  del segnale modulato, le componenti analogiche di bassa frequenza  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  (d'ora in poi *c.a. di b.f.*) risultino essere *limitate in banda*, con banda  $2W$  centrata attorno all'origine. D'altra parte, è molto semplice verificare come l'inverso sia vero: il segnale modulato espresso dalla (9.1) può essere infatti ottenuto a partire da  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  limitate in banda mediante il semplice schema di elaborazione mostrato in figura, detto *modulatore in fase e quadratura*, che rappresenta una via per *sintetizzare* un segnale modulato (in ampiezza, od angularmente, od entrambe le cose), a partire dalle sue c.a. di b.f., che a loro volta sono ottenibili a partire da  $a(t)$  e  $\varphi(t)$  in base alle (9.8).



modulatore in fase e quadratura

### 9.2.4 Demodulazione in fase e quadratura

Come il segnale modulato  $x(t)$  può essere *sintetizzato* a partire da  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$ , così le c.a. di b.f. possono essere recuperate da  $x(t)$  adottando lo schema simbolico in figura, in cui il segnale modulato è moltiplicato per due portanti (dette *in fase ed in quadratura*), di cui la prima con la medesima frequenza e fase di quella utilizzata dal modulatore<sup>13</sup>, ovvero pari a  $\cos(2\pi f_0 t)$  e per questo detta *coerente, sincrona od omodina*, mentre la seconda (in quadratura) ha un anticipo di fase pari a  $\pi/2$ , ovvero è pari a  $\cos(2\pi f_0 t + \pi/2) = -\sin(2\pi f_0 t)$ . Su entrambi i rami è quindi posto un filtro passa basso<sup>14</sup>.



Il funzionamento del demodulatore è basato sul fatto che, considerando  $x(t)$  espresso nei termini delle sue c.a. di b.f., per il ramo in fase si ottiene<sup>15</sup>:

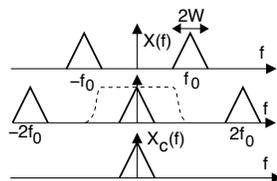
$$\begin{aligned} x(t) \cos \omega_0 t &= [x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t] \cos \omega_0 t = \\ &= x_c(t) \cos^2 \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2} x_c(t) + \frac{1}{2} x_c(t) \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2} x_s(t) \sin 2\omega_0 t \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Le modalità di sincronizzazione della portante utilizzata al ricevitore rispetto a quella usata in trasmissione sono esposte al § 10.2.1.

<sup>14</sup>Il simbolo  $\approx$  rappresenta un filtro passa-basso, poiché viene *cancellata* l'ordina superiore. Nello stesso stile, possono essere indicati un passa-alto  $\approx$  ed un passa-banda  $\approx$ .

<sup>15</sup>Si fa uso delle relazioni  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$  e  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

I termini in cui compaiono  $\cos 2\omega_0 t$  e  $\sin 2\omega_0 t$  sono relativi a componenti di segnale centrate attorno a  $2f_0$ , che il filtro passa basso (la cui  $H(f)$  è tratteggiata in figura) provvede ad eliminare: la banda del filtro deve quindi essere maggiore di  $W$  ma inferiore a  $2f_0 - W$ . Pertanto, non è necessario un filtro rettangolare, e se  $f_0 \gg W$  non sussistono particolari problemi realizzativi. Procedendo in maniera simile<sup>16</sup>, per il ramo in quadratura si ottiene:



$$\begin{aligned} -x(t) \sin \omega_0 t &= -[x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t] \sin \omega_0 t = \\ &= x_s(t) \sin^2 \omega_0 t - x_c(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2} x_s(t) - \frac{1}{2} x_s(t) \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2} x_c(t) \sin 2\omega_0 t \end{aligned}$$

ed anche in questo caso il filtro passa-basso rimuove le componenti a frequenza doppia.

Se i filtri non sono ideali, ma hanno ad esempio una fase lineare, saranno equivalenti ad un ritardo; se presentano distorsioni più severe (modulo non costante o fase non lineare), allora introducono distorsioni aggiuntive; per ridurre al minimo gli effetti di queste ultime, si tenta almeno di realizzare i due filtri quanto più identici tra loro, vedi § 12.1.1.1.

**Ricostruzione del segnale modulante** Una volta che  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  sono note, queste permettono di risalire alla modulazione di ampiezza e di fase come

$$\begin{cases} a(t) = |\underline{x}(t)| = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \\ \varphi(t) = \arg\{\underline{x}(t)\} = \arctan 2(x_s, x_c) \end{cases} \quad (9.9)$$

in cui si adotta la funzione  $\arctan 2(x_s, x_c)$ , che al contrario di  $\arctan \frac{x_s}{x_c}$  tiene conto del segno<sup>17</sup> di  $x_c$  ed  $x_s$ , e restituisce un angolo compreso nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$  anziché  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

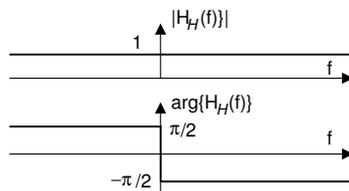
Oltre allo schema circuitale ora discusso, esiste anche un approccio analitico per calcolare le c.a. di b.f. a partire da  $x(t)$  e basato sulla definizione della *trasformata di Hilbert*  $\hat{x}(t)$ , che permettendo di associare ad  $x(t)$  il relativo *segnale analitico*  $x^+(t)$  (§ 9.2.6), consente di esprimere la densità di potenza del segnale modulato  $\mathcal{P}_x(f)$  nei termini di quella del suo involuppo complesso  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$  (§ 9.2.7). Prendiamo questa strada.

### 9.2.5 Trasformata di Hilbert

Al contrario di Fourier e di Laplace, quella di *Hilbert* è una trasformata che restituisce nuovamente una funzione del tempo, indicata come

$$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$$

che può essere ottenuta mediante una operazione di filtraggio di  $x(t)$  attraverso il *filtro di Hilbert* (§ 9.4.1) la cui risposta in frequenza  $H_{\mathcal{H}}(f) = -j \cdot \text{sgn}(f)$  è graficata a lato, e che determina in  $X(f)$  una alterazione della fase pari a  $\mp \frac{\pi}{2}$  a seconda se  $f \geq 0$ .



<sup>16</sup>Utilizzando stavolta le relazioni  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$  e  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$ , ed eseguendo il prodotto  $-\sin \omega_0 t [x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t]$ .

<sup>17</sup>Vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente2>.

Anticipiamo subito (vedi § 9.4.2) che la trasformata di Hilbert di un segnale modulato di cui è noto l'involuppo complesso  $\underline{x}(t)$  risulta pari a

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \Im\{\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t}\} = a(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) = \\ &= x_c(t) \sin \omega_0 t + x_s(t) \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (9.10)$$

in cui si tiene conto che  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$  e si applicano le (9.8).

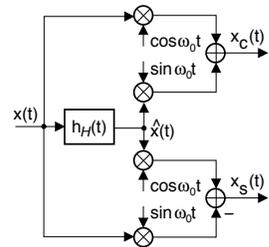
**Demodulazione delle c.a. di b.f.** Affiancando alla (9.10) la relazione (9.1) si imposta il sistema di due equazioni nelle incognite  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$

$$\begin{cases} x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t \\ \hat{x}(t) = x_c(t) \sin \omega_0 t + x_s(t) \cos \omega_0 t \end{cases} \quad (9.11)$$

che rappresenta una *rotazione* in senso *orario* del piano dell'involuppo complesso<sup>18</sup> e che può essere risolto<sup>19</sup>, istante per istante<sup>20</sup>, permettendo in definitiva di esprimere le componenti analogiche di bassa frequenza in termini di  $x(t)$  e di  $\hat{x}(t)$ :

$$\begin{cases} x_c(t) = x(t) \cos \omega_0 t + \hat{x}(t) \sin \omega_0 t \\ x_s(t) = -x(t) \sin \omega_0 t + \hat{x}(t) \cos \omega_0 t \end{cases}$$

a cui corrisponde lo schema simbolico mostrato a lato, che illustra come le componenti analogiche di bassa frequenza possano essere ottenute direttamente da  $x(t)$ , utilizzando un *filtro di Hilbert*  $h_H(t)$  (§ 9.4.1) per ottenere  $\hat{x}(t)$ , e combinando i due segnali per mezzo di oscillatori in quadratura. Una volta determinate  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  si può procedere come a pag. 256 per ricavare il segnale modulante espresso da  $a(t)$  e  $\varphi(t)$ .



Ora che abbiamo esaminato due diversi metodi per ottenere le c.a. di b.f., affrontiamo il problema di individuare una relazione tra la densità di potenza dell'involuppo complesso  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$  e quella  $\mathcal{P}_x(f)$  del segnale modulato. A tale scopo, occorre prima definire il...

<sup>18</sup>Mostriamo che una matrice di coefficienti della forma  $\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$  individua una rotazione. Esprimiamo infatti un numero complesso  $\underline{x} = x_c + jx_s$  in forma polare  $\underline{x} = \rho e^{j\alpha}$ , sussistendo l'uguaglianza  $x_c = \rho \cos \alpha$  e  $x_s = \rho \sin \alpha$ ; con riferimento alla figura, immaginiamo ora che  $\underline{x}$  ruoti in senso *antiorario* di un angolo (*positivo*)  $\phi$ , ottenendo il nuovo numero complesso  $\underline{y} = \underline{x} e^{j\phi} = \rho e^{j(\alpha+\phi)} = y_c + jy_s$ , in cui

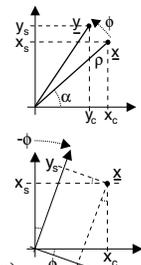
$$\begin{cases} y_c = \rho \cos(\alpha + \phi) = \rho(\cos \alpha \cos \phi - \sin \alpha \sin \phi) = x_c \cos \phi - x_s \sin \phi \\ y_s = \rho \sin(\alpha + \phi) = \rho(\sin \alpha \cos \phi + \cos \alpha \sin \phi) = x_c \sin \phi + x_s \cos \phi \end{cases}$$

ovvero la matrice dei coefficienti corrisponde a quella preannunciata. Alternativamente, le nuove coordinate  $y_c, y_s$  corrispondono a quelle di un vettore fisso, ma riferito ad un sistema di assi ortogonali che ruotano in senso *orario* dello stesso angolo  $\phi$ .

<sup>19</sup>Verifichiamo che il prodotto tra le matrici dei coefficienti fornisca la matrice identità:

$$\begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 + \sin^2 & \cos \sin - \cos \sin \\ -\cos \sin + \cos \sin & \sin^2 + \cos^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>20</sup>Dato che i coefficienti  $\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t$  del sistema 9.11 sono funzione del tempo, le sue equazioni rappresentano una *rotazione oraria* di assi che "ruota", ossia si riferisce ad un angolo  $\omega_0 t$  che *aumenta linearmente* nel tempo. Pertanto le coppie di segnali  $(x_c(t), x_s(t))$  e  $(x(t), \hat{x}(t))$  rappresentano entrambe l'evoluzione dell'involuppo complesso  $\underline{x}(t) = a(t) e^{j\varphi(t)}$ : mentre i segnali di banda base  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  lo rappresentano su due assi solidali al piano in cui giace  $\underline{x}(t)$ , i segnali modulati  $x(t)$  e  $\hat{x}(t)$  sono relativi ad assi *rotanti* con velocità angolare  $\omega_0$ . In altre parole, mentre  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  sono  $\Re$  e  $\Im$  di  $\underline{x}(t)$ ,  $x(t)$  e  $\hat{x}(t)$  sono  $\Re$  e  $\Im$  di  $\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t}$ , ovvero di  $\underline{x}(t)$  *rotante*, vedi le eq. (9.4) e (9.10).



### 9.2.6 Segnale analitico

Riprendendo l'analogia introdotta al § 9.2.1 tra involuppo complesso  $\underline{x}(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$  e fasore  $\underline{x} = ae^{j\varphi}$  osserviamo che per entrambi si può risalire al segnale a cui si riferiscono (una portante, modulata o meno) oltre che mediante la relazione  $x(t) = \Re\{\underline{x}(t)e^{j\omega_0 t}\}$ , anche come

$$x(t) = \frac{1}{2} \left( \underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} + \underline{x}^*(t) e^{-j\omega_0 t} \right) \quad (9.12)$$

in cui vi sono due fasori *coniugati* che ruotano l'uno in verso opposto all'altro (vedi eq. (2.5) a pag. 31), in modo che la loro somma *vettoriale* sia pari<sup>21</sup> a  $\Re\{\underline{x}(t)e^{j\omega_0 t}\}$ . Proseguendo con l'analogia, come la scomposizione di un coseno

$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \underline{x} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} \underline{x}^* e^{-j\omega_0 t}$$

secondo la formula di Eulero dà luogo a due impulsi in frequenza ovvero

$$X(f) = \frac{1}{2} \underline{x} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \underline{x}^* \delta(f + f_0)$$

permettendo di interpretare  $\frac{1}{2} \underline{x} e^{j\omega_0 t}$  e  $\frac{1}{2} \underline{x}^* e^{-j\omega_0 t}$  nei termini delle componenti a frequenza rispettivamente *positiva* e *negativa* del coseno, così il segnale modulato  $x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$  può considerarsi scomposto nei termini

$$x^+(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} \quad \text{e} \quad x^-(t) = \frac{1}{2} \underline{x}^*(t) e^{-j\omega_0 t} \quad (9.13)$$

dove  $x^+(t)$  e  $x^-(t)$  individuano rispettivamente le componenti a frequenza *positiva* e *negativa* di  $x(t)$ , l'una coniugata dell'altra ovvero  $x^-(t) = (x^+(t))^*$ , in modo da poter scrivere

$$x(t) = x^+(t) + x^-(t) \quad (9.14)$$

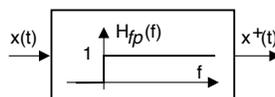
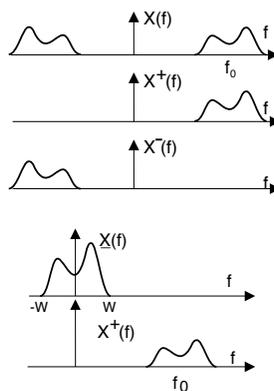
Il segnale *complesso*  $x^+(t)$  viene indicato come *segnale analitico*<sup>22</sup> ed in base alla prima delle (9.13) è privo di componenti a frequenza negativa a patto che  $\underline{x}(t)$  sia di banda base, e con frequenza massima  $|W| < f_0$ , vedi la figura a lato. In questa ipotesi la sua trasformata vale quindi

$$X^+(f) = \mathcal{F}\{x^+(t)\} = \frac{1}{2} X(f - f_0)$$

pari a zero al di fuori della semiretta  $f > 0$ .

Incidentalmente,  $x^+(t)$  può anche essere pensato come il risultato dell'attraversamento da parte di  $x(t)$  di un filtro *ideale*  $H_{fp}(f)$ <sup>23</sup> con risposta in frequenza a gradino unitario

$$X^+(f) = X(f) H_{fp}(f) \quad (9.15)$$



<sup>21</sup>Ricordiamo che la somma di due numeri complessi coniugati è pari al doppio della loro parte reale.

<sup>22</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Segnale\\_analitico](https://it.wikipedia.org/wiki/Segnale_analitico)

<sup>23</sup>Il pedice  $fp$  sta per *frequenze positive*.

**Relazione tra segnale analitico, modulato, e sua trasformata di Hilbert** Similmente a  $x(t)$  e  $\widehat{x}(t)$ , anche il segnale analitico  $x^+(t)$  è di tipo *passa banda* (benché privo di componenti a frequenza negativa), e si può mostrare<sup>24</sup> che la sua espressione nei termini di  $x(t)$  e  $\widehat{x}(t)$  risulta pari a

$$x^+(t) = \frac{1}{2} (x(t) + j\widehat{x}(t)) \tag{9.16}$$

di cui alla nota<sup>25</sup> si mostra l'equivalenza con (9.15). Infine, con simili passaggi, risulta anche

$$x^-(t) = \frac{1}{2} (x(t) - j\widehat{x}(t)) \tag{9.17}$$

### 9.2.7 Densità spettrale di segnali passa-banda

Siamo ora in grado di stabilire il legame tra lo spettro del segnale modulato e quello dell'involuppo complesso. Dalle (9.13) e (9.14) ri-otteniamo la (9.12) ovvero

$$x(t) = x^+(t) + x^-(t) = \frac{1}{2} (\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} + \underline{x}^*(t) e^{-j\omega_0 t})$$

la cui trasformata di Fourier, tenendo conto della proprietà di traslazione in frequenza, e che  $\mathcal{F}\{\underline{x}^*(t)\} = \underline{X}^*(-f)$  (pag. 59), fornisce

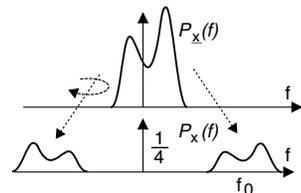
$$X(f) = \frac{1}{2} (\underline{X}(f - f_0) + \underline{X}^*(-f - f_0)) \tag{9.18}$$

a cui corrisponde una densità di energia<sup>26</sup>

$$\mathcal{E}_x(f) = \frac{1}{4} (\mathcal{E}_{\underline{x}}(f - f_0) + \mathcal{E}_{\underline{x}}(-f - f_0))$$

ovvero una densità di potenza<sup>27</sup>

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{1}{4} (\mathcal{P}_{\underline{x}}(f - f_0) + \mathcal{P}_{\underline{x}}(-f - f_0)) \tag{9.19}$$



<sup>24</sup>L'eguaglianza (9.16) si può dimostrare sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza. Partendo dalla prima delle (9.13) si ottiene infatti

$$\begin{aligned} x^+(t) &= 1/2 \underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} = 1/2 (x_c(t) + jx_s(t)) (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) = \\ &= 1/2 [(x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t)] + j (x_c(t) \sin \omega_0 t + x_s(t) \cos \omega_0 t) = \\ &= 1/2 (x(t) + j\widehat{x}(t)) \end{aligned}$$

Nel dominio della frequenza, invece, si applica la definizione di filtro di Hilbert (in cui lo sfasamento di  $\pm \frac{\pi}{2}$  equivale al prodotto di  $X(f)$  per  $e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j$ ) alla trasformata di (9.16), ottenendo

$$X^+(f) = \frac{1}{2} (X(f) + j\widehat{X}(f)) = \begin{cases} \frac{1}{2} \{X(f) + j[-jX(f)]\} = X(f) & \text{con } f > 0 \\ \frac{1}{2} \{X(f) + j[jX(f)]\} = 0 & \text{con } f < 0 \end{cases}$$

dato che a frequenze negative il prodotto  $j \cdot j = -1$  costituisce uno sfasamento di  $\pi$  radianti per tutte le frequenze, provocando l'elisione tra  $X(f)$  e  $-X(f)$  per tutti i valori  $f < 0$ .

<sup>25</sup>Infatti  $H_{fp}(f)$  può essere scritta come  $H_{fp}(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(f) = \frac{1}{2} (1 + jH_{\mathcal{H}}(f))$  (vedi eq. (9.22)), e dunque  $H_{fp}(f) X(f) = \frac{1}{2} (X(f) + j\widehat{X}(f))$ , da cui la (9.16).

<sup>26</sup>Scriviamo infatti  $\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2 = X(f) X^*(f)$  da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(f) &= 1/4 (\underline{X}(f - f_0) + \underline{X}^*(-f - f_0)) (\underline{X}^*(f - f_0) + \underline{X}(-f - f_0)) = \\ &= 1/4 (\underline{X}(f - f_0) \underline{X}^*(f - f_0) + \underline{X}^*(-f - f_0) \underline{X}(-f - f_0)) = 1/4 (\mathcal{E}_{\underline{x}}(f - f_0) + \mathcal{E}_{\underline{x}}(-f - f_0)) \end{aligned}$$

in quanto i prodotti  $\underline{X}(f - f_0) \cdot \underline{X}(-f - f_0)$  e  $\underline{X}^*(-f - f_0) \cdot \underline{X}^*(f - f_0)$  sono nulli, dato che in entrambi i casi i fattori risiedono in regioni di frequenza disgiunte,

<sup>27</sup>La (9.19) può essere motivata seguendo le stesse linee guida indicate alla nota 16 a pag. 142.

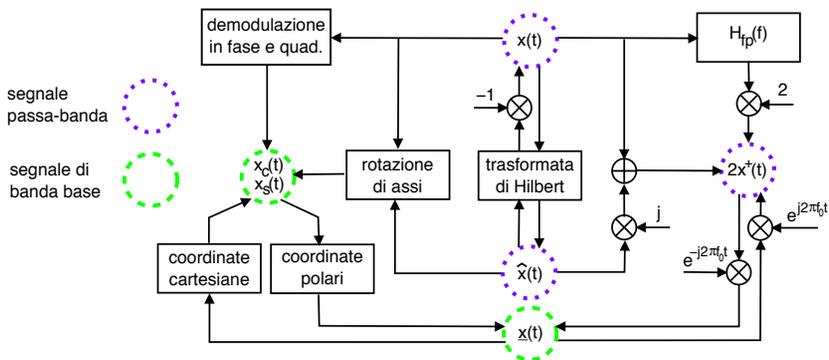


Figura 9.1: Relazioni tra segnale modulato, inviluppo complesso, componenti analogiche e segnale analitico

il cui significato è esemplificato alla figura precedente, che raffigura la  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$  traslare di  $\pm f_0$ , con una copia *ruotata* per le frequenze negative.

Restringendo ora l'attenzione sul legame tra lo spettro del segnale analitico  $x^+(t)$  e quello di  $\underline{x}(t)$ , osserviamo che invertendo la prima delle (9.13) in  $\underline{x}(t) = 2x^+(t)e^{-j\omega_0 t}$  ed eseguendo la trasformata di Fourier si ottiene

$$\underline{X}(f) = 2X^+(f + f_0)$$

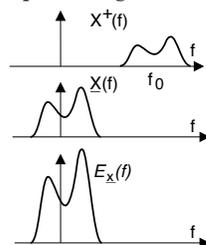
Osserviamo dunque che in linea di principio  $\underline{X}(f)$  non gode di simmetria rispetto ad  $f = 0$ , come peraltro prevedibile visto che  $\underline{x}(t)$  è in generale complesso. Per completare il giro, dalla relazione  $\mathcal{E}_{\underline{x}}(f) = |\underline{X}(f)|^2$  otteniamo

$$\mathcal{E}_{\underline{x}}(f) = 4|X^+(f + f_0)|^2 = 4\mathcal{E}_{x^+}(f + f_0)$$

ed un risultato del tutto simile sussiste anche per segnali di potenza, ovvero

$$\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\mathcal{P}_{x^+}(f + f_0) \tag{9.20}$$

Pertanto, la densità di potenza di  $\underline{x}(t)$  si ottiene da quella a frequenze positive di  $x(t)$ , traslata nell'origine e moltiplicata per 4.



### 9.2.8 Schema delle trasformazioni

La figura 9.1 riassume le relazioni esistenti tra le grandezze  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$ , e  $x^+(t)$ , di tipo passa banda, ed  $\underline{x}(t)$ ,  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$ , di banda base.

#### Esempio

- Sia dato il segnale  $x(t)$  la cui trasformata  $X(f)$  è riportata nel lato *sinistro* in alto di fig. 9.2-a). Derivare l'espressione delle sue componenti analogiche di bassa frequenza, espresse nel dominio della frequenza e del tempo.

Notiamo che  $|X^+(f)| = \frac{k}{2}\text{rect}_{2B}(f - f_0)$ , e dunque

$$|\underline{X}(f)| = 2|X^+(f + f_0)| = k\text{rect}_{2B}(f)$$

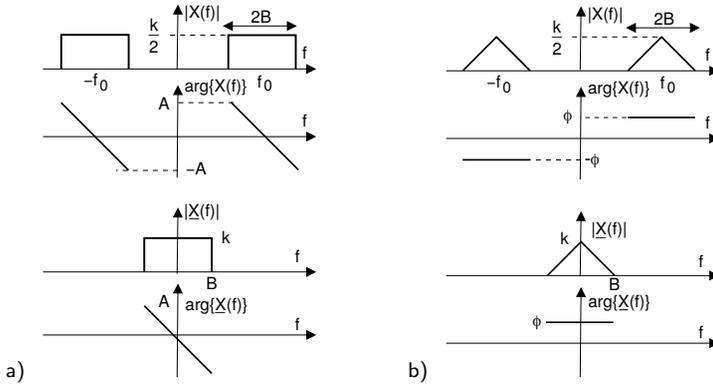


Figura 9.2: Densità spettrali utilizzate negli esempi

Per la fase si opera una traslazione analogica, ma senza moltiplicare per il fattore 2 che, in quanto fattore, incide solo sul modulo.

Osserviamo ora che  $\underline{X}(f)$  ha modulo pari e fase dispari, e dunque la sua antitrasformata è un segnale reale:  $\underline{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t) = x_c(t)$ , ovvero la componente in quadratura  $x_s(t)$  è nulla. Pertanto, risulta<sup>28</sup>  $\begin{cases} X_c(f) = k \text{rect}_{2B}(f) e^{-j2\pi \frac{A}{2\pi B} f} \\ X_s(f) = 0 \end{cases}$ , ed effettuando l'antitrasformata di  $X_c(f)$  si ottiene

$$x_c(t) = 2kB \text{sinc} \left[ 2B \left( t - \frac{A}{2\pi B} \right) \right]$$

in cui la traslazione nel tempo è dovuta alla fase lineare presente in  $\underline{X}(f)$ .

- Lo stesso problema precedente, ma applicato al segnale b), la cui trasformata  $X(f)$  è mostrata al lato destro in alto di Fig. 9.2-b).

Eseguendo di nuovo le operazioni di traslazione si ottiene l'involuppo complesso riportato in basso. Questa volta la fase di  $\underline{X}(f)$  non è dispari, e dunque non si verificano le condizioni di simmetria coniugata, quindi  $\underline{x}(t)$  è complesso. Si ha:  $\underline{x}(t) = kB \left( \frac{\sin \pi B t}{\pi B t} \right)^2 e^{j\phi}$  e dunque

$$\begin{cases} x_c(t) = kB \left( \frac{\sin \pi B t}{\pi B t} \right)^2 \cos \phi \\ x_s(t) = kB \left( \frac{\sin \pi B t}{\pi B t} \right)^2 \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_c(f) = k \left( 1 - \frac{|f|}{B} \right) \cos \phi \\ X_s(f) = k \left( 1 - \frac{|f|}{B} \right) \sin \phi \end{cases}$$

con  $|f| < B$ .

### 9.3 Densità spettrale delle componenti analogiche di processi

Quello che ancora manca prima di passare al capitolo successivo è valutare  $\mathcal{P}_{x_c}(f)$  e  $\mathcal{P}_{x_s}(f)$  nei termini della densità di potenza del processo modulato  $\mathcal{P}_x(f)$ , estendendo inoltre la trattazione al caso dei processi ergodici. Occorre quindi procedere seguendo le indicazioni del

<sup>28</sup>Approfittiamo dell'occasione per notare che, pur potendo scrivere  $\underline{X}(f) = X_c(f) + jX_s(f)$ , non è assolutamente lecito dire che  $\Re \{ \underline{X}(f) \} = X_c(f)$  e  $\Im \{ \underline{X}(f) \} = X_s(f)$ ; infatti sia  $X_c(f)$  che  $X_s(f)$  possono a loro volta essere complessi (mentre  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  sono necessariamente reali).

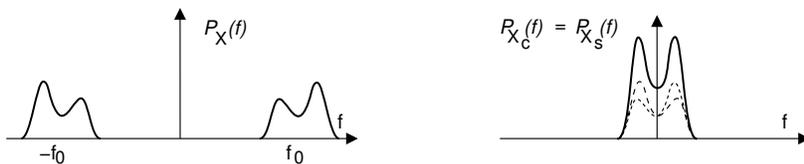


Figura 9.3: Segnale modulato e densità di potenza delle componenti analogiche di b.f.

teorema di Wiener, e trasformare le relative funzioni di autocorrelazione  $\mathcal{R}_{x_c}(\tau)$  e  $\mathcal{R}_{x_s}(\tau)$ ; una buona dose di calcoli in merito sono svolti al § 9.4.4, dove si ottiene che

$$\mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

Applicando a questa la formula di Eulero per seno e coseno lo sviluppo prosegue come

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau) &= \mathcal{R}_x(\tau) \frac{e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}}{2} + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \frac{e^{j\omega_0\tau} - e^{-j\omega_0\tau}}{2j} = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathcal{R}_x(\tau) - j\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \right] e^{j\omega_0\tau} + \frac{1}{2} \left[ \mathcal{R}_x(\tau) + j\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \right] e^{-j\omega_0\tau} = \\ &= \mathcal{R}_x^-(\tau) e^{j\omega_0\tau} + \mathcal{R}_x^+(\tau) e^{-j\omega_0\tau} \end{aligned}$$

in cui all'ultimo passaggio si è applicata anche a  $\mathcal{R}_x(\tau)$  la definizione di segnale analitico eq. (9.16) e (9.17). Non resta quindi che eseguire la trasformata di Fourier, per ottenere

$$\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f) = \mathcal{P}_x^-(f - f_0) + \mathcal{P}_x^+(f + f_0) \quad (9.21)$$

e dunque lo spettro di potenza delle componenti analogiche di un processo si ottiene trasladando nell'origine e sovrapponendo (vedi fig. 9.3) le componenti a frequenze positive e negative dello spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  del segnale modulato. Come possiamo osservare  $\mathcal{P}_{x_c}(f)$  e  $\mathcal{P}_{x_s}(f)$  sono entrambe *pari*, in accordo al fatto che  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  sono *reali*.

**Rumore bianco passa banda** Il risultato mostrato merita un ultimo approfondimento per esaminare il caso in cui il processo  $x(t)$  sia di tipo gaussiano, a media nulla, bianco e limitato in banda, ovvero con densità di potenza

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{N_0}{2} [\text{rect}_{2W}(f - f_0) + \text{rect}_{2W}(f + f_0)]$$

In tal caso (sempre al § 9.4.4) si trova che<sup>29</sup>  $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = 0$  e quindi  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  sono incorrelate e, in quanto gaussiane, statisticamente indipendenti. L'applicazione della (9.21) porta dunque a

$$\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f) = \mathcal{P}_x^+(f + f_0) + \mathcal{P}_x^-(f - f_0) = N_0 \text{rect}_{2W}(f)$$

e quindi la potenza (e varianza) di entrambe le c.a. di b.f. è pari a quella del segnale modulato, ovvero

$$\mathcal{P}_{x_c} = \int \mathcal{P}_{x_c}(f) df = \mathcal{P}_{x_s} = 2N_0W = \mathcal{P}_x$$

come rappresentato in fig. 9.4, mentre l'indipendenza statistica tra le c.a. di b.f. comporta che l'involuppo complesso  $\underline{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t)$  ha potenza (e densità di potenza) doppie, ovvero

$$\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 2N_0 \text{rect}_{2W}(f); \quad \mathcal{P}_{\underline{x}} = 2\mathcal{P}_{x_c} = 2\mathcal{P}_{x_s} = 4N_0W$$

<sup>29</sup>In realtà si ottiene  $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = 0$  ogni volta che  $\mathcal{P}_x(f)$  ha simmetria *pari* rispetto ad  $f_0$ .

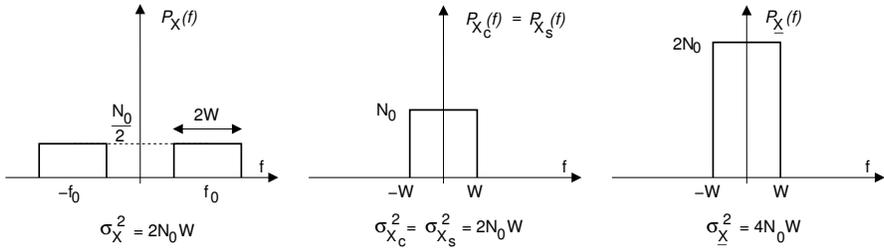


Figura 9.4: Densità di potenza dell'involuppo complesso per un rumore passa-banda

## 9.4 Appendici

### 9.4.1 Filtro di Hilbert

Il *filtro di Hilbert* è caratterizzato da una risposta in frequenza descritta analiticamente come

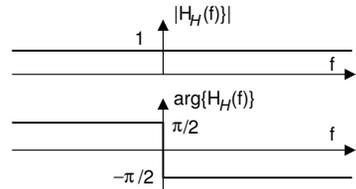
$$H_{\mathcal{H}}(f) = -j \cdot \text{sgn}(f) \tag{9.22}$$

ed il cui andamento di modulo e fase può essere rappresentato nella figura a lato: ricordando infatti che

$$\pm j = e^{\pm j \frac{\pi}{2}} \text{ e che } \text{sgn}(f) = \begin{cases} 1 & f > 0 \\ -1 & f < 0 \end{cases}, \text{ otteniamo}$$

un andamento *costante* del modulo  $|H_{\mathcal{H}}(f)| = 1$ , ed un gradino discendente per la fase

$$\angle H_{\mathcal{H}}(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & f > 0 \\ \frac{\pi}{2} & f < 0 \end{cases}$$



Filtro di Hilbert

Il passaggio di un segnale  $x(t)$  attraverso il filtro di Hilbert produce un secondo segnale  $\hat{x}(t)$  detto *trasformata di Hilbert* del primo, indicata come  $\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ , ed il cui andamento in frequenza ha espressione

$$\hat{X}(f) = \mathcal{F}\{\hat{x}(t)\} = H_{\mathcal{H}}(f) X(f) = -j \cdot \text{sgn}(f) \cdot X(f)$$

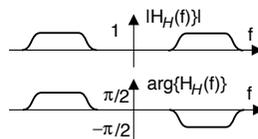
ossia differisce da  $X(f)$  per uno sfasamento di  $\mp \frac{\pi}{2}$  per frequenze rispettivamente positive o negative. Per la trasformata di Hilbert sussistono le proprietà riportate in nota<sup>30</sup>.

**Realizzazione del filtro di Hilbert** Sintetizzare un filtro che consegua esattamente la risposta in frequenza descritta dalla (9.22) è un compito pressoché impossibile, a causa della brusca transizione della fase in corrispondenza di  $f = 0$ .

<sup>30</sup>Per un approfondimento, vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert\\_transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_transform), di cui accenniamo brevemente solamente alcuni risultati:

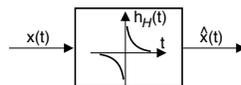
- $\mathcal{H}\{x(t) = x_0\} = 0$ : una costante ha trasformata di Hilbert nulla, e la trasformata di Hilbert è definita a meno di una costante. Il valore medio di  $x(t)$  non si ripercuote su  $\hat{x}(t)$ ;
- $\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\} = \hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$ : infatti una rotazione di fase pari a  $\pi$  radianti corrisponde ad una inversione di segno;
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \hat{x}(t) dt = 0$ : ortogonalità tra un segnale e la sua trasformata di Hilbert;
- $\mathcal{H}\{x(t) * h(t)\} = \hat{x}(t) * \hat{h}(t) = x(t) * \hat{\hat{h}}(t)$ : la trasformata di Hilbert di una convoluzione (cioè dell'uscita di un filtro) è la convoluzione tra un operando trasformato e l'altro no.

In realtà, il filtro di Hilbert si usa principalmente per segnali modulati, che non presentano componenti spettrali a frequenze prossime allo zero. Pertanto, lo stesso scopo può essere svolto da un diverso filtro  $H_{\mathcal{H}}(f)$ , con andamento più dolce della fase, e che presenti gli stessi valori nominali del filtro di Hilbert solamente per le frequenze comprese nella banda di segnale.



**Risposta impulsiva del filtro di Hilbert** L'antitrasformata della (9.22) risulta essere pari a

$$h_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{\mathcal{H}}(f)\} = \frac{1}{\pi t} \quad (9.23)$$



e ciò consente di scrivere la trasformata di Hilbert nella forma di un integrale di convoluzione:  $\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = x(t) * \frac{1}{\pi t}$ . Riutilizzando infatti un risultato trovato al § 3.8.5 siamo già arrivati a mostrare che

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{j}{2\pi f}\right\} = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \quad (9.24)$$

e dato che  $H_{\mathcal{H}}(f) = -j \cdot \text{sgn}(f)$ , sembra che ci dovrebbe essere un modo semplice di arrivare a *sistemare le cose*. La (9.24), una volta eliminato il termine  $1/2$ , permette di scrivere  $\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = -\frac{j}{\pi f}$  e dunque

$$\mathcal{F}\{-j \cdot \text{sgn}(t)\} = -\frac{1}{\pi f} \quad (9.25)$$

Applicando ora alla (9.25) la proprietà di dualità (vedi pag. 56, dove si asserisce che se  $G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ , allora  $\mathcal{F}\{G(t)\} = g(-f)$ ) otteniamo  $\mathcal{F}\{-\frac{1}{\pi t}\} = -j \cdot \text{sgn}(-f) = j \cdot \text{sgn}(f)$ , e dunque in definitiva

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_{\mathcal{H}}(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{-j \cdot \text{sgn}(f)\} = \frac{1}{\pi t}$$

#### 9.4.2 Trasformata di Hilbert di un segnale modulato

Si intende dimostrare che se  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  sono limitate in banda  $\pm W$  con  $W < f_0$ , allora risulta

$$\begin{cases} \mathcal{H}\{x_c(t) \cos \omega_0 t\} = x_c(t) \sin \omega_0 t \\ \mathcal{H}\{x_s(t) \sin \omega_0 t\} = -x_s(t) \cos \omega_0 t \end{cases}$$

e dunque dalla (9.1) si ottiene

$$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t\} = x_c(t) \sin \omega_0 t + x_s(t) \cos \omega_0 t$$

e quindi  $\hat{x}(t) = \Im\{\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t}\}$  come espresso dall'eq. (9.10). Limitiamoci a dimostrare che

$$\mathcal{H}\{x_c(t) \cos 2\pi f_0 t\} = x_c(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (9.26)$$

Iniziamo con il considerare che dopo aver  $\mathcal{F}$ -trasformato la (9.26), possiamo evidenziarne le componenti a frequenza positiva e negativa  $X_c(f - f_0)$  e  $X_c(f + f_0)$

$$x_c(t) \cos 2\pi f_0 t = \frac{x_c(t)}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} [X_c(f - f_0) + X_c(f + f_0)] \quad (9.27)$$

che, se  $x_c(t)$  ha una banda minore di  $f_0$ , possono essere facilmente  $\mathcal{H}$ -trasformate semplicemente aggiungendo lo sfasamento introdotto a frequenze positive e negative dal filtro di Hilbert

$$\frac{1}{2} [X_c(f - f_0) + X_c(f + f_0)] \xrightarrow{\mathcal{H}} \frac{1}{2} [X_c(f - f_0) e^{-j\frac{\pi}{2}} + X_c(f + f_0) e^{j\frac{\pi}{2}}]$$

e quindi  $\mathcal{F}$ -antitrasformando questa espressione si ottiene la  $\mathcal{H}$ -trasformata del segnale (9.26)

$$\frac{1}{2} [X_c(f - f_0) e^{-j\frac{\pi}{2}} + X_c(f + f_0) e^{j\frac{\pi}{2}}] \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{x_c(t)}{2} (e^{j2\pi f_0 t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{j\frac{\pi}{2}})$$

risultato che, anche se non ancora nella forma anticipata, poteva comunque essere ottenuto anche direttamente a partire dal secondo membro di (9.27), invocando subito la limitazione ad una semibanda di  $x_c(t) e^{\pm j2\pi f_0 t}$ . Per ottenere la (9.26) è ora sufficiente moltiplicare e dividere per  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ , ossia

$$\begin{aligned} \frac{x_c(t)}{2} (e^{j2\pi f_0 t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{j\frac{\pi}{2}}) \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{e^{j\frac{\pi}{2}}} &= \frac{x_c(t)}{2j} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{j\pi}) = \\ &= \frac{x_c(t)}{2j} (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) = x_c(t) \sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

in quanto  $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ , e  $e^{j\pi} = -1$ .

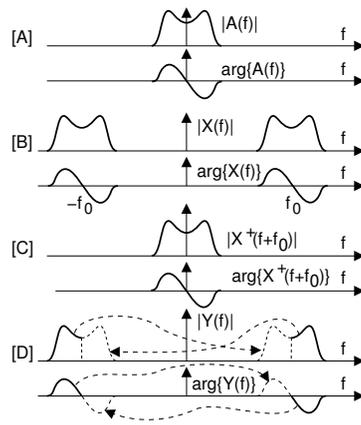
### 9.4.3 Trasmissione a banda laterale unica

Con riferimento alla figura alla pagina seguente, consideriamo un segnale  $a(t)$  reale e limitato in banda, con  $A(f) = A^*(-f)$  (grafico [A]). In virtù delle proprietà di simmetria coniugata per segnali reali, la conoscenza del solo contenuto a frequenze positive  $f > 0$ , ovvero di  $A^+(f) = A(f) \text{rect}_W(f - \frac{W}{2})$ , è sufficiente a definire  $a(t)$  in modo completo. Se definiamo il segnale modulato  $x(t) = a(t) \cos \omega_0 t$ , anch'esso reale, otteniamo che  $X(f)$  [B], oltre ad essere a simmetria coniugata rispetto all'origine, ha simmetria coniugata anche rispetto ad  $f_0$ :  $X^+(f_0 + \alpha) = \{X^+(f_0 - \alpha)\}^*$  [C].

Questo risultato mostra come sia *teoricamente* possibile (con una fotocopiatrice ed un paio di forbici!) produrre un segnale  $Y(f)$  eliminando da  $X(f)$  tutta la banda  $|f| < f_0$  [D], e quindi da quel che resta, ri-ottenere il segnale  $X(f)$  a partire da un  $Y(f)$ . La ricostruzione di  $X(f)$  avviene infatti (freccie tratteggiate) spostando le copie duplicate di  $Y^+(f)$  e  $Y^-(f)$  come indicato dalle frecce.

Una volta verificata la *correttezza ipotetica* di questo procedimento che ci consente di ricevere per intero  $X(f)$  trasmettendone solo metà (cioè  $Y(f)$ ), osserviamo che anche  $Y(f)$  è a simmetria coniugata rispetto a zero (ossia  $Y(f) = Y^*(-f)$ ), e quindi la sua antitrasformata  $y(t)$  è *reale*, e dunque può essere realmente trasmesso.

A parte il “dettaglio” di come ricostruire “veramente”  $X(f)$  a partire da  $Y(f)$ , ci chiediamo: esiste una formula per ottenere  $y(t)$  in modo *diretto* a partire da  $a(t)$ ? La risposta è positiva, e si trova al § 10.1.2.



### 9.4.4 Processi passa banda

Svolgiamo ora l'approfondimento dei passaggi che portano ai risultati discussi al § 9.3, ovvero l'espressione della densità di potenza  $\mathcal{P}_{x_c}(f)$  e  $\mathcal{P}_{x_s}(f)$  in funzione di  $\mathcal{P}_x(f)$  eq. (9.21), svolgendo i calcoli in modo da tenere in conto anche il caso dei processi aleatori: pertanto, occorrerà prima ottenere un risultato relativo alle rispettive funzioni di autocorrelazione  $\mathcal{R}_{x_c}(\tau)$  e  $\mathcal{R}_{x_s}(\tau)$ , e quindi effettuare la trasformata di Fourier come prescritto dal teorema di Wiener.

Osserviamo innanzitutto che quando un processo aleatorio presenta una  $\mathcal{P}_x(f)$  limitata in banda attorno ad  $f_0$ , la relativa funzione di autocorrelazione  $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_x(f)\}$  può essere espressa nei termini delle componenti analogiche di bassa frequenza della funzione di autocorrelazione stessa:

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_c(\tau) \cos \omega_0 \tau - \mathcal{R}_s(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

D'altra parte, una qualunque realizzazione di un processo  $x(t)$  limitato in banda attorno ad  $f_0$  ammette la rappresentazione  $x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t$ , ma data la natura aleatoria di  $x(t)$ , gli stessi  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  sono realizzazioni di processi, in generale statisticamente *dipendenti*, in quanto la loro combinazione deve produrre una  $x(t)$  che appartiene al processo originario. Si pensi ad esempio al segnale  $x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t$ , in cui  $x_c(t)$  è un processo stazionario ed ergodico: come già osservato al § 6.5.3,  $x(t)$  è solamente *ciclostazionario*<sup>31</sup>.

Come prima cosa, proviamo a calcolare la funzione di autocorrelazione dell'involuppo complesso di una generica realizzazione, che per l'ergodicità corrisponde al relativo momento misto:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\underline{x}}(\tau) &= E\{\underline{x}^*(\tau) \underline{x}(t+\tau)\} = \\ &= E\{[x_c(\tau) - jx_s(\tau)][x_c(t+\tau) + jx_s(t+\tau)]\} = \\ &= E\{x_c(\tau)x_c(t+\tau) + x_s(\tau)x_s(t+\tau) + \\ &\quad + j[x_c(\tau)x_s(t+\tau) - x_s(\tau)x_c(t+\tau)]\} = \\ &= \mathcal{R}_{x_c}(\tau) + \mathcal{R}_{x_s}(\tau) + j[\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) - \mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau)] \end{aligned} \quad (9.28)$$

Queste quattro quantità sono calcolate al § 9.4.5, e nel caso in cui  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  siano stazionari ed ergodici, il risultato finale fornisce le espressioni

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{x_c}(\tau) &= \mathcal{R}_{x_s}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \sin \omega_0 \tau \\ \mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) &= -\mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau) = \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cos \omega_0 \tau - \mathcal{R}_x(\tau) \sin \omega_0 \tau \end{cases} \quad (9.29)$$

in cui  $\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) = \mathcal{H}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$  è la trasformata di Hilbert di  $\mathcal{R}_x(\tau)$ . Osserviamo quindi come, sostituendo (9.29) in (9.28), risulti

$$\mathcal{R}_{\underline{x}}(\tau) = 2[\mathcal{R}_{x_c}(\tau) + j\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)] \quad (9.30)$$

e pertanto otteniamo

$$\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{\underline{x}}(\tau)\} = 2[\mathcal{P}_{x_c}(f) + j\mathcal{P}_{x_c x_s}(f)] \quad (9.31)$$

in cui  $\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f)$  sono reali pari in quanto  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  sono reali. Prima di giungere alle conclusioni espresse al § 9.4.4.1 ed anticipate al § 9.3, prendiamoci *il lusso* di sviluppare una serie di considerazioni basate sui risultati fin qui ottenuti:

<sup>31</sup>Come illustrato al § 5.3.7, il processo risultante diviene ergodico qualora al coseno sia aggiunta una fase aleatoria uniformemente distribuita.

1. la (9.31) sembra indicare che  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$  possa assumere valori complessi, perdendo il senso fisico di potenza, ma non è così. Osserviamo infatti che  $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)$  è un segnale reale dispari<sup>32</sup>: pertanto  $\mathcal{P}_{x_c x_s}(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)\}$  è completamente immaginario, e dunque  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$  è reale;
2. se risulta  $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = 0$  per ogni  $\tau$ , allora la potenza mutua  $\mathcal{P}_{x_c x_s}(f)$  si annulla, e la (9.31) fornisce  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 2\mathcal{P}_{x_c}(f)$  reale pari; la presenza di  $\mathcal{P}_{x_c x_s}(f) \neq 0$  può invece rendere  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$  asimmetrico, permettendo di ottenere ancora  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\mathcal{P}_x^+(f + f_0)$  come espresso dalla (9.20);
3. invertendo i due punti precedenti osserviamo che, se  $\mathcal{P}_x(f)$  ha simmetria pari rispetto ad  $f_0$ , allora  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$  è pari, e quindi deve risultare  $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = 0$ , ovvero le c.a. di b.f.  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  risultano mutuamente incorrelate; se inoltre queste sono congiuntamente gaussiane, allora risultano anche statisticamente indipendenti;
4. se  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  sono a media nulla, la potenza  $\mathcal{P}_{x_c}$  (uguale a  $\mathcal{P}_{x_s}$  in virtù della prima delle (9.29)) si calcola come  $\mathcal{R}_{x_c}(0) = \mathcal{R}_{x_s}(0)$ . Dato che  $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = -\mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau)$  è dispari (punto 1), deve risultare che  $\mathcal{R}_{x_c x_s}(0) = 0$ ; in questo caso la (9.30) fornisce  $\mathcal{R}_{\underline{x}}(0) = 2\mathcal{R}_{x_c}(0) = 2\mathcal{R}_{x_s}(0)$ , e dunque si ottiene

$$\mathcal{P}_{\underline{x}} = \sigma_{\underline{x}}^2 = \mathcal{R}_{\underline{x}}(0) = 2\mathcal{R}_{x_c}(0) = 2\mathcal{R}_{x_s}(0) = 2\sigma_{x_c}^2 = 2\sigma_{x_s}^2 = 2\mathcal{P}_{x_c} = 2\mathcal{P}_{x_s}$$

In definitiva, le componenti analogiche di bassa frequenza hanno entrambe potenza pari a metà di quella dell'involuppo complesso;

5. l'eq. (9.20) asserisce che  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\mathcal{P}_{x^+}(f + f_0)$ , ed in modo simile si può trovare che  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\mathcal{P}_{x^-}(f - f_0)$ , e quindi  $\mathcal{P}_{x^+} = \mathcal{P}_{x^-} = \frac{1}{4}\mathcal{P}_{\underline{x}}$ . Dato poi che  $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_{x^+} + \mathcal{P}_{x^-}$  in quanto  $x^+(t)$  e  $x^-(t)$  sono ortogonali perché definiti su bande disgiunte, in base al punto 4 si ottiene

$$\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_{x^+} + \mathcal{P}_{x^-} = \frac{1}{4}[\mathcal{P}_{\underline{x}} + \mathcal{P}_{\underline{x}}] = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{\underline{x}} = \mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_{x_s}$$

e dunque  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  hanno (ciascuno) potenza pari a quella di  $x(t)$ , ovvero  $\mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_{x_s} = \mathcal{P}_x$ ;

6. se consideriamo  $\hat{x}(t)$  l'uscita del filtro di Hilbert per il quale risulta  $|H_H(f)|^2 = 1$ , si ottiene che  $\mathcal{P}_{\hat{x}}(f) = |H_H(f)|^2 \mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_x(f)$ , e dunque antitrasformando  $\mathcal{R}_{\hat{x}}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau)$ ;
7. è possibile mostrare che, esprimendo l'autocorrelazione di  $x(t)$  in termini delle sue c.a. di b.f.  $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_c(\tau) \cos \omega_0 \tau - \mathcal{R}_s(\tau) \sin \omega_0 \tau$ , risulta

$$\begin{cases} \mathcal{R}_c(\tau) = \mathcal{R}_{x_c}(\tau) \\ \mathcal{R}_s(\tau) = -\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) \end{cases}$$

8. la prima delle (9.29) ci dice che  $\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f)$  in quanto  $\mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau)$ , e che risulta  $\mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \sin \omega_0 \tau$ ; applicando ora la formula di Eulero per seno e coseno si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{x_c}(\tau) &= \mathcal{R}_{x_s}(\tau) = \\ &= \mathcal{R}_x(\tau) \frac{e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}}{2} + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \frac{e^{j\omega_0 \tau} - e^{-j\omega_0 \tau}}{2j} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathcal{R}_x(\tau) - j\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \right] e^{j\omega_0 \tau} + \frac{1}{2} \left[ \mathcal{R}_x(\tau) + j\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \right] e^{-j\omega_0 \tau} \\ &= \mathcal{R}_x^-(\tau) e^{j\omega_0 \tau} + \mathcal{R}_x^+(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} \end{aligned}$$

<sup>32</sup>Infatti (eq. (9.29))  $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cos \omega_0 \tau - \mathcal{R}_x(\tau) \sin \omega_0 \tau$ , in cui  $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_x(f)\}$  è pari e  $\sin \omega_0 \tau$  è dispari, mentre  $\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau)$  è dispari (non è stato dimostrato, ma vale per le trasformate di Hilbert di segnali pari) e  $\cos \omega_0 \tau$  è pari. Inoltre, essendo  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  reali,  $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)$  è reale.

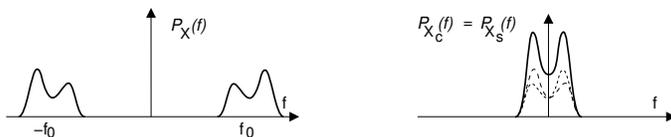


Figura 9.5: Processo passa banda e densità di potenza delle c.a. di b.f.

infatti i termini tra parentesi quadre corrispondono alla definizione di componenti a frequenze positive e negative ottenute tramite trasformata di Hilbert, per come espressa dalla (9.16).

#### 9.4.4.1 Conclusioni

Al punto 8) del precedente elenco abbiamo mostrato che

$$\mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau) = \mathcal{R}_x^-(\tau) e^{j\omega_0\tau} + \mathcal{R}_x^+(\tau) e^{-j\omega_0\tau}$$

e quindi

$$\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f) = \mathcal{P}_x^-(f - f_0) + \mathcal{P}_x^+(f + f_0)$$

e dunque lo spettro di densità di potenza delle componenti analogiche di un processo si ottiene traslando nell'origine e sovrapponendo (vedi fig. 9.5) le componenti a frequenze positive e negative dello spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  del segnale modulato. Dunque  $\mathcal{P}_{x_c}(f)$  e  $\mathcal{P}_{x_s}(f)$  sono entrambe pari, come deve essere per  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  reali.

#### 9.4.4.2 Processo gaussiano bianco limitato in banda

Se  $x(t)$  è un processo gaussiano stazionario ergodico, bianco ed a media nulla, con densità spettrale  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{N_0}{2}$  limitata in banda  $\pm W$  attorno ad  $f_0$ , allora (vedi fig. 9.6):

- le relative c.a. di b.f.  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  sono processi congiuntamente gaussiani, stazionari, ergodici, statisticamente indipendenti ed a media nulla, con potenza  $\mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_{x_s} = \mathcal{P}_x = 2N_0W$ , pari alle varianze  $\sigma_x^2 = \sigma_{x_c}^2 = \sigma_{x_s}^2$ . Le rispettive densità di potenza valgono:

$$\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f) = \mathcal{P}_x^+(f + f_0) + \mathcal{P}_x^-(f - f_0) = N_0 \text{rect}_{2W}(f) \quad (9.32)$$

- il suo involuppo complesso  $\underline{x}(t)$  relativo ad  $f_0$  ha potenza (e densità di potenza) doppie:

$$\mathcal{P}_{\underline{x}} = 2\mathcal{P}_{x_c} = 4N_0W; \quad \mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 2N_0 \text{rect}_{2W}(f) \quad (9.33)$$

Infatti, la simmetria pari di  $\mathcal{P}_x(f)$  attorno ad  $f_0$  rende  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  incorrelate, come mostrato al punto 3) di pag. 267: pertanto  $\mathcal{P}_{x_c x_s}(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)\} = 0$  (punto 2) e dunque la (9.31) si semplifica nella (9.33).

#### 9.4.5 Autocorrelazione di processi passa-banda

Svolgiamo qui il calcolo relativo al valore di  $\mathcal{R}_{x_c}(\tau)$ ,  $\mathcal{R}_{x_s}(\tau)$ ,  $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)$  e  $\mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau)$ . Ricordando che (pag. 257)  $x_c(t) = x(t) \cos \omega_0 t + \hat{x}(t) \sin \omega_0 t$ , iniziamo a svolgere i calcoli per  $\mathcal{R}_{x_c}(\tau)$ :

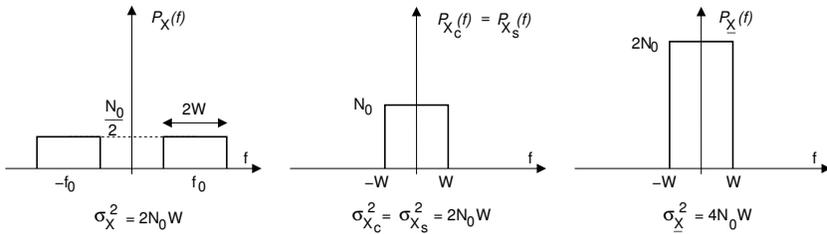


Figura 9.6: Densità di potenza delle c.a. di b.f. per un processo gaussiano bianco e limitato e limitato in banda

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{x_c}(\tau) &= E\{x_c(\tau)x_c(t+\tau)\} = \\
 &= E\{[x(t)\cos\omega_0t + \hat{x}(t)\sin\omega_0t] \cdot \\
 &\quad \cdot [x(t+\tau)\cos\omega_0(t+\tau) + \hat{x}(t+\tau)\sin\omega_0(t+\tau)]\} = \\
 &= E\{x(t)x(t+\tau)\} \cdot \cos\omega_0t \cdot \cos\omega_0(t+\tau) + \\
 &+ E\{x(t)\hat{x}(t+\tau)\} \cdot \cos\omega_0t \cdot \sin\omega_0(t+\tau) + \\
 &+ E\{\hat{x}(t)x(t+\tau)\} \cdot \sin\omega_0t \cdot \cos\omega_0(t+\tau) + \\
 &+ E\{\hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)\} \cdot \sin\omega_0t \cdot \sin\omega_0(t+\tau)
 \end{aligned}$$

Valutiamo quindi i quattro valori attesi singolarmente, procedendo con il calcolo di medie temporali in virtù dell'ergodicità, e indicando con  $\bar{x}(t)$  la media temporale di  $x(t)$ , ossia  $\bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$ :

$$\begin{aligned}
 E\{x(t)x(t+\tau)\} &= \overline{x(t)x(t+\tau)} = \mathcal{R}_x(\tau) \\
 E\{x(t)\hat{x}(t+\tau)\} &= \overline{x(t)\hat{x}(t+\tau)} = \mathcal{R}_{x\hat{x}}(\tau) = x(-\tau) * \hat{x}(\tau) = \\
 &= x(-\tau) * x(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = \mathcal{R}_x(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = \hat{\mathcal{R}}_x(\tau) \\
 E\{\hat{x}(t)x(t+\tau)\} &= \overline{\hat{x}(t)x(t+\tau)} = \mathcal{R}_{\hat{x}x}(\tau) = \hat{x}(-\tau) * x(\tau) = \\
 &= x(-\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) * x(\tau) = x(-\tau) * x(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) = \\
 &= \mathcal{R}_x(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) = -\hat{\mathcal{R}}_x(\tau) \\
 E\{\hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)\} &= \overline{\hat{x}(t)\hat{x}(t+\tau)} = \mathcal{R}_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = \hat{x}(-\tau) * \hat{x}(\tau) = \\
 &= x(-\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) * x(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = \\
 &= x(-\tau) * x(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) * \frac{1}{\pi\tau} = -\hat{\hat{\mathcal{R}}}_x(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau)
 \end{aligned}$$

Sostituendo le relazioni ora trovate nella espressione di  $\mathcal{R}_{x_c}(\tau)$ , si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{x_c}(\tau) &= \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau) + \\
&- \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) + \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau) = \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{R}_x(\tau) [\cos \omega_0(-\tau) + \cos \omega_0(2t + \tau)] + \\
&+ \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) [\sin \omega_0(\tau) + \sin \omega_0(2t + \tau)] + \\
&- \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) [\sin \omega_0(-\tau) + \sin \omega_0(2t + \tau)] + \\
&+ \frac{1}{2} \mathcal{R}_x(\tau) [\cos \omega_0(-\tau) - \cos \omega_0(2t + \tau)] = \\
&= \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0 \tau + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0 \tau
\end{aligned}$$

che costituisce il risultato anticipato alla (9.29). Per l'espansione dei termini trigonometrici, si è fatto uso delle relazioni:

$$\begin{aligned}
\cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\
\sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\
\sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]
\end{aligned}$$

I calcoli relativi al valore di  $\mathcal{R}_{x_s}(\tau)$  sono del tutto simili, ed il loro svolgimento porta al risultato  $\mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau)$ .

Per quanto riguarda  $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)$ , applichiamo la relazione  $x_s(t) = \widehat{x}(t) \cos \omega_0 t - x(t) \sin \omega_0 t$ , per ottenere:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) &= E \{x_c(\tau) x_s(t + \tau)\} = \\
&= E \{[x(t) \cos \omega_0 t + \widehat{x}(t) \sin \omega_0 t] \cdot \\
&\cdot [\widehat{x}(t + \tau) \cos \omega_0(t + \tau) - x(t + \tau) \sin \omega_0(t + \tau)]\} = \\
&= E \{x(t) \widehat{x}(t + \tau)\} \cdot \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) + \\
&- E \{x(t) x(t + \tau)\} \cdot \cos \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau) + \\
&+ E \{\widehat{x}(t) \widehat{x}(t + \tau)\} \cdot \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) + \\
&- E \{\widehat{x}(t) x(t + \tau)\} \cdot \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau)
\end{aligned}$$

I valori attesi che vediamo comparire sono stati già calcolati, e quindi possiamo scrivere direttamente lo sviluppo dei calcoli, in cui si applicano nuovamente le identità trigonometriche note:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) &= \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) - \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau) + \\
&+ \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) - \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau) = \\
&= \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) [\cos \omega_0(-\tau) + \cos \omega_0(2t + \tau)] + \\
&- \frac{1}{2} \mathcal{R}_x(\tau) [\sin \omega_0(\tau) + \sin \omega_0(2t + \tau)] + \\
&- \frac{1}{2} \mathcal{R}_x(\tau) [\sin \omega_0(-\tau) + \sin \omega_0(2t + \tau)] + \\
&- \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) [\cos \omega_0(-\tau) - \cos \omega_0(2t + \tau)] = \\
&= -\mathcal{R}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0(2t + \tau) + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0(2t + \tau)
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda gli argomenti delle funzioni trigonometriche, il valore di  $t$  è lasciato non specificato. Pertanto, visto che il processo è stazionario per ipotesi, può sensatamente essere posto a zero, e dunque ottenere il risultato previsto alla (9.29).

I calcoli relativi al valore di  $\mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau)$  sono del tutto simili, ed il loro svolgimento porta al risultato  $\mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau) = -\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)$ .

## Modulazione (e ritorno) di segnali analogici

**A**NALIZZIAMO ora le tecniche adottate per modulare (in ampiezza o angolarmente) una portante con l'informazione di un messaggio informativo di natura analogica<sup>1</sup>, studiando allo stesso tempo le caratteristiche spettrali del segnale ottenuto. Sono quindi discussi i diversi approcci di demodulazione, i circuiti che li realizzano, e l'influenza di eventuali inaccurately. Lo studio di come le diverse scelte condizionino le prestazioni del ricevitore in presenza di rumore sono affrontate al cap. 11.

### 10.1 Modulazione di ampiezza - AM

Al § 9.2 si è mostrato come un segnale modulato  $x(t)$  possa essere rappresentato nei termini delle sue *componenti analogiche di bassa frequenza*  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$ : nel caso in cui queste rappresentino due segnali indipendenti, la loro trasmissione congiunta sulla medesima portante realizza un segnale *QAM* (*quadrature amplitude modulation*). Al contrario, nei casi più tipici  $x_c$  ed  $x_s$  non sono qualsiasi, ma sussiste tra loro una relazione, in base alla quale si distinguono le seguenti classi di segnali *modulati in ampiezza*:

- *banda laterale doppia*: la componente  $x_s(t)$  è nulla, cosicché  $\mathcal{P}_x(f)$  è simmetrico rispetto ad  $f_0$ . Si tratta del caso introdotto al § 3.5.2, ora indicato con gli acronimi BLD o DSB (*double side band*).
- *banda laterale unica*: (*BLU* o *SSB* - *single side band*) sono presenti sia  $x_c(t)$  che  $x_s(t)$ , e risulta  $x_s(t) = \hat{x}_c(t)$ . Questo fa sì che (come vedremo) la densità  $\mathcal{P}_x(f)$  del segnale modulato giaccia tutta all'*esterno* (od all'*interno*) di  $\pm f_0$
- *banda laterale ridotta*: (*BLR* o *VSB* - *vestigial side band*<sup>2</sup>) è una via di mezzo tra i due casi precedenti, e cioè  $\mathcal{P}_x(f)$  non è simmetrica rispetto ad  $f_0$ , e giace comunque da ambo i lati, ma occupa una banda minore del caso BLD.

Per completare la classificazione, per ognuna delle possibilità precedenti può verificarsi uno tra tre sottocasi, che si riferiscono alla presenza o meno, in  $\mathcal{P}_x(f)$ , di una concentrazione di potenza (ossia un impulso) a frequenza  $f_0$ , corrispondente alla trasmissione di potenza non associata

<sup>1</sup>Per i segnali numerici si usano tecniche peculiari, esposte al capitolo 14.

<sup>2</sup>Come sarà più chiaro nel seguito, l'acronimo *vSB* simboleggia che, anziché sopprimere completamente una delle due bande laterali, se ne mantengono *delle vestigia*.

al messaggio  $m(t)$ , ma solamente alla portante, e quindi priva di contenuto informativo ai fini della trasmissione. I tre sottocasi citati sono indicati come:

- portante intera (*PI o LC - large carrier*);
- portante soppressa (*PS o SC - suppressed carrier*);
- portante parzialmente soppressa (*PPS*).

### 10.1.1 Banda laterale doppia - BLD

In questo caso l'involuppo complesso  $\underline{x}(t)$  del segnale modulato presenta *una sola* componente analogica di bassa frequenza, che *per convenzione*<sup>3</sup> è posta pari a  $x_c(t)$ , la cui dipendenza dal segnale modulante  $m(t)$  è espressa nella forma generale  $x_c(t) = a_p + k_a m(t)$ , e quindi

$$x_{BLD}(t) = (a_p + k_a m(t)) \cos \omega_0 t \quad (10.1)$$

Pertanto l'involuppo complesso è *reale* e vale  $\underline{x}(t) = a_p + k_a m(t)$ ; considerando poi  $m(t)$  a media nulla, la relativa densità di potenza ha valore

$$\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = a_p^2 \delta(f) + k_a^2 \mathcal{P}_m(f)$$

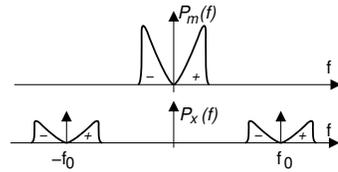
Ricordando ora che  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{1}{4} (\mathcal{P}_{\underline{x}}(f - f_0) + \mathcal{P}_{\underline{x}}(-f - f_0))$  (eq. (9.19)) e che per  $\underline{x}(t)$  reale la relativa densità di potenza è pari ovvero  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = \mathcal{P}_{\underline{x}}(-f)$ , la densità di potenza del segnale modulato risulta pari a

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{a_p^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \frac{k_a^2}{4} [\mathcal{P}_m(f - f_0) + \mathcal{P}_m(f + f_0)] \quad (10.2)$$

La potenza *totale* di  $x(t)$  vale perciò

$$\mathcal{P}_x = \int \mathcal{P}_x(f) df = \frac{a_p^2}{2} + \frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m \quad (10.3)$$

mentre la corrispondente densità spettrale è raffigurata a lato, dove si è posto  $k_a = 1$ .



#### 10.1.1.1 Portante soppressa - PS

Osserviamo che nell'espressione (10.3) della  $\mathcal{P}_x$  per un segnale AM-BLD il termine  $\frac{a_p^2}{2}$  rappresenta la potenza della portante *non modulata*<sup>4</sup>, concentrata per metà ad  $f_0$  e per metà a  $-f_0$ . Evidentemente, ponendo  $a_p = 0$  nella (10.1) tale componente *svanisce*, dando luogo al sottocaso di *portante soppressa*, a cui corrisponde una densità di potenza pari a

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{k_a^2}{4} [\mathcal{P}_m(f - f_0) + \mathcal{P}_m(f + f_0)]$$

La demodulazione di AM-BLD-PS si effettua in modo coerente (§ 10.2.1), dopo aver ricostruito la portante per quadratura (§ 10.2.2), oppure mediante demodulatore ad involuppo (§ 10.2.5), dopo aver elaborato la portante ricostruita come spiegato al § 10.1.1.3.

<sup>3</sup>Considerando che la portante del segnale *ricevuto* può avere una fase arbitraria, e che con una traslazione temporale ci si può sempre ricondurre ad usare una funzione  $\cos \omega_0 t$ , tale convenzione individua il caso più generale di un segnale modulato del tipo  $x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$  con  $\varphi$  costante. Infatti, introducendo un ritardo  $\tau = \frac{\varphi}{2\pi f_0}$  si ottiene  $x(t - \tau) = a(t - \tau) \cos(2\pi f_0(t - \tau) + \varphi) = a(t - \tau) \cos(2\pi f_0 t)$ .

D'altra parte, risultando  $a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) = a(t) (\cos(\omega_0 t) \cos \varphi - \sin(\omega_0 t) \sin \varphi)$  si ottiene che la presenza di una fase incognita  $\varphi$  determina la ricezione di un segnale modulato le cui c.a. di b.f. risultano pari a  $x_c(t) = a(t) \cos \varphi$  e  $x_s(t) = a(t) \sin \varphi$ , e che quindi variano *in simultanea*. Pertanto, in base ai risultati del § 12.1.2.4, il segnale modulato equivale a quello in cui è presente la sola componente in fase  $x_c(t)$ , ma al quale un errore nella fase di demodulazione imprime la rotazione  $\varphi$  del piano dell'involuppo complesso.

<sup>4</sup>Cioè che *non dipende* dal messaggio modulante  $m(t)$ .

### 10.1.1.2 Portante intera - PI

Questo caso si verifica qualora si ponga  $a_p \neq 0$ , con un valore scelto in modo che  $x_c(t)$  sia sempre positiva, e ciò accade se  $a_p \geq k_a \cdot \max\{|m(t)|\}$ , in modo che risulti sempre (vedi fig. 10.1)

$$x_c(t) = a_p + k_a m(t) \geq 0 \quad \text{per } \forall t$$

e quindi la portante modulata non inverte mai la fase, come invece accade per i casi di portante soppressa (o parzialmente).

Un modo equivalente di esprimere questa condizione è  $a_p^2 \geq k_a^2 m^2(t)$  per  $\forall t$ , ed indicando con  $P_I^{Max}$  il massimo valore di  $m^2(t)$  (5), essa può essere soddisfatta qualora  $\left(\frac{a_p}{k_a}\right)^2 > P_I^{Max}$ , permettendo così di dimensionare l'uno rispetto all'altro6.

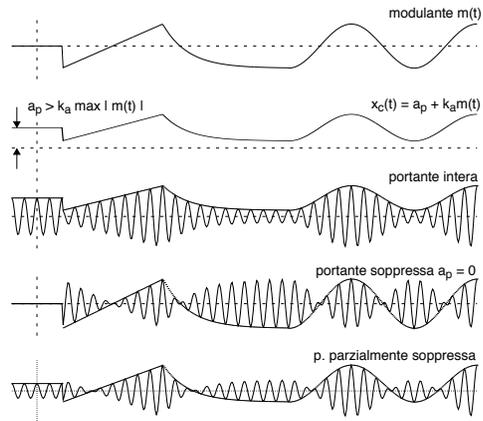


Figura 10.1: Modulazione di ampiezza BLD

**Indice di modulazione per portante intera** Il rapporto

$$I_a = \frac{k_a \cdot \max\{|m(t)|\}}{a_p} \quad (10.4)$$

prende il nome di *indice di modulazione* e nel caso di portante intera assume valori compresi tra zero ed uno, o tra 0 e 100 in termini percentuali. Un indice  $I_a$  del 100% corrisponde allo sfruttamento di *tutta* la dinamica della portante, fatto rilevante ai fini delle considerazioni svolte al § 10.1.1.4. Al diminuire di  $k_a$  risulta  $0 < I_a < 100\%$ , a cui corrisponde una ridotta variazione dell'ampiezza della portante. Per  $k_a = 0$  si ottiene  $I_a = 0$  ed assenza di modulazione, mentre per  $I_a > 100$  ci troviamo in condizioni di *sovramodulazione*, ovvero non più di portante intera, bensì parzialmente soppressa.

La ragione principale dell'utilizzo della portante intera è che in tal caso il processo di decodifica potrebbe non richiedere la conoscenza di  $f_0$ , potendo essere svolto mediante un semplice demodulatore di involuppo, descritto al § 10.2.5.

### 10.1.1.3 Portante parzialmente soppressa - PPS

Se  $a_p$  è inferiore al valore necessario per avere la portante intera, ma non è nullo, si ottiene il caso della portante *parzialmente soppressa*, che ci permette di risparmiare potenza (vedi § 10.1.1.4). Il residuo di portante presente può essere usato per la sua *ri-generazione* al lato ricevente, utilizzando un PLL (§ 10.2.2.2), in modo da *sommarla* al segnale ricevuto, ri-producendo

<sup>5</sup>Il segnale  $\mathcal{P}_I(t) = m^2(t)$  può essere indicato come *potenza istantanea* di  $m(t)$ , e  $P_I^{Max}$  indicato come la sua *potenza di picco*.

<sup>6</sup>Ad esempio, nel caso in cui  $m(t)$  sia un processo con densità di probabilità uniforme tra  $\pm \frac{\Delta}{2}$ , la potenza di picco risulta essere  $\frac{\Delta^2}{4} = 3\sigma_M^2$ , dato che (come mostrato al § 5.2.3) in quel caso risulta  $\sigma_M^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ ; se invece  $m(t) = a \sin 2\pi f_M t$ , allora si ha una potenza di picco  $a^2 = 2\sigma_M^2$  (dato che  $\mathcal{P}_M = \sigma_M^2 = \frac{a^2}{2}$ ). Oppure ancora, se  $m(t)$  è gaussiano la potenza di picco (e dunque  $a_p^2/k_a^2$  per ottenere la portante intera) risulta *infinita*. E cosa accade allora? Si avrà necessariamente una portante ridotta...

così il termine  $a_p \cos \omega_0 t$ . In tal modo ci si riconduce al caso di portante intera, e si può adottare la demodulazione di inviluppo (§10.2.5).

### 10.1.1.4 Efficienza energetica per portante intera e PPS

Nell'espressione della potenza totale  $\mathcal{P}_x = \frac{1}{2} (a_p^2 + k_a^2 \mathcal{P}_m)$  per un generico segnale AM-BLD, notiamo che solo  $\frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m = \mathcal{P}_u$  esprime un segnale utile, mentre  $\frac{a_p^2}{2}$  rappresenta la potenza spesa per la portante, che non trasporta informazione. Pertanto si definisce una *efficienza energetica*

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_x} = \frac{\frac{1}{2} k_a^2 \mathcal{P}_m}{\frac{1}{2} (a_p^2 + k_a^2 \mathcal{P}_m)} = \frac{1}{1 + \frac{a_p^2}{k_a^2 \mathcal{P}_m}}$$

che rappresenta la frazione di potenza trasmessa che è utile ai fini della ricostruzione del messaggio.

**Esempio** Se  $m(t) = \sin 2\pi f_M t$  si ha  $\mathcal{P}_M = 1/2$  e, nel caso di portante intera, deve risultare  $a_p = k_a$  e dunque  $\eta = \frac{1}{1+2} = 0.33$ . Ovvero solo 1/3 della potenza trasmessa è utile al ricevitore!

### 10.1.2 Banda laterale unica - BLU

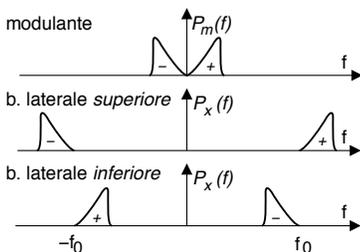
Mentre con la modulazione BLD si determina una occupazione di banda per il segnale modulato  $x(t)$  doppia di quella del segnale modulante, la tecnica BLU impegna invece una banda uguale a quella di  $m(t)$ . Tale risultato è ottenuto realizzando un segnale modulato  $x(t)$  le cui componenti analogiche  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  sono *dipendenti* tra loro, ed in particolare imponendo che  $x_c(t) = m(t)$  e  $x_s(t) = \hat{m}(t)$ : infatti, in tal modo si ottiene

$$\begin{aligned} x_{BLU}(t) &= m(t) \cos \omega_0 t - \hat{m}(t) \sin \omega_0 t = \\ &= m(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} - \hat{m}(t) \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \\ &= e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2} [m(t) + j\hat{m}(t)] + e^{-j\omega_0 t} \frac{1}{2} [m(t) - j\hat{m}(t)] \end{aligned} \quad (10.5)$$

Ricordando ora che  $\frac{1}{2} [m(t) \pm j\hat{m}(t)] = m^\pm(t)$  (vedi eq. (9.16) e (9.17)) corrisponde al contenuto a frequenze positive (e negative) di  $m(t)$ , allora (assumendo  $x(t)$  di energia) la trasformata di Fourier di ambo i membri di (10.5) fornisce

$$\begin{aligned} X_{BLU}(f) &= \delta(f - f_0) * M^+(f) + \delta(f + f_0) * M^-(f) = \\ &= M^+(f - f_0) + M^-(f + f_0) \end{aligned} \quad (10.6)$$

e quindi il segnale modulato AM-BLU è ottenuto a partire dai contenuti a frequenze positive e negative di  $m(t)$ , traslati ai lati della portante  $f_0$ .



Qualora si consideri invece il segnale modulante  $m(t)$  come una realizzazione di un processo ergodico, al § 10.4.2 si dimostra il risultato del tutto simile alla (10.6) mostrato a lato, ovvero

$$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_{m^+}(f - f_0) + \mathcal{P}_{m^-}(f + f_0) \quad (10.7)$$

Il caso fin qui descritto implica la *soppressione* della portante, ed il segnale modulato BLU, considerato nel dominio della frequenza, risulta *esterno* ad

$f_0$ : questa circostanza è indicata con il termine di *banda laterale superiore*. Il caso opposto (*banda laterale inferiore*) si ottiene cambiando segno a  $x_s(t)$ . Scriviamo dunque l'espressione generale come

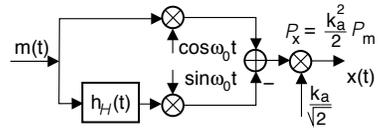
$$x_{BLU}(t) = \frac{k_a}{\sqrt{2}} m(t) \cos \omega_0 t \mp \frac{k_a}{\sqrt{2}} \hat{m}(t) \sin \omega_0 t \quad (10.8)$$

con  $-$  e  $+$  rispettivamente per ottenere un segnale BLU con banda superiore o inferiore. In tal modo il segnale modulato BLU (10.8) ha una potenza  $\mathcal{P}_x = 2 \cdot (\frac{k_a^2}{2} \cdot \mathcal{P}_m \cdot \frac{1}{2}) = \frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$  (vedi § 10.4.3), eguale a quella di un segnale AM-BLD in cui  $x_c(t) = k_a m(t)$  e  $x_s(t) = 0$ .

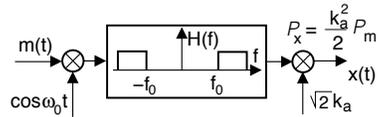
Il vantaggio di questa tecnica di modulazione è subito evidente: consente di risparmiare banda, permettendo la trasmissione di più messaggi in divisione di frequenza FDM, vedi pag. 251.

### 10.1.2.1 Generazione di segnali BLU

Un segnale BLU può essere generato in due diversi modi. Il primo (modulatore di *Hartley*) consiste nell'uso di un *filtro di Hilbert* per calcolare  $\hat{m}(t)$ , da usare assieme ad  $m(t)$  in un modulatore in fase ed in quadratura, introdotto al § 9.2.3. E' subito evidente come si possano presentare problemi se  $m(t)$  ha contenuti energetici prossimi a frequenza zero, che rendono assai stringenti le specifiche per approssimare il filtro di Hilbert, vedi § 9.4.1.



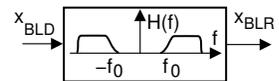
Un problema simile si presenta anche con il secondo metodo<sup>7</sup> di generazione del segnale BLU, in cui un segnale BLD è filtrato passa-banda in modo da eliminare una delle bande laterali: la necessità di trasmettere frequenze di  $m(t)$  prossime allo zero, complica infatti la realizzazione del filtro.



La trasmissione FDM di segnali BLU è stata lungamente usata per moltiplicare in forma analogica svariati canali telefonici (vedi § 9.1.1.2). Pertanto, la limitazione sulla minima frequenza di un canale telefonico a 300 Hz è motivata anche dalla necessità di effettuare modulazioni BLU.

### 10.1.3 Banda laterale ridotta - BLR

Si può verificare il caso in cui non si possa assolutamente fare a meno di componenti di segnale a frequenza molto bassa, come avviene, ad esempio, nel segnale televisivo analogico<sup>8</sup> (vedi § 20.1). Si ricorre allora alla modulazione a *banda laterale ridotta*



(BLR), ottenuta facendo transitare il segnale modulato BLD attraverso uno specifico filtro, che presenta una regione di transizione tra la banda passante e quella attenuata *più dolce* di quella di un passa-banda ideale, e che si estende oltre  $f_0$ . La tecnica è nota anche come modulazione a banda *vestigiale*, nel senso che permangono dei resti (o *vestigia*) della banda soppressa.

<sup>7</sup>In realtà esiste anche un *terzo* metodo, noto come modulatore di *Weaver*, particolarmente adatto ad essere implementato mediante tecniche numeriche. Esso ottiene un segnale con banda laterale *superiore* moltiplicando il segnale di banda base  $m(t)$  (con banda  $W$ ) per l'esponenziale complesso  $e^{-j2\pi \frac{W}{2} t}$  in modo da centrare  $m^+(t)$  attorno alla frequenza zero, ed eliminando  $m^-(t)$  (ora centrato a frequenza  $-W$ ) dal segnale *complesso* ottenuto, mediante un filtro *passa basso* con banda  $\frac{W}{2}$ . Il risultato viene quindi moltiplicato per una singola portante a frequenza  $f_0 + \frac{W}{2}$ , ottenendo il risultato desiderato.

<sup>8</sup>Nel caso ad esempio di ampie zone di immagine uniformi ed a luminosità costante, il segnale è praticamente costante.

	Segnale modulato $x(t)$	Potenza $\mathcal{P}_x$	$k_a$ per $\mathcal{P}_x$ dato
<b>BLD-PS</b>	$k_a m(t) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$	$\sqrt{\frac{2\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_m}}$
<b>BLU-PS</b>	$\frac{k_a}{\sqrt{2}} m(t) \cos(\omega_0 t) - \frac{k_a}{\sqrt{2}} \hat{m}(t) \sin(\omega_0 t)$	$\frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$	$\sqrt{\frac{2\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_m}}$
<b>BLD-PI</b>	$[a_p + k_a m(t)] \cos(\omega_0 t)$ con $a_p \geq k_a \cdot \max\{ m(t) \}$	$\frac{a_p^2}{2} + \frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$	$\sqrt{\frac{2\mathcal{P}_x - a_p^2}{\mathcal{P}_m}}$

Tabella 10.1: Espressione dei segnali AM e relativa potenza

### 10.1.4 Potenza di un segnale AM

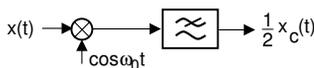
La tabella 10.1 riporta uno schema riassuntivo dell'espressione del segnale per i diversi tipi di modulazione di ampiezza, assieme ai valori  $k_a$  ed  $a_p$  tali da determinare uno specifico valore per la potenza totale  $\mathcal{P}_x$ , di cui ai §§ 10.4.3 e 10.4.3.1 si discute lo schema di calcolo.

## 10.2 Demodulazione di ampiezza

Il messaggio  $m(t)$  può essere recuperato a partire da quello modulato  $x(t)$  mediante il processo di demodulazione, e nel caso AM la demodulazione può avvenire mediante diverse tecniche, denominate *omodina*, di *inviluppo*, di *fase e quadratura*, *eterodina*; ognuna di esse ha il suo campo di applicazione, assieme a pregi e difetti.

### 10.2.1 Demodulazione coerente o omodina

Si tratta del circuito già noto (vedi § 9.2.4) di estrazione della componente in fase  $x_c(t)$  mediante moltiplicazione o *mixing*<sup>9</sup> di  $x(t)$  per una portante di demodulazione  $\cos \omega_0 t$ , e di rimozione delle componenti a frequenza  $2f_0$  mediante un filtro passa-basso, come mostrato in figura. La portante generata localmente deve presentare la stessa fase e frequenza di quella in arrivo<sup>10</sup>, condizione indicata anche con il nome di demodulazione *omodina*, *sincrona*, *coerente*, a *conversione diretta*, o *zero-IF*<sup>11</sup>. Il metodo è applicabile a tutti i tipi di modulazione di ampiezza, in quanto per tutti la componente in fase è direttamente legata al messaggio  $m(t)$ ; nella pratica, nei casi di BLD-PI ed in quelli ad esso riconducibili, può invece essere adottato il demodulatore di inviluppo (§ 10.2.5).



### 10.2.2 Sincronizzazione di portante

Descriviamo ora due metodi utilizzati per generare, presso il demodulatore, una *copia* della portante quanto più possibile *coerente* con la fase di quella ricevuta.

<sup>9</sup>Il dispositivo fisico che effettua la moltiplicazione per una portante viene indicato in letteratura con il termine di *mixer*, il cui significato letterale è *mescolatore*. Dato che lo stesso termine è usato anche per indicare un circuito od apparato in grado di realizzare la *somma* di più segnali, come ad esempio avviene per il mixer *audio* di un sistema di amplificazione sonora, per distinguere i due casi si può parlare di mixer *additivo* oppure *moltiplicativo*, come nel nostro caso. In appendice 10.4.1.1 sono illustrate due tecniche di realizzazione del mixer.

<sup>10</sup>Dato che un qualunque canale presenta un ritardo di propagazione  $\tau$ , la portante del segnale ricevuto sarà nella forma  $\cos 2\pi f_0(t - \tau) = \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) = \cos(2\pi f_0 t - \varphi)$ , ovvero sarà sempre presente una fase  $\varphi = 2\pi f_0 \tau$  *incognita*. Nel caso poi di un collegamento radiomobile, può anche essere presente un errore di frequenza, dovuto all'*effetto doppler*., vedi § 16.3.4.6.

<sup>11</sup>Le ultime due definizioni sono orientate a differenziarsi dal metodo di demodulazione *eterodina*, che in realtà si è affermato *prima* della praticabilità di quello omodina, per i motivi esposti al § 10.2.7.

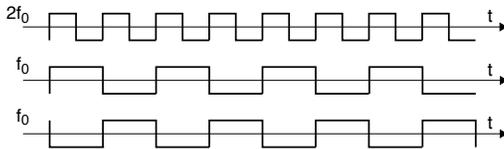
### 10.2.2.1 Metodo della quadratura

Anche se nel segnale ricevuto non vi è traccia della portante, come per BLD-PS, la portante di demodulazione può comunque essere ottenuta mediante lo schema simbolico raffigurato in figura e che come prima cosa eleva al quadrato il segnale modulato ricevuto  $x(t) = m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$  producendo

$$\frac{1}{2} m^2(t) [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)]$$

Il termine di banda base  $\frac{1}{2} m^2(t)$  viene quindi rimosso dal filtro passa alto, mentre il termine  $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$  è convertito in un'onda quadra a frequenza  $2f_0$  mediante il dispositivo non lineare *squadratore*<sup>12</sup>, che produce in uscita la funzione *segno* di ciò che si presenta in ingresso. A sua volta l'onda quadra attraversa un divisore di frequenza<sup>13</sup>, ottenendo così una nuova onda quadra, ma a frequenza  $f_0$ ; come noto (§ 2.5.2) l'onda quadra contiene anche tutte le armoniche dispari, rimosse dal filtro passa basso di uscita, ottenendo così la portante desiderata.

Qualora il divisore sia implementato mediante un multivibratore bistabile che commuta sul *fronte di salita* dell'ingresso, il metodo è affetto da una *ambiguità di segno*, che corrisponde ad un eventuale errore di fase pari a  $\pi$ , come mostrato in figura.



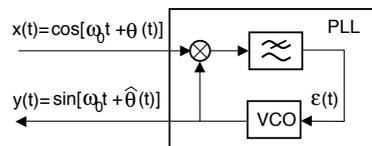
### 10.2.2.2 Phase Locked Loop o PLL

Una seconda tecnica (nota come *circuito ad aggancio di fase*) adotta invece un approccio a *controreazione*, e si basa sull'utilizzo di un dispositivo chiamato *oscillatore controllato in tensione* (VOLTAGE CONTROLLED OSCILLATOR o VCO<sup>14</sup>) il quale genera una sinusoide

$$y(t) = \sin\left(\omega_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) d\tau\right)$$

la cui fase varia nel tempo con l'integrale del segnale di ingresso  $\varepsilon(t)$ <sup>15</sup>.

Lo schema a lato illustra come il ruolo del vco sia quello di generare una portante sfasata di  $\pi/2$  rispetto a quella del segnale  $x(t)$  in arrivo, mentre a quest'ultimo è richiesto di contenere almeno *un residuo* di portante<sup>16</sup>. In uscita dal vco è pertanto presente il segnale  $y(t) = \sin(\omega_0 t + \hat{\theta}(t))$  in cui



$$\hat{\theta}(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) d\tau \quad (10.9)$$

<sup>12</sup>Realizzato mediante un amplificatore ad elevato guadagno, portato a lavorare in  *saturazione*.

<sup>13</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Divisore\\_di\\_frequenza](https://it.wikipedia.org/wiki/Divisore_di_frequenza)

<sup>14</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Oscillatore\\_controllato\\_in\\_tensione](https://it.wikipedia.org/wiki/Oscillatore_controllato_in_tensione)

<sup>15</sup>Se ad esempio  $\varepsilon(\tau) = \Delta/k_f$  ossia è *costante*, si ottiene  $y(t) = \sin(2\pi f_0 t + 2\pi \Delta t) = \sin[2\pi(f_0 + \Delta)t]$ , ovvero la frequenza si è alterata di una quantità pari a  $\Delta$ . Infatti, il vco realizza il processo di  *modulazione di frequenza*, vedi eq. (9.7) a pag. 254.

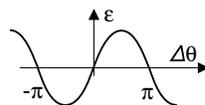
<sup>16</sup>Un diverso circuito controreazionato in grado di operare anche per segnali a *portante soppressa* prende il nome di *Costas loop*, vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Costas\\_loop](https://en.wikipedia.org/wiki/Costas_loop), mentre al § 14.11.1 si discute di una realizzazione relativa ad una trasmissione a *spettro espanso*.

rappresenta la *stima* della fase  $\theta(t)$  del segnale in ingresso, valutata all'istante  $t$ . Eseguendo ora il prodotto tra  $y(t)$  ed il segnale ricevuto<sup>17</sup>  $x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta(t))$  si ottiene<sup>18</sup>

$$\frac{1}{2} \sin [2\omega_0 t + \theta(t) + \hat{\theta}(t)] + \frac{1}{2} \sin [\theta(t) - \hat{\theta}(t)]$$

il cui primo termine è centrato a frequenza doppia ( $2\omega_0$ ) e viene eliminato dal filtro passa basso (detto anche *filtro di loop*), alla cui uscita troviamo dunque

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \sin [\theta(t) - \hat{\theta}(t)] = \frac{1}{2} \sin(\Delta\theta(t))$$



dove  $\Delta\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t)$  rappresenta l'errore di fase che desideriamo annullare, ed  $\varepsilon(t)$  è la grandezza in ingresso al vco.

Pensiamo ora al caso in cui la  $\theta(t)$  presente nel segnale di ingresso sia costante: nel caso in cui risulti  $\Delta\theta = 0$ , si ottiene che anche  $\varepsilon = 0$ , ed il vco non altera la fase (esatta) della portante generata. Se invece  $\Delta\theta \geq 0$  (e  $|\Delta\theta| < \pi$ )<sup>19</sup>, allora  $\varepsilon \geq 0$ , e dunque il vco è portato ad aumentare (diminuire) la fase della propria portante, riducendo di conseguenza l'errore di fase<sup>20</sup>. Nel caso in cui, infine, la fase  $\theta(t)$  del segnale in arrivo vari nel tempo, allora il PLL *insegue* tali variazioni tanto più da vicino, quanto più è elevato il coefficiente di proporzionalità  $k_f$  tra  $\hat{\theta}(t)$  e l'integrale di  $\varepsilon(t)$  che compare nella (10.9)<sup>21</sup>.

Al § 10.4.1.2 viene illustrato come utilizzare il PLL allo scopo di generare una portante *stabile* di modulazione a frequenza qualsiasi, a partire da un oscillatore al quarzo.

### 10.2.3 Errori di fase e di frequenza

Esaminiamo ora cosa accade nel caso in cui la sincronizzazione di portante non sia perfetta, ma tra la portante del demodulatore (§ 10.2.1) e quella del segnale in arrivo  $x(t)$  siano presenti errori di fase  $\theta$  e/o di frequenza  $\Delta f$ , ovvero risulti  $x(t) = \cos(2\pi(f_o + \Delta f)t + \theta)$ : in tali condizioni il risultato della demodulazione (non più coerente) risulta pari a<sup>22</sup>:

$$\begin{aligned} y(t) &= x_c(t) \cos \omega_0 t \cos [(\omega_o + \Delta\omega)t + \theta] \\ &= \frac{1}{2} x_c(t) [\cos(\Delta\omega t + \theta) + \cos((2\omega_o + \Delta\omega)t + \theta)] \end{aligned}$$

Pertanto, mentre il termine a frequenza (circa) doppia viene eliminato come di consueto dall'apposito filtro, sul segnale demodulato  $y(t)$  si manifestano le seguenti distorsioni:

<sup>17</sup>Trascuriamo la presenza di eventuali modulazioni, il cui effetto si intende *mediato* dalla caratteristica passa-basso del PLL, dovuta sia all'integratore presente nel vco, che al filtro di loop.

<sup>18</sup>Utilizziamo qui la relazione  $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ .

<sup>19</sup>La grandezza di controllo  $\varepsilon(t)$  proporzionale a  $\sin(\Delta\theta)$  si azzerava per  $\Delta\theta = k\pi$  con  $k$  intero, positivo o negativo. Per  $k$  *dispari* si hanno condizioni di instabilità, in quanto ad es. per  $\Delta\theta$  che *aumenta o diminuisce* rispetto a  $\Delta\theta = \pi$ , il segno di  $\varepsilon$  è rispettivamente *negativo e positivo*, causando un ulteriore ritardo o aumento di  $\hat{\theta}(t)$  che causa un ulteriore aumento o diminuzione di  $\Delta\theta$ , finché questo non raggiunge il valore 0 o  $2\pi$ , corrispondenti a condizioni di stabilità. In altre parole, se  $|\Delta\theta| < \pi$  si determina un transitorio alla fine del quale  $\varepsilon \rightarrow 0$ , mentre se  $\pi < |\Delta\theta| < 3\pi$  il transitorio converge verso  $\varepsilon \rightarrow 2\pi$ , e così via.

<sup>20</sup>Notiamo che un moltiplicatore, seguito da un filtro passabasso, esegue il calcolo dell'intercorrelazione tra gli ingressi del moltiplicatore (vedi § 6.5.4), che nel nostro caso è una sinusoide.

<sup>21</sup>Inoltre, le prestazioni del PLL dipendono fortemente anche dalla banda e dall'ordine del *filtro di loop*, che limita la velocità di variazione di  $\varepsilon(t)$  e l'estensione dell'intervallo di aggancio. Lo studio teorico si basa sull'uso della trasformata di Laplace e sulla approssimazione  $\sin(\Delta\theta) \simeq \Delta\theta$ , in quanto così il PLL può essere studiato come un sistema di controllo *linearizzato*, sommariamente descritto al § 10.3.2.1. Per approfondimenti, vedi [http://it.wikipedia.org/wiki/Phase-locked\\_loop](http://it.wikipedia.org/wiki/Phase-locked_loop).

<sup>22</sup>Si applichi  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ .

- in assenza di errori di frequenza si ottiene  $y(t) = \frac{1}{2}x_c(t) \cos \theta \leq \frac{1}{2}x_c(t)$ , che... può annullarsi per  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , mentre per  $\theta = \pi$  si ottiene una inversione di segno di  $x_c(t)$ ;
- qualora  $\Delta\omega \neq 0$  si ottiene  $y(t) = \frac{1}{2}x_c(t) \cos(\Delta\omega t)$  e dunque il segnale demodulato, oltre ad invertire periodicamente polarità, presenta una notevole oscillazione di ampiezza che, ad esempio, nel caso di segnale audio può rendere il risultato inintelligibile già con  $\Delta f$  pari a pochi Hertz.

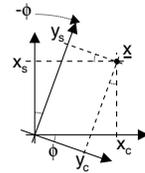
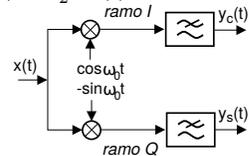
### 10.2.3.1 Demodulazione I e Q in presenza di errore di fase

Poniamoci ora nel caso in cui nel segnale modulato siano presenti entrambe le c.a. di b.f., ovvero  $x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t$ , e si desideri demodularle entrambe. Si ricorre allora al demodulatore *in fase e quadratura* (§ 9.2.4), che prevede due rami (detti anche I e Q) con portanti di demodulazione, appunto, in quadratura.

Applicando i risultati del § 9.2.4, e con riferimento alla notazione adottata nello schema che segue, in condizioni di *coerenza* si ottiene  $y_c(t) = \frac{1}{2}x_c(t)$  e  $y_s(t) = \frac{1}{2}x_s(t)$ . Se viceversa il segnale ricevuto presenta una fase incognita  $\theta$ , e dunque  $x(t) = x_c(t) \cos(\omega_0 t + \theta) - x_s(t) \sin(\omega_0 t + \theta)$ , si ottiene invece<sup>23</sup>

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \frac{1}{2}(x_c(t) \cos \theta - x_s(t) \sin \theta) & (10.10) \\ y_s(t) &= \frac{1}{2}(x_c(t) \sin \theta + x_s(t) \cos \theta) \end{aligned}$$

Ovviamente, per  $\theta = 0$  le (10.10) si riducono al caso noto, mentre *curiosamente* per uno sfasamento  $\theta = \frac{\pi}{2}$  le due c.a. di b.f. (a parte un segno) si invertono di ruolo. Un ragionamento più approfondito è fornito a pag. 257, e dimostra che  $\theta$  rappresenta l'angolo di cui ruota il piano dell'involuppo complesso tra  $\underline{x}(t)$  e  $\underline{y}(t)$ . Ad ogni modo il sistema (10.10) è perfettamente invertibile, qualora  $\theta$  sia noto.



### 10.2.4 Demodulazione incoerente

Si tratta di uno schema utile nella *fase di ricerca* della regione di frequenza in cui è presente un segnale<sup>24</sup>, oppure se si desidera verificare la presenza *o meno* di un segnale ad una determinata frequenza. In tale schema la coerenza di fase tra la portante ricevuta e quella di demodulazione viene deliberatamente *trascurata*, adottando una architettura che utilizza anche il ramo *in quadratura*.

<sup>23</sup>Per il ramo in fase risulta

$$\begin{aligned} y_c(t) &= (x_c(t) \cos(\omega_0 t + \theta) - x_s(t) \sin(\omega_0 t + \theta)) \cdot \cos \omega_0 t = \\ &= x_c(t) \cos(\omega_0 t + \theta) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin(\omega_0 t + \theta) \cos \omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2}x_c(t) [\cos(2\omega_0 t + \theta) + \cos \theta] - \frac{1}{2}x_s(t) [\sin(2\omega_0 t + \theta) - \sin(-\theta)] \end{aligned}$$

mentre svolgendo simili sviluppi per il ramo in quadratura, si giunge a  $y_s(t) = \frac{1}{2}x_c(t) [\sin \theta - \sin(2\omega_0 t + \theta)] + \frac{1}{2}x_s(t) [\cos(\theta) - \cos(2\omega_0 t + \theta)]$ . Anche in questo caso i filtri passabasso eliminano le componenti centrate a  $2f_0$ , permettendo di ottenere la (10.10).

<sup>24</sup>La ricerca dell'emittente può essere l'azione banale di sintonizzare a mano la propria radio sul programma preferito, oppure (come si dice, in modalità *ricerca automatica*), mediante un circuito del tipo di cui stiamo discutendo, con il quale vengono *provate* diverse portanti di demodulazione, finché non si riscontra un segnale in uscita.

In generale, la fase della comunicazione vera e propria viene preceduta da quella di *acquisizione della portante*, svolta ad esempio come qui accennato, dopodiché la sincronizzazione è mantenuta mediante interventi automatici (ad es. via PLL), necessari qualora si tratti di dover compensare le variazioni di frequenza dovute ad esempio al movimento reciproco di trasmettitore e ricevitore (*effetto doppler*), come per il caso delle comunicazioni con mezzi mobili, vedi § 16.3.4.6.

Se consideriamo un segnale AM-BLD-PS ricevuto in presenza di una fase  $\theta$  incognita rispetto alla portante del ramo I del demodulatore, ovvero

$$x(t) = m(t) \cos(\omega_0 t + \theta)$$

il relativo inviluppo complesso rispetto ad  $f_0$  (e  $\theta = 0$ ) risulta pari a

$$\underline{x}(t) = m(t) e^{j\theta} = m(t) \cos \theta + jm(t) \sin \theta$$

le cui parti reale ed immaginaria corrispondono all'uscita dei filtri passa-basso posti sui due rami, ossia  $y_c(t) = m(t) \cos \theta$  e  $y_s(t) = m(t) \sin \theta$ , come si ottiene (a parte un fattore  $1/2$ ) dalle (10.10) avendo posto  $x_c(t) = m(t)$  e  $x_s(t) = 0$ . Dunque il segnale  $z(t)$  di uscita corrisponde a

$$z(t) = \sqrt{y_c^2(t) + y_s^2(t)} = |m(t)| \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = |m(t)|$$

Pertanto, nonostante l'ignoranza della fase  $\theta$ , siamo ancora in grado di individuare la *presenza* di un segnale modulante. L'operazione di modulo impedisce l'uso dello schema per demodulare generici segnali BLD-PS, mentre il caso PI sarebbe perfettamente demodulabile, ma per quello è più che sufficiente il demodulatore *di inviluppo* discusso al § seguente. Infine, al § 11.3.2 si illustra come usare il demodulatore incoerente per decidere per la presenza o meno di una sinusoide a cui è sovrapposto un rumore gaussiano, e viene valutata la relativa probabilità di errore.

### 10.2.5 Demodulatore di inviluppo per AM-BLD-PI

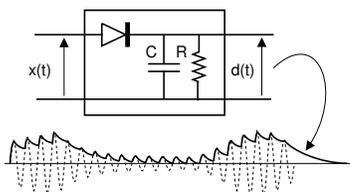
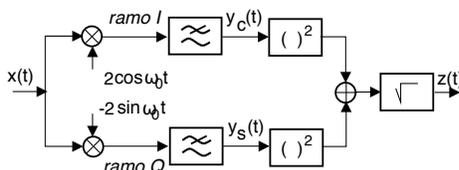
Si tratta del semplice circuito *non lineare* riportato in figura<sup>25</sup>. Durante i periodi in cui il segnale in ingresso  $x(t)$  è positivo rispetto alla tensione  $d(t)$  accumulata dal condensatore, quest'ultimo si carica, inseguendo l'andamento dell'ingresso. Quando diviene  $x(t) < d(t)$ , il condensatore si scarica sulla resistenza con una costante di tempo  $\tau = RC$ , abbastanza grande rispetto ad  $\frac{1}{f_0}$ , e tale da permettere la ricostruzione dell'andamento di  $x_c(t)$ . Le oscillazioni a frequenza  $f_0$  (e sue armoniche) possono quindi essere rimosse da un successivo filtro passa-basso, mentre la costante  $a_p$  è rimossa mediante un passa alto. D'altra parte, il valore di  $\tau$  deve essere scelto né troppo piccolo né troppo grande, per evitare una eccessiva *seghettatura*, ed al contempo riuscire ad inseguire anche le variazioni più rapide del messaggio<sup>26</sup>.

La semplicità del circuito è tale da farlo usare nel maggior numero di casi possibili, anche se il suo uso prevalente è per la demodulazione di segnali a *portante intera*. D'altra parte, la contemporanea presenza di altri segnali modulati con portante diversa da quella del segnale desiderato, rendono obbligatoria l'adozione di ulteriori provvedimenti, come discusso nel § 10.2.7 relativo alla demodulazione eterodina.

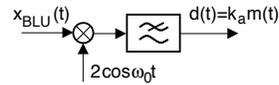
### 10.2.6 Demodulazione per segnali a banda laterale unica e ridotta

<sup>25</sup>Il simbolo  $\text{—}\triangleleft\text{—}$  rappresenta un *diode*, costituito da un bipolo di materiale semiconduttore drogato, che ha la particolarità di condurre in un solo verso (quello della freccia).

<sup>26</sup>Presso [http://it.wikipedia.org/wiki/Rivelatore\\_d'inviluppo](http://it.wikipedia.org/wiki/Rivelatore_d'inviluppo) qualche linea guida di progetto.



Nel caso di segnali BLU  $x_{BLU}(t) = m(t) \cos \omega_0 t - \hat{m}(t) \sin \omega_0 t$  = il segnale modulante può essere riottenuto a partire da  $x(t)$  utilizzando il demodulatore omodina mostrato in figura, in quanto la componente in fase  $x_c(t)$  dell'involuppo complesso è proprio pari al messaggio modulante  $m(t)$ . Occorre però prestare particolare attenzione ad eventuali errori di frequenza e di fase ( $\Delta f$  e  $\theta$ ) della portante di demodulazione perché, essendo presenti entrambe le componenti  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$ , in uscita dal demodulatore si ottiene (nel caso di banda laterale superiore):



$$d(t) = k_a m(t) \cos(\Delta \omega t + \theta) - k_a \hat{m}(t) \sin(\Delta \omega t + \theta)$$

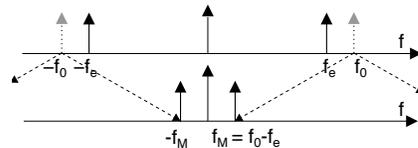
Pertanto la modulazione BLU è più sensibile di quella BLD agli errori della portante di demodulazione, dato che anche un semplice errore di fase  $\theta$  produce non solo un affievolimento, ma un vero fenomeno di *interferenza* tra  $m(t)$  e  $\hat{m}(t)$ . Per evitare che accada, nella trasmissione blu è spesso presente una portante parzialmente soppressa, in modo da agevolare il funzionamento delle tecniche di recupero portante.

Anche nel caso BLR è possibile ricorrere ad un demodulatore di tipo omodina, evitando i problemi di sincronizzazione di fase illustrati, purché il filtro  $H(f)$  usato in trasmissione per rimuovere parte di una banda laterale presenti alcune condizioni di simmetria attorno a  $f_0$ <sup>27</sup>.

**Ampiezza dei segnali BLU** Le variazioni di ampiezza dei segnali AM-BLU sono ben maggiori che nel caso BLD, a causa del brusco troncamento spettrale causato dal filtro di Hilbert, e dalla distorsione di fase non lineare associata, e di ciò va tenuto conto per evitare fenomeni di saturazione e distorsione non lineare (§ 7.3), anche adottando adeguate contromisure<sup>28</sup>.

### 10.2.7 Demodulatore eterodina

Individua la tecnica di utilizzare una frequenza di demodulazione *diversa* da quella della portante<sup>29</sup>, e fu inventata per rendere udibili i segnali in *codice Morse*<sup>30</sup> trasmessi via radio in forma di una portante intermittente  $f_0$ : dato che  $\cos \alpha \cos \beta = 1/2 (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$ , scegliendo la frequenza di eterodina  $f_e$  di poco inferiore a quella della portante  $f_0$  il termine a frequenza  $f_0 - f_e$  cade infatti nella banda udibile. Da un punto di vista grafico il risultato equivale a *sommare e sottrarre* la frequenza eterodina alle frequenze dell'altro segnale, traslando così  $f_0$  in  $f_0 \pm f_e$ : indichiamo di qui in poi la differenza  $f_0 - f_e$  con il termine di *media frequenza*  $f_M$ , detta anche frequenza *intermedia* o IF.



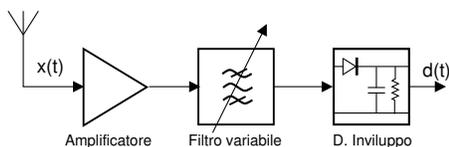
**Piccola storia della radio** Con lo sviluppo della trasmissione radio di segnali modulati, le diverse emittenti eseguivano trasmissioni AM-BLD-PI ognuna su di una portante differente; sebbene fosse possibile *sintonizzare* ciascuna emittente con un demodulatore omodina centrato sulla relativa portante, i dispositivi del tempo soffrivano di fenomeni di *deriva*, e non essendo ancora stato inventato il PLL, la portante di demodulazione *slittava*. Inoltre la tecnica omodina

<sup>27</sup> Si può dimostrare che per l'involuppo complesso  $\underline{H}(f)$  di  $H(f)$  deve risultare:  $\underline{H}(f) + \underline{H}^*(-f) = \text{cost}$  perché in tal modo il residuo di banda parzialmente soppressa si combina esattamente con ciò che manca alla banda laterale non soppressa.

<sup>28</sup> Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Amplitude-companded\\_single-sideband\\_modulation](https://en.wikipedia.org/wiki/Amplitude-companded_single-sideband_modulation)

<sup>29</sup> Per la storia in maggior dettaglio, vedi ad es. <https://en.wikipedia.org/wiki/Heterodyne>

<sup>30</sup> In origine il segnale telegrafico (lett. *scrittura a distanza*) era trasmesso via cavo; per approfondimenti vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Morse\\_code](https://en.wikipedia.org/wiki/Morse_code) e [https://en.wikipedia.org/wiki/Wireless\\_telegraphy](https://en.wikipedia.org/wiki/Wireless_telegraphy)

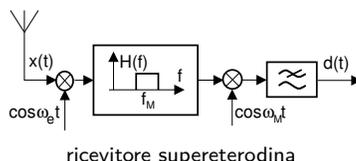


soffriva anche del problema del *rientro* della portante di demodolazione sull'altro ingresso del mixer, comportando l'insorgenza di una *componente continua* in uscita dal mixer stesso, e in grado di mandare *in saturazione* il successivo stadio di amplificazione<sup>31</sup>.

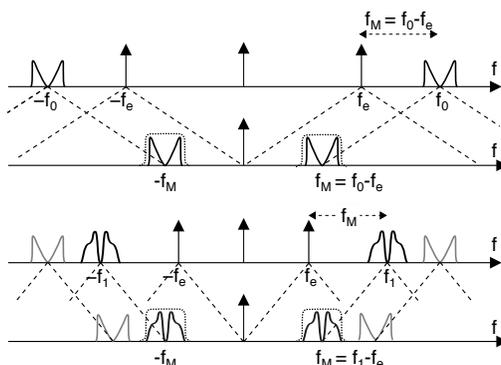
Si provò quindi ad adottare una modulazione a portante intera in modo da poter adottare un demodulatore ad inviluppo, ma in tal caso l'emittente desiderata doveva essere prima *selezionata* antepoendo al demodulatore un filtro passa banda *variabile* centrato sulla portante dell'emittente desiderata, filtro di difficile realizzazione all'aumentare della frequenza<sup>32</sup>.

### 10.2.7.1 Supereterodina

La serie di considerazioni sopra svolte portò alla scelta di adottare in modo sistematico la tecnica di demodolazione eterodina, detta *super-* qualora si scelga una frequenza intermedia  $f_M$  *più elevata* di quelle dello spettro udibile<sup>33</sup>, dando luogo allo schema di ricevitore che potremmo definire *in due passi* mostrato a lato: volendo sintonizzare l'emittente con portante  $f_0$  il segnale ricevuto viene innanzitutto moltiplicato per una portante *eterodina*  $f_e = f_0 - f_M$ , in modo che lo spettro dell'emittente centrata su  $f_0$  sia traslato alla *frequenza intermedia*  $f_M$ . A quel punto un filtro passa banda *fisso* centrato su  $f_M$  permette di isolare l'emittente desiderata, che viene successivamente portata in banda base ad opera di uno stadio di demodolazione *omodina* operante a frequenza  $f_M$ .



Da un punto di vista grafico quel che accade è mostrato in figura, ovvero la frequenza  $f_e$  viene *sommata e sottratta* a tutte le frequenze in ingresso al primo mixer, portando in  $f_M$  l'emittente centrata su di una  $f_0$  distante da  $f_e$  di una quantità pari alla loro differenza  $f_0 - f_e$ . La sintonia di una diversa emittente avviene variando esclusivamente  $f_e$ , in modo che volendo ricevere ad esempio quella centrata in  $f_1$ , si imposta  $f_e = f_1 - f_M$  come mostrato



<sup>31</sup>A causa di fenomeni di induzione elettromagnetica che si manifestano tra conduttori presenti all'interno del circuito di demodolazione (che perdipiù aumentano con il valore delle frequenze in gioco) la portante di demodolazione omodyna può appunto *rientrare* dalla via percorsa dal segnale modulato. Se in ingresso al mixer è presente, oltre al segnale da demodulare a portante *soppressa*, anche un termine alla stessa frequenza portante, si verifica un fenomeno noto come *self-mixing* dovuto all'eguaglianza  $\cos^2 \alpha = 1/2 (1 + \cos 2\alpha)$  che determina la comparsa di un termine *in continua*, e che non può essere eliminato mediante filtraggio passa alto qualora il segnale modulato presenti componenti energetiche prossime a frequenza zero. Lo stadio di amplificazione successivo mantiene un funzionamento lineare solo per valori di ingresso compresi in uno specifico intervallo, come discusso al § 7.3, mentre il valore medio ora presente può portare il segnale di ingresso *al di fuori* di tale dinamica.

<sup>32</sup>Le difficoltà nascono sia dall'esigenza di *accordare* il filtro attorno alla frequenza portante desiderata, sia dalla necessità di attenuare sufficientemente le trasmissioni che avvengono su frequenze limitrofe, determinando la necessità di realizzare un filtro con regione di transizione molto ripida, problema che può divenire insormontabile se il rapporto tra banda del segnale e portante (la cosiddetta *banda frazionaria*) è particolarmente ridotto.

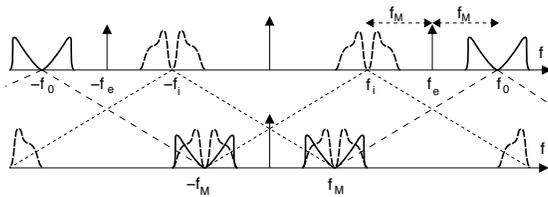
<sup>33</sup>Il prefisso *super* viene scelto come contrazione di *supersonic heterodyne*, e dato che agli inizi del '900 di certo non esistevano aerei *supersonici*, indicava il concetto di *sopra i suoni*, in contrapposizione al suo uso originario di traslare il segnale *radiotelegrafico* in banda audio.

nella seconda figura, in modo che ora sia la seconda emittente a cadere dentro il filtro centrato su  $f_M$ .

### 10.2.7.2 Frequenza immagine

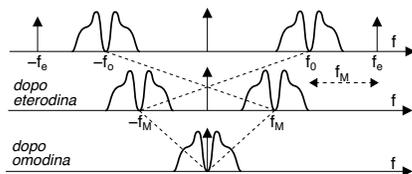
In realtà un ricevitore eterodina prevede la presenza di un ulteriore filtro posto *prima* del mixer con  $f_e$ , necessario ad evitare che in ingresso al filtro a media frequenza si presenti, oltre all'emittente centrata a  $f_0 = f_e + f_M$ , anche quella a portante  $f_i = f_e - f_M$ , per la quale cioè  $f_e - f_i = f_M$ .

La frequenza  $f_i$  prende il nome di *frequenza immagine*, in quanto è l'immagine speculare di  $f_0$  rispetto ad  $f_e$ ; in altre parole, l'utilizzo di una portante eterodina  $f_e$  provoca la traslazione a media frequenza sia della emittente desiderata e centra-



ta in  $f_0 = f_e + f_M$ , che della sua immagine a distanza  $2f_M$ , centrata in  $f_i = f_e - f_M$ . Pertanto, in ingresso al ricevitore va anteposto un filtro che elimini dal segnale di ingresso le frequenze immagine, ovvero, una volta nota la gamma di frequenze che si vuole sintonizzare, elimini tutte le trasmissioni centrate su portanti a frequenze minori di  $f_e$ .

**Scelta della frequenza di eterodina** Le trasmissioni *broadcast AM*<sup>34</sup> adottano portanti nella regione di frequenze detta delle *onde medie* (540-1600 KHz) con modulazione AM-BLD-PI ed utilizzano un ricevitore per il quale si sceglie una  $f_e$  maggiore della frequenza  $f_0$  da sintonizzare anziché *minore* come prima illustrato, con il risultato che ora la frequenza immagine  $f_i$  è quella che si trova *al disopra* della  $f_0$ , come mostrato nello schema a lato. Per queste trasmissioni si è scelto di utilizzare una frequenza intermedia  $f_M$  pari a 455 KHz, quindi volendo ad esempio sintonizzare una emittente con  $f_0 = 600$  KHz occorre una  $f_e = f_M + f_0 = 1055$  KHz, ma allo stesso tempo anche l'emittente relativa alla portante  $f_i = f_e + f_M = 1510$  KHz viene traslata nella banda del filtro a frequenza intermedia. Pertanto, prima del mixer operante ad  $f_e$  va posto un filtro che lasci passare solo le emittenti centrate a portanti inferiori ad  $f_e$ , reintroducendo l'esigenza di un filtro variabile, ma meno complesso di quello di pag. 282 dato che non ha lo scopo di filtrare una sola emittente, l'intera banda.



La scelta  $f_M = 455$  KHz, inferiore alla minima frequenza di 510 KHz, permette di utilizzare per la media frequenza una regione dello spettro libera da altre trasmissioni<sup>35</sup>, che altrimenti potrebbero essere amplificate dagli stadi ad alto guadagno posti dopo il filtro MF. La scelta di  $f_e > f_0$  permette poi di posizionare il filtro *passa banda* che elimina le frequenze immagine *al disotto* della  $f_e$ , rendendo più semplice la sua realizzazione. La figura 10.2 mostra lo schema

<sup>34</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/AM\\_broadcasting](https://en.wikipedia.org/wiki/AM_broadcasting)

<sup>35</sup>Il valore della frequenza intermedia utilizzata per le diverse bande in cui operano sistemi di radio diffusione è determinato in seno ad enti di standardizzazione, e le autorità di concessione delle licenze di trasmissione evitano di assegnare alle emittenti frequenze nella stessa banda in cui è prevista l'uso di una frequenza intermedia, allo scopo di impedire interferenze nella medesima banda da parte di una diversa trasmissione. Oltre alla MF a 455 KHz del broadcast AM, abbiamo ad esempio valori di media frequenza pari a 10.7 MHz per il broadcast FM, 38.9 MHz per la televisione, 70 MHz per trasmissioni a microonde terrestri e satellitari.

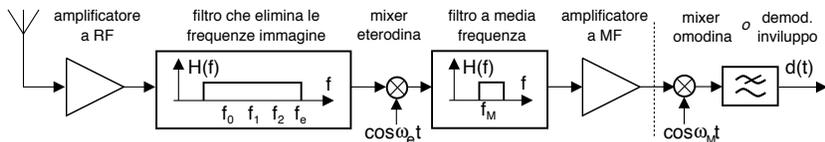


Figura 10.2: Schema di un ricevitore supereterodina con  $f_e$  maggiore della frequenza sintonizzata

generale<sup>36</sup> (compresi gli stadi di amplificazione) per un ricevitore supereterodina con  $f_e > f_0$ . Riassumiamo i vantaggi ottenuti:

- la sintonia avviene mediante la variazione di  $f_e$ , ed il resto non cambia;
- la separazione tra  $f_0$  ed  $f_M$  scongiura il rischio di instabilità, che potrebbe verificarsi se il segnale uscente dal filtro di media frequenza, amplificato, fosse ri-captato dallo stadio di ingresso, mentre ora invece l'amplificazione può aver luogo proprio nello stadio a media frequenza;
- il ridotto valore di  $f_M$  rispetto alla banda di frequenze di cui si opera la sintonia permette la realizzazione di un filtro passa banda a media frequenza di ridotta complessità e migliore selettività;
- per un segnale a portante intera lo stadio omodina è sostituito da uno ad involuppo, senza necessità di generare  $f_0$ .

**Conversione di frequenza multipla** Notiamo che lo stadio di eterodina può essere ulteriormente ripartito in due conversioni di frequenza successive (vedi ad es. la fig. 20.6 a pag. 601), di cui la seconda conversione opera la sintonia, mentre la prima ha il solo scopo di traslare la banda di interesse in una regione centrata su di una frequenza inferiore, in cui il mezzo trasmissivo (ad es. un cavo coassiale) presenta minore attenuazione. Inoltre, la tecnica di mixing eterodina viene utilizzata anche negli apparati ripetitori<sup>37</sup>, in cui la frequenza di trasmissione deve differire da quella di ricezione per evitare fenomeni di auto-interferenza.

**Realizzazione numerica** Dopo lo stadio di eterodina, il segnale centrato a media frequenza presenta un valore di frequenza massima  $W$  assai ridotto rispetto alla sua versione modulata, permettendo di attuare su di esso le tecniche di (sotto)campionamento (§ 4.7) ed operare le restanti operazioni, come la demodulazione in fase e quadratura, in via completamente numerica. In una prossima edizione la questione verrà approfondita, dato che attualmente tutti ricevitori funzionano così.

### 10.3 Modulazione angolare

In questo tipo di modulazione l'informazione contenuta nel messaggio  $m(t)$  è impressa sulla portante modificandone la fase  $\alpha(t)$ , ottenendo un segnale modulato

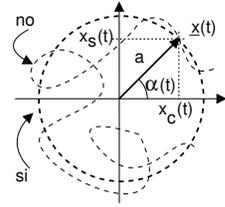
$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \alpha(t))$$

il cui involuppo complesso (vedi eq. (9.3)) vale  $\underline{x}(t) = ae^{j\alpha(t)} = x_c(t) + jx_s(t)$ , in cui  $x_c(t) = a \cos \alpha(t)$  e  $x_s(t) = a \sin \alpha(t)$ .

<sup>36</sup>Nel caso di trasmissione a portante intera lo stadio eterodina finale viene rimpiazzato da un demodulatore a involuppo, oppure ancora da un demodulatore in fase e quadratura per gli usi più generali.

<sup>37</sup>Vedi ad es. il caso di un *transponder* satellitare, § 20.3.3

Notiamo subito che, a differenza della modulazione di ampiezza, il modulo di  $\underline{x}(t)$  è rigorosamente *costante*, e la sua fase  $\alpha(t)$  può evolvere nel tempo unicamente su di una circonferenza di raggio  $a$ . Si è già mostrato al § 9.2.2 come il legame tra messaggio  $m(t)$  e fase dell'involuppo complesso  $\alpha(t)$  possa essere descritto come modulazione di *fase* o PM (*phase modulation*) qualora risulti  $\alpha(t) = k_\phi m(t)$ , oppure nei termini di una modulazione di *frequenza* o FM nel caso si scelga  $\alpha(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$ , in cui  $k_\phi$  e  $k_f$  sono coefficienti di proporzionalità che *dosano* l'intensità della modulazione introdotta.



Dal diverso legame tra  $\alpha(t)$  ed  $m(t)$  deriva la dipendenza della *frequenza istantanea* da  $m(t)$ , definita come la derivata della *fase istantanea*  $\psi(t) = 2\pi f_0 t + \alpha(t)$ :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \psi(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \alpha(t) \quad (10.11)$$

La tabella seguente riassume la dipendenza della fase  $\alpha(t)$  e della frequenza istantanea  $f_i(t)$  da  $m(t)$ , per la modulazione angolare di tipo PM ed FM:

	$\alpha(t)$	$f_i(t)$
PM	$k_\phi m(t)$	$f_0 + \frac{k_\phi}{2\pi} \frac{d}{dt} m(t)$
FM	$2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$	$f_0 + k_f m(t)$

Le due alternative PM e FM vengono quindi esaminate assieme, in quanto reciprocamente intercambiabili qualora si effettu

- una PM con  $m(t)$  pari all'integrale del messaggio informativo *oppure*
- una FM con  $m(t)$  pari alla derivata del messaggio informativo.

Prima di affrontare gli aspetti della generazione, ricezione, e determinazione della densità di potenza di un segnale modulato angularmente, illustriamo innanzitutto due sue peculiarità.

**Non linearità** Una caratteristica *fondamentale* della modulazione angolare è che la dipendenza del segnale modulato da  $m(t)$  è fortemente *non lineare*, e pertanto il suo spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  per un generico  $m(t)$  non può essere calcolato allo stesso modo del caso AM. Infatti, l'involuppo complesso di un segnale modulato angularmente può essere espresso<sup>38</sup> come:

$$\underline{x}(t) = ae^{j\alpha(t)} = a \left[ 1 + j\alpha(t) - \frac{\alpha^2(t)}{2} - j \frac{\alpha^3(t)}{3!} + \dots \right] \quad (10.12)$$

da cui risulta evidente che, anche se  $\mathcal{P}_\alpha(f)$  può essere espressa in funzione di  $\mathcal{P}_m(f)$ , nulla può essere detto in generale per  $\mathcal{P}_x(f)$ , e dunque per  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{1}{4}\mathcal{P}_x(f-f_0) + \frac{1}{4}\mathcal{P}_x(-f-f_0)$  (eq. (9.19)). Infatti, la presenza delle potenze della fase modulante  $\alpha(t)$  impedisce l'applicabilità del principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero, anche se sono noti i risultati della modulazione per due diversi messaggi  $x_1(t) = FM\{m_1(t)\}$  e  $x_2(t) = FM\{m_2(t)\}$ , il risultato ottenibile modulando la loro somma *non è pari* alla somma dei risultati individuali:  $FM\{m_1(t) + m_2(t)\} \neq FM\{m_1(t)\} + FM\{m_2(t)\}$ .

<sup>38</sup>Si fa qui uso della espansione in serie di potenze dell'esponenziale:  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

**Ampiezza costante** La circostanza che  $x(t) = ae^{j\alpha(t)}$  presenti un modulo costante pari ad  $a$ , indipendentemente dall'ampiezza del segnale modulante, è particolarmente utile qualora per  $m(t)$  siano previste forti variazioni di dinamica, come ad es. nel caso del segnale FDM (pag. 251) utilizzato per trasmettere più canali telefonici<sup>39</sup>. Infatti in questo caso, non essendo noto a priori il numero di canali effettivamente impegnati, la potenza del segnale  $y(t) = \sum_{n=1}^N BLU \{m_n(t), f_n\}$  ottenuto sommando i diversi canali (ognuno a modulazione BLU su di una diversa portante  $f_n$ ) può variare di molto. Il segnale complessivo  $y(t)$  viene dunque applicato all'ingresso di un modulatore FM e trasmesso a piena potenza, senza subire distorsioni di non linearità (vedi § 7.3 e 12.3.1).

### 10.3.1 Generazione di un segnale a modulazione angolare

Il metodo *più diretto* di generare un segnale FM è quello di utilizzare un vco (introdotto al § 10.2.2.2), ossia un oscillatore controllato in tensione, che produce il segnale

$$x(t) = a \sin \left( \omega_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right)$$

e dunque realizza proprio la funzione desiderata. D'altra parte, per effettuare una modulazione PM per la quale  $\alpha(t) = k_\phi m(t)$  si può usare un modulatore FM a partire da una fase modulante  $\alpha(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m'(\tau) d\tau$ , realizzando  $m'(t)$  come  $m'(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{k_\phi}{k_f} \frac{d}{dt} m(t)$ . Un terzo metodo di modulazione FM verrà illustrato per un caso particolare in appendice § 10.4.4.

Per entrambi i casi FM e PM, è infine sempre valido il modulatore in fase e quadratura (pag. 255), ponendo  $x_c(t) = \cos \alpha(t)$  e  $x_s(t) = \sin \alpha(t)$ , come viene effettivamente fatto per diversi casi di modulazione numerica, vedi cap. 14.

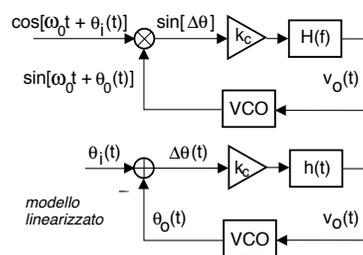
### 10.3.2 Ricezione di un segnale a modulazione angolare

In linea di principio, una volta ottenute  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  dal segnale modulato (ad esempio mediante un demodulatore *coerente* in fase e quadratura § 9.2.4) la relativa modulazione angolare può essere ricavata applicando l'eq. (9.9) ovvero  $\alpha(t) = \arctan 2(x_s, x_c)$  (<sup>40</sup>). D'altra parte, tale soluzione si presta esclusivamente a realizzazioni *numeriche*, in quanto è difficile realizzare un dispositivo circuitale che presenti esattamente la relazione non lineare di tipo arcotangente. Illustriamo allora i due metodi più comunemente usati nel mondo *analogico*.

#### 10.3.2.1 Ricevitore a PLL

Al § 10.2.2.2 si è già mostrato l'uso del circuito PLL per l'aggancio della fase della portante di modulazione. Lo stesso schema può essere usato per *inseguire* l'andamento temporale della fase di una portante modulata angolarmente, ottenendo in tal modo l'informazione desiderata.

La figura a lato riporta lo schema generale di un PLL, in cui il vco genera un segnale pari a  $\sin(\omega_0 t + \theta_o(t))$ , con  $\theta_o(t) = k_v \int_{-\infty}^t v_o(\tau) d\tau$ , mentre il segnale ricevuto ha la forma  $x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta_i(t))$ . Lo schema può essere analizzato con i metodi dei controlli automatici, in quanto rappresenta un sistema che tenta



<sup>39</sup>Un altro caso di multiplex FDM è quello del downlink di un trasponder DVB-S, introdotto al § 20.3

<sup>40</sup>Ricordiamo che  $\arctan 2$  restituisce un angolo compreso nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$  anziché  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

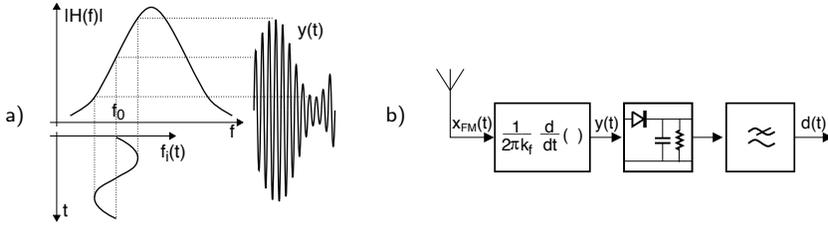


Figura 10.3: a) - conversione FM-AM; b) - schema del demodulatore a discriminatore

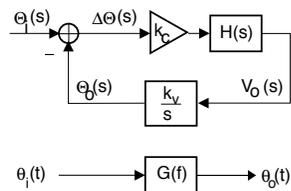
di mantenere nullo l'errore  $\sin \Delta\theta$ , con  $\Delta\theta(t) = \theta_i(t) - \theta_o(t)$  (vedi § 10.2.2.2); tale analisi si basa sulla *linearizzazione*  $\sin \Delta\theta \simeq \Delta\theta$ , valida per  $\Delta\theta$  piccolo. In tal caso l'analisi di Laplace<sup>41</sup> fornisce la relazione

$$\Theta_o(s) = \frac{k_c k_v H(s)}{s + k_c k_v H(s)} \Theta_i(s) \quad (10.13)$$

che permette di esprimere  $\theta_o(t)$  (fase del vco) come la versione *filtrata* della fase della portante modulata  $\theta_i(t)$ , da parte della risposta in frequenza *ad anello chiuso*

$$G(f) = \left. \frac{k_c k_v H(s)}{s + k_c k_v H(s)} \right|_{s=j2\pi f}$$

Ricordando che la fase  $\theta_o(t)$  del vco corrisponde a  $\theta_o(t) = k_v \int_{-\infty}^t v_o(\tau) d\tau$ , possiamo constatare come il segnale  $v_o(t)$  al suo ingresso (ovvero l'uscita del filtro di loop  $H(s)$ ) corrisponda alla ricostruzione del messaggio modulante  $m(t)$  nel caso di modulazione FM! Pertanto, il segnale  $v_o(t)$  realizza la funzione di demodulazione di frequenza.



### 10.3.2.2 Ricevitore a discriminatore

Questa seconda architettura di demodulatore di frequenza si basa su di un fenomeno detto conversione FM-AM, di cui in figura 10.3-a) è mostrato il principio di funzionamento più semplice e noto come *rivelatore a pendenza* (SLOPE DETECTOR). Un circuito risonante accordato ad un frequenza maggiore di  $f_0$  realizza una risposta in frequenza  $H(f)$  il cui modulo aumenta in maniera pressoché lineare nella banda di segnale, simulando così l'effetto di una derivata (vedi § 3.6). La figura mostra come, al variare della frequenza istantanea  $f_i(t) = f_o + k_f m(t)$ , l'ampiezza del segnale (passabanda)  $y(t)$  uscente dal derivatore *vari* in misura del valore (tempo variante) di  $|H(f)|_{f=f_i(t)}$ , ottenendo così un segnale modulato *in ampiezza* dalle stesse variazioni di  $f_i(t)$ , ovvero di  $m(t)$ .

La figura 10.3-b) mostra quindi uno schema che utilizza il fenomeno descritto per ricostruire il segnale modulante  $m(t)$  a partire da  $y(t)$  mediante un semplice demodulatore di inviluppo (§ 10.2.5). Svolgendo infatti i passaggi, il segnale uscente dal derivatore risulta pari a<sup>42</sup>

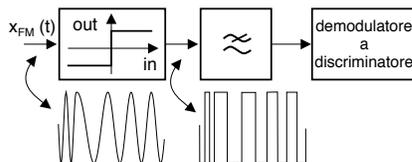
$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} a \cos \left( 2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi k_f} (2\pi f_0 + 2\pi k_f m(t)) a \sin \left( 2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right) \end{aligned}$$

<sup>41</sup>La (10.13) dà luogo ad una funzione di trasferimento ad anello chiuso il cui ordine dipende da come è realizzato il filtro passa basso. Per approfondimenti, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Phase-locked\\_loop](https://it.wikipedia.org/wiki/Phase-locked_loop).

<sup>42</sup>La derivata di  $\cos[\alpha(t)]$  è pari a  $-\sin[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t)$ , ma il segno  $-$  è ininfluente ai fini dell'elaborazione successiva.

che corrisponde ad un segnale modulato sia angolarmente che in ampiezza, ed in particolare la cui ampiezza risulta  $a(t) = a\left(\frac{f_0}{k_f} + m(t)\right)$ . Pertanto con una scelta opportuna<sup>43</sup> di  $\frac{f_0}{k_f}$ , la modulazione di ampiezza è riconducibile al caso BLD-PI (§ 10.1.1.2), e quindi il messaggio  $m(t)$  può essere recuperato mediante un demodulatore d'involuppo (§ 10.2.5).

Il risultato ottenuto è valido purché il segnale modulato  $x(t)$  sia esso stesso privo di variazioni di ampiezza: per questo motivo il derivatore è spesso preceduto da un blocco *squadratore*, che produce una versione, appunto, "squadrata" del segnale ricevuto e quindi priva di modulazione di ampiezza. Essendo lo squadratore fortemente non lineare, in uscita saranno presenti, oltre al segnale originario, anche componenti centrate a frequenze multiple di quella della portante, che vengono rimosse mediante un filtro passa basso posto a valle dello squadratore.



### 10.3.3 Densità spettrale di segnali a modulazione angolare

Come già osservato a pag. 285, la relazione (10.12) che esprime l'involuppo complesso di un segnale modulato angolarmente nei termini di una serie di potenze

$$\underline{x}(t) = ae^{j\alpha(t)} = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[j\alpha(t)]^n}{n!} \quad (10.14)$$

non può essere direttamente utilizzata per ottenere quella dello spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  del segnale modulato in funzione di una generica fase modulante  $\alpha(t)$ , a causa della natura non lineare della modulazione angolare. Ciononostante, costituisce comunque un punto di partenza per analizzare altri aspetti della situazione.

Innanzitutto osserviamo che, risultando  $|\underline{x}(t)| = a$ , la sua potenza totale ha sempre valore  $\mathcal{P}_x = a^2$ , indipendentemente da  $\alpha(t)$ , e dunque<sup>44</sup>  $\mathcal{P}_x = \frac{a^2}{2}$ . Inoltre, la presenza nella (10.14) di potenze di  $\alpha(t)$  di qualunque ordine sembrerebbe indicare che  $\mathcal{P}_x(f)$  abbia una banda infinita: in realtà la presenza dei fattoriali a denominatore fa sì che la serie possa essere troncata ad un certo ordine  $N < \infty$ , e dunque  $\underline{x}(t)$  sia da considerare limitato in banda.

Per speculare sull'influenza di  $\alpha(t)$  sul segnale modulato, notiamo che quanto più  $|\alpha(t)|$  è piccolo, tanto prima la (10.14) può essere troncata con errori trascurabili; se poi  $\alpha(t)$  si mantiene sempre *molto piccolo*, ci si può limitare al solo primo termine ( $n = 1$ ), dando così luogo ad un comportamento *lineare*, dato che in tal caso si ottiene  $\underline{x}(t) = a(1 + j\alpha(t))$ . Se viceversa  $\alpha(t)$  assume valori *molto elevati*, e quindi (10.14) comprende parecchi termini, subentra un secondo aspetto peculiare dell'FM, indicato come *conversione ampiezza → frequenza*, che può essere descritto tenendo conto che in base alla relazione  $f_i(t) = f_0 + k_f m(t)$ , la frequenza istantanea presenta scostamenti rispetto ad  $f_0$  direttamente proporzionali alle ampiezze di  $m(t)$ , e quindi l'*andamento* della densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  del segnale modulato risulta strettamente legato a quello della densità di probabilità di  $p_M(m)$  che descrive le ampiezze di  $m(t)$ , come torneremo ad approfondire al § 10.3.3.3. Infine, a valori intermedi della dinamica di  $\alpha(t)$  corrisponde una  $\mathcal{P}_x(f)$  che sarà una *via di mezzo* tra i due casi estremi discussi, e che pertanto possono essere pensati come *casi limite* tra cui porre la densità di potenza effettiva.

<sup>43</sup>L'utilizzo del demodulatore involuppo è possibile solo nel caso di una modulazione a portante intera, ovvero per cui  $\frac{f_0}{k_f} + m(t) > 0$  per  $\forall t$ , e dunque è necessario che risulti  $k_f < \frac{f_0}{\max_t \{|m(t)|\}}$ .

<sup>44</sup>Da un lato,  $\frac{a^2}{2}$  è banalmente la potenza della portante di ampiezza  $a$ . Da un altro punto vista, lo stesso risultato si ottiene a partire dalla  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{1}{4}(\mathcal{P}_x(f - f_0) + \mathcal{P}_x(-f - f_0))$  (eq. 9.19), da cui mediante integrazione in frequenza otteniamo  $\mathcal{P}_x = \frac{1}{4}2\mathcal{P}_x = \frac{a^2}{2}$ .

Dato che la natura non lineare della modulazione angolare rende necessario studiare ogni caso individualmente, il calcolo di  $\mathcal{P}_x(f)$  viene analiticamente svolto nel seguito per il caso particolare di un segnale  $m(t)$  sinusoidale, considerando le due possibilità estreme di  $\alpha(t)$  molto piccolo o molto grande, ed i risultati vengono quindi estrapolati per approssimare altre situazioni.

### 10.3.3.1 Segnale modulante sinusoidale

Adottando un segnale modulante del tipo  $m(t) = \cos(2\pi wt)$ , di cui si è indicata con  $w$  la frequenza di modulazione, l'espressione della fase modulante  $\alpha(t)$  e della relativa frequenza istantanea  $f_i(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \alpha(t)$  per il segnale modulato  $x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \alpha(t))$  sono riportate in tabella, per i casi di modulazione di fase e di frequenza

	$\alpha(t)$	$f_i(t)$	$\Delta\alpha$	$\Delta f$
PM	$k_\phi m(t) = k_\phi \cos(2\pi wt)$	$f_0 - wk_\phi \sin(2\pi wt)$	$k_\phi$	$wk_\phi$
FM	$2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau = \frac{k_f}{w} \sin(2\pi wt)$	$f_0 + k_f \cos(2\pi wt)$	$\frac{k_f}{w}$	$k_f$

assieme alle espressioni per la massima deviazione di fase  $\Delta\alpha = \max\{|\alpha(t)|\}$  e di frequenza  $\Delta f = \max\{|f_i(t) - f_0|\}$ . Osserviamo che in entrambi i casi sia la fase  $\alpha(t)$  sia la frequenza istantanea  $f_i(t)$  variano sinusoidalmente con frequenza  $w$ ; nel caso PM l'entità di  $\Delta f$  aumenta con  $w$ , mentre nell'FM la  $\Delta\alpha$  diminuisce con  $w$ . Nel seguito si farà riferimento all'indice di modulazione angolare  $\beta$ , corrispondente alla massima escursione della fase  $\Delta\alpha$ , che risulta:

$$\beta = \begin{cases} k_\phi & \text{(PM)} \\ \frac{k_f}{w} & \text{(FM)} \end{cases}$$

Con questa convenzione, possiamo trattare congiuntamente entrambi i casi PM ed FM riscrivendo l'involuppo complesso come<sup>45</sup>

$$\underline{x}(t) = ae^{j\alpha(t)} = ae^{j\beta \sin(2\pi wt)}$$

Notiamo ora che  $\underline{x}(t)$  è periodico di periodo  $\frac{1}{w}$ , e dunque per esso vale lo sviluppo in serie di Fourier (§ 2.2)  $\underline{x}(t) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n wt}$ , i cui coefficienti sono definiti come

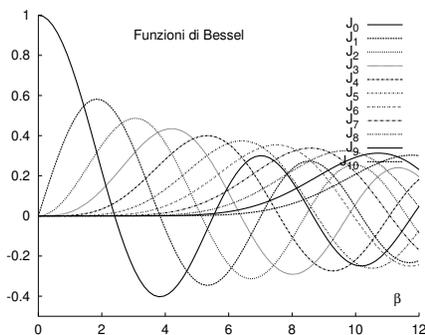
$$X_n = w \int_{-\frac{1}{2w}}^{\frac{1}{2w}} e^{j\beta \sin(2\pi wt)} e^{-j2\pi n wt} dt = \mathcal{J}_n(\beta) \quad (10.15)$$

ovvero sono pari<sup>46</sup> alle funzioni di Bessel del primo tipo, ordine  $n$  ed argomento  $\beta$ . Queste hanno l'andamento mostrato alla figura 10.4, in cui sono riportate anche le proprietà che le caratterizzano. I valori di  $X_n$  si ottengono quindi tracciando una linea verticale nel diagramma di figura in corrispondenza del valore adottato per  $\beta$ , e individuando il valore di ciascuna  $\mathcal{J}_n$  per quel  $\beta$ .

Osserviamo ora che in presenza di un valore di  $\beta$  elevato, in base all'ultima proprietà mostrata in fig. 10.4 ovvero che  $\mathcal{J}_n(\beta) \simeq 0$  con  $n > \beta$  se  $\beta \gg 1$ , le funzioni di Bessel di ordine

<sup>45</sup>Si è sostituito  $\cos$  con  $\sin$  nel caso PM per omogeneità di formulazione, senza alterare la sostanza delle cose.

<sup>46</sup>Le funzioni di Bessel del primo tipo, ordine  $n$  ed argomento  $\beta$  sono definite come  $\mathcal{J}_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin x - nx)} dx$ , riconducibili alla (10.15) mediante un cambio di variabile.



- $\mathcal{J}_n(\beta)$  è reale con  $\forall n, \beta$
- $\begin{cases} \mathcal{J}_n(\beta) = \mathcal{J}_{-n}(\beta) & n \text{ pari} \\ \mathcal{J}_n(\beta) = -\mathcal{J}_{-n}(\beta) & n \text{ dispari} \end{cases}$
- $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_n^2(\beta) = 1$
- $\mathcal{J}_n(\beta) \simeq 0$  con  $n > \beta$  se  $\beta \gg 1$

Figura 10.4: Andamento delle funzioni di Bessel del primo tipo e relative proprietà

$n > \beta$  sono praticamente nulle: è quindi lecito in tal caso limitare lo sviluppo in serie di Fourier di  $\underline{x}(t)$  ai primi  $\beta$  termini (positivi e negativi), ovvero

$$\underline{x}_{FM}(t) \simeq a \sum_{n=-\beta}^{\beta} \mathcal{J}_n(\beta) e^{j2\pi nwt}; \quad \underline{X}_{FM}(f) \simeq a \sum_{n=-\beta}^{\beta} \mathcal{J}_n(\beta) \delta(f - nw)$$

Pertanto, il segnale modulato  $x(t) = \Re\{\underline{x}(t)e^{j\omega_0 t}\}$  risulta pari a<sup>47</sup>

$$x(t) \simeq a \sum_{n=-\beta}^{\beta} \mathcal{J}_n(\beta) \cos 2\pi(f_0 + nw)t \quad (10.16)$$

ovvero è costituito da  $2\beta + 1$  cosinusoidi a frequenza  $f_0 \pm nw$  centrate attorno ad  $f_0$ , ed il relativo spettro di densità di potenza ha espressione<sup>48</sup>

$$\mathcal{P}_x(f) \simeq \frac{a^2}{4} \sum_{n=-\beta}^{\beta} |\mathcal{J}_n(\beta)|^2 [\delta(f - f_0 - nw) + \delta(f + f_0 + nw)] \quad (10.17)$$

ed è formato da impulsi centrati a frequenza  $f = \pm f_0 \pm nw$ .

Osserviamo che in base alla proprietà  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{J}_n^2(\beta) = 1$ , estendendo la somma in (10.17) per  $-\infty > n > \infty$  ed integrando su  $f$  si ottiene un risultato già noto, ovvero la potenza totale  $\mathcal{P}_x$  eguaglia quella della portante non modulata, pari a  $\frac{a^2}{2}$ , indipendentemente dall'indice di modulazione  $\beta$ .

**Modulazione a basso indice** Come anticipato al § 10.3.3 e mostrato in fig. 10.4, qualora  $\beta < 1$  le funzioni di Bessel  $\mathcal{J}_n(\beta)$  con  $n > 1$  presentano valori che possono essere trascurati. Pertanto in tal caso  $x(t)$  occupa una banda  $B = 2w$ , in modo del tutto simile all'AM-BLD.

<sup>47</sup> Infatti  $\underline{x}(t)e^{j\omega_0 t} = \sum_{n=-\beta}^{\beta} \mathcal{J}_n(\beta) e^{j2\pi nwt} e^{j2\pi f_0 t} = \sum_{n=-\beta}^{\beta} \mathcal{J}_n(\beta) e^{j2\pi(nw+f_0)t}$  la cui parte reale è appunto pari a  $\sum_{n=-\beta}^{\beta} \mathcal{J}_n(\beta) \cos 2\pi(nw + f_0)t$

<sup>48</sup> Infatti ad ogni termine  $\mathcal{J}_n(\beta) \cos 2\pi(f_0 + nw)t$  della (10.16) corrisponde una densità di potenza

$$\mathcal{P}(f) = \frac{\mathcal{J}_n^2(\beta)}{4} [\delta(f - f_0 - nw) + \delta(f + f_0 + nw)]$$

e la potenza della somma è pari alla somma delle potenze, in virtù della ortogonalità tra cosinusoidi.

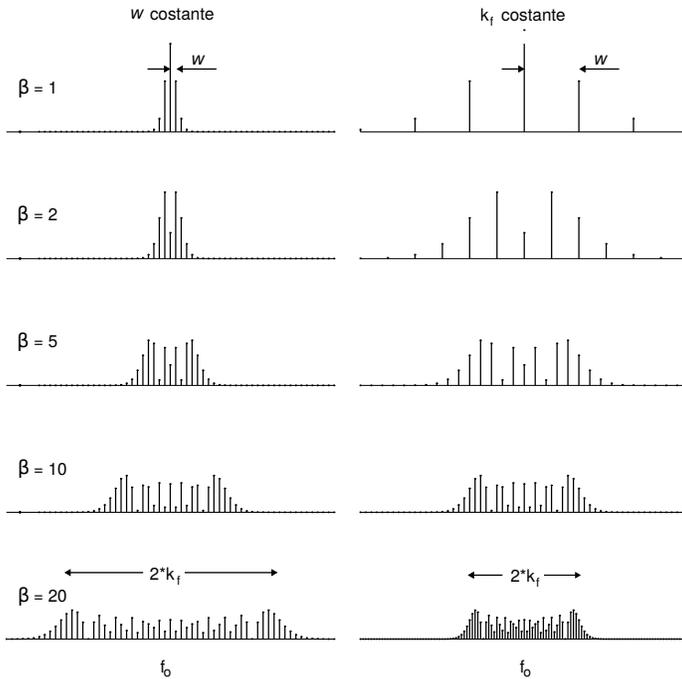


Figura 10.5: Spettro di ampiezza  $|X(f)|$  per segnale FM a modulazione sinusoidale. Solo la riga  $\beta = 10$  mantiene la stessa scala di frequenze a sin. come a ds.

**Modulazione ad alto indice** All'aumentare di  $\beta = \frac{k_f}{w}$ , nella (10.17) aumenta il numero di termini rilevanti, e la fig. 10.5 mostra l'aspetto di  $|X(f)|$  per  $f > 0$  (<sup>49</sup>) calcolato per valori di  $\beta$  crescenti, mantenendo fisso  $w$  (a sinistra) oppure  $k_f$  (a destra). Osserviamo che

- mantenendo  $w$  fisso ed aumentando  $k_f$ , ovvero l'ampiezza di  $m(t)$ , il numero di righe spettrali a frequenza  $f_0 \pm nw$  aumenta, occupando una banda crescente, che per  $\beta$  molto grande si estende da  $f_0 - \beta w$  a  $f_0 + \beta w$ , dato che  $\mathcal{J}_n(\beta) \approx 0$  per  $n > \beta$ ;
- mantenendo  $k_f$  fisso e diminuendo  $w$ , ossia la frequenza modulante, la banda occupata tende a ridursi, mentre le nuove righe spettrali a frequenza  $f_0 \pm nw$  si infittiscono. Per  $w \rightarrow 0$  si ha  $\beta \rightarrow \infty$  mentre la spaziatura tra le righe spettrali tende ad annullarsi, producendo una densità spettrale praticamente continua.

Notiamo che in entrambi i casi all'aumentare di  $\beta$  la banda occupata a frequenze positive è bene approssimata dal valore  $B = 2\beta w = 2\frac{k_f}{w} \cdot w = 2k_f$ , ossia pari al doppio della massima deviazione di frequenza istantanea  $\Delta f$ , vedi la tabella a pag. 289.

### 10.3.3.2 Regola di Carson

Come appena discusso, la modulazione FM da parte di un tono sinusoidale a frequenza  $w$  produce un segnale modulato  $x(t)$  la cui banda varia tra  $2w$  e  $2k_f$  nei casi di indice di modulazione

<sup>49</sup>Ovvero, di  $|X^+(f)| = \frac{1}{2} \underline{X}(f - f_0) = \frac{a}{2} \sum_{n=-\beta}^{\beta} |\mathcal{J}_n(\beta)| \delta(f - f_0 - nw)$

$\beta$  rispettivamente basso od alto. Una formula in grado di esprimere questo tipo di relazione è

$$B_C \simeq 2(k_f + w) = 2w(\beta + 1) \quad (10.18)$$

nota come *regola di Carson*<sup>50</sup>, in grado di tener conto di entrambi i fattori che concorrono alla determinazione della banda, e che fornisce i valori esatti<sup>51</sup> sia per  $\beta \ll 1$ , che per  $\beta \rightarrow \infty$ , in entrambi i casi in cui sia  $k_f$  ad aumentare, o  $w$  a diminuire.

Sebbene questo risultato si riferisca al caso di  $m(t) = \cos(2\pi wt)$ , la (10.18) viene spesso adottato come una buona approssimazione anche per altri tipi di segnali modulanti, come illustrato appresso.

**Modulazione multitono** Si riferisce ad un segnale FM per il quale  $m(t)$  è la combinazione di più sinusoidi a frequenza  $w_i$  ed ampiezza  $k_f^i$ . In tal caso la trattazione matematica si complica, e perviene al risultato che nel segnale modulato  $x(t)$  compaiono, oltre a componenti spettrali già analizzate e relative a ciascuna  $w_i$ , centrate in  $f_0$  e spaziate da multipli di  $w_i$ , anche componenti spaziate a frequenze somma e differenza delle combinazioni dei multipli delle  $w_i$ . In questo caso l'occupazione di banda è approssimata riscrivendo la (10.18) come  $B_C = 2w_M(\beta_M + 1)$  in cui  $w_M = \max_i \{w_i\}$  è la più grande delle frequenze modulanti e  $\beta_M = \Delta f_M / w_M$  è l'indice di modulazione *equivalente* per questo caso, avendo definito  $\Delta f_M = \sum_i k_f^i$  come la massima deviazione della frequenza istantanea  $\Delta f$ .

**Modulazione per segnali qualsiasi** Nel caso di un segnale modulante generico, limitato in banda tra  $-W$  e  $W$ , e che produce da una deviazione massima della frequenza istantanea  $\Delta f = k_f \cdot \max\{|m(t)|\}$ , l'occupazione di banda è approssimata riscrivendo nuovamente la regola di Carson come  $B_C \simeq 2W(\beta_s + 1)$  con  $\beta_s = \frac{\Delta f}{W}$ .

**Allargamento spettrale** L'applicazione della regola di Carson mostra che la banda occupata dal segnale modulato può risultare  $\beta_s + 1$  volte più estesa di quella  $W$  del segnale modulante, un comportamento del tutto nuovo rispetto a quanto avviene nel caso dell'AM. Nonostante possa sembrare un aspetto negativo, al § 11.3.2 si mostra come una maggiore occupazione di banda consenta di migliorare l'SNR dopo demodulazione, superando in tal modo le prestazioni ottenibili nel caso AM. Al contrario, se  $\beta_s \ll 1$  il comportamento si avvicina molto a quello lineare (vedi appendice 10.4.4).

### 10.3.3.3 Densità spettrale per FM ad alto indice

Riprendiamo il ragionamento iniziato al § 10.3.3 e relativo a come la densità di probabilità  $p_M(m)$  del segnale modulante si rifletta sulla densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  del corrispondente segnale FM nel caso di modulazione ad alto indice, ovvero qualora  $\beta_s \gg 1$ <sup>52</sup>. In questo caso, la

<sup>50</sup>J. R. Carson fu uno dei primi ad investigare la modulazione negli anni '20, vedi ad es. [http://en.wikipedia.org/wiki/John\\_Renshaw\\_Carson](http://en.wikipedia.org/wiki/John_Renshaw_Carson)

<sup>51</sup>Nel caso di modulazione ad alto indice, la (10.18) esprime la banda entro cui è contenuto il 98% della potenza del segnale modulato. Per indici  $2 < \beta < 10$  ne fornisce invece una stima *per difetto*, ed una approssimazione più corretta è  $B_C \simeq 2w(\beta + 2)$ .

<sup>52</sup>Sinceramente non ho afferrato appieno il motivo di questa limitazione. Quel che ho trovato esprime che "ciò equivale ad avere  $\Delta f \gg W$ , e quindi comporta il rispetto di una condizione detta *approssimazione quasi stazionaria*" e fa riferimento ad uno studio di H.E. Rowe del 1965. La tesi è che in tal caso la frequenza istantanea varia *lentamente* rispetto al periodo  $1/w$  della massima frequenza modulante, e dunque il segnale modulato osservato per un breve periodo è approssimato ad una sinusoida non modulata ed a frequenza costante pari a  $f_i(t) = f_0 + k_f \gamma$  in cui  $\gamma$  è il valore di  $m(t)$  praticamente costante nel periodo di osservazione. A me sembra che perché ciò avvenga, sia sufficiente che  $f_0 \gg \Delta f$ . Ma forse lo capirò con il tempo.

frazione di potenza totale  $\mathcal{P}_x = \frac{a^2}{2}$  del segnale FM che si distribuisce tra le frequenze  $f_1$  ed  $f_2$  è pari alla frazione di tempo per cui la frequenza istantanea  $f_i(t) = f_0 + k_f m(t)$  permane nello stesso intervallo, ovvero pari alla frazione di tempo per cui il segnale modulante  $m(t)$  assume valori compresi tra  $m_1 = \frac{f_1 - f_0}{k_f}$  e  $m_2 = \frac{f_2 - f_0}{k_f}$ . Tale frazione è proprio pari alla probabilità di trovare  $m_1 \leq m(t) \leq m_2$ , ovvero  $Prob\{m_1 \leq m(t) \leq m_2\} = \int_{m_1}^{m_2} p_M(m) dm$ , dove  $p_M(m)$  è la densità di probabilità che descrive il processo modulante.

Si può affermare dunque che qualora si generi un segnale FM ad alto indice a partire da un processo con densità di probabilità nota, lo spettro di densità di potenza del segnale modulato acquisisce l'andamento proprio della densità di probabilità del processo modulante, indipendentemente dal suo spettro di densità di potenza. Tale conclusione mantiene validità purché  $\beta \gg 1$ ; nel caso contrario, sono validi i ragionamenti sviluppati al § 10.3.3.5.

**Esempio** un processo uniforme  $m(t)$  limitato in banda  $\pm W$ , con densità di probabilità  $p_M(m) = \frac{1}{\Delta_M} \text{rect}_{\Delta_M}(m)$ , modula ad alto indice una portante a frequenza  $f_0$  ed ampiezza  $a$ , con un coefficiente di modulazione  $k_f$ . Determinare la  $\mathcal{P}_x(f)$  del segnale modulato.

Notiamo che la frequenza istantanea  $f_i$  rimane limitata tra  $f_0 - \frac{\Delta_M}{2} k_f$  e  $f_0 + \frac{\Delta_M}{2} k_f$ . Inoltre, la potenza totale deve risultare ancora pari a  $\frac{a^2}{2}$ . Pertanto si ottiene<sup>53</sup>:

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{a^2}{4\Delta_M k_f} \left[ \text{rect}_{\Delta_M k_f}(f - f_0) + \text{rect}_{\Delta_M k_f}(f + f_0) \right]$$

**Esempio** Nel caso in cui  $m(t)$  sia sinusoidale, con fase iniziale aleatoria a distribuzione uniforme,  $m(t)$  è una realizzazione di un processo armonico (pag. 116), e dunque per  $\beta \gg 1$  risulterà  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{a^2}{1 - (f/k_f)^2}$ , con l'andamento rappresentato dalla fig. 5.3 a pag. 116, ovvero il quadrato dell'andamento a cui tendono (per  $\beta \rightarrow \infty$ ) i grafici in basso di fig. 10.5. Pertanto le righe spettrali, addensandosi, tendono a disporsi in accordo all'andamento della densità di probabilità  $p_M(m)$  del processo armonico.

### 10.3.3.4 Indice di modulazione per processi

Nel caso in cui non sia nota la d.d.p. del processo modulante, ma solo la sua potenza, oppure qualora non sussista la condizione di alto indice  $\beta_s \gg 1$ , oppure ancora non sia possibile definire il valore della massima deviazione di frequenza  $\Delta f = k_f \cdot \max\{|m(t)|\}$  come ad esempio per  $m(t)$  gaussiano, allora l'occupazione di banda può ancora essere approssimata mediante un'ultima variazione della regola di Carson, che viene ora applicata dopo aver definito un indice di modulazione  $\beta_p$  per processi come

$$\beta_p = \begin{cases} \frac{\sigma_\alpha}{W} & \text{(PM)} \\ \frac{\sigma_f}{W} & \text{(FM)} \end{cases}$$

in cui  $W$  è la banda a frequenze positive del segnale modulante,  $\sigma_f = k_f \sqrt{\mathcal{P}_m}$  rappresenta la deviazione standard della frequenza istantanea<sup>54</sup>, e  $\sigma_\alpha = k_\phi \sqrt{\mathcal{P}_m}$  è la deviazione standard della fase modulante<sup>55</sup>. L'applicazione della regola di Carson con il nuovo valore di  $\beta_p$  fornisce

<sup>53</sup>Volendo applicare la regola di Carson per calcolare la banda, si avrebbe (considerando  $\beta \gg 1$ )  $B_C = 2W(\beta + 1) \simeq 2 \frac{\Delta_M}{W} W = 2\Delta_M$ , in cui  $\Delta f = k_f \frac{\Delta_M}{2}$ . Pertanto risulta  $B_C = 2k_f \frac{\Delta_M}{2} = k_f \Delta_M$ , in accordo al risultato previsto nel caso di modulazione ad alto indice.

Qualora si fosse invece posto  $\beta = \frac{\sigma_f}{W}$  (vedi 10.3.3.4) si sarebbe ottenuto  $B_C = 2W(\beta + 1) \simeq 2 \frac{\sigma_f}{W} W = 2\sigma_f = 2k_f \sqrt{\mathcal{P}_m} = 2k_f \sqrt{\frac{\Delta_M^2}{12}} = 2k_f \frac{\Delta_M}{2\sqrt{3}} = \frac{\Delta_M k_f}{\sqrt{3}}$ , un risultato che è circa pari a 0.58 volte quello precedente. Data la particolarità di  $p_M(m)$  uniforme, in questo caso è da preferire il primo risultato.

<sup>54</sup>Infatti, dalla definizione  $f_i(t) = f_0 + k_f m(t)$  si ottiene che  $\sigma_f^2 = k_f^2 \sigma_M^2$ , in cui  $\sigma_M^2 = \mathcal{P}_m$  se  $m(t)$  è un processo stazionario ergodico a media nulla.

<sup>55</sup>Come sopra, partendo dalla relazione  $\alpha(t) = k_\phi m(t)$ .

un risultato che non indica più la banda *totale* occupata, ma individua una *banda efficace* entro cui  $\mathcal{P}_x(f)$  è in larga parte (ma non completamente) contenuta (vedi anche 20.2).

Nel caso in cui *non* risulti  $\beta \gg 1$ , lo spettro di potenza del segnale modulato FM torna a dipendere da quello del segnale modulante, e si ricade nella trattazione che segue.

### 10.3.3.5 Densità spettrale per FM a basso indice

In questo caso si suppone l'indice di modulazione  $\beta$  piccolo a sufficienza, in modo che lo sviluppo in serie dell'inviluppo complesso del segnale modulato possa essere arrestato ai primi termini. Sotto opportune ipotesi, si può mostrare che vale il risultato

$$\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) \simeq a^2 e^{-\sigma_\alpha^2} \left[ \delta(f) + \mathcal{P}_\alpha(f) + \frac{1}{2} \mathcal{P}_\alpha(f) * \mathcal{P}_\alpha(f) + \frac{1}{3!} \mathcal{P}_\alpha(f) * \mathcal{P}_\alpha(f) * \mathcal{P}_\alpha(f) + \dots \right]$$

avendo indicato con  $\sigma_\alpha^2$  la varianza della fase modulata e con  $\mathcal{P}_\alpha(f)$  il relativo spettro di densità di potenza, pari rispettivamente a

	$\mathcal{P}_\alpha(f)$	$\sigma_\alpha^2$
PM	$k_\phi^2 \mathcal{P}_m(f)$	$k_\phi^2 P_m$
FM	$k_f^2 \frac{\mathcal{P}_m(f)}{f^2}$	$k_f^2 \int_{-w}^w \frac{\mathcal{P}_m(f)}{f^2} df$

Osserviamo che se  $k_\phi$  (o  $k_f$ ) tende a zero,  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$  si riduce ad un impulso, corrispondente alla portante non modulata. All'aumentare di  $k_\phi$  (o  $k_f$ ), aumenta anche  $\sigma_\alpha^2$  e dunque il termine  $e^{-\sigma_\alpha^2}$  diminuisce, riducendo la concentrazione di potenza a frequenza portante. Dato che risulta comunque  $P_{\underline{x}} = a^2$ , la potenza residua si distribuisce sugli altri termini, rappresentati da  $\mathcal{P}_\alpha(f)$  e delle sue *autoconvoluzioni*. E' immediato notare come, al crescere di  $k_\phi$  (o  $k_f$ ), cresca la banda.

In appendice 10.4.4 è illustrata una tecnica di modulazione per segnali FM modulati a basso indice.

## 10.4 Appendici

### 10.4.1 Soluzioni di mo-demodulazione

Questa sottosezione crescerà nelle prossime edizioni. Al momento propone delle implementazioni del *mixer* presente ad entrambi gli estremi di un collegamento in banda traslata, ed una tecnica per generare una portante di modulazione (oppure eterodina) che sia *stabile* in frequenza. Dato che tutti questi elementi sono ormai integrati in un unico *chip*, possiamo anche visitare quelli a catalogo di un produttore a caso<sup>56</sup>.

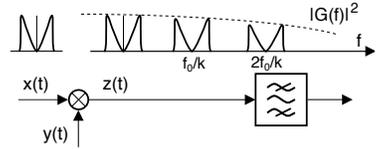
#### 10.4.1.1 Il mixer

Approfondiamo le tecniche realizzative del dispositivo che effettua la funzione di moltiplicazione per una portante, presente in tutti gli schemi di mo-demodulazione esposti in questo capitolo. Sebbene esistano schemi circuitali capaci di realizzare esattamente il prodotto tra due segnali analogici<sup>57</sup>, illustriamo due approcci alternativi.

<sup>56</sup>Vedi ad es. <https://www.analog.com/en/parametricsearch/10709#/>

<sup>57</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Ring\\_modulation](https://en.wikipedia.org/wiki/Ring_modulation) e [https://en.wikipedia.org/wiki/Gilbert\\_cell](https://en.wikipedia.org/wiki/Gilbert_cell)

**Moltiplicazione per un'onda rettangolare** Non è strettamente necessario disporre di un oscillatore sinusoidale per realizzare il prodotto di un segnale con una portante: è sufficiente un'onda quadra ed un filtro! Infatti, un qualunque segnale periodico



$$y(t) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

di periodo  $T = k/f_0$  (con  $k$  intero) possiede una densità di potenza<sup>58</sup>

$$\mathcal{P}_y(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{k}f_0\right) \quad (10.19)$$

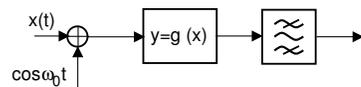
Il prodotto di tale segnale per  $x(t)$  produce un segnale  $z(t)$  con densità di potenza (vedi § 6.5.3)

$$\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_y(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x\left(f - \frac{n}{k}f_0\right)$$

Pertanto, il desiderato spettro di potenza si ottiene inserendo dopo il moltiplicatore un filtro passa banda centrato su una delle armoniche a frequenza  $\frac{n}{k}f_0$  di  $y(t)$ , ovvero su una delle repliche spettrali che compongono  $\mathcal{P}_y(f)$ . L'involuppo mostrato in figura è relativo ad una scelta per  $g(t)$  del tipo  $g(t) = \text{rect}_\tau(t)$  con  $\tau$  sufficientemente minore di  $k/f_0$  e scelto in modo opportuno<sup>59</sup>, in modo che se la banda di  $x(t)$  è sufficientemente ridotta rispetto a  $f_0/k$  l'entità della distorsione lineare di ampiezza può essere considerata trascurabile. Lo stesso dispositivo può essere usato anche per i moltiplicatori di demodulazione: in tal caso, il filtro da usare sarà un passa basso.

Dato che un punto vista circuitale il prodotto per un'onda quadra è assimilabile ad un interruttore che si apre e si chiude, un dispositivo del genere viene detto *switching mixer*.

**Utilizzo di una non linearità** Un secondo metodo di realizzare il mixer è con un sommatore, un oscillatore, un dispositivo non lineare, ed un filtro passa-banda. Il dispositivo non lineare ha una caratteristica ingresso-uscita del tipo



$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

e quando in ingresso viene applicata la somma di due segnali  $x(t) + \cos \omega_0 t$ , produce

$$y(t) = a_1(x(t) + \cos \omega_0 t) + a_2(x^2(t) + \cos^2 \omega_0 t + 2x(t) \cos \omega_0 t) + a_3(\dots) + \dots$$

da cui, osservando che i termini  $\cos^n \omega_0 t$  sono relativi a termini a frequenza  $nf_0$ <sup>60</sup>, il filtro passa banda può estrarre il termine  $x(t) \cos \omega_0 t$  a cui siamo interessati.

<sup>58</sup>La 10.19 si ottiene applicando l'espressione per i coefficienti  $Y_n$  dello sviluppo in serie di  $y(t)$  in funzione dei campioni della trasformata di un suo periodo  $G(f)|_{f=n/T}$  data dalla (3.3) ovvero  $Y_n = \frac{1}{T}G\left(\frac{n}{T}\right)$ , a quella  $\mathcal{P}_y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Y_n|^2 \delta(f - n/T)$  fornita dalla (6.10) per la densità di potenza di un segnale periodico.

<sup>59</sup>Dato che  $G(f)$  si annulla per  $f = m/\tau$ , se scegliessimo  $\tau = 1/hf_0$  avremmo  $G(f) = 0$  per  $f = mhf_0$  impedendo il funzionamento del circuito per qualche armonica di  $f_0/k$ . In particolare, scegliendo  $h = 1$  lo schema sarebbe del tutto inutilizzabile!

<sup>60</sup>Infatti la formula di *de Moivre* asserisce che  $(\cos \alpha + j \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + j \sin n\alpha$ , come confermato anche dalla formula di *Eulero*  $(\cos \alpha + j \sin \alpha)^n = (e^{j\alpha})^n = e^{jn\alpha} = \cos n\alpha + j \sin n\alpha$ .

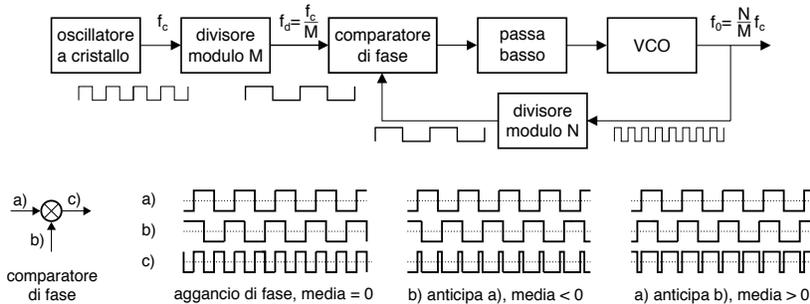


Figura 10.6: Sintesi di frequenza con PLL ed oscillatore a cristallo (sopra), e funzionamento del comparatore di fase per forme d'onda rettangolari (sotto)

Da un punto di vista circuitale, il dispositivo non lineare può essere costituito da un semplice diodo, per il quale la corrente che lo attraversa è espressa in funzione della tensione  $V$  ai suoi capi in base all'espressione  $I = I_s \left( e^{V/\alpha} - 1 \right)$  in cui  $I_s$  ed  $\alpha$  sono delle costanti; per piccoli valori di  $V$  la relativa espansione in serie di Taylor permette infatti di scrivere  $e^{V/\alpha} - 1 \simeq V/\alpha + \frac{(V/\alpha)^2}{2}$  e dunque, ponendo  $V = x(t) + \cos \omega_0 t$  si ottiene il risultato anticipato.

#### 10.4.1.2 Sintesi di frequenza con PLL ed oscillatore a cristallo

Il circuito illustrato al § 10.2.2.2 può essere modificato allo scopo di generare una portante di modulazione caratterizzata da una stabilità sensibilmente migliore di quella che può essere ottenuta a partire da oscillatori realizzati mediante circuiti di tipo analogico<sup>61</sup>, il cui segnale presenta una frequenza che dipende anche dalla precisione dei valori dei componenti utilizzati e dalla temperatura di lavoro, oltre a presentare una variabilità che aumenta al crescere della frequenza di oscillazione. Al contrario, gli oscillatori basati su di un cristallo<sup>62</sup> sono molto più stabili e precisi, tipicamente dell'ordine di  $\pm 20$  ppm<sup>63</sup>, anche se il loro costo, disponibilità e fragilità peggiora all'aumentare della frequenza, arrivando in pratica a qualche decina di MHz.

Per generare portanti più elevate si utilizza la frequenza dell'oscillatore a cristallo come un riferimento a cui far agganciare un circuito PLL modificato come in figura 10.6, in cui le forme d'onda sono di tipo rettangolare in modo da poterne ottenere di nuove con periodo multiplo di quello di partenza (e dunque frequenza pari ad un suo sottomultiplo) mediante l'uso di un circuito divisore modulo  $N$ <sup>64</sup>. In particolare, il moltiplicatore è ora detto *comparatore di fase*<sup>65</sup> ed opera (per forme d'onda bipolari) come mostrato nella parte inferiore di fig. 10.6, producendo un'onda bipolare a *valor medio* positivo o negativo a seconda se l'ingresso a sinistra sia in anticipo od in ritardo rispetto a quello proveniente dal basso, *valor medio* che è proporzionale allo slittamento in eccesso rispetto alla condizione di uno sfasamento pari ad un quarto di periodo.

La frequenza  $f_0$  generata dal vco si aggancia quindi ad un valore  $N$  volte maggiore di quello  $f_d$  in ingresso al comparatore, in virtù del divisore per  $N$  posto a valle del vco; essendo il

<sup>61</sup>Vedi ad es. <https://it.wikipedia.org/wiki/Oscillatore>

<sup>62</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Oscillatore\\_al\\_cristallo](https://it.wikipedia.org/wiki/Oscillatore_al_cristallo)

<sup>63</sup>Abbreviazione di *parti per milione*: 10 ppm equivalgono a 10 cicli ogni  $10^6$ , ovvero un valore compreso tra 999.990 ed 1.000.010 per una frequenza nominale di 1 MHz.

<sup>64</sup>Vedi ad es. <http://studenti.fisica.unifi.it/~carla/appunti/2008-9/slides-7.pdf>

<sup>65</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Comparatore\\_di\\_fase](https://it.wikipedia.org/wiki/Comparatore_di_fase)

divisore di tipo programmabile, la frequenza del segnale prodotto dal vco può essere modificata variando il valore di  $N$ . Allo stesso tempo, anche la frequenza  $f_c$  prodotta dall'oscillatore a cristallo viene divisa per un diverso numero  $M$ , in modo che la frequenza di uscita risulti pari a  $f_0 = \frac{N}{M} f_c$ . In tal modo il circuito può essere programmato per generare frequenze  $\frac{N}{M}$  volte maggiori di quella prodotta dal cristallo, mantenendo la sua stessa precisione: ad esempio un cristallo con precisione di 20 ppm e frequenza  $f_c = 10$  MHz, dopo aver scelto  $M = 1$  ed  $N = 20$ , permette di ottenere  $f_0 = 200$  MHz  $\pm 4$  KHz.

**Moltiplicatore di frequenza** Il medesimo schema può essere impiegato per produrre *più segnali* di clock tutti multipli di una comune velocità di partenza, ad esempio nell'ambito di reti logiche complesse, o all'interno di microprocessori.

### 10.4.1.3 Sintesi digitale diretta

Si tratta della possibilità di generare le portanti di modulazione e demodulazione per via completamente numerica, nella forma di una sequenza costituita da valori dei campioni della forma d'onda sinusoidale letti da una memoria che viene indirizzata da un contatore ciclico. L'argomento sarà approfondito in una prossima edizione.

## 10.4.2 Densità di potenza per segnali AM a banda laterale unica

Affrontiamo il problema di dimostrare che per un segnale AM a banda laterale *superiore* (§ 10.1.2) risulta

$$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_{m^+}(f - f_0) + \mathcal{P}_{m^-}(f + f_0)$$

come asserito all'eq. (10.7). A tale riguardo, la (9.19) stabilisce che

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{1}{4} (\mathcal{P}_x(f - f_0) + \mathcal{P}_x(-f - f_0)) \quad (10.20)$$

in cui  $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$ . Nel nostro caso  $\underline{x}(t) = m(t) + j\hat{m}(t) = 2m^+(t)$  (vedi eq. (9.16)), e dunque

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \langle \underline{x}(t), \underline{x}(t + \tau) \rangle = \langle 2m^+(t), 2m^+(t + \tau) \rangle = 4\mathcal{R}_{m^+}(\tau)$$

in cui si è fatto uso della notazione di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  per generalizzare il calcolo dell'autocorrelazione sia al caso di segnale di potenza, sia a quello di un processo.

Eseguito la trasformata otteniamo dunque

$$\mathcal{P}_x(f) = 4\mathcal{P}_{m^+}(f) = 4\mathcal{P}_m(f) |H_{fp}(f)|^2$$

in cui  $H_{fp}(f)$  è definito al § 9.2.6, e pertanto  $\mathcal{P}_x(f)$  giace tutta sulla semiretta per  $f > 0$ . Dunque

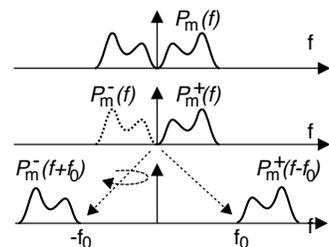
la (10.20) si riscrive considerando che per  $f > 0$  si ha

$$\mathcal{P}_x(f)|_{f>0} = \frac{1}{4} \mathcal{P}_x(f - f_0) = \mathcal{P}_{m^+}(f - f_0)$$

mentre per  $f < 0$  risulta

$$\mathcal{P}_x(f)|_{f<0} = \mathcal{P}_{m^+}(-f - f_0) = \mathcal{P}_{m^-}(f + f_0)$$

come mostrato in figura.



### 10.4.3 Calcolo della potenza di un segnale AM BLU

Come anticipato in fondo al § 10.1.2, mostriamo che se

$$x_{BLU}(t) = \frac{k_a}{\sqrt{2}} (m(t) \cos \omega_0 t - \hat{m}(t) \sin \omega_0 t) \quad (10.21)$$

allora  $\mathcal{P}_x = \frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$ . Possiamo innanzitutto scrivere che

$$\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_{x^+} + \mathcal{P}_{x^-} = 2\mathcal{P}_{x^+} \quad (10.22)$$

in quanto le componenti a frequenza positiva e negativa di  $x(t)$  sono ortogonali<sup>66</sup>, e lo spettro di densità di potenza è una funzione pari della frequenza:  $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_x(-f)$ . Inoltre, invertendo la relazione  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\mathcal{P}_{x^+}(f + f_0)$  valida per la densità di potenza dell'involuppo complesso, otteniamo  $\mathcal{P}_{x^+}(f) = \frac{1}{4}\mathcal{P}_{\underline{x}}(f - f_0)$ , e quindi

$$\mathcal{P}_{x^+} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{\underline{x}}(f - f_0) df = \frac{1}{4} \mathcal{P}_{\underline{x}}$$

che, sostituita nella (10.22), fornisce  $\mathcal{P}_x = 2\mathcal{P}_{x^+} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{\underline{x}}$ .

Come sappiamo,  $\mathcal{P}_{\underline{x}} = \mathcal{R}_{\underline{x}}(0)$  in cui, nell'ipotesi di processo ergodico,  $\mathcal{R}_{\underline{x}}(0)$  è l'auto-correlazione di un qualunque membro, ad es. proprio di (10.21), e dunque essendo in tal caso  $\underline{x}(t) = \frac{k_a}{\sqrt{2}} [m(t) + j\hat{m}(t)]$ , si ottiene

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{\underline{x}} = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{\underline{x}}(0) = \frac{1}{2} \left( \frac{k_a}{\sqrt{2}} \right)^2 [\mathcal{R}_{mm}(0) + \mathcal{R}_{\hat{m}\hat{m}}(0) + 2j\mathcal{R}_{m\hat{m}}(0)]$$

Osserviamo ora che  $\mathcal{R}_{m\hat{m}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t) \hat{m}(t) dt = 0$  in quanto  $m(t)$  ed  $\hat{m}(t)$  sono ortogonali; inoltre,  $\mathcal{R}_{mm}(0) = \mathcal{P}_m = \mathcal{R}_{\hat{m}\hat{m}}(0)$  (non dimostrato). Pertanto si ottiene

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2} \frac{k_a^2}{2} [\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_m] = \frac{1}{4} k_a^2 \cdot 2\mathcal{P}_m = \frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$$

#### 10.4.3.1 Calcolo della potenza di segnali BLD-PI, PS, PPS

La tabella al § 10.1.4 è calcolata adottando lo stesso procedimento sopra esposto, in cui ora

$$\mathcal{P}_{\underline{x}} = \mathcal{P}_{x_c} = \begin{cases} k_a^2 \mathcal{P}_m & \text{(BLD-PS)} \\ a_p^2 + k_a^2 \mathcal{P}_m & \text{(BLD-PI, PPS)} \end{cases}$$

### 10.4.4 Modulazione FM a basso indice

Riprendiamo qui il caso in cui  $\beta \ll 1$  e di conseguenza  $\Delta\alpha \ll 1$ , consentendo quindi di arrestare al 1° ordine lo sviluppo in serie di potenza (eq. (10.14)) di  $\underline{x}(t)$ . Se il segnale modulante è cosinusoidale, il segnale FM risulta

$$x_{FM}(t) = a \cos \left( \omega_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t \cos(2\pi w\tau) d\tau \right) = a \cos(\omega_0 t + \beta \sin(2\pi w t))$$

Ricordando che  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ ,  $x_{FM}(t)$  può essere riscritto come

$$x_{FM}(t) = a \cos \omega_0 t \cos(\beta \sin 2\pi w t) - a \sin \omega_0 t \sin(\beta \sin 2\pi w t)$$

<sup>66</sup>Infatti risulta  $\int_{-\infty}^{\infty} X^+(f) X^-(f) df = 0$ , dato che i due termini non si sovrappongono in frequenza.

che, se  $\beta \ll 1$ , diviene

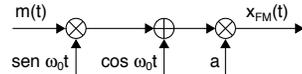
$$x_{FM}(t) = a \cos \omega_0 t - \beta a \sin \omega_0 t \sin 2\pi \omega t \quad (10.23)$$

che confrontiamo con l'espressione

$$x_{AM}(t) = a_p \cos \omega_0 t + k_a \cos \omega_0 t \cos 2\pi \omega t \quad (10.24)$$

che si otterrebbe per modulazione a portante intera, o ridotta, dello stesso  $m(t)$ .

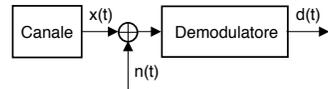
Il confronto tra (10.23) e (10.24) rivela che mentre nell'AM il segnale modulante moltiplica una portante *in fase* a quella (più o meno) intera, nell'FM a basso indice  $m(t)$  opera su di una portante *in quadratura*. Questa considerazione è alla base dello *schema di modulazione* per segnali FM a basso indice mostrato a lato e realizzabile *sommando* alla portante, un segnale modulato AM-BLD su di una portante in quadratura.



D'altra parte, uno schema di modulazione del genere produce anche una modulazione AM parassita: questa può essere eliminata in ricezione dall'azione congiunta di uno squadratore e di un filtro passa basso, come discusso in fondo al § 10.3.2.2.

## Prestazioni delle trasmissioni modulate

**P**ROCEDIAMO ora con l'analisi dell'effetto che il rumore  $n(t)$  presente all'uscita del canale produce sul risultato del processo di demodulazione  $d(t)$ , per i due casi analizzati al cap. 10 di modulazione di ampiezza e angolare; tale effetto è quindi quantitativamente descritto dal *rapporto segnale-rumore SNR* osservabile per il segnale demodolato.



### 11.1 Il rumore nei segnali modulati

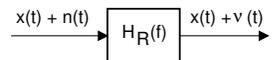
Consideriamo un segnale modulato  $x(t)$  ed affetto da un rumore additivo gaussiano bianco a media nulla  $n(t)$  (§ 7.4.2) con densità di potenza

$$\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2}$$

la cui occupazione spettrale è considerata costante a tutte le frequenze di interesse.

#### 11.1.1 Filtro di ricezione

Come già discusso a riguardo delle trasmissioni numeriche di banda base § 8.4.1, prima di essere demodolato il segnale ricevuto viene fatto passare attraverso un *filtro di ricezione* passa-banda  $H_R(f)$  centrato sulle frequenze del segnale, in modo da limitare la banda del rumore ricevuto e quindi ridurre la potenza del rumore in ingresso al demodulatore. Il filtro presenta una risposta in frequenza  $H_R(f)$  con modulo costante nella banda del segnale, mentre tende a zero al di fuori di essa, in modo che il segnale utile  $x(t)$  transita inalterato, mentre il rumore  $n(t)$  venga limitato in banda, producendo l'uscita  $\nu(t)$ .



#### 11.1.2 Rapporto segnale-rumore

La qualità di ricezione (in funzione della frequenza) dipende dalla densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  del segnale modulato e da quella  $\mathcal{P}_\nu(f)$  del rumore filtrato, in base al rapporto

$$SNR_{RF}(f) = \frac{\mathcal{P}_x(f)}{\mathcal{P}_\nu(f)}$$

in cui  $\mathcal{P}_x(f)$  dipende dal tipo di modulazione (cap. 10), mentre per quanto riguarda il rumore, dopo il filtraggio  $\mathcal{P}_\nu(f)$  risulta pari a

$$\mathcal{P}_\nu(f) = \mathcal{P}_n(f) |H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 \quad (11.1)$$

D'altra parte, ha senso valutare l'*SNR complessivo*, ovvero il rapporto tra la potenza di segnale e quella di rumore *totali*: la prima risulta allora pari a

$$\mathcal{P}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) df$$

mentre per quella di rumore dalla (11.1) si ottiene

$$\mathcal{P}_\nu = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df$$

valutando cioè la potenza di rumore che attraversa il filtro di ricezione  $H_R(f)$ .

### 11.1.3 Banda di rumore

Definiamo questo concetto con l'aiuto della fig. 11.1, dove in alto è rappresentata la densità spettrale del segnale modulato, che occupa una banda<sup>1</sup>  $B_{RF}$ . Nel caso fosse possibile adottare come filtro di ricezione un passa banda *ideale* (§ 12.1.2.1), si otterrebbe allora  $\mathcal{P}_\nu = N_0 B_{RF}$ . Invece  $H_R(f)$  presenta la regione di transizione raffigurata in fig. 11.1-b), che ne eleva la banda ad un valore  $B_\nu > B_{RF}$ , e la potenza totale del rumore uscente da  $H_R(f)$  risulta pertanto pari a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\nu &= \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df = \\ &= N_0 \int_0^{\infty} |H_R(f)|^2 df = N_0 B_N |H_R(f_0)|^2 \end{aligned}$$

Il termine  $B_{RF} \leq B_N \leq B_\nu$  rappresenta la cosiddetta *banda di rumore* definita come

$$B_N = \frac{\int_0^{\infty} |H_R(f)|^2 df}{|H_R(f_0)|^2}$$

ossia come la banda di un filtro ideale *equivalente* che lascia passare la stessa potenza di rumore, come rappresentato in fig. 11.1-c).

Dato che l'effettiva banda  $B_\nu$  del filtro di ricezione è legata alla sua complessità e costo e dunque può essere pensata come *negoziabile* in sede di scelte progettuali, a volte si procede assumendo  $B_N = B_{RF}$  ovvero come nel caso ideale, con l'accortezza che in tal caso i valori di *SNR* calcolati al § 11.2 saranno pari al massimo possibile, a cui *defalcare* successivamente le penalizzazioni legate alla effettiva implementazione.

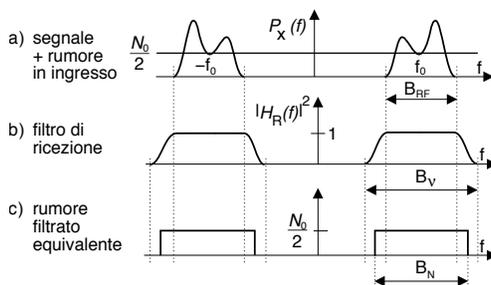


Figura 11.1: Densità spettrale al ricevitore, filtro di ricezione e rumore bianco passa banda equivalente

<sup>1</sup>Il pedice  $_{RF}$  sta per *radio frequency* ed indica l'occupazione di banda a frequenze positive di un segnale modulato.

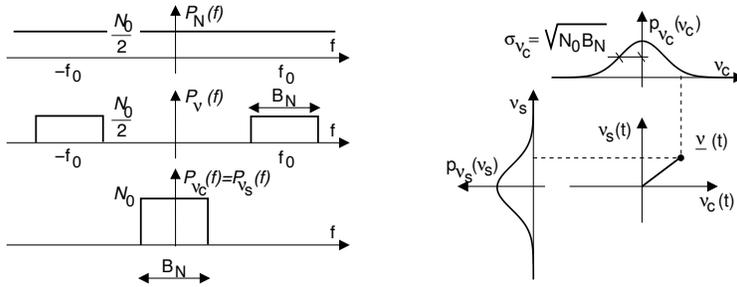


Figura 11.2: Densità spettrale e d.d.p. delle c.a. di b.f. del rumore demodulato

### 11.1.4 Demodulazione di un processo di rumore

Il rumore  $\nu(t)$  in uscita dal filtro di ricezione  $H_R(f)$  è un processo ergodico bianco a media nulla di tipo *passa-banda*, e può quindi essere descritto nei termini delle sue componenti analogiche di bassa frequenza:

$$\nu(t) = \nu_c(t) \cos \omega_0 t - \nu_s(t) \sin \omega_0 t \quad (11.2)$$

Allo scopo di valutare la densità di potenza  $\mathcal{P}_{\nu_c, \nu_s}(f)$  delle c.a. di b.f. di  $\underline{\nu}(t)$ , facciamo riferimento alla figura 11.2 che a sinistra mostra la densità di potenza  $\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2}$  del rumore  $n(t)$  in ingresso ad un filtro di ricezione  $H_R(f)$  ideale e con risposta in frequenza unitaria  $|H_R(f_0)|^2 = 1$ ; pertanto risulta

$$\mathcal{P}_\nu(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{B_N}(f - f_0) + \frac{N_0}{2} \text{rect}_{B_N}(f + f_0)$$

e quindi dato che  $\mathcal{P}_\nu^+(f) = \mathcal{P}_\nu^-(f)$  la (9.32) di pag. 268 fornisce

$$\mathcal{P}_{\nu_c}(f) = \mathcal{P}_{\nu_s}(f) = \mathcal{P}_\nu^+(f + f_0) + \mathcal{P}_\nu^-(f - f_0) = N_0 \text{rect}_{B_N}(f)$$

Come discusso al § 9.4.4.2,  $\nu_c(t)$  e  $\nu_s(t)$  sono due processi congiuntamente gaussiani, ergodici, a media nulla ed incorrelati e pertanto statisticamente indipendenti in quanto gaussiani. Abbiamo inoltre verificato come presentino anche uguale varianza (e potenza), a sua volta uguale alla potenza del rumore filtrato  $\mathcal{P}_\nu$ , ovvero

$$\sigma_{\nu_c}^2 = \sigma_{\nu_s}^2 = \mathcal{P}_\nu = N_0 B_N$$

Il lato destro di fig. 11.2 rappresenta come nelle condizioni descritte la posizione di  $\underline{\nu}(t)$  nel piano dell'involuppo complesso sia una v.a. bidimensionale a componenti gaussiane indipendenti e con identica d.d.p.; osserviamo inoltre che nel caso in cui la banda di  $\nu(t)$  sia *stretta rispetto a  $f_0$* , l'involuppo complesso  $\underline{\nu}(t) = \nu_c(t) + j\nu_s(t)$  evolve *lentamente* rispetto alla velocità di rotazione di  $\underline{\nu}(t)$   $e^{j\omega_0 t}$ .

In definitiva quindi, operando una demodulazione coerente in fase ed in quadratura del segnale ricevuto, nelle componenti analogiche risultanti saranno presenti i termini additivi  $\nu_c(t)$  e  $\nu_s(t)$ , entrambi di potenza  $\mathcal{P}_\nu = N_0 B_N$ .

### 11.1.5 SNR di riferimento

In modo simile a quanto avvenuto al § 8.4.4 con la definizione di  $E_b/N_0$ , individuiamo nel valore

$$SNR_0 = \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = SNR_0 \quad (11.3)$$

il parametro *di sistema* che esprime le prestazioni *di riferimento* rispetto al quale confrontare l'*SNR* ottenuto attuando i diversi metodi di modulazione discussi al cap. 10. La (11.3) è infatti definita nei termini di parametri *di sistema* che esprimono le *condizioni operative*, ovvero la potenza ricevuta  $\mathcal{P}_x$ , il livello di rumore  $N_0/2$ , e la massima frequenza  $W$  del segnale modulante; viceversa non dipende dai parametri *di trasmissione*, come l'indice di modulazione.

Inoltre, notiamo come  $SNR_0$  corrisponda all'*SNR in assenza di modulazione*, ovvero ciò che si otterrebbe ricevendo direttamente il segnale di banda base con potenza  $\mathcal{P}_x$  in presenza di rumore additivo  $\mathcal{P}_N(f) = N_0/2$  attraverso un filtro passa basso con banda  $2W$ .

Notiamo infine (e questo è valido anche per i casi che seguono) che *SNR* può riferirsi indifferentemente sia alle potenze di segnale che a quelle disponibili (vedi § 15.1.1.3), in quanto

$$SNR_0 = \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} \frac{4R_g}{4R_g} = \frac{W_{d_x}}{W_{d_N}}.$$

## 11.2 Prestazioni delle trasmissioni a modulazione di ampiezza

Al fine di valutare il rapporto *SNR* per le diverse tecniche di modulazione di ampiezza, esprimiamo il segnale modulato nei termini delle sue componenti analogiche

$$x_{AM}(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t$$

a cui si somma il rumore *filtrato*  $\nu(t)$  (eq. (11.2)), e dunque in uscita da un demodulatore coerente in fase e quadratura si osserva un segnale demodulato  $d(t)$  espresso in base alle componenti analogiche

$$\begin{cases} d_c(t) = x_c(t) + \nu_c(t) \\ d_s(t) = x_s(t) + \nu_s(t) \end{cases}.$$

Tra la potenza del segnale ricevuto  $x(t)$  e quella delle sue c.a. di b.f. sussiste<sup>2</sup> la relazione

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{x_c} + \frac{1}{2} \mathcal{P}_{x_s} \quad (11.4)$$

<sup>2</sup>Infatti i segnali  $x_c(t) \cos \omega_0 t$  e  $x_s(t) \sin \omega_0 t$  risultano ortogonali, e le potenze si sommano. Volendo sviluppare i calcoli, possiamo valutare  $\mathcal{P}_x$  come

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x &= E \left\{ (x_{AM}(t))^2 \right\} = E \left\{ (x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t)^2 \right\} = \\ &= E \left\{ (x_c(t) \cos \omega_0 t)^2 \right\} + E \left\{ (x_s(t) \sin \omega_0 t)^2 \right\} - 2E \left\{ x_c(t) x_s(t) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t \right\} \end{aligned}$$

Ora possiamo aggiungere ad entrambe le portanti una fase aleatoria uniforme in modo da renderle anch'esse processi, indipendenti da  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$ . Al § 6.5.3 si è mostrato che il prodotto di processi indipendenti ed a media nulla ha potenza pari al prodotto delle potenze, e dunque i primi due termini sono rispettivamente pari a  $\frac{1}{2} \mathcal{P}_{x_c}$  e  $\frac{1}{2} \mathcal{P}_{x_s}$ . Per quanto riguarda il terzo termine, esso rappresenta il valore atteso del prodotto di processi indipendenti ed a media nulla, e dunque è nullo. Infine, sviluppando i calcoli a partire dalle medie temporali anziché di insieme si perviene al medesimo risultato.

	$x_c(t)$	$\mathcal{P}_x$	$\mathcal{P}_{x_c}$	$B_N$	$\mathcal{P}_{\nu_c}$	$SNR$
<b>BLD-PS</b>	$m(t)$	$\frac{1}{2}\mathcal{P}_m$	$\mathcal{P}_m = 2\mathcal{P}_x$	$2W$	$2WN_0$	$\frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = SNR_0$
<b>BLU-PS</b>	$\frac{1}{\sqrt{2}}m(t)$	$\frac{1}{2}\mathcal{P}_m$	$\frac{1}{2}\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_x$	$W$	$WN_0$	$SNR_0$
<b>BLD-PI</b>	$\sqrt{\eta}(a_p + m(t))$	$\frac{1}{2}\mathcal{P}_m$	$\eta\mathcal{P}_m = 2\eta\mathcal{P}_x$	$2W$	$2WN_0$	$\eta \cdot SNR_0$

Tabella 11.1: Potenza di segnale e di rumore dopo demodulazione AM

### 11.2.1 Potenza di segnale e di rumore dopo demodulazione ed SNR

Nel caso di modulazione AM siamo interessati alla sola componente in fase  $d_c(t) = x_c(t) + \nu_c(t)$ , che è sufficiente a ricavare  $m(t)$ , ottenendo così

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_{x_c}}{\mathcal{P}_{\nu_c}} \quad (11.5)$$

La tabella 11.1 estende quella al § 10.1.4, rispetto alla quale si considera il termine  $k_a$  ora inglobato in  $m(t)$ , e ricava i valori della potenza per le componenti di segnale e di rumore  $\mathcal{P}_{x_c}$  e  $\mathcal{P}_{\nu_c}$ , in funzione di una medesima potenza ricevuta  $\mathcal{P}_x$ , per tre casi di modulazione AM, di cui ora discutiamo individualmente. La banda di rumore indicata in tabella è *la minima* possibile, pari a quella del segnale modulato  $B_{RF}$ , direttamente legata (nella modulazione AM) a quella ( $\pm W$ ) del segnale modulante. Pertanto come fatto notare i risultati che otterremo sono i *migliori* possibili, dato che se  $B_N > B_{RF}$ , l' $SNR$  risulterà peggiore.

#### 11.2.1.1 Modulazione BLD-PS

La prima riga di tab. 11.1 riassume come per  $x_{AM}(t) = m(t) \cos \omega_0 t$  si ottenga  $\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}\mathcal{P}_m$  ovvero  $\mathcal{P}_m = 2\mathcal{P}_x$ , e dato che  $\mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_m$ , a numeratore della (11.5) possiamo scrivere  $\mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_m = 2\mathcal{P}_x$ . Per quanto riguarda il denominatore, nel caso BLD la banda di  $x(t)$  è pari a  $2W$  ovvero al doppio di quella di  $m(t)$ , e quindi la potenza di rumore vale  $\mathcal{P}_{\nu_c} = 2WN_0$ , e dunque

$$SNR_{BLD} = \frac{\mathcal{P}_{x_c}}{\mathcal{P}_{\nu_c}} = \frac{2\mathcal{P}_x}{2WN_0} = \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = SNR_0$$

ovvero le prestazioni dopo demodulazione sono esattamente pari all' $SNR_0$  di riferimento definito al § 11.1.5: dunque la modulazione BLD-PS *non altera* il rapporto  $SNR_0$  di banda base, ovvero è come se il processo di modulazione fosse *trasparente*.

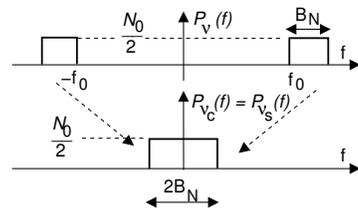
#### 11.2.1.2 Modulazione BLU-PS

In questo caso si ha

$x_{AM}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}m(t) \cos \omega_0 t - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{m}(t) \cos \omega_0 t$   
(vedi § 10.1.4 e 10.4.3) in modo da ottenere<sup>3</sup>  $\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}\mathcal{P}_m$  come per il caso BLD-PS, e dato che in questo caso

$$\mathcal{P}_{x_c} = E \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}m(t) \right)^2 \right\} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_m$$

si ottiene  $\mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_x$ , *la metà* del caso precedente



<sup>3</sup>Riprendendo l'approccio adottato alla nota 2, consideriamo le portanti in fase e quadratura come realizzazioni di un processo armonico con potenza  $1/2$ , moltiplicate per un processo statisticamente indipendente  $m(t)/\sqrt{2}$  con potenza  $\mathcal{P}_m/2$ . La potenza di ciascuna c.a. di b.f. è il prodotto di queste due, fornendo in base alla (11.4)  $\mathcal{P}_x = 1/2 \cdot \mathcal{P}_m/2 \cdot 2 = \mathcal{P}_m/2$ .

Come mostrato dalla figura a lato, anche la densità di potenza  $\mathcal{P}_\nu(f)$  del rumore che attraversa  $H_R(f)$  occupa una banda a sua volta dimezzata, e quindi dopo demodulazione la densità di potenza  $\mathcal{P}_{\nu_c}(f)$  occupa una banda  $\pm B_N$  come nel caso AM-BLD, ma possiede un valore  $N_0/2$  uguale a quella di  $\mathcal{P}_\nu(f)$  in ingresso, e non *doppio* come al § 11.1.4).

Pertanto la potenza  $\mathcal{P}_{\nu_c}$  del rumore demodolato sul ramo in fase (con un filtro  $H_R(f)$  ideale ed a banda minima  $B_N = W$ ) è pari a  $2W \cdot N_0/2 = WN_0$ , permettendo di scrivere

$$SNR_{BLU} = \frac{\mathcal{P}_{x_c}}{\mathcal{P}_{\nu_c}} = \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = SNR_0$$

e cioè si ottengono prestazioni *identiche* a quelle del caso AM-BLD, ma utilizzato solo *metà* della banda altrimenti necessaria.

### 11.2.1.3 Modulazione BLD-PI

In questo caso si considera la ricezione di un segnale

$$x_{PI}(t) = \sqrt{\eta}(a_p + m(t)) \cos \omega_0 t$$

dove  $\eta = \frac{\mathcal{P}_m}{a_p^2 + \mathcal{P}_m}$  è pari all'efficienza della BLD-PI introdotta al § 10.1.1.4, in modo che il segnale ricevuto abbia potenza  $\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}\mathcal{P}_m$  uguale ai due casi precedenti<sup>4</sup>.

Per valutare l'*SNR*, a numeratore della (11.5) non consideriamo l'intera potenza  $\mathcal{P}_{x_c}$  di  $x_c(t) = \sqrt{\eta}(a_p + m(t))$ , ma solo quella della sua componente *utile*  $u(t) = \sqrt{\eta}m(t)$ , che ha potenza  $\mathcal{P}_u = \eta\mathcal{P}_m = 2\eta\mathcal{P}_x$ , mentre la potenza  $\eta a_p^2$  si riferisce invece alla portante non modulata, e non trasporta informazione. Dato che per quanto riguarda il rumore demodolato siamo nella stessa condizione del caso AM-BLD ovvero  $\mathcal{P}_{\nu_c} = 2WN_0$ , possiamo scrivere

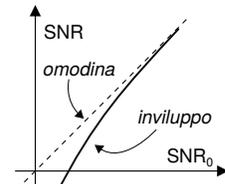
$$SNR_{PI} = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_{\nu_c}} = \frac{2\eta\mathcal{P}_x}{2WN_0} = \eta \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = \eta \cdot SNR_0$$

e dunque constatiamo che la presenza della portante comporta una riduzione di prestazioni in misura esattamente pari all'efficienza  $\eta = \frac{\mathcal{P}_m}{a_p^2 + \mathcal{P}_m}$ .

L'analisi esposta si riferisce però ad una demodulazione IQ coerente, mentre per il caso BLD-PI si usa il demodulatore *di inviluppo* (§ 10.2.5), che fornisce come risultato il modulo dell'inviluppo complesso ovvero

$$d(t) = |\underline{x}(t) + \underline{\nu}(t)| = \sqrt{[\sqrt{\eta}(a_p + m(t)) + \nu_c(t)]^2 + \nu_s^2(t)}$$

Finché  $|\underline{\nu}(t)|$  è piccolo e trascurabile rispetto ad  $a_p$ , ci si ritrova approssimativamente nel caso precedente; al contrario per bassi valori di *SNR*<sub>0</sub> la potenza utile  $\mathcal{P}_u$  diviene una frazione di  $\mathcal{P}_x$  ancora più piccola di quanto non sia  $\mathcal{P}_u = \eta\mathcal{P}_m = 2\eta\mathcal{P}_x$ , dando luogo ad un *SNR* peggiore del caso di demodulazione in fase e quadratura, come illustrato in figura.



<sup>4</sup>Infatti, considerando nuovamente la portante in fase come un processo armonico indipendente da  $m(t)$  possiamo scrivere  $\mathcal{P}_x = \eta(a_p^2 + \mathcal{P}_m) \cdot 1/2 = 1/2 \cdot \mathcal{P}_m$  dato che  $E\{(a_p + m(t))^2\} = a_p^2 + \mathcal{P}_m$ , in quanto  $E\{a_p \cdot m(t)\} = 0$  qualora  $m(t)$  sia a media nulla.

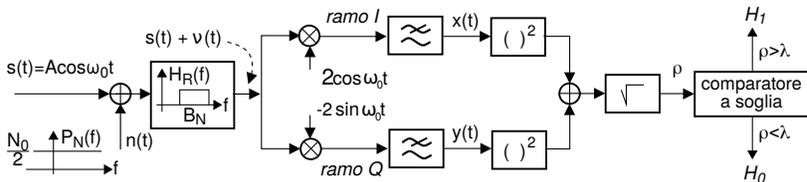


Figura 11.3: Detezione incoerente di sinusoidi immersa nel rumore

### 11.3 Detezione di sinusoidi nel rumore

Torniamo ad occuparci della demodulazione *incoerente in fase e quadratura* introdotta al § 10.2.4, ora applicata al problema di rilevare la presenza (o meno) di una sinusoidi  $s(t)$  immersa nel rumore entro una banda  $B_N$ , affrontato mediante il formalismo della *verifica di ipotesi* (§ 5.6.1) basata sul confronto tra il valore di una variabile di osservazione  $\rho$ , che rappresenta il modulo dell'involuppo complesso ricevuto, ed una soglia di decisione  $\lambda$ , da posizionare a seconda del criterio adottato. Il problema è quindi quello di arrivare ad una espressione per la d.d.p. di  $\rho$  a partire dall'informazione ottenuta mediante un demodulatore in fase e quadratura, secondo lo schema di fig. 11.3; al § 14.6 ne verrà adottato uno analogo, applicato al caso della trasmissione numerica.

#### 11.3.1 Descrizione statistica del modulo dell'involuppo complesso

Per chiarezza di notazione le uscite in fase e quadratura del demodulatore IQ sono ora rispettivamente indicate come  $x(t)$  e  $y(t)$ , sia nel caso in cui in ingresso è presente il solo rumore  $n(t)$ , ed allora corrispondono alle c.a. di b.f.  $\nu_c(t)$  e  $\nu_s(t)$  della sua versione filtrata<sup>5</sup>, sia qualora  $s(t) = A \cos \omega_0 t$  è invece presente, ed allora nell'uscita  $x(t)$  del ramo in fase è presente anche la *componente in fase* di  $s(t)$ , pari ad  $A$ , che diventa dunque il nuovo valor medio della v.a. estratta da  $x(t)$ , come rappresentato in fig. 11.4-a), in cui sono mostrate anche le *curve di livello* (vedi § 5.5) della gaussiana bidimensionale risultante.

Consideriamo ora che la sinusoidi  $s(t)$ , quando presente, può in realtà avere una fase  $\varphi$  qualsiasi, e dunque come discusso al § 12.1.2.3 il piano  $(x, y)$  ruota dello stesso angolo  $\varphi$ , causando la traslazione della d.d.p. bidimensionale della stessa quantità, come illustrato in fig. 11.4-b). Dunque la differenza tra quando  $s(t)$  è presente o meno consiste nello *scostamento dall'origine* del valor atteso della gaussiana, in qualsiasi direzione, e per questo in ingresso al comparatore di fig. 11.3 viene posta la grandezza  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , che è a sua volta una v.a., ed il cui valore viene rapportato alla soglia  $\lambda$ .

Allo scopo di valutare la d.d.p. della v.a.  $\rho$  ovvero del modulo dell'involuppo complesso demodulato  $z = x + jy$  e dunque poter individuare  $\lambda$  secondo il criterio di massima verosimiglianza

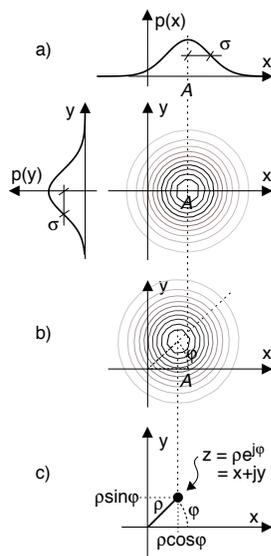


Figura 11.4: v.a. gaussiana bidimensionale in coordinate polari

<sup>5</sup>Ovvero (§ 11.1.4) sono processi congiuntamente gaussiani ed incorrelati con media nulla e varianza  $\sigma^2 = N_0 B_N$ .

(§ 5.6.2.1), applichiamo i risultati ottenuti al § 5.4.2 sulle trasformazioni di v.a. , in modo da passare dalla rappresentazione cartesiana  $\underline{z} = x + jy$  a quella polare  $z = \rho e^{j\varphi}$ , come rappresentato in fig. 11.4-c). Definiamo dunque la trasformazione in oggetto, assieme alle rispettive funzioni inverse, come

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (11.6)$$

e mostriamo come, nei due casi di segnale assente o presente, la v.a.  $\rho$  assume rispettivamente la d.d.p. di *Rayleigh* oppure quella di *Rice*.

**Variabile aleatoria di Rayleigh** In assenza di segnale  $x$  ed  $y$  sono due v.a. gaussiane indipendenti, a media nulla e uguale varianza  $\sigma^2$ , la cui d.d.p. congiunta di  $(x, y)$  si ottiene<sup>6</sup> come prodotto delle d.d.p. marginali, e vale

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (11.7)$$

La  $p_{P,\Phi}(\rho, \varphi)$  viene quindi calcolata come prescritto dalla (5.20) di pag. 119, valutando<sup>7</sup> le espressioni per  $p_{X,Y}(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$  e  $|\mathbf{J}(x, y/\rho, \varphi)|$ , e ottenendo così

$$p_{P,\Phi}(\rho, \varphi) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 < \rho < \infty \\ -\pi < \varphi < \pi \end{cases}$$

Le d.d.p. marginali  $p_P(\rho)$  e  $p_\Phi(\varphi)$  si ottengono quindi saturando<sup>8</sup> la d.d.p. congiunta rispetto all'altra variabile, ricavando

$$p_P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{con} \quad \rho \geq 0; \quad p_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{con} \quad -\pi < \varphi \leq \pi \quad (11.8)$$

L'espressione di  $p_P(\rho)$  in (11.8) prende nome di d.d.p. di RAYLEIGH, graficata in fig. 11.5, mentre il valor medio e la varianza della v.a.  $\rho$  valgono rispettivamente

$$m_P = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{e} \quad \sigma_P^2 = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (11.9)$$

<sup>6</sup>Vedi anche il § 5.5.1. Basta moltiplicare:  $p_X(x) p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$

<sup>7</sup>Il calcolo dei due termini si esegue come

$$p_{X,Y}(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$|\mathbf{J}(x, y/\rho, \varphi)| = \left| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{bmatrix} \right| = \rho (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho$$

<sup>8</sup>Svolgiamo il calcolo solo per la prima relazione:

$$p_P(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{P,\Phi}(\rho, \varphi) d\varphi = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)$$

E' inoltre possibile mostrare<sup>9</sup> che per essa vale la proprieta

$$Pr \{ \rho > \lambda \} = \int_{\lambda}^{\infty} p_P(\rho) d\rho = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right) \quad (11.10)$$

Quest'ultimo valore puo' rappresentare la probabilita di mancare un bersaglio per una distanza superiore a  $\lambda$ , nell'ipotesi che gli errori di puntamento orizzontale e verticale siano entrambi gaussiani, indipendenti, a media nulla ed uguale varianza.

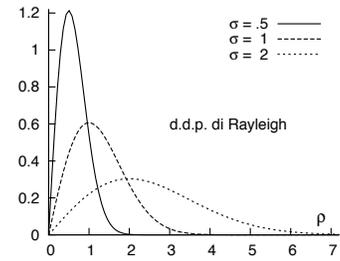


Figura 11.5: Densita di probabilita di Rayleigh

**Variabile aleatoria di Rice** Consideriamo ora il caso in cui il tono  $s(t)$  sia presente, e senza perdita di generalita assumiamo che abbia fase  $\varphi = 0$  in modo che la trasformazione (11.6) possa ancora essere applicata considerando, al posto di  $x$ , una v.a.  $x'$ , sempre gaussiana con varianza  $\sigma^2$ , ma ora con media pari ad  $A$ , ovvero la componente in fase di  $s(t)$ . In questo caso il prodotto tra le d.d.p. marginali si scrive come<sup>10</sup>

$$p_{X',Y}(x',y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x'-A)^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (11.11)$$

e l'operazione di cambio di variabile porta<sup>11</sup> alla d.d.p.  $p_P(\rho)$  detta di RICE, che ha espressione

$$p_P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right) \text{ per } \rho \geq 0 \quad (11.12)$$

dove  $I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos \varphi} d\varphi$  e la funzione modificata di Bessel del primo tipo ed ordine zero<sup>12</sup>, la cui espressione non ne permette il calcolo in forma chiusa, ma che puo' essere approssimata come  $I_0(z) \sim e^{\frac{z^2}{4}}$  per  $z \ll 1$ , e come  $I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}$  per  $z \gg 1$ .

Nella parte sinistra di fig. 11.6 e mostrato l'andamento di  $p_P(\rho)$  con  $\sigma = 1$  e tre diversi valori di  $A$ , che possiamo confrontare con quello della seconda curva per la d.d.p. di Rayleigh

<sup>9</sup>Dato che  $\frac{d}{d\rho} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} = -\frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$ , si ottiene

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho = - \int_{\lambda}^{\infty} -\frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho = - \left[ e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \right]_{\lambda}^{\infty} = e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}}$$

<sup>10</sup>Infatti in questo caso risulta

$$p_{X'}(x) p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x'-A)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

<sup>11</sup>Sostituendo nell'esponente della (11.11)  $x' = \rho \cos \varphi$  e  $y = \rho \sin \varphi$ , si ottiene

$$(x' - A)^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + A^2 - 2\rho A \cos \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 + A^2 - 2\rho A \cos \varphi$$

Osservando ora che il giacobiano della trasformazione ha un valore pari a  $\rho$  anche in questo caso, otteniamo

$$\begin{aligned} p_{P,\Phi}(\rho, \varphi) &= p_{X',Y}(x'(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) |J(x', y/\rho, \varphi)| \\ &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\rho A \cos \varphi}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

La saturazione della d.d.p. congiunta, operata eseguendo  $p_P(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{P,\Phi}(\rho, \varphi) d\varphi$ , determina il risultato (11.12).

<sup>12</sup>Anche nella figura a pag. 290 si parla di funzioni di Bessel  $J_n(x)$ , ma queste modificate sono in relazione a quelle, come  $I_n(x) = j^{-n} J_n(jx)$  - vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Armoniche\\_cilindriche](https://it.wikipedia.org/wiki/Armoniche_cilindriche).

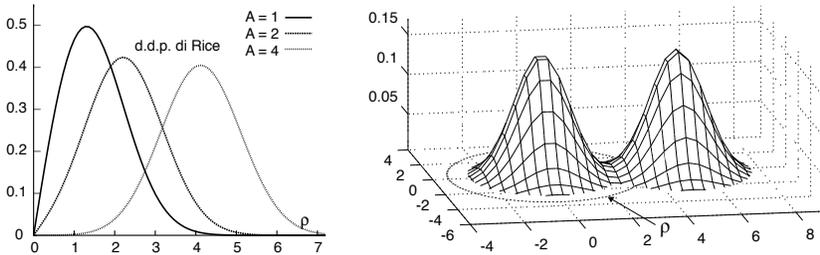


Figura 11.6: Densità di probabilità di RICE con  $\sigma = 1$  (a sin) e coppia di gaussiane bidimensionali a varianza unitaria, la prima a media nulla, la seconda centrata in  $(5,0)$  (a ds)

alla fig. 11.5, ottenuta per lo stesso valore di  $\sigma$ . Notiamo infine che per  $A = 0$  si torna al caso di Rayleigh, mentre per valori crescenti di  $A$  l'andamento della d.d.p. di Rice approssima sempre più quello di una gaussiana. Nella parte a destra di fig. 11.6 sono invece raffigurate le gaussiane bidimensionali che danno luogo alle distribuzioni di Rayleigh e di Rice.

### 11.3.2 Detezione incoerente di sinusoidi nel rumore

Come fatto osservare nella discussione di fig. 11.4, se il segnale  $s(t)$  si presenta con una fase  $\varphi \neq 0$  ovvero  $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , il piano dell'involuppo complesso ruota dello stesso angolo, ed è per questo motivo che abbiamo scelto il *modulo*  $\rho$  dell'involuppo complesso come grandezza su cui operare la decisione, di cui abbiamo trovato la d.d.p. per i casi di segnale assente e presente.

**Compromesso tra banda di ricerca e probabilità di detezione** Prima di addentrarci nei calcoli, osserviamo che qualora la frequenza di  $s(t)$  fosse pari a  $f = f_0 + \Delta f$  l'involuppo complesso  $z = x + jy$  ruoterebbe con velocità angolare  $2\pi\Delta f$ , ma il suo modulo  $\rho$  resterebbe costante e pari ad  $A$ , dando luogo anche in questo caso alla d.d.p. di Rice. Ciò consente l'adozione dello schema di fig. 11.3 per la ricerca di una sinusoidi che cade entro *tutta* la  $B_N$  del filtro di ingresso; d'altra parte, all'aumentare di  $B_N$  aumenta anche la potenza  $\sigma^2$  del rumore, causando come vedremo tra breve un peggioramento delle prestazioni del decisore.

**Definizione del problema** Analizziamo i risultati fin qui ottenuti nell'ottica della decisione di ipotesi statistica (§ 5.6.1), allo scopo di definire il criterio con cui scegliere la soglia di decisione  $\lambda$  da utilizzare nello schema di fig. 11.3.

Il caso di segnale assente (in cui la v.a. di osservazione  $\rho$  ha d.d.p. di Rayleigh) viene quindi indicato come *ipotesi*  $H_0$ , mentre quello in cui  $s(t)$  è presente *ipotesi*  $H_1$  (e  $\rho$  ha d.d.p. di Rice). In entrambi i casi la dinamica dei valori di  $\rho$  è direttamente legata (attraverso le (11.8) e (11.12)) alla potenza di rumore in ingresso  $\sigma^2 = N_0 B_N$ , pari a quella delle c.a. di b.f.  $\nu_c(t)$  e  $\nu_s(t)$ , mentre per quanto riguarda il valor medio di  $\rho$ , nell'ipotesi  $H_0$  si ha  $m_\rho = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$  (eq. (11.8)), e per  $H_1$  risulta  $m_\rho \rightarrow A$  quando  $A \gg \sigma$ .

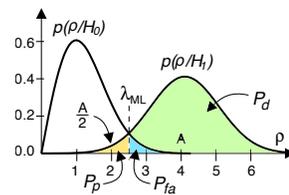


Figura 11.7: Posizionamento della soglia per il decisore di massima verosimiglianza

**Decisione di massima verosimiglianza** In figura 11.7 oltre alle d.d.p. condizionate alle ipotesi  $p(\rho/H_0)$  e

$p(\rho/H_1)$  e calcolate per  $\sigma = 1$  ed  $A = 4$ , viene mostrato anche il valore  $\lambda_{ML}$ <sup>13</sup> per cui esse si intersecano ovvero  $p(\rho/H_0)|_{\rho=\lambda_{ML}} = p(\rho/H_1)|_{\rho=\lambda_{ML}}$ , e la regola di decisione

$\frac{p(\rho/H_1)}{p(\rho/H_0)} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} 1$  che ne consegue corrisponde al criterio di massima verosimiglianza (§ 5.6.2.1),

attuato nella forma  $\frac{\rho}{\lambda_{ML}} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} 1$  ovvero  $\rho \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \lambda_{ML}$ .

**Probabilità di errore** A seguito della decisione si possono verificare i due tipi di evento di errore

- *falso allarme* con probabilità  $Pr(e/H_0) = \int_{\lambda}^{\infty} p(\rho/H_0) d\rho = P_{fa}$
- *perdita* con probabilità  $Pr(e/H_1) = \int_0^{\lambda} p(\rho/H_1) d\rho = P_p$

rispettivamente pari alle aree celeste e giallo di fig. 11.7. Osserviamo quindi che la scelta  $\lambda = \lambda_{ML}$  risulta *ottima* qualora non sussistano *costi* per i due tipi errori  $P_{fa}$  e  $P_p$  (vedi sotto), e le probabilità *a priori* di  $H_0$  ed  $H_1$  siano uguali. Infatti in tal caso la probabilità di errore complessiva

$$P_e = Pr(H_0) Pr(e/H_0) + Pr(H_1) Pr(e/H_1) = \frac{1}{2}P_{fa} + \frac{1}{2}P_p \quad (11.13)$$

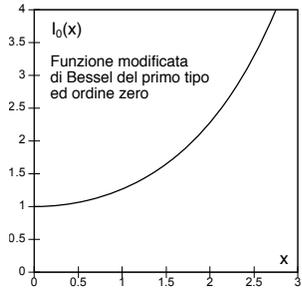
risulta *minima*, dato che spostando  $\lambda$  a destra o sinistra rispetto a  $\lambda_{ML}$ , una delle due aree aumenta più di quanto non diminuisca l'altra.

**Calcolo della soglia** Tutto bello, ma volendo ottenere il valore di  $\lambda_{ML}$ , come si fa? La condizione che per  $\rho = \lambda_{ML}$  risulti  $p(\rho/H_0) = p(\rho/H_1)$  comporta l'uguaglianza tra le d.d.p. di Rayleigh (11.8) e di Rice (11.12), ovvero

$$\frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right)$$

da cui con alcuni passaggi si ottiene

$$\exp\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) = I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right)$$



Una volta noti i valori di  $A$  e  $\sigma$  il primo membro è un numero, e dunque per via numerica si trova il valore di  $\lambda_{ML} = \rho$  che rende il secondo membro pari al primo.

**Decisione Bayesiana** Qualora si conoscano i valori di  $Pr(H_0)$  e  $Pr(H_1)$  e questi siano diversi da  $1/2$ , ponendo  $\lambda = \lambda_{ML}$  la (11.13) non è più minimizzata. In tal caso la soglia ottima viene invece stabilita secondo il criterio di *massima probabilità a posteriori* o MAP, vedi § 13.2.1, ovvero scegliendo l'ipotesi  $H_i$  la cui probabilità *a posteriori*  $p(H_i/\rho)$  è massima. Applicando il teorema di Bayes (§ 5.1.4) si ottiene  $p(H_i/\rho) = \frac{p(\rho/H_i)Pr(H_i)}{p(\rho)}$  e dunque la regola di decisione diviene

$$\frac{p(H_1/\rho)}{p(H_0/\rho)} = \frac{p(\rho/H_1) Pr(H_1)}{p(\rho/H_0) Pr(H_0)} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} 1 \quad \text{ovvero} \quad \frac{p(\rho/H_1)}{p(\rho/H_0)} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \frac{Pr(H_0)}{Pr(H_1)} \quad (11.14)$$

che nel caso di ipotesi equiprobabili  $Pr(H_0) = Pr(H_1)$  degenera nel criterio di ML.

<sup>13</sup>Il valore di  $\lambda_{ML}$  va calcolato per via numerica una volta noti  $\sigma$  ed  $A$ .

**Costo delle decisioni** Allarghiamo ora il campo di applicazione della decisione statistica a situazioni in cui può essere associato un differente *costo* ai due tipi di errore, così come si può associare un *guadagno* all'evento di decisione corretta (o *detezione*) la cui probabilità  $P_d = \int_{\lambda}^{\infty} p(\rho/H_1) d\rho$  è misurata dall'area *verde* in fig. 11.7. Ad esempio, nell'ambito del *telerilevamento* si tenta di massimizzare la probabilità di detezione a spese di quella di falso allarme<sup>14</sup>, mentre in *campo medico* si tende a preferire un falso allarme, piuttosto che trascurare l'importanza di un sintomo o referto. In questi casi nella 11.14 compare un altro termine<sup>15</sup> che tiene conto dei costi associati alla decisione, in modo da preferire uno dei due tipi di errore rispetto all'altro.

**Criterio di Neyman-Pearson** In alcuni casi la probabilità a priori  $Pr(H_1)$  che il segnale sia presente non è nota in quanto l'evento è di natura *sporadica*, e noi lì, in attesa che si verifichi. Un possibile approccio è allora quello di fissare la  $P_{fa}$  massima tollerata, e quindi tentare di massimizzare la prob. di detezione  $P_d$ , come avviene adottando il criterio di *Neyman-Pearson*<sup>16</sup>, sulla cui descrizione non ci addentriamo.

**Decisore per SNR elevato** Torniamo ad investigare sulla applicazione del criterio di massima verosimiglianza, la cui soglia di decisione  $\lambda_{ML}$  può essere fissata una volta nota l'ampiezza  $A$  della sinusoide e la deviazione standard  $\sigma$  del rumore; a volte però tali grandezze non sono note, se non a *grandi linee!*

In particolare, qualora sia noto solamente che  $A/\sigma \gg 1$  e dunque in presenza di una ampiezza  $A \gtrsim 10\sigma$  ben maggiore della dinamica del rumore<sup>17</sup>, notiamo che all'aumentare di  $\frac{A}{\sigma}$  le curve di fig. 11.7 si allontanano ma non cambiano larghezza, ed il valore di  $\lambda_{ML}$  si avvicina (da destra) ad  $\frac{A}{2}$ ; ponendo quindi  $\lambda = \frac{A}{2}$  e sostituendo le espressioni di Rayleigh (11.8) e di Rice (11.12) per le d.d.p. condizionate in quella (11.13) della  $P_e$ , otteniamo

$$P_e = \frac{1}{2} \int_{\frac{A}{2}}^{\infty} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) d\rho + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{A}{2}} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right) d\rho \quad (11.15)$$

Per ciò che riguarda il primo termine, applicando il risultato (11.10) si trova il valore

$$\int_{\frac{A}{2}}^{\infty} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) d\rho = \exp\left(-\frac{A^2}{8\sigma^2}\right)$$

Per il secondo termine, osserviamo che il suo valore è ben più piccolo del primo (si veda la figura 11.7 tracciata per  $A = 4$ , o le considerazioni riportate al § 11.5.1), e quindi può essere trascurato, fornendo in definitiva

$$P_e \simeq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{8\sigma^2}\right) \quad (11.16)$$

per  $\frac{A}{\sigma} \gg 1$ . Ricordando ora che  $\frac{A^2}{2}$  rappresenta la potenza della sinusoide, e che  $\sigma^2$  è la potenza del rumore, il risultato trovato ha una immediata interpretazione in termini di  $SNR = \frac{A^2/2}{\sigma^2}$ :

$$P_e \simeq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{SNR}{4}\right) \quad (11.17)$$

<sup>14</sup>A meno che decidere per  $H_1$  non possa provocare *danni collaterali* documentabili dai media.

<sup>15</sup>Vedi ad es. [http://webuser.unicas.it/tortorella/TTII/PDF2003/decisione\\_bayes.pdf](http://webuser.unicas.it/tortorella/TTII/PDF2003/decisione_bayes.pdf)

<sup>16</sup>Vedi ad es. <http://radarlab.uniroma2.it/wordpress/wp-content/uploads/2015/11/lucidiTTR4cap.pdf>

<sup>17</sup>Un modo di ricondursi a questo caso è quello di diminuire la banda del filtro di ingresso, riducendo così  $\sigma^2 = N_0 B_N$ . In questo modo però, come osservato a pag. 11.3.2, si riduce l'intervallo di frequenza  $\Delta f$  che può essere analizzato.

### 11.4 Prestazioni della modulazione di frequenza

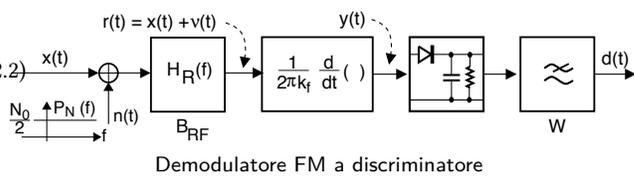
Torniamo ad occuparci della valutazione dell'*SNR* dopo demodulazione, dedicandoci ora al caso di una trasmissione FM, di cui al § 10.3 si è fatta più volte notare la natura *non lineare*. Analizziamo quindi come le condizioni di ricezione (potenza ricevuta  $P_x$ , densità di potenza del rumore  $N_0/2$  e banda del ricevitore  $B_N$ ) ed i parametri di trasmissione (indice di modulazione  $\beta$  e banda del segnale modulante  $W$ ) intervengano sull'*SNR* del segnale demodolato, anticipando che scopriremo degli sviluppi del tutto diversi dal caso *lineare* dell'AM, dato che, se la potenza del rumore in ingresso al ricevitore non è eccessiva:

- quando la potenza del segnale ricevuto  $P_x$  aumenta quella del segnale demodolato resta costante, mentre invece quella del relativo rumore *diminuisce*;
- l'*SNR* dopo demodulazione *migliora* all'aumentare della banda occupata.

Per arrivare a questi risultati valutiamo innanzitutto ciò che accade nella ricezione di una portante non modulata, e quindi analizziamo come lo scenario si modifica in presenza di segnale. Infine, illustriamo i motivi che determinano il rapido degrado di prestazioni nel caso di rumore elevato.

#### 11.4.1 Rumore dopo demodulazione FM

L'analisi viene svolta considerando un demodulatore a discriminatore (§ 10.3.2.2) quando in ingresso è presente una portante non modulata  $x(t)$  di ampiezza<sup>18</sup>  $A = \sqrt{2P_x}$  ed in presenza di un rumore gaussiano bianco limitato in banda  $\nu(t)$ :



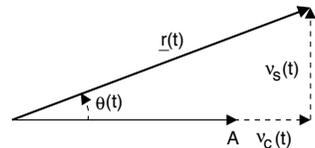
$$r(t) = A \cos \omega_0 t + \nu_c(t) \cos \omega_0 t - \nu_s(t) \sin \omega_0 t$$

in cui la banda del filtro  $H_R(f)$  (e dunque di  $\nu(t)$ ) deve essere sufficiente a far passare le frequenze che *sarebbero* presenti se la portante fosse modulata, e che nel caso FM può essere stimata applicando la *regola di Carson* (eq. 10.18), ossia  $B_{RF} = B_C \simeq 2W(\beta + 1)$ .

In presenza di una portante non modulata, le componenti analogiche di bassa frequenza dell'involuppo complesso  $\underline{r}(t)$  del segnale ricevuto

$$\underline{r}(t) = r_c(t) + jr_s(t) \quad \text{sono espresse come} \quad \begin{cases} r_c(t) = A + \nu_c(t) \\ r_s(t) = \nu_s(t) \end{cases} \quad (11.18)$$

e sono le stesse di quelle discusse per la fig. 11.4 dato che  $\nu_c(t)$  e  $\nu_s(t)$  appartengono a due processi congiuntamente gaussiani, a media nulla e deviazione standard  $\sigma_{\nu_c} = \sigma_{\nu_s} = \sqrt{N_0 B_N}$ , in cui  $B_N \geq B_{RF}$  ed  $N_0/2$  è la densità di potenza del rumore in ingresso, e pertanto la d.d.p. di  $\rho = |\underline{r}(t)|$  è quella di Rice (pag. 309); a fianco è rappresentata la costruzione vettoriale relativa alle (11.18).



<sup>18</sup>Con questa posizione, la potenza della portante risulta  $\frac{(\sqrt{2P_x})^2}{2} = \frac{2P_x}{2} = P_x$ .

Ricordando ora che nel caso FM il segnale informativo è legato alla derivata della fase  $\theta(t)$  di  $\underline{r}(t)$ , esprimiamo  $r(t)$  mettendo  $\theta(t)$  in evidenza

$$r(t) = \Re \left\{ \underline{r}(t) e^{j\omega_0 t} \right\} = \Re \left\{ |\underline{r}(t)| e^{j\theta(t)} e^{j\omega_0 t} \right\} = |\underline{r}(t)| \cos(\omega_0 t + \theta(t))$$

in cui possiamo considerare il termine  $|\underline{r}(t)|$  rimosso dal limitatore (vedi § 10.3.2.2) che usualmente è anteposto al discriminatore. Il segnale  $y(t)$  in uscita dal derivatore è quindi descritto (a parte il segno) come

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} r(t) \Rightarrow \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \cos(\omega_0 t + \theta(t)) = \\ &= \left( \frac{f_0}{k_f} + \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \theta(t) \right) \sin(\omega_0 t + \theta(t)) \end{aligned}$$

e viene a sua volta elaborato da parte del demodulatore di involuppo come fosse un segnale BLD-PI (§ 10.1.1.2), fornendo in definitiva un segnale demodulato dovuto al solo rumore

$$d(t) = \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \theta(t) = \nu_d(t) \quad (11.19)$$

#### 11.4.2 Caso di basso rumore

Con riferimento all'ultima figura, osserviamo che qualora  $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2} \gg \sigma_{\nu_c}^2 = \sigma_{\nu_s}^2 = N_0 B_N$  i valori di  $\nu_c(t)$  e  $\nu_s(t)$  risultano piccoli rispetto ad  $A$ , e l'involuppo complesso ricevuto  $\underline{r}(t)$  rimane prossimo a quello della portante non modulata, dato che in questo caso  $\underline{\nu}(t)$  ha modulo abbastanza più piccolo di  $A$ . L'angolo  $\theta(t)$  che compare nella (11.19) può dunque essere approssimato come

$$\theta(t) = \arctan \frac{\nu_s(t)}{A + \nu_c(t)} \simeq \arctan \frac{\nu_s(t)}{A} \simeq \frac{\nu_s(t)}{A}$$

la cui densità spettrale di potenza vale

$$\mathcal{P}_\theta(f) = \frac{1}{A^2} \mathcal{P}_{\nu_s}(f) = \frac{N_0}{A^2} \quad (11.20)$$

in quanto  $\mathcal{P}_{\nu_s}(f) = N_0$  come discusso al § 11.1.4. Ricordiamo ora (vedi § 3.6) che l'operazione di derivata svolta dal discriminatore equivale a moltiplicare lo spettro di ampiezza del segnale in ingresso per  $j2\pi f$ , ovvero moltiplicare la sua densità di potenza per  $(2\pi f)^2$ : applichiamo questo risultato per ottenere la densità di potenza di  $\nu_d(t)$  (11.19) a partire dalla (11.20), in modo che la densità di potenza del rumore demodulato  $\nu_d(t)$  risulti

$$\mathcal{P}_{\nu_d}(f) = \frac{1}{(2\pi k_f)^2} (2\pi f)^2 \mathcal{P}_\theta(f) = \left( \frac{f}{k_f} \right)^2 \frac{N_0}{A^2} = \frac{N_0}{(k_f A)^2} f^2$$

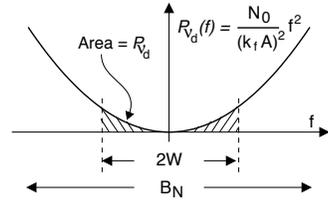
e quindi la relativa potenza totale  $\mathcal{P}_{\nu_d} = \sigma_{\nu_d}^2$  si calcola come

$$\mathcal{P}_{\nu_d} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{\nu_d}(f) df = 2 \int_0^W \frac{N_0}{(k_f A)^2} f^2 df = 2 \frac{N_0}{(k_f A)^2} \cdot \frac{f^3}{3} \Big|_0^W = \frac{2}{3} \frac{N_0}{(k_f A)^2} W^3 \quad (11.21)$$

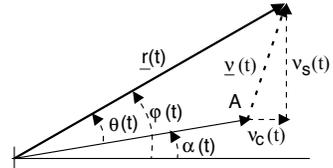
in cui  $W$  è la banda del segnale modulante (se ci fosse), ed il rumore è limitato in tale banda in virtù del filtro passa basso posto a valle del discriminatore<sup>19</sup>.

<sup>19</sup>Si noti che le potenze  $\sigma_{\nu_c}^2$  e  $\sigma_{\nu_s}^2$  delle c.a. di b.f. del rumore in ingresso al discriminatore sono invece relative alla banda  $B_N$ ,  $\geq$  di quella  $B_{RF}$  del segnale modulato.

Notiamo subito la veridicità della prima affermazione fatta ad inizio sezione: la potenza complessiva del rumore dopo demodulazione FM *diminuisce* all'aumentare della potenza del segnale ricevuto  $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2}$ . Una seconda osservazione molto importante è che, per effetto della derivata, la densità di potenza del rumore demodulato ha un andamento *parabolico*.



**Segnale presente** Continuando nell'ipotesi di basso rumore ovvero  $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2} \gg \sigma_{\nu_c}^2 = \sigma_{\nu_s}^2 = N_0 B_N$ , possiamo osservare che (vedi fig. a lato) la presenza di una fase *modulante*  $\alpha(t)$  nel segnale  $x_{FM}(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \alpha(t))$  comporta che la fase  $\varphi(t)$  dell'involuppo complesso del segnale ricevuto  $r(t)$  è costituita dalla somma tra  $\alpha(t)$  e l'angolo  $\theta(t)$  dovuto al rumore sovrapposto alla portante di ampiezza  $A$ , cioè  $\varphi(t) = \alpha(t) + \theta(t)$ . Pertanto l'uscita (11.19) del discriminatore diviene



$$d(t) = \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \alpha(t) + \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \theta(t) = s_d(t) + \nu_d(t)$$

ed il rapporto tra le potenze dei due termini definisce l'*SNR* dopo demodulazione come  $SNR = \frac{\mathcal{P}_{s_d}}{\mathcal{P}_{\nu_d}}$ , dove quindi  $\mathcal{P}_{s_d}$  è la potenza di segnale *utile* demodulato  $s_d(t) = \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \alpha(t)$ , e  $\mathcal{P}_{\nu_d}$  è la potenza del rumore demodulato calcolata alla (11.21).

Ricordando (§ 9.2.2) che  $\alpha(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$ , per la potenza di  $s_d(t)$  si ottiene<sup>20</sup>  $\mathcal{P}_{s_d} = \mathcal{P}_m = \int_{-W}^W \mathcal{P}_m(f) df$ , e quindi

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_{s_d}}{\mathcal{P}_{\nu_d}} = \frac{\mathcal{P}_m}{\frac{2}{3} \frac{N_0}{(k_f A)^2} W^3} = 3 \frac{\mathcal{P}_m k_f^2}{W^2 N_0 W} \frac{A^2}{2} = 3 \frac{\sigma_{f_d}^2}{W^2} \frac{\mathcal{P}_x}{N_0 W} = 3\beta^2 SNR_0$$

avendo sostituito  $\mathcal{P}_m k_f^2$  con  $\sigma_{f_d}^2$  (vedi sotto),  $\frac{A^2}{2}$  con la potenza della portante ricevuta  $\mathcal{P}_x$ ,  $\frac{\sigma_{f_d}}{W}$  con l'indice di modulazione  $\beta$  (§ 10.3.3.4), e  $\frac{\mathcal{P}_x}{N_0 W}$  con l'*SNR* di riferimento  $SNR_0$  (§ 11.1.5). Il risultato ottenuto conferma la seconda affermazione di inizio sezione: si ha un *miglioramento* rispetto all' $SNR_0$  (e dunque rispetto all'AM) *tanto maggiore* quanto maggiore è la *banda occupata* dal segnale modulato  $B_{RF} \simeq 2W(\beta + 1)$  (eq. (10.18) a pag. 292), ovvero quanto più è grande l'indice di modulazione  $\beta$ .

**Discussione dei passaggi** Per mostrare che  $\mathcal{P}_m k_f^2 = \sigma_{f_d}^2$ , indichiamo con  $f_d(t) = f_i(t) - f_0$  la *deviazione* della frequenza istantanea  $f_i(t)$  (§ 10.3) rispetto a quella della portante  $f_0$ . Ricordiamo quindi che  $f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \psi(t)$  in cui  $\psi(t)$  è la fase istantanea  $\psi(t) = 2\pi f_0 t + \alpha(t)$ , e dato che per l'FM  $\alpha(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$  si ottiene

$$f_d(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left( 2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right) - f_0 = f_0 + k_f m(t) - f_0 = k_f m(t)$$

<sup>20</sup>Dato che gli operatori di derivata ed integrale si annullano, ovvero  $\mathcal{P}_{s_d} = Pot \left\{ \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \alpha(t) \right\} = Pot \left\{ \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right\} = Pot \{ m(t) \} = \mathcal{P}_m$ . In definitiva, abbiamo semplicemente demodulato!

Pertanto si ha  $\sigma_{f_d}^2 = k_f^2 \sigma_m^2 = k_f^2 \mathcal{P}_m$  se  $m(t)$  è a media nulla: praticamente,  $\sigma_{f_d}$  rappresenta la *deviazione standard della frequenza istantanea*, e per questo è una grandezza proporzionale alla larghezza di banda del segnale modulato<sup>21</sup>. D'altra parte, questo risultato è un aspetto della conversione AM-FM che avviene per alto indice di modulazione, come descritto al § 10.3.3.3.

**Discussione del risultato** Notiamo innanzitutto che se  $\beta < \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,58$  il valore di  $SNR = 3\beta^2 SNR_0$  non aumenta affatto, anzi le prestazioni peggiorano. Ma con bassi indici di modulazione abbiamo già visto (§ 10.3.3.1) che l'FM ha un comportamento che può avvicinarsi a quello lineare dell'AM, e dunque ci possiamo *non-sorprendere*. D'altra parte,  $SNR$  può migliorare (e di molto) con  $\beta > \frac{1}{\sqrt{3}}$ : se ad esempio  $\beta = 5$  si ottiene  $3\beta^2 = 75$  volte meglio, ovvero 17,75 dB di miglioramento! In compenso, la regola di Carson ci dice che la banda occupata aumenta di circa  $2(\beta + 1) = 12$  volte quella di banda base... dunque il miglioramento di  $SNR$ <sup>22</sup> avviene a *spese dell'occupazione di banda*, e pertanto costituisce una manifestazione del *compromesso banda-potenza*, vedi pagg. 218 e 359.

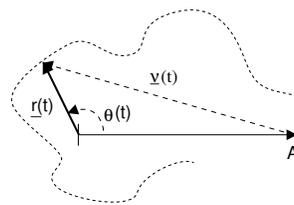
Verrebbe ora quasi il desiderio di aumentare indefinitamente  $\beta$  (nei limiti della banda disponibile) per migliorare a piacere l' $SNR$ . Peccato non sia possibile, dato che ad un certo punto l'analisi effettuata *perde validità*: infatti, aumentando  $\beta$  anche la banda di rumore del ricevitore deve crescere, essendo aumentata la banda del segnale modulato. Pertanto le condizioni  $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2} \gg \sigma_{v_c}^2 = \sigma_{v_s}^2 = N_0 B_N$  non sono più verificate, con le conseguenze illustrate di seguito.

### 11.4.3 Caso di elevato rumore

Qualora il valore efficace del rumore in ingresso al discriminatore sia confrontabile con quello del segnale utile ricevuto si verifica un *effetto soglia*, ed all'aumentare del rumore l' $SNR$  degrada molto rapidamente.

Per indagarne le cause facciamo riferimento allo schema a lato, che mostra l'involuppo complesso della portante non modulata  $A$ , del rumore in ingresso  $\underline{v}(t)$ , e del segnale ricevuto  $\underline{r}(t)$ , notando che se i valori efficaci dei primi due sono comparabili, può verificarsi il caso che  $\underline{r}(t)$  ruoti attorno all'origine. Quando ciò si verifica, a valle del derivatore che è presente nel discriminatore si determina un *click*, ovvero un segnale impulsivo di area pari a  $2\pi$ , come illustrato alla figura 11.8-a. Questo fatto è facilmente verificabile, ascoltando una radio FM broadcast, che in condizioni di cattiva ricezione manifesta la comparsa di un rumore, appunto, impulsivo.

All'aumentare della potenza di rumore, aumenta la frequenza con la quale  $\underline{r}(t)$  "aggira" l'origine, e pertanto aumenta la frequenza dei *click*, che tendono a produrre un crepitio indistinto. Si è trovato che questo effetto si manifesta a partire da un  $SNR_0$  di riferimento inferiore<sup>23</sup> a 10-25 dB, e per valori  $SNR_0$  minori di tale valore l'effetto aumenta molto rapidamente, cosicché si parla di *effetto soglia*. Le curve di 11.8-b riportano un tipico andamento dell' $SNR$



<sup>21</sup>Infatti, il rapporto  $\frac{\sigma_{f_d}}{W}$  definito al § 10.3.3.4 come indice di modulazione  $\beta_p$ , rappresenta appunto una misura del rapporto tra l'occupazione di banda *efficace* del segnale modulato, e la massima frequenza  $W$  presente nel segnale modulante.

<sup>22</sup>Miglioramento che può essere sfruttato quando ad esempio il collegamento è di tipo *punto-punto*, come nel caso di un ponte radio con antenne direttive od una comunicazione satellitare, in modo da contenere la potenza irradiata entro il *cono di emissione* e non invadere lo spettro radio riservato ad altre trasmissioni.

<sup>23</sup>L'effetto soglia interviene *prima* per i valori di  $\beta$  più elevati, vedi fig. 11.8-b.

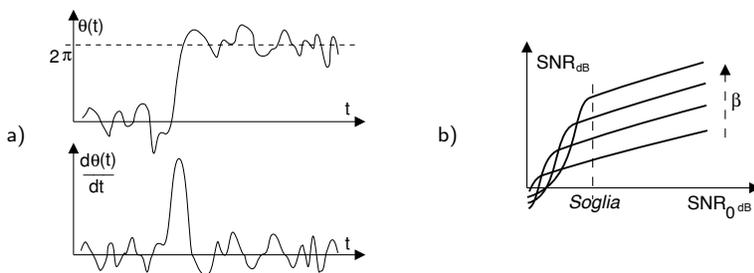


Figura 11.8: a) - Rumore impulsivo dopo demodulazione FM; b) - effetto soglia

dopo demodulazione, con l'indice  $\beta$  che svolge il ruolo di parametro, e possiamo osservare come con un  $SNR_0$  inferiore alla soglia le prestazioni degradino rapidamente. Si è trovato che demodulando con un PLL, anziché con un discriminatore, il valore di soglia si riduce di circa 3 dB.

Nella pratica comune il segnale di rumore può essere costituito da una *interferenza* dovuta ad una emittente adiacente (ossia con una portante prossima a quella della emittente sintonizzata) che *sovramodula*, ovvero adotta un indice di modulazione troppo elevato, ed invade la banda delle emittenti contigue.

**Esercizio** Sia dato un trasmettitore FM con potenza trasmessa 1 Watt e segnale modulante  $m(t)$  con banda  $\pm W = \pm 10$  MHz. Un collegamento con attenuazione disponibile  $A_d = 100$  dB lo interfaccia ad un ricevitore con temperatura di sistema  $T_{ei} = 2900$  °K. Desiderando un  $SNR = 40$  dB, calcolare:

- 1) Il fattore di rumore del ricevitore in dB;
- 2) Il minimo valore dell'indice di modulazione e la banda occupata a radiofrequenza  $B_{RF}$ ;
- 3) Se il valore di  $\beta$  trovato in 2) non sia troppo piccolo, e quale sia il suo massimo valore;
- 4) Il nuovo valore  $\beta'$ , volendo dotare il collegamento di un margine pari a 25 dB.

**Soluzione** 1) Questa domanda va affrontata dopo lo studio del § 15.2, dove è mostrato che  $T_{ei} = T_0(F - 1) + T_g = T_0F$  se  $T_g = T_0$ ; assumiamo quest'ipotesi per vera e dunque  $F = \frac{T_{ei}}{T_0} = 10$ ; pertanto  $F_{dB} = 10$  dB. Per proseguire l'esercizio con le nozioni fin qui acquisite, esplicitiamo che  $\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2} = \frac{1}{2}kT_{ei} = \frac{1}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 2900 \simeq 2 \cdot 10^{-20}$  Watt/Hz.

2) Qui è utilizzata la relazione  $W_R = W_T G_d$  dal § 16.1, in modo da scrivere  $SNR = 3\beta^2 SNR_0 = 3\beta^2 \frac{W_R}{N_0 W} = 3\beta^2 \frac{W_T G_d}{N_0 W}$ ; il valore numerico di  $SNR$  risulta  $10^{\frac{SNR_{dB}}{10}} = 10^4$ , mentre quello di  $A_d$  è  $10^{\frac{A_d(dB)}{10}} = 10^{10}$  e quindi  $G_d = 1/A_d = 10^{-10}$ . Sostituendo i valori, ed invertendo la relazione, si ottiene  $\beta_{min} = \sqrt{\frac{SNR \cdot N_0 W}{3 \cdot W_T G_d}} = \sqrt{\frac{10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-20} \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{-10}}} = 3.65$ . Applicando la regola di Carson per la banda:  $B_{RF} \simeq 2W \cdot (\beta + 1) = 2 \cdot 10^7 \cdot 4.65 = 9.3 \cdot 10^7 = 93$  MHz.

3) La validità dei risultati 2) dipende dal verificarsi delle condizioni di basso rumore, ovvero deve risultare  $W_R \gg \sigma_{vc}^2 = \sigma_{vs}^2 = N_0 B_N = N_0 B_{RF} = 4 \cdot 10^{-20} \cdot 9.3 \cdot 10^7 = 3.72 \cdot 10^{-12}$  Watt, ma poiché  $W_R = \frac{W_T}{A_d} = \frac{1}{10^{10}} = 10^{-10}$ , si ha  $\frac{W_R}{\sigma_{vc}^2} = \frac{10^{-10}}{3.72 \cdot 10^{-12}} = 26$ , che soddisfa abbastanza bene l'esigenza di *basso rumore*. Per trovare  $\beta_{Max}$  partiamo

dal vincolo che debba risultare  $W_R \geq 10 \cdot \sigma_{\nu_c}^2 = 10 \cdot N_0 \cdot B_{RF} = 10 \cdot N_0 \cdot 2W \cdot (\beta_{Max} + 1)$ , da cui otteniamo  $\beta_{Max} = \frac{W_R}{10 \cdot N_0 \cdot 2W} - 1 = \frac{10^{-10}}{8 \cdot 10^{-12}} - 1 = 12.5 - 1 = 11.5$ , al quale corrisponde una banda  $B_{RF} = 2W \cdot (\beta_{Max} + 1) = 2 \cdot 10^7 \cdot 12.5 = 250$  MHz, ed un guadagno di  $SNR = 10 \lg_{10} 3\beta_{Max}^2 \simeq 26$  dB, mentre con  $\beta_{min}$  nominale si sarebbe ottenuto  $10 \lg_{10} (3 \cdot 3.65^2) = 16$  dB.

- 4) Il concetto di margine è introdotto al § 16.1; un margine di 25 dB equivale a far fronte ad una attenuazione supplementare  $A'_d = 10^{2.5} = 316$  volte. Proviamo ad ottenere lo stesso  $SNR$  con un nuovo valore  $\beta'$ :  $SNR = 10^4 = 3\beta'^2 \frac{W_T G_d G'_d}{N_0 W} = 3\beta^2 \frac{W_T G_d}{N_0 W} \frac{\beta'^2}{\beta^2} G'_d$ ; dunque deve risultare  $\frac{\beta'^2}{\beta^2} G'_d = 1$  e quindi  $\beta'^2 = \beta^2 \sqrt{\frac{1}{G'_d}} = 3.65 \sqrt{316} = 3.65 \cdot 17.7 = 64.88$  .... non ce la facciamo. Infatti, al più (con  $\beta = \beta_{Max} = 11.5$ ) si ha un margine di 10 dB.

#### 11.4.4 Enfasi e de-enfasi

Abbiamo osservato che in presenza di rumore bianco in ingresso il rumore dopo demodulazione ha un andamento parabolico. Questo comporta che, se il messaggio modulante  $m(t)$  avesse una densità spettrale  $\mathcal{P}_m(f)$  a sua volta bianca, l' $SNR(f)$  alle frequenze più elevate sarebbe molto peggiore del suo valore per frequenze inferiori. Nella pratica, si possono verificare (ad esempio) i seguenti problemi:

- Nelle trasmissioni FDM-FM (vedi § 9.1.1.2), in cui più canali vengono modulati AM-BLU, multiplati in frequenza, e ri-modulati congiuntamente in FM a basso indice, i canali agli estremi della banda FDM sono più rumorosi;
- nell'FM *broadcast* (vedi § 20.2), il segnale modulante è molto più ricco di energia alle basse frequenze, dunque il problema del rumore elevato in alta frequenza è aggravato dal "basso segnale".

Il rimedio a tutto ciò consiste nel modificare  $m(t)$  mediante un circuito detto *di enfasi*, in quanto il suo ruolo è quello di *enfaticizzare* le frequenze più elevate. In tal modo anche  $m(t)$  presenta uno spettro *parabolico* e l' $SNR$  sarà lo stesso a tutte le frequenze! L'alterazione introdotta su  $m(t)$  viene quindi rimossa mediante una rete di *de-enfasi* posta in ricezione (praticamente un integratore, ovvero un passa-basso) tale da ripristinare l'originale sagoma spettrale del segnale, rendendo la densità di potenza del rumore costante in frequenza.

Con un po' di riflessione, ci si accorge che l'uso di una coppia enfasi-deenfasi equivale ad effettuare una trasmissione a modulazione di fase (vedi pag. 286). In realtà, la rete di enfasi non è un derivatore perfetto (altrimenti annullerebbe le componenti del segnale a frequenza prossima allo zero), ed esalta le frequenze solo se queste sono maggiori di un valore minimo. Pertanto, si realizza un metodo di modulazione "misto", FM in bassa frequenza e PM a frequenze (di messaggio) più elevate.

## 11.5 Appendice

### 11.5.1 Approssimazione della d.d.p. di Rice per $SNR$ elevato

Come già osservato a pag. 309, la funzione modificata di Bessel può essere approssimata come  $I_0(\rho A / \sigma^2) \sim \exp\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right) / \sqrt{2\pi \frac{\rho A}{\sigma^2}}$  per  $\frac{\rho A}{\sigma^2} \gg 1$ , e quindi in tal caso la funzione *integranda* che

comparare al secondo termine di (11.15) diviene

$$\begin{aligned} p_{PRICE}(\rho) &\simeq \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{\rho A}{\sigma^2}} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\rho A}} = \\ &= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi\sigma^2 A}} \exp\left(-\frac{(\rho - A)^2}{2\sigma^2}\right) < \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\rho - A)^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (11.22)$$

in cui l'ultimo passaggio tiene conto che nelle ipotesi poste risulta anche  $\frac{A}{\sigma} \gg 1$ , permettendo di scrivere  $\rho \simeq A + \varepsilon$  con  $\varepsilon \ll A$ , e dunque  $\sqrt{\frac{\rho}{2\pi\sigma^2 A}} \simeq \sqrt{\frac{A+\varepsilon}{2\pi\sigma^2 A}} < \sqrt{\frac{A}{2\pi\sigma^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ .

Dato che la (11.22) è a tutti gli effetti la d.d.p. di una gaussiana con media  $A$  e varianza  $\sigma^2$ , l'integrale a secondo membro di (11.15) risulta inferiore a

$$\int_{-\infty}^{\frac{A}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\rho - A)^2}{2\sigma^2}\right) d\rho = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left\{\frac{A/2}{\sqrt{2}\sigma}\right\} \quad (11.23)$$

Considerando di nuovo il verificarsi di  $A/\sigma \gg 1$ , anche per l'argomento dell' $\operatorname{erfc}$  risulta  $z = \frac{A/2}{\sqrt{2}\sigma} \gg 1$ , ed in tal caso vale l'approssimazione<sup>24</sup>  $\operatorname{erfc}(z) \simeq \frac{1}{z\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$ . Sostituendo questa in (11.23) e quindi nella (11.15), il secondo membro di (11.15) si approssima come

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sigma}{A/2} \cdot \exp\left(-\frac{A^2}{4 \cdot 2 \cdot \sigma^2}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}A} \exp\left(-\frac{A^2}{8\sigma^2}\right)$$

che, essendo per ipotesi  $\frac{A}{\sigma} \gg 1$ , risulta trascurabile rispetto al primo termine  $\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{8\sigma^2}\right)$  della (11.15).

<sup>24</sup>Vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_degli\\_errori](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_degli_errori)



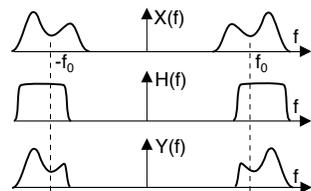
## Distorsione per segnali modulati

**D**OPO aver introdotto gli strumenti di descrizione analitica per segnali modulati (cap. 9), ed avere illustrato le tecniche di mo-demodulazione possibili (cap. 10), occupiamoci di investigare l'influenza che i fenomeni di distorsione *lineare* (§ 7.2) possono avere sui segnali di natura passa-banda, o modulati. A tal fine, viene dapprima esaminato come le operazioni di filtraggio possano essere descritte anche in termini di involuppo complesso, e poi sono determinate le condizioni *favorevoli* che un canale di comunicazione passa banda dovrebbe avere, così come la possibilità di *semplificare* l'analisi degli effetti per casi particolari di segnale modulato. I risultati sono quindi applicati alle tecniche di modulazione affrontate al capitolo 10, in modo da analizzare gli effetti della distorsione lineare nei diversi casi. Infine, viene mostrato come la modulazione angolare *non risenta* di fenomeni di distorsione *non lineare*.

### 12.1 Filtraggio passa banda

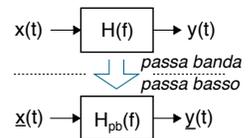
Qualora un filtro presenti una risposta in frequenza  $H(f)$  di tipo *passa banda* come raffigurato a lato, la corrispondente risposta impulsiva  $h(t)$  può essere considerata descritta nei termini delle componenti in fase ed in quadratura

$$h(t) = h_c(t) \cos \omega_0 t - h_s(t) \sin \omega_0 t \quad (12.1)$$



riferite ad una frequenza  $f_0$ , ovvero nei termini del relativo involuppo complesso  $\underline{h}(t) = h_c(t) + jh_s(t)$  in modo del tutto simile (§ 9.2.1) a quanto avviene per il segnale modulato  $x(t)$  in ingresso.

Ciò consente di ri-definire l'operazione di filtraggio di  $x(t)$  attraverso  $H(f)$  nei termini del filtraggio del relativo involuppo complesso  $\underline{x}(t)$  da parte di filtro  $H_{pb}(f)$  passa basso detto *equivalente di banda base* e descritto da una risposta impulsiva *complessa*



$$h_{pb}(t) = \frac{1}{2} \underline{h}(t) \quad (12.2)$$

Qualora infatti sia per il segnale modulato  $x(t)$  che per la risposta impulsiva  $h(t)$  valgano le condizioni di limitazione in banda, l'involuppo complesso dell'uscita da  $H(f)$  passa banda può

essere calcolato a partire da  $\underline{x}(t)$  e  $\underline{h}(t)$  (valutati rispetto alla medesima frequenza  $f_0$ ) come<sup>1</sup>

$$\underline{y}(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) * \underline{h}(t) \quad (12.3)$$

da cui si ottiene l'espressione di  $y_c(t)$  ed  $y_s(t)$  in funzione delle c.a. di  $x(t)$  e di quelle del filtro<sup>2</sup>:

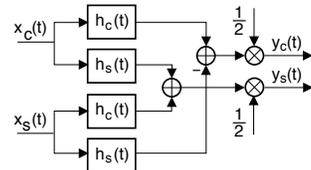
$$\begin{aligned} \underline{y} &= \frac{1}{2} \underline{x} * \underline{h} = \frac{1}{2} [x_c + jx_s] * [h_c + jh_s] = \\ &= \frac{1}{2} [x_c * h_c - x_s * h_s] + j \frac{1}{2} [x_s * h_c + x_c * h_s] \end{aligned} \quad (12.4)$$

Pertanto le componenti reale e immaginaria di  $\underline{y}(t)$  possono essere ottenute mediante 4 filtri di banda base operanti su  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$ , dato che dalla (12.4) otteniamo

$$\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2} [x_c(t) * h_c(t) - x_s(t) * h_s(t)] \\ y_s(t) = \frac{1}{2} [x_s(t) * h_c(t) + x_c(t) * h_s(t)] \end{cases} \quad (12.5)$$

a cui corrisponde lo schema simbolico mostrato a lato.

Il risultato (12.5) una doppia valenza, sia positiva che negativa. Da un lato asserisce che si può *intenzionalmente* eseguire un filtraggio di tipo passa banda su di un segnale modulato senza che sia necessario realizzare il filtro *per davvero*, operando invece sulle relative c.a. di b.f. del segnale, e del filtro. D'altro canto se l'effetto filtrante è causato dal canale di comunicazione ed è già *avvenuto*, l'effetto prodotto sulle c.a. di b.f.  $y_c(t)$  e  $y_s(t)$  ottenute mediante demodulazione in fase e quadratura del segnale modulato prende il nome di...



### 12.1.1 Intermodulazione tra componenti analogiche

Le (12.5) mostrano come sia  $y_c(t)$  che  $y_s(t)$  dipendano in generale da entrambe le componenti  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$ , in un modo *apparentemente* ineliminabile. Infatti, le informazioni contenute in  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  sono ora mescolate in modo da non poter essere recuperate mediante una operazione di equalizzazione (§§ 8.3 e 15.4) attuata separatamente su ciascuna delle c.a. di b.f.  $y_c(t)$  e  $y_s(t)$ . A meno che...

<sup>1</sup>Per dimostrare il risultato, mostriamo innanzitutto che il segnale analitico in uscita vale  $y^+(t) = x^+(t) * h^+(t)$ . Infatti, omettendo di indicare nei passaggi la variabile  $(t)$  per compattezza di notazione, risulta

$$x^+(t) * h^+(t) = [x * h_{fp}] * [h * h_{fp}] = [x * h] * [h_{fp} * h_{fp}] = y * h_{fp} = y^+(t)$$

in cui  $h_{fp}(t)$  è la risposta impulsiva del filtro necessario ad estrarre il segnale analitico. Non resta ora che mostrare lo sviluppo per il risultato anticipato:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{x}(t) * \underline{h}(t) &= \frac{1}{2} [2x^+(t) e^{-j\omega_0 t}] * [2h^+(t) e^{-j\omega_0 t}] = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} x^+(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} h^+(t - \tau) e^{-j\omega_0 (t - \tau)} d\tau = \\ &= 2e^{-j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} x^+(\tau) h^+(t - \tau) d\tau = 2e^{-j\omega_0 t} y^+(t) = \underline{y}(t) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Tralasciamo di indicare la dipendenza da  $t$  per semplicità di notazione.

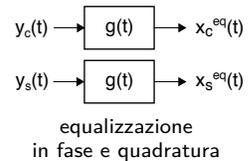
**12.1.1.1 Equalizzazione in fase e quadratura**

Consideriamo il caso in cui  $\underline{h}(t)$  presenti *una sola* delle due c.a. di b.f.<sup>3</sup>, ovvero  $\underline{h}(t)$  sia solo reale o solo immaginario: se ad esempio risulta  $\underline{h}(t) = h_c(t)$ , le (12.5) divengono

$$\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2}x_c(t) * h_c(t) \\ y_s(t) = \frac{1}{2}x_s(t) * h_c(t) \end{cases} \quad (12.6)$$

e quindi  $y_c(t)$  e  $y_s(t)$  risultano affette unicamente da distorsione lineare (§ 7.2).

Ciò consente di ri-ottenere le componenti *trasmesse*  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  a partire da quelle *ricevute*  $y_c(t)$  e  $y_s(t)$  mediante un procedimento di *equalizzazione*<sup>4</sup> svolto su entrambi i rami in modo indipendente mediante due identici filtri con risposta impulsiva  $g(t)$  *reale* e tale che  $g(t) * h_c(t) = 2\delta(t - \tau)$  in modo da ripristinare le condizioni di *canale perfetto* (vedi pag. 183), cioè



$$\begin{cases} x_c^{eq}(t) = y_c(t) * g(t) = \frac{1}{2}x_c(t) * h_c(t) * g(t) = x_c(t - \tau) \\ x_s^{eq}(t) = y_s(t) * g(t) = \frac{1}{2}x_s(t) * h_c(t) * g(t) = x_s(t - \tau) \end{cases}$$

**12.1.1.2 Equalizzazione complessa**

Qualora nella (12.5) siano presenti entrambe  $h_c(t)$  e  $h_s(t)$  ed entrambe  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  non è possibile equalizzare le c.a. di b.f. in modo indipendente, e apparentemente la distorsione lineare può essere rimossa solo operando sul segnale modulato, con tutte le difficoltà legate alle elevate frequenze in gioco. Se invece rimuoviamo il vincolo di operare mediante un filtro *fisicamente realizzabile*, ossia con risposta impulsiva  $g(t)$  *reale*, scopriamo che l'equalizzazione *può ancora* essere svolta *in banda base* ricorrendo ad una convoluzione *complessa*

$$\underline{x}^{eq}(t) = \underline{y}(t) * \underline{g}(t) \quad (12.7)$$

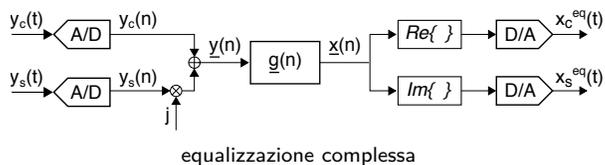
in cui  $\underline{g}(t)$  è definita in modo che

$$\underline{h}^{eq}(t) = \underline{g}(t) * \underline{h}(t) = 2\delta(t - \tau) \quad (12.8)$$

ovvero in modo da rendere *perfetto* l'involuppo complesso della risposta impulsiva del canale, dato che combinando le (12.3), (12.7) e (12.8) si ottiene

$$\underline{x}^{eq}(t) = \underline{y}(t) * \underline{g}(t) = \frac{1}{2}\underline{x}(t) * \underline{h}(t) * \underline{g}(t) = \underline{x}(t) * \delta(t - \tau) = \underline{x}(t - \tau)$$

L'equalizzazione complessa si rende possibile realizzando un filtro digitale con risposta impulsiva  $\underline{g}(n)$  *complessa* ottenuta a partire dai campioni di  $\underline{g}(t)$ , ed operante sui campioni delle c.a. di b.f. come mostrato in figura.

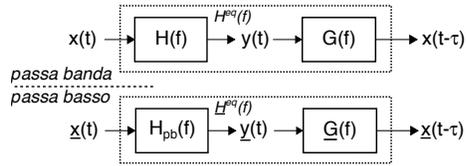


**12.1.1.3 Canale equalizzato**

<sup>3</sup>Una considerazione del tutto simile può essere svolta qualora sia l'involuppo complesso *del segnale modulato*  $\underline{x}(t)$  ad essere solo reale od immaginario, ma viene rimandata al § 12.2.

<sup>4</sup>Come già evidenziato al § 15.4 è preferibile realizzare l'equalizzazione operando sulle c.a. di b.f.  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  *da trasmettere*, in modo da evitare di rendere colorato il rumore in ingresso al ricevitore. Nel caso in cui  $h_c(t)$  non sia nota, occorre che presso il ricevitore venga effettuata una sua stima, vedi § 15.4.

Effettuare l'equalizzazione direttamente a radio frequenza porta ad un risultato lievemente diverso da quando la si realizzi in banda base: infatti anche se in entrambi i casi il risultato è sempre quello di ottenere un canale equalizzato *perfetto*, nel primo caso tale proprietà compete al canale passa banda ovvero  $h^{eq}(t) = \delta(t - \tau)$ , mentre nel secondo è l'equivalente *passa basso* ad essere perfetto, ovvero  $\underline{h}^{eq}(t) = \delta(t - \tau)$ . Prendiamo spunto da questa osservazione per analizzare i casi in cui *non si verifica* distorsione lineare per un segnale modulato.



### 12.1.2 Assenza di distorsione lineare nel filtraggio passa banda

Prendiamo in esame i requisiti affinché un canale non produca effetti di distorsione lineare su di un segnale modulato che lo attraversi, aggiungendo dettagli un po' per volta, per arrivare ad un risultato più generale.

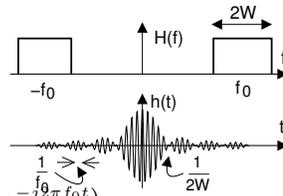
#### 12.1.2.1 Canale passa banda ideale

E' descritto da una risposta in frequenza  $H(f)$  nulla ovunque, tranne che negli intervalli di frequenze  $f_0 - W \leq |f| \leq f_0 + W$  in cui ha valore unitario, ovvero

$$H(f) = \text{rect}_{2W}(f - f_0) + \text{rect}_{2W}(f + f_0)$$

Antitrasformando si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} h(t) &= 2W \text{sinc}(2Wt) (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) = \\ &= 4W \text{sinc}(2Wt) \cos 2\pi f_0 t \end{aligned} \quad (12.9)$$



Confrontando la (12.9) con la (12.1), riconosciamo che

$$h_c(t) = 4W \text{sinc}(2Wt) \quad e \quad h_s(t) = 0$$

e dunque  $\underline{h}(t) = h_c(t) + jh_s(t)$  è reale, ed  $\underline{H}(f) = 2\text{rect}_{2W}(f)$ . Un segnale modulato in transito non subisce nessuna intermodulazione, né distorsione lineare, e neanche ritardo.

A questo caso particolare aggiungiamo le considerazioni relative ad un canale perfetto (ovvero con modulo costante e fase lineare) svolte a pag. 183, ove si afferma che in tal caso la forma d'onda del segnale in transito non subisce alterazione se non per un ritardo temporale: verifichiamo come questa ipotesi si rifletta sulle c.a. di b.f. di un segnale modulato. Come anticipato al § 12.1.1.3, ad essere perfetta può essere sia la risposta in frequenza  $H(f)$  del canale passa banda, sia quella  $\underline{H}(f)$  del suo equivalente passa basso (12.2). Iniziamo dal secondo.

#### 12.1.2.2 Canale equivalente passa basso perfetto

L'involuppo complesso in questo caso ha trasformata

$$\underline{H}(f) = 2\text{rect}_{2W}(f) e^{-j2\pi f\tau}$$

a cui è associata una  $\underline{h}(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau))$ . Ricordando (eq. (9.18)) che  $H^+(f) = \frac{1}{2}\underline{H}(f - f_0)$  e che  $H^-(f) = \frac{1}{2}\underline{H}^*(-f - f_0)$ , per il canale passa banda si ottiene

$$H(f) = \text{rect}_{2W}(f - f_0) e^{-j2\pi(f-f_0)\tau} + \text{rect}_{2W}(f + f_0) e^{-j2\pi(f+f_0)\tau} \quad (12.10)$$

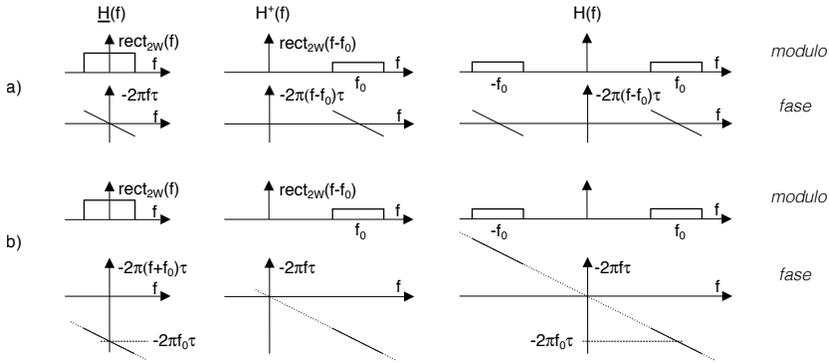


Figura 12.1: a) - canale equivalente passa basso perfetto  
 b) - canale passa banda perfetto

mostrata in figura 12.1-a), a cui corrisponde<sup>5</sup> una risposta impulsiva

$$h(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) \cos \omega_0 t \quad (12.11)$$

e dunque anche in questo caso  $\underline{h}(t) = h_c(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau))$  è solamente reale. Un segnale modulato  $x(t)$  che attraverso il canale produce in uscita<sup>6</sup>

$$y(t) = x_c(t - \tau) \cos \omega_0 t - x_s(t - \tau) \sin \omega_0 t \quad (12.12)$$

manifestando un ritardo  $\tau$  a carico solamente delle c.a. di b.f., e non della portante. Indicando  $\varphi(f) = -2\pi f\tau$  come fase  $\varphi_{pb}(f)$  di  $\underline{H}(f)$ , il rapporto  $-\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi(f) = \tau$  è stato indicato al § 7.2.2 come ritardo di gruppo  $\tau_g(f)$ , in questo caso costante in quanto  $\underline{H}(f)$  ha fase lineare.

### 12.1.2.3 Canale passa banda perfetto

In questo caso la risposta in frequenza assume la forma (vedi fig. 12.1-b)

$$H(f) = [\text{rect}_{2W}(f - f_0) + \text{rect}_{2W}(f + f_0)] e^{-j2\pi f\tau} \quad (12.13)$$

a cui corrisponde<sup>7</sup> una risposta impulsiva

$$h(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) \cos \omega_0(t - \tau) \quad (12.14)$$

<sup>5</sup>Espandiamo la (12.10) come

$$H(f) = \text{rect}_{2W}(f - f_0) e^{-j2\pi f\tau} e^{j2\pi f_0\tau} + \text{rect}_{2W}(f + f_0) e^{-j2\pi f\tau} e^{-j2\pi f_0\tau}$$

da cui antitrasformando si ottiene

$$\begin{aligned} h(t) &= 2W \text{sinc}(2W(t - \tau)) e^{j2\pi f_0(t - \tau)} e^{j2\pi f_0\tau} + 2W \text{sinc}(2W(t - \tau)) e^{-j2\pi f_0(t - \tau)} e^{-j2\pi f_0\tau} = \\ &= 2W \text{sinc}(2W(t - \tau)) (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

<sup>6</sup>La (12.12) si ottiene considerando  $W$  abbastanza elevato da poter assimilare  $2W \text{sinc}(2Wt) \rightarrow \delta(t)$  ossia ad un impulso, in modo che la (12.3) produca  $\underline{y}(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) * 2\delta(t - \tau) = x_c(t - \tau) + jx_s(t - \tau)$ .

<sup>7</sup>Il termine tra parentesi quadre in (12.13) ha anti-trasformata

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \text{rect}_{2W}(f - f_0) + \text{rect}_{2W}(f + f_0) \} = 2W \text{sinc}(2Wt) (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) = 2W \text{sinc}(2Wt) \cos \omega_0 t$$

ma il termine  $e^{-j2\pi f\tau}$  presente in (12.13) produce un ritardo nell'antitrasformata, dunque il risultato (12.14)

ed un segnale analitico  $H^+(f) = \text{rect}_{2W}(f - f_0) e^{-j2\pi f\tau}$ , e quindi un involuppo complesso

$$\underline{H}(f) = 2H^+(f + f_0) = 2\text{rect}_{2W}(f) e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}$$

da cui, essendo  $e^{-j2\pi(f+f_0)\tau} = e^{-j2\pi f\tau} e^{-j2\pi f_0\tau} = e^{-j2\pi f\tau} (\cos \omega_0\tau - j \sin \omega_0\tau)$ , si ha

$$\underline{h}(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) (\cos \omega_0\tau - j \sin \omega_0\tau)$$

e pertanto

$$h_c(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) \cos \omega_0\tau \quad e \quad h_s(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) \sin \omega_0\tau$$

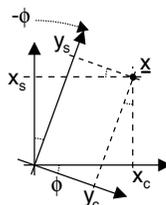
Ponendo ora  $\phi = \omega_0\tau$  e applicando le (12.5), in base all'osservazione alla nota 6 in uscita dal filtro troviamo componenti analogiche pari a

$$\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2} [x_c(t - \tau) \cos \phi - x_s(t - \tau) \sin \phi] \\ y_s(t) = \frac{1}{2} [x_c(t - \tau) \sin \phi + x_s(t - \tau) \cos \phi] \end{cases} \quad (12.15)$$

Il risultato (12.15) mostra che, oltre al ritardo  $\tau = \tau_g$  già trovato per il caso al § 12.1.2.2, si osserva anche una *rotazione* del piano dell'involuppo complesso, potendo esprimere le (12.15) come

$$\begin{bmatrix} y_c(t) \\ y_s(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t - \tau) \\ x_s(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (12.16)$$

in cui la matrice dei coefficienti è costante, e corrisponde ad una rotazione *antioraria*<sup>8</sup> di  $\underline{y}(t)$  rispetto a  $\underline{x}(t)$ , equivalente alla rotazione *oraria* degli assi mostrata in figura, di un angolo  $\phi = \omega_0\tau = 2\pi f_0\tau$  pari alla fase di  $H(f)$  calcolata per  $f = f_0$  come mostrato in fig. 12.1-b). Indicando quest'ultima come  $\varphi(f)$ , osserviamo che al § 7.2.2 abbiamo definito  $\frac{-\phi}{2\pi f_0} = \frac{-\varphi(f_0)}{2\pi f_0} = \tau$  come *ritardo di fase*  $\tau_f(f)$  calcolato per  $f = f_0$ , ovvero  $\tau$  rappresenta anche il ritardo della portante, cioè



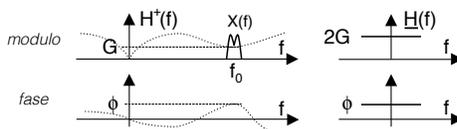
$$y(t) = x(t - \tau) = x_c(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau) - x_s(t - \tau) \sin \omega_0(t - \tau)$$

come previsto, vista l'ipotesi di partenza (12.13), nonché per il risultato che per un canale perfetto si ha  $\tau_g = \tau_f$ . L'effetto della rotazione  $\phi$  può quindi essere annullato se la fase della portante di demodulazione produce una rotazione opposta, oppure digitalmente per eseguire la rotazione inversa descritta a pagina 257 operando sui campioni delle c.a di b.f.

Infine, notiamo che le (12.16) possono essere riscritte in forma *compatta* come  $\underline{y}(t) = \underline{x}(t - \tau) e^{j\phi}$ .

#### 12.1.2.4 Segnale a banda stretta

L'ultimo caso che non determina distorsione lineare che consideriamo si verifica quando il segnale modulato  $x(t)$  occupa una banda  $B$  molto piccola<sup>9</sup> rispetto alla frequenza portante  $f_0$ , in modo che la risposta in frequenza



<sup>8</sup>L'analisi che interpreta la trasformazione legata ad un sistema lineare con matrice dei coefficienti pari a  $\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$  come una *rotazione* è stata svolta alla nota 18 di pag. 257.

<sup>9</sup>Condizione indicata anche come *piccola banda frazionale*, espressa come  $B/f_0 \ll 1$ .

del canale  $H(f)$  possa ritenersi approssimativamente *costante*<sup>10</sup> nella banda del segnale ovvero per  $f \simeq f_0$ , cioè

$$H(f) \simeq H(f_0) = Ge^{j\phi_{\text{sgn}}(f)}$$

e dunque  $\underline{H}(f) = 2H^+(f + f_0) = 2Ge^{j\phi}$ , a cui corrisponde un involuppo complesso

$$\underline{h}(t) = 2Ge^{j\phi}\delta(t) = 2G(\cos\phi + j\sin\phi)\delta(t)$$

In uscita da  $H(f)$  si osserva pertanto (eq. 12.3)

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= \frac{1}{2}\underline{x}(t) * \underline{h}(t) = (x_c(t) + jx_s(t)) * G(\cos\phi + j\sin\phi)\delta(t) = \\ &= G[(x_c(t)\cos\phi - x_s(t)\sin\phi) + j(x_c(t)\sin\phi + x_s(t)\cos\phi)] \end{aligned}$$

che può essere scritta in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} y_c(t) \\ y_s(t) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix}$$

in cui compare la stessa matrice dei coefficienti del caso precedente, che di nuovo rappresenta la rotazione *oraria* del piano dell'involuppo complesso di un angolo pari alla fase  $\varphi(f)$  di  $H(f)$  valutata per  $f = f_0$ , a cui corrisponde il segnale ricevuto

$$y(t) = x_c(t)\cos\omega_0(t - \tau) - x_s(t)\sin\omega_0(t - \tau)$$

**Riassumendo** Esprimendo la risposta in frequenza del canale nella forma  $H(f) = |H(f)|e^{j\varphi(f)}$  e la trasformata del corrispondente involuppo complesso come  $\underline{H}(f) = |\underline{H}(f)|e^{j\varphi_{pb}(f)}$  in cui  $\varphi_{pb}(f) = \varphi(f + f_0)$ , abbiamo mostrato che

- un canale *passabanda ideale* non altera il segnale modulato in transito;
- un canale *equivalente passabasso perfetto* introduce nelle c.a. di b.f. un ritardo  $\tau_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi_{pb}(f) \Big|_{f=f_0}$  che dipende *dalla pendenza* della fase di  $\underline{H}(f)$  nell'origine, ovvero di quella  $\varphi(f)$  del passa banda per  $f = f_0$ ;
- un canale *passabanda perfetto* oltre al ritardo  $\tau_g$  delle c.a. di b.f. introduce anche una rotazione del piano di  $\underline{y}(t)$  di un angolo  $\phi = \omega_0\tau_f$  che dipende *dal valore* della fase di  $\underline{H}(f)$  nell'origine in quanto  $\tau_f = -\frac{\varphi(f_0)}{2\pi f_0} = -\frac{\varphi_{pb}(0)}{2\pi f_0}$ ;
- un segnale modulato *a banda stretta* subisce la rotazione suddetta, ma non il ritardo delle c.a. di b.f.

L'approccio unitario agli ultimi tre aspetti delineati è fornito al § seguente, che illustra un *caso particolare* di distorsione lineare.

<sup>10</sup>Detta anche condizione per un *fading piatto* nel caso di un collegamento radio, vedi pag. 484, mentre dal punto di vista circuitale ciò corrisponde a realizzare le condizioni di adattamento di impedenza (vedi § 15.1.1.4) in forma approssimata, ponendo  $Z_g(f) = Z_i(f_0)$  e  $Z_c(f) = Z_u(f_0)$ , dato che per frequenze  $|f - f_0| < \frac{B}{2}$  con  $B \ll f_0$ , le impedenze  $Z_i(f)$  e  $Z_u(f)$  non variano di molto.

### 12.1.3 Ritardo di fase, di gruppo, e distorsione di tempo di transito

Al § 7.2.2 si è affermato che l'attraversamento da parte di un segnale modulato in ampiezza  $x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t)$  a banda stretta di un canale che (nella banda di segnale) presenti una risposta in frequenza  $H(f) = e^{j\varphi(f)}$  (ovvero modulo costante e fase generica) produce in uscita

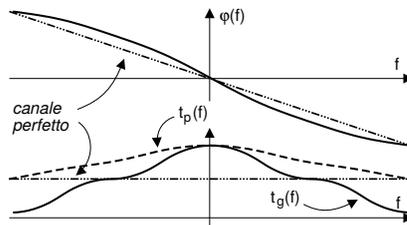
$$y(t) = a(t - \tau_g(f_0)) \cos(2\pi f_0(t - \tau_f(f_0))) \quad (12.17)$$

in cui

$$\tau_f(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi f} \quad e \quad \tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi(f)$$

sono rispettivamente indicati come ritardo di fase della portante  $\tau_f(f)$  (eq. 7.7) e ritardo di gruppo  $\tau_g(f)$  (eq. 7.8) del segnale modulato, ovvero il ritardo con cui il gruppo di frequenze presenti in  $a(t)$  si presenta in uscita. Tale risultato viene dimostrato in appendice 12.4.1 come l'esito di una approssimazione al primo ordine dello sviluppo in serie di potenze di  $\varphi(f)$ .

Nel caso di canale perfetto si ottiene  $\varphi(f) = -2\pi f\tau$ , e quindi  $t_g = t_p = \tau$  per qualunque frequenza; in caso contrario i due valori possono differire, come mostrato nella figura a lato, in cui notiamo che  $t_g(f) \simeq \tau$  alle frequenze per cui  $\varphi(f)$  viaggia parallela alla risposta in fase del canale perfetto, mentre risulta  $t_p(f) = \tau$  quando  $\varphi(f)$  la interseca.



Qualora il segnale in transito non sia a banda stretta, può essere considerato come la sovrapposizione di tante componenti  $x_i(t) = a_i(t) \cos(2\pi f_i t)$ , tutte a banda stretta, centrate su portanti  $f_i$  tra loro contigue: pertanto l'involuppo di ampiezza  $a_i(t)$  di ognuna di esse si presenta in uscita con un diverso ritardo  $\tau_i = t_g(f_i)$ . L'effetto della fase non lineare  $\varphi(f)$  è dunque espresso nei termini della sua derivata normalizzata  $t_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi(f)$ , misurabile strumentalmente mediante segnali a banda stretta, ed utilizzata per descrivere l'entità della distorsione di fase, per questo detta anche distorsione di tempo di transito, come definito al § 7.2.2.

### 12.1.4 Assenza di intermodulazione tra componenti analogiche

Come ultimo aspetto delle possibili tipologie di canale che possono tornare utili, ripartiamo dal sistema (12.5) e dall'osservazione che qualora l'involuppo complesso  $\underline{h}(t)$  associato alla risposta impulsiva  $h(t)$  del canale passa banda  $H(f)$  (considerato per  $|f - f_0| \leq W$  ovvero entro la banda di segnale) sia completamente reale, ovvero

$$\underline{h}(t) = h_0(t) \quad (12.18)$$

le (12.5) si riducono alle (12.6) e si può procedere ad una equalizzazione in fase e quadratura, ovvero attuata con filtri fisicamente realizzabili. In realtà la (12.18) è una condizione solamente sufficiente ad ottenere assenza di intermodulazione, dato che in presenza di un ritardo  $\tau$  sulla portante, come mostrato al § 12.1.2.3 essa diviene

$$\underline{h}(t) = h_0(t) (\cos \phi - j \sin \phi) = h_0(t) e^{-j\phi} \quad (12.19)$$

in cui  $\phi = \omega_0 \tau$ . Mostriamo come la (12.19) si riflette su  $\underline{H}(f) = |\underline{H}(f)| e^{j\varphi_{pb}(f)}$ .

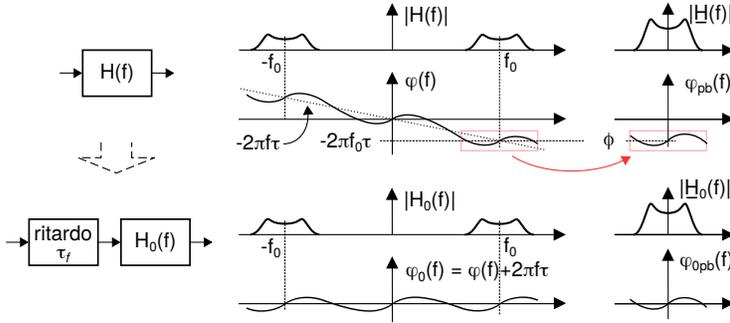


Figura 12.2: Condizione per assenza di intermodulazione nelle componenti analogiche di bassa frequenza

La condizione (12.18)  $\underline{h}(t) = h_o(t)$  reale implica (pag. 56) una  $\underline{H}(f) = H_o(f)$  a *simmetria coniugata* rispetto a  $f = 0$ , ovvero modulo  $|\underline{H}(f)| = |H_o(f)|$  *pari* e fase  $\varphi_{pb}(f) = \varphi(f + f_0)$  *dispari*; d'altra parte dalla 12.19 si ottiene

$$\underline{H}(f) = H_o(f) e^{-j\phi} = |H_o(f)| e^{j\varphi_{pb}(f)} e^{-j\phi} = |H_o(f)| e^{j(\varphi_{pb}(f) - \phi)}$$

Pertanto

*Un canale  $H(f)$  non provoca interferenza intersimbolica nei confronti di un segnale modulato se e solo se il corrispondente equivalente passa basso  $\underline{H}(f)$  presenta (nella banda di segnale) modulo pari e fase dispari, a meno di una costante  $\phi$ .*

Essendo  $\phi = \omega_0\tau$ , ciò corrisponde a scomporre  $H^+(f)$  nella cascata di  $2H_o(f - f_0)$  e di un canale perfetto con  $h(t) = \delta(t - \tau)$  in cui  $\tau = \frac{-\phi}{\omega_0} = \frac{-\varphi(f)}{2\pi f_0} = \tau_f(f_0)$  è il ritardo di fase della portante, come mostrato in fig. 12.2.

**Osservazione** Qualora  $\phi$  sia pari ad un multiplo di  $\frac{\pi}{2}$  l'evoluzione di  $\underline{h}(t)$  si sviluppa lungo gli assi che definiscono il piano dell'involuppo complesso. Infatti in base alla (12.19) per  $\phi = 0$  si ottiene  $\underline{h}(t) = h_o(t)$  ovvero  $h_c(t) = h_o(t)$ , per  $\phi = \frac{\pi}{2}$  si ha  $\underline{h}(t) = -jh_o(t) = jh_s(t)$ , e per  $\phi = \pi$  o  $\phi = \frac{3\pi}{2}$  si ottiene rispettivamente  $\underline{h}(t) = -h_o(t) = h_c(t)$  e  $\underline{h}(t) = jh_o(t) = jh_s(t)$ .

## 12.2 Distorsione lineare per segnali modulati

Dopo aver analizzato le particolarità del canale per quanto riguarda la trasmissione di generici segnali passa banda, possiamo ad analizzare gli effetti della *distorsione lineare* sui particolari tipi di modulazione descritti al § 10, oltre a quelli già noti dal cap. 7.

### 12.2.1 Modulazione di ampiezza

**AM-BLD-PS > BANDA LATERALE DOPPIA, PORTANTE SOPPRESSA** In questo caso  $x_s(t) = 0$ , e quindi il sistema (12.5) si riduce a  $\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2}x_c(t) * h_c(t) \\ y_s(t) = \frac{1}{2}x_c(t) * h_s(t) \end{cases}$  e non si verifica intermodulazione. In assenza di errore di fase sulla portante è quindi sufficiente un demodulatore omodina in quanto l'informazione si trova sulla componente  $y_c(t) = x_c(t) * h_c(t)$ , e l'effetto del canale

può essere equalizzato con un filtro fisicamente realizzabile. Se invece è presente un errore di fase  $\phi$  (vedi § 10.2.3.1) adottando un demodulatore in fase e quadratura otteniamo

$$\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2} [x_c(t) * h_c(t) \cos \phi - x_s(t) * h_s(t) \sin \phi] \\ y_s(t) = \frac{1}{2} [x_c(t) * h_s(t) \sin \phi + x_s(t) * h_s(t) \cos \phi] \end{cases}$$

ovvero  $y(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) * \underline{h}(t) \cdot e^{-j\phi}$ , reversibile numerizzando le c.a. di b.f. e mettendo assieme la procedura di equalizzazione complessa (§ 12.1.1.2) con quella di inversione della rotazione (§ 9.2.5).

**AM-BLD-PI > BANDA LATERALE DOPPIA, PORTANTE INTERA** In questo caso il demodulatore è sempre di tipo *ad inviluppo*, tipicamente operante sul segnale a media frequenza prodotto da uno stadio eterodina, la fase della cui portante è indifferente a quella del segnale modulato.

Il problema principale si presenta quando  $|H(f)|$  è molto ridotto in corrispondenza della portante ovvero per  $f = f_0$ , tipicamente a causa di una attenuazione *selettiva* come esemplificato all'esempio di pag. 189, poi ripreso al § 16.3.3.5. In tal caso infatti l'indice di modulazione  $I_a$  (eq. 10.4) supera il 100%, ed il segnale diviene *sovramodulato*, rendendo impraticabile la demodulazione di inviluppo.

**AM-BLU > BANDA LATERALE UNICA** In questo caso il segnale modulato contiene ambedue le c.a. di b.f., e dunque in presenza di distorsione lineare insorge intermodulazione (eq. 12.5), particolarmente deleteria se non equalizzata, operazione da svolgere per via numerica sui campioni dell'inviluppo complesso ricevuto  $\underline{y}(t)$  (§ 12.1.1.2)

### 12.2.2 Modulazione di Frequenza

Quando un segnale modulato angolarmente attraversa un canale affetto da distorsione lineare (di modulo, di fase, od entrambe), si verificano<sup>11</sup> due fenomeni di *conversione*, indicati come conversione PM-AM e PM-PM. La prima consiste in una modulazione di ampiezza *sovrapposta*, come avviene per il caso discusso al § 10.3.2.2 relativo alla demodulazione FM mediante discriminatore; la seconda invece si sostanzia in una *alterazione* della modulazione di fase. In entrambi i casi l'effetto della distorsione *dipende* dal messaggio modulante, e dunque non può essere considerato di natura *additiva*. Anche se la modulazione AM *parassita* può essere rimossa da un limitatore in ricezione (vedi § 10.3.2.2), ciò non è possibile per l'errore introdotto nella fase modulante; quest'ultima presenta inoltre anche termini *non lineari* ovvero legati alle sue potenze, e dunque non eliminabili mediante equalizzazione dopo demodulazione.

## 12.3 Distorsione non lineare per segnali modulati

Al § 7.3 si è analizzato il fenomeno della distorsione *non* lineare, focalizzandoci essenzialmente sulla generazione di componenti spettrali a frequenze assenti dal segnale di ingresso, eliminabili mediante filtraggio. D'altra parte, la non linearità produce effetti distorsivi anche nella stessa banda di segnale, di cui ora discutiamo.

<sup>11</sup>Vedi E. Bedrosian, Distortion and Crosstalk of Linearly Filtered, Angle-Modulated Signals, presso <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19660014309.pdf>

### 12.3.1 Insensibilità della modulazione angolare alla distorsione non lineare

Applichiamo quanto discusso al § 7.3.1 al caso di un segnale modulato angularmente, ovvero del tipo  $x(t) = \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ , che quando attraversa un dispositivo non-lineare descritto da una caratteristica ingresso-uscita senza memoria approssimata come  $y(t) = x(t) + \alpha x^2(t) + \beta x^3(t)$ , produce una uscita esprimibile come

$$y(t) = \frac{\alpha}{2} a^2(t) + \left(1 + \frac{3}{4}\beta\right) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + \frac{\alpha}{2} \cos[2\omega_0 t + 2\varphi(t)] + \frac{\beta}{4} \cos[3\omega_0 t + 3\varphi(t)]$$

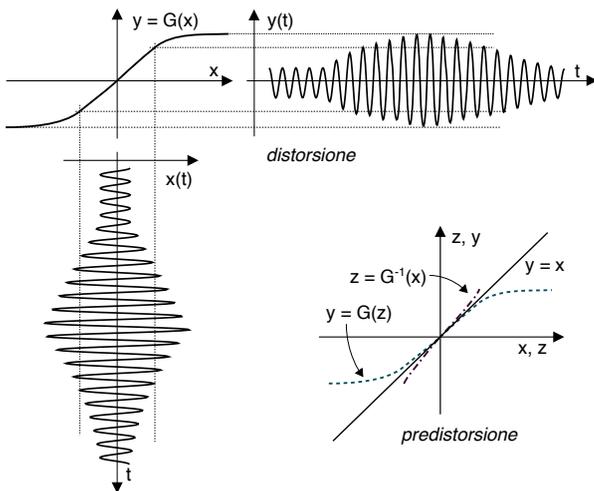
Dopo che i termini a frequenza  $2\omega_0$  e  $3\omega_0$ , nonché la costante additiva, sono eliminati mediante un filtro passa-banda centrato in  $f = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ , rimane solamente il termine  $z(t) = \left(1 + \frac{3}{4}\beta\right) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ . Pertanto, la modulazione di fase  $\varphi(t)$  è esattamente *la stessa* di quella impressa dal modulatore, e quindi i fenomeni non lineari *non hanno conseguenze sulla modulazione angolare!* Tranne, ovviamente, che per le interferenze causate alle trasmissioni su portanti a frequenza doppia e tripla di  $f_0$ .

L'insensibilità dei segnali modulati angularmente nei riguardi delle non linearità è stata ad esempio sfruttata nei collegamenti in ponte radio progettati per trasmettere un segnale FDM in modulazione di frequenza (§ 9.1.1.2), adottando un basso indice di modulazione (risparmiando banda) e trasmettendo a piena potenza (vedi § 7.3). In questo modo, la potenza del segnale trasmesso *non dipende* dal numero di canali contemporaneamente attivi.

### 12.3.2 Predistorsione

A differenza dei segnali modulati angularmente, quelli a modulazione di ampiezza subiscono pienamente l'effetto di distorsione non lineare, che si ripercuote sulla ampiezza della portante, ed in egual misura sul segnale demodulato. Nel caso in cui i parametri che caratterizzano la non-linearità<sup>12</sup>  $y = G(x)$  siano noti, un rimedio che viene tentato è quello di far passare il segnale modulato (prima della sua trasmissione) attraverso un nuovo elemento non lineare appositamente realizzato in modo che effettui una trasformazione

*inversa* ovvero  $z = G^{-1}(x)$  con  $G^{-1}$  tale che  $G(z) = G(G^{-1}(x)) = x$ , fornendo quindi in ingresso all'elemento non lineare  $G$  il segnale *predistorto*  $z = G^{-1}(x)$  anziché quello originale  $x$ , neutralizzando così il fenomeno di non linearità.



<sup>12</sup>Ovvero i coefficienti dello sviluppo in serie della caratteristica ingresso-uscita.

## Teoria dell'informazione e codifica

**P**RIMA di affrontare la seconda(II) parte del testo, che tratta della *trasmissione* dei segnali, in questo capitolo approfondiamo gli aspetti legati alle trasformazioni operate sui segnali *precedentemente* alla loro trasmissione. Qui esaminiamo gli aspetti relativi alla codifica di *canale* e di *sorgente* accennati al § 1.2.2, ovvero come *proteggere* dagli errori di trasmissione l'informazione trasmessa, e come *ridurre* la mole di dati da trasmettere senza pregiudicare la qualità del messaggio. Sono inoltre investigati *i limiti* entro i quali è possibile operare nel senso ora definito, e cioè viene stabilito quale sia *il massimo* teorico della velocità di trasmissione dell'informazione su un determinato canale, indicato come la sua *capacità*, e quale sia *la minima* velocità di trasmissione con cui è possibile rappresentare una determinata sorgente, indicata come la sua *entropia*. Infine, vengono illustrate alcune possibili tecniche con cui approssicare i suddetti limiti nel caso di sorgenti e canali numerici, mentre gli aspetti relativi alle sorgenti analogiche sono rimandati al capitolo 21.

### 13.1 Codifica di sorgente

Una fonte informativa (o sorgente) può essere per sua natura di tipo discreto, come nel caso di un documento scritto, o di tipo continuo, come nel caso di un segnale analogico, ad esempio audio e video. In base a considerazioni di tipo statistico la sorgente può essere caratterizzata da una grandezza, l'*entropia*, che indica il tasso di informazione (in bit/simbolo) *intrinseco* presente nei messaggi da essa prodotti; d'altra parte, la descrizione in modo *nativo* di tali messaggi può produrre una *velocità di trasmissione* ben superiore!

La *codifica di sorgente* ha lo scopo di individuare rappresentazioni alternative per le informazioni prodotte dalla sorgente, in modo da limitare la quantità di bit/secondo necessari alla trasmissione a valori quanto più possibile prossimi a quelli dell'entropia, sfruttando le caratteristiche della sorgente, del processo di codifica, e del destinatario dei messaggi, ovvero

- la particolare distribuzione statistica dei simboli o dei valori emessi dalla sorgente, che può permettere l'uso di un minor numero di bit per rappresentare i simboli *più frequenti* di altri;
- la dipendenza statistica presente tra simboli consecutivi, ovvero la presenza di un fenomeno di *memoria* intrinseco della sorgente, che rende possibile entro certi limiti la *predizione* dei valori futuri;
- l'introduzione di un *ritardo di codifica*, che permette di analizzare un intero intervallo temporale del messaggio;

- nel caso di segnali multimediali, l'esistenza di *fenomeni percettivi* legati alla fisiologia dell'apparato sensoriale, che possono guidare il codificatore nella scelta delle componenti di segnale da sopprimere, in quanto percettivamente non rilevanti.

Nel caso di sorgenti nativamente discrete, come ad esempio documenti in formato elettronico, lo scopo della codifica di sorgente è quello di permettere la ricostruzione *integrale* di quanto trasmesso, che dunque viene detta *senza perdita di informazione*. Nel caso invece di sorgenti continue, si ottiene una sequenza numerica a seguito di un processo di campionamento e quantizzazione, che determina l'insorgenza di una prima causa di *distorsione* nel messaggio ricostruito, mentre la velocità binaria effettiva può essere ulteriormente ridotta grazie allo sfruttamento dei fenomeni percettivi: in tal caso il risultato della codifica viene detto *con perdita di informazione*.

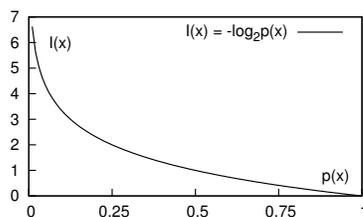
### 13.1.1 Codifica di sorgente discreta

**Sorgente senza memoria** Prendiamo in considerazione una sorgente discreta e stazionaria, che emette una sequenza  $x(n)$  composta di simboli  $x_k$  appartenenti ad un alfabeto di cardinalità  $L$  (ossia con  $k = \{1, 2, \dots, L\}$ ), ognuno contraddistinto dalla probabilità di emissione  $p_k = Pr(x_k)$ . Il termine *senza memoria* si riferisce al fatto che, se indichiamo con  $x_h, x_k$  una coppia di simboli emessi uno dopo l'altro (ossia  $x(n) = x_h, x(n+1) = x_k$ ), la probabilità del simbolo emesso per secondo non dipende dall'identità di quello(i) emesso precedentemente, ossia  $p(x_k/x_h) = p(x_k) = p_k$ , ovvero i simboli sono *statisticamente indipendenti*.

**Misura dell'informazione** Definiamo informazione (espressa in *bit*) associata all'osservazione del simbolo  $x_k$  il valore<sup>1</sup>

$$I_k = I(x_k) = \log_2 \frac{1}{p_k} = -\log_2 p_k \text{ bit} \quad (13.1)$$

che rappresenta il *livello di dubbio* a riguardo del verificarsi dell'evento  $x_k$  prima che questo si verifichi, ovvero di quanto possiamo ritenerci sorpresi nel venire a conoscenza dell'evento  $x_k$ , di cui riteniamo di conoscere la probabilità  $p_k$ . Osserviamo infatti che la (13.1) attribuisce un elevato valore di informazione a quegli eventi con una bassa probabilità di verificarsi. La scelta di esprimere tale relazione mediante il logaritmo in base 2 significa che:



Prob. $p_k$	Informazione $-\log_2 p_k$	Commento
1	0	L'evento certo non fornisce informazione
0	$\infty$	L'evento impossibile dà informazione infinita
$\frac{1}{2}$	1	In caso di scelta binaria (es. testa o croce) si riceve in entrambi i casi la stessa informazione, pari ad una unica cifra binaria o <b>bit</b> = <i>binary digit</i>
$1/2^n$	$n$	Es. per probabilità $1/4$ due bit, $1/8$ tre bit ...

<sup>1</sup>Per calcolare il logaritmo in base 2, sussiste la relazione  $\log_2 \alpha = \frac{\log_{10} \alpha}{\log_{10} 2} \simeq 3.322 \cdot \log_{10} \alpha$ .

### 13.1.1.1 Entropia

Come in termodinamica al concetto di entropia si associa il grado di *disordine* in un sistema, così per una sorgente informativa l'entropia misura il livello di *casualità* dei simboli emessi. Definiamo infatti *entropia* (indicata con  $H$ ) di una sorgente discreta  $S$ , il *valore atteso* della quantità di informazione apportata dalla conoscenza dei simboli (scelti tra  $L$  possibili) da essa generati

$$H_s = E\{I_k\} = \sum_{k=1}^L p_k I_k = \sum_{k=1}^L p_k \log_2 \frac{1}{p_k} \text{ bit/simbolo} \quad (13.2)$$

che pesando in probabilità il valore di informazione associato ai diversi simboli, rappresenta il *tasso medio* di informazione per simbolo delle sequenze osservabili. Come dimostrato appresso, risulta che:

- se i simboli sono *equiprobabili* ( $p_k = \frac{1}{L}$  con  $\forall k$ ) la sorgente è *massimamente informativa*, e la sua entropia è la massima possibile per un alfabeto ad  $L$  simboli, pari a  $H_{s_{Max}} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \log_2 L = \log_2 L$  bit/simbolo;
- se i simboli non sono equiprobabili, allora  $H_s < \log_2 L$ ;
- se la sorgente emette sempre e solo lo stesso simbolo, allora  $H_s = 0$ .

Da queste osservazioni discende l'espressione riassuntiva

$$0 \leq H_s \leq \log_2 L \quad (13.3)$$

**Dimostrazione** Osserviamo innanzitutto che  $H_s \geq 0$  in quanto la (13.2) comprende tutti termini positivi o nulli, essendo  $\log_2 \alpha \geq 0$  per  $\alpha = 1/p_k \geq 1$ . Quindi, mostriamo che  $H_s - \log_2 L \leq 0$ . Innanzitutto riscriviamo il primo membro della disuguaglianza come

$$\begin{aligned} H_s - \log_2 L &= \sum_k p_k \log_2 \frac{1}{p_k} - \log_2 L \cdot \sum_k p_k = \\ &= \sum_k p_k \left( \log_2 \frac{1}{p_k} - \log_2 L \right) = \sum_k p_k \log_2 \frac{1}{L \cdot p_k} \end{aligned} \quad (13.4)$$

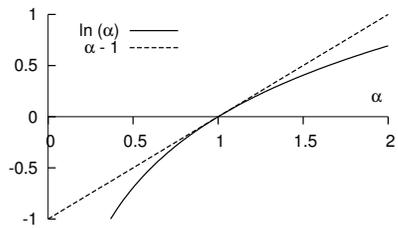
dato che  $\sum_k p_k = 1$ . Quindi, esprimiamo questo risultato parziale nei termini di *logaritmi naturali*, tenendo conto che  $\log_2 \alpha = \frac{\ln \alpha}{\ln 2}$ , e quindi

$$\sum_k p_k \log_2 \frac{1}{L \cdot p_k} = \frac{1}{\ln 2} \sum_k p_k \ln \frac{1}{L \cdot p_k} \quad (13.5)$$

A questo punto utilizziamo la relazione  $\ln \alpha \leq \alpha - 1$  mostrata in figura, con l'uguaglianza valida solo se  $\alpha = 1$ . Ponendo infatti  $\alpha = \frac{1}{L \cdot p_k}$  e sostituendo la (13.5) nella (13.4) si ottiene

$$\begin{aligned} H_s - \log_2 L &= \frac{1}{\ln 2} \sum_k p_k \ln \frac{1}{L \cdot p_k} \leq \frac{1}{\ln 2} \sum_k p_k \left( \frac{1}{L \cdot p_k} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left( \sum_k \frac{1}{L} - \sum_k p_k \right) = \frac{1}{\ln 2} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

con il segno di uguale solo se  $\frac{1}{L \cdot p_k} = 1$  ovvero  $p_k = \frac{1}{L}$ .



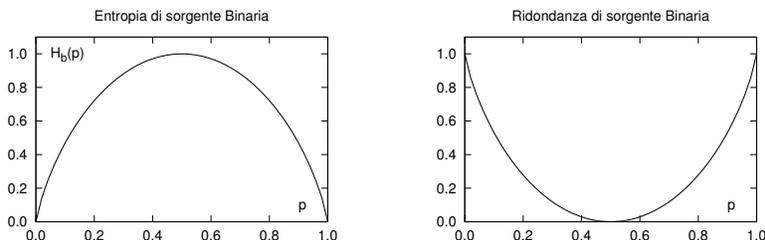


Figura 13.1: Entropia di sorgente binaria, e ridondanza associata

**Entropia di sorgente binaria** Nel caso particolare delle sorgenti binarie, che producono uno tra due simboli  $\{x_0, x_1\}$  con probabilità rispettivamente  $p_0 = p, p_1 = q = 1 - p$ , la formula dell'entropia fornisce l'espressione

$$H_b(p) = -p \log_2 p - (1 - p) \log_2 (1 - p) \text{ bit/simbolo} \quad (13.6)$$

il cui andamento è mostrato nella figura 13.1, in funzione di  $p$ .

I due simboli  $\{x_0, x_1\}$  possono essere rappresentati dalle 2 cifre binarie  $\{0, 1\}$ , che in questo caso chiamiamo *binit*, per non confonderli con la misura dell'informazione (il bit). Osserviamo quindi che se  $p \neq .5$  risulta  $H_b(p) < 1$ , ossia la sorgente emette informazione con un tasso inferiore a un bit/simbolo, mentre a prima vista non potremmo usare meno di un binit per rappresentare ogni simbolo binario.

**Ridondanza** Esprime lo scostamento  $D$  dell'entropia di una sorgente  $H_s$  (13.2) ad  $L$  simboli rispetto al numero di binit<sup>2</sup>  $M = \lceil \log_2 L \rceil$  necessario a rappresentarli, e rapportato a quest'ultimo, ovvero

$$D = \frac{M - H_s}{M} = 1 - \frac{H_s}{M} \leq 1 \quad (13.7)$$

mostrata sempre in fig. 13.1 per il caso  $L = 2$  al variare di  $p^3$ .

**Esempio** Consideriamo un sorgente binaria con  $p_0 = 0.8$  e  $p_1 = 0.2$ . L'applicazione della (13.6) fornisce un valore  $H_b(0.8) = 0.8 \log_2 \frac{1}{0.8} + 0.2 \log_2 \frac{1}{0.2} = 0.72$  bit/simbolo, minore del valore di 1 bit/simbolo che si sarebbe ottenuto nel caso di equiprobabilità. La relativa ridondanza è pari a  $1 - 0.72/1 = 0.28$  ovvero il 28 %.

**Entropia di sorgente L-aria** L'applicazione della (13.3) al caso di una sorgente che emette simboli *non* equiprobabili ed appartenenti ad un alfabeto di cardinalità  $L$ , determina per la stessa un valore di entropia  $H_L < \log_2 L$  bit/simbolo.

**Esempio** Nel caso di una sorgente quaternaria con  $p_0 = 0.5, p_1 = 0.25, p_2 = 0.125, p_3 = 0.125$ , l'applicazione della (13.2) fornisce  $H_4 = 1.75$  bit/simbolo, inferiore ai 2 bit/simbolo di una sorgente con quattro simboli equiprobabili. La relativa ridondanza è ora pari a  $1 - 1.75/2 = 0.125$  ovvero il 12.5 %.

<sup>2</sup>La notazione  $\lceil \alpha \rceil$  indica l'intero superiore ad  $\alpha$ : ad esempio con  $L = 10$  occorrono  $M = \lceil \log_2 10 \rceil = \lceil 3.322 \rceil = 4$  binit/simbolo, come se fosse stato  $L = 16$ .

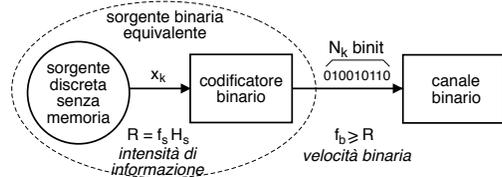
<sup>3</sup>Si noti la differenza: la ridondanza della codifica di sorgente indica la frazione di binit/simbolo che eccedono il valore dell'entropia, mentre la ridondanza della codifica di canale indica il rapporto tra binit di protezione e quelli di effettivamente emessi dalla sorgente, come definito a pag. 227.

### 13.1.1.2 Intensità informativa e codifica binaria

Consideriamo ora una sorgente discreta ad  $L$  valori e senza memoria, caratterizzata da una entropia di  $H_s$  bit/simbolo, ed i cui simboli  $x_k$  sono emessi con frequenza  $f_s$  simboli/secondo: il *flusso informativo* risultante è dunque caratterizzato da una *intensità* o *velocità di informazione* pari a

$$R = f_s \cdot H_s \quad \text{bit/secondo} \quad (13.8)$$

Volendo trasmettere tale informazione attraverso un *canale binario* (vedi § 13.2.1), occorre che l'elemento indicato in figura come *codificatore binario* faccia corrispondere ad ogni simbolo  $x_k$  un numero variabile di  $N_k$  binit<sup>4</sup>, scelti in modo da utilizzare meno binit per i



simboli più probabili (e viceversa) come descritto nel seguito, producendo una *velocità di trasmissione* binaria di  $f_b$  binit/sec. Dal punto di vista del canale il messaggio è prodotto da una nuova sorgente equivalente, i cui simboli binari hanno probabilità  $p$  e  $1 - p$ , e dunque caratterizzata da una entropia  $H_b(p)$  bit/binit  $\leq 1$ . Dato che l'intensità informativa in ingresso  $f_s \cdot H_s$  ed in uscita  $f_b \cdot H_b(p)$  dal codificatore deve essere la stessa<sup>5</sup>, la velocità binaria  $f_b$  della nuova sorgente rispecchia il vincolo

$$f_b \geq f_b \cdot H_b(p) = f_s \cdot H_s = R \quad (13.9)$$

Il rapporto  $\bar{N} = \frac{f_b}{f_s} \geq H_s$  rappresenta il numero *medio* di binit emessi per ciascun simbolo della sorgente, e può essere valutato a partire dalle probabilità  $p_k$  dei simboli  $x_k$  e dal numero  $N_k$  di binit necessario a rappresentarlo, come valore atteso  $\bar{N} = E\{N_k\} = \sum_k p_k N_k$ .

**Teorema della codifica di sorgente** Noto anche come *primo teorema di Shannon*<sup>6</sup>, afferma che *esiste* un modo di scegliere gli  $N_k$  binit associati a ciascun simbolo  $x_k$  tale che<sup>7</sup>

$$H_s \leq \bar{N} \leq H_s + \epsilon \quad (13.10)$$

con  $\epsilon$  piccolo a piacere, e che si annulla in corrispondenza della codifica *ottima*, per la quale risulta  $\bar{N} = H_s$ . Ma non dice come fare, cosa di cui ci occupiamo ai §§ seguenti.

**Codebook e codeword** L'esito delle operazioni svolte dal codificatore binario viene descritto nei termini della emissione di una *codeword*, o parola di codice, prelevata da un *codebook*, o dizionario, che descrive la collezione di tutte le possibili codeword.

<sup>4</sup>Mettere in corrispondenza i diversi simboli di sorgente con una loro codifica binaria è detta *codifica per blocchi*, discussa al § 13.1.1.4, dove si mostra anche la possibilità di produrre ogni parola di uscita in corrispondenza non di un unico simbolo di sorgente alla volta, ma come equivalente di più simboli. Raggruppando  $M$  simboli *binari* si ottiene una nuova sorgente equivalente con  $L' = 2^M$  simboli.

<sup>5</sup>Essendo biunivoca la corrispondenza tra il simbolo  $x_k$  ed il gruppo di  $N_k$  binit, non vi è perdita o aggiunta di informazione.

<sup>6</sup>Vedi ad es. [http://it.wikipedia.org/wiki/Primo\\_teorema\\_di\\_Shannon](http://it.wikipedia.org/wiki/Primo_teorema_di_Shannon)

<sup>7</sup>In effetti la (13.10) sussiste qualora il codificatore non operi indipendentemente su ogni simbolo di sorgente, ma può in generale possa emettere i binit in corrispondenza di sequenze di  $x_k$  *via via più lunghe*. Torneremo su questo aspetto al § 13.1.1.4, dove il teorema sarà dimostrato.

**Efficienza del codice** È la misura  $\eta$  di quanti bit di informazione sono trasportati da ogni binit di codifica<sup>8</sup>, ed è definita come il rapporto tra l'entropia di sorgente  $H_s$  *bit/simbolo* ed il numero medio  $\bar{N}$  di *binit/simbolo* emessi: in base alla (13.8) ed alla considerazione che  $f_b = f_s \cdot \bar{N}$  si ottiene

$$\eta = \frac{H_s}{\bar{N}} = \frac{H_s}{f_b/f_s} = \frac{f_s \cdot H_s}{f_b} = \frac{R}{f_b} = H_b(p) \leq 1 \quad [\text{bit/binit}] \quad (13.11)$$

e pertanto  $\eta$  è anche pari al rapporto tra gli  $R$  *bit/secondo* di informazione della sorgente e la velocità di trasmissione  $f_b$  *binit/secondo* prodotta dal codificatore.

**Osservazione** All'aumentare dell'efficienza, si assiste ad una contemporanea riduzione della ridondanza, potendo scrivere<sup>9</sup>  $\eta + D = 1$ .

Sappiamo già che qualora i binit emessi a velocità  $f_b$  assumano i valori 0 o 1 in modo equiprobabile, allora per la sorgente equivalente risulta  $H_b(\frac{1}{2}) = 1$ , ovvero dalla (13.9)  $f_b = R$  e dalla (13.11)  $\bar{N} = H_s$ . Dunque il problema di individuare un codice ottimo diviene quello di trovare un insieme di *codeword* tali da rendere equiprobabili i valori dei binit, con il vincolo di mantenere il codice *decifrabile*, ovvero tale da rispettare la *regola del prefisso*. Ma andiamo con ordine.

### 13.1.1.3 Codifica con lunghezza di parola variabile

Mostriamo mediante un esempio come scegliendo *codeword più lunghe* per rappresentare i simboli *meno probabili*, e *più corte* per i simboli *più frequenti*, si può subito ottenere una migliore efficienza del codice. Consideriamo infatti la sorgente del secondo esempio a pag. 336, con alfabeto di cardinalità  $L = 4$ , ai cui simboli competono le probabilità riportate alla seconda colonna della tabella. In questo caso l'entropia vale

$$\begin{aligned} H_s &= \sum_k p_k \log_2 \frac{1}{p_k} \\ &= \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 4 + \frac{2}{8} \log_2 8 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{8} \cdot 3 = 1.75 \text{ bit/simbolo} \end{aligned}$$

Simbolo	Prob.	Codeword	$N_k$
$x_1$	.5	0	1
$x_2$	.25	10	2
$x_3$	.125	110	3
$x_4$	.125	111	3

Se il codificatore di sorgente adotta le *codeword* mostrate nella terza colonna, a cui corrispondono le lunghezze di  $N_k$  binit riportate nella quarta colonna, il numero *medio* di binit/simbolo prodotti dalla codifica binaria risulta pari a

$$\bar{N} = E\{N_k\} = \sum_k N_k p_k = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{2}{8} = 1.75 \text{ binit/simbolo} \quad (13.12)$$

Il risultato ottenuto  $H_s = \bar{N}$ , ovvero il migliore possibile, non è per nulla scontato, e mostriamo appresso come dipenda sia dalla particolare scelta fatta per le *codeword*, sia dal particolare tipo delle  $p_k$  dell'esempio, tutte potenze negative di due (essendo  $0.5 = 2^{-1}$ ,  $0.25 = 2^{-2}$ ,  $0.125 = 2^{-3}$ ).

<sup>8</sup>Ad esempio, un valore  $\eta = 0.33$  indica che ogni binit trasporta solo  $1/3$  di bit di informazione.

<sup>9</sup>Sebbene la (13.7) esprima la ridondanza come  $D = 1 - \frac{H_s}{M}$ , dopo la codifica i simboli di sorgente sono rappresentati (in media) da  $\bar{N}$  binit anziché  $M$ , dunque otteniamo  $\eta + D = \frac{H_s}{\bar{N}} + 1 - \frac{H_s}{M} = 1$ .

**Regola del prefisso** Affinché un insieme di codeword di lunghezza variabile possa essere adottato come *codebook di sorgente*, queste devono poter essere riconosciute come *distinte* presso il ricevitore, e ciò è possibile a patto che nessuna di esse sia *uguale all'inizio* di una codeword più lunga. Si può mostrare che la condizione necessaria e sufficiente per avere un codice *non ambiguo* è che il numero di binit  $N_k$  con cui sono espresse le codeword soddisfi la *disuguaglianza di Kraft*<sup>10</sup>, espressa come

$$K = \sum_{k=1}^L 2^{-N_k} \leq 1 \quad (13.13)$$

**Esempio** Nella tabella sono riportati quattro possibili codici ( $A, B, C, D$ ) per la sorgente quaternaria già discussa, assieme al corrispettivo valore di  $\bar{N}$  e  $K$ .

Simb.	$p_k$	A	B	C	D
$x_1$	.5	00	0	0	0
$x_2$	.25	01	1	01	10
$x_3$	.125	10	10	011	110
$x_4$	.125	11	11	0111	111
$\bar{N}$		2.0	1.25	1.875	1.75
$K$		1.0	1.5	0.9375	1.0

Il codice  $A$  corrisponde ad un codificatore particolarmente banale con  $N_k = \bar{N}$  per tutti i  $k$ , dunque la (13.13) diviene  $K = L2^{-\bar{N}} \leq 1$  ed è soddisfatta a patto che  $\bar{N} \geq \log_2 L$ : nel nostro caso essendo  $L = 4$  ed  $\bar{N} = 2$  si ottiene  $\bar{N} = \log_2 L = 2$  e quindi  $K = 1$ , dunque il codice è decifrabile (anche perché a lunghezza fissa), ma non particolarmente valido, in quanto l'efficienza espressa dalla (13.11) risulta pari a  $\eta = \frac{H_s}{\bar{N}} = \frac{1.75}{2} = 0,875 < 1$ . Ma quando  $H_s < \log_2 L$  come nel nostro caso, si può realizzare una efficienza migliore ricorrendo ad un codice a lunghezza variabile.

Le codeword del codice  $B$  producono un valore  $K = 1.25 > 1$ , e dunque rappresentano un codice ambiguo<sup>11</sup>: difatti, violano la regola del prefisso. Il codice  $C$  invece è non ambiguo<sup>12</sup>, essendo  $K < 1$ , ma presenta una efficienza  $\frac{H_s}{\bar{N}} = 0,9\bar{3} < 1$  e dunque è anch'esso sub-ottimale. Infine, il codice  $D$  è quello analizzato al precedente paragrafo, ed effettivamente risulta una scelta *ottima*, dato che oltre a soddisfare la (13.13), consegue una efficienza  $\frac{H_s}{\bar{N}} = 1$ .

**Codice ottimo** Indichiamo con questo termine un codice che oltre a soddisfare la regola del prefisso<sup>13</sup>, consegue anche una efficienza unitaria, ovvero  $\frac{H_s}{\bar{N}} = 1$ . Perché ciò avvenga il valore  $p_k$  delle probabilità di simbolo *deve* essere una potenza negativa di due, ovvero  $p_k = 2^{-N_k}$ , dato che in tal caso la (13.13) si scrive  $K = \sum_{k=1}^L 2^{-N_k} = \sum_{k=1}^L p_k = 1$ , e la disuguaglianza di Kraft è verificata con il segno di uguale.

Inoltre, osserviamo che scegliendo la lunghezza delle codeword proprio pari a  $N_k = \log_2 \frac{1}{p_k}$ , l'espressione (13.12) che ne calcola la lunghezza media  $\bar{N} = \sum_k p_k N_k$  coincide con quella (13.2) che fornisce  $H_s = \sum_k p_k \log_2 \frac{1}{p_k}$ , ovvero ogni simbolo è codificato con una codeword

<sup>10</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Kraft-McMillan\\_inequality](https://en.wikipedia.org/wiki/Kraft-McMillan_inequality)

<sup>11</sup>Ad esempio, la sequenza 10110010 potrebbe essere interpretata come  $x_3x_4x_1x_1x_3$  oppure  $x_2x_1x_4x_1x_1x_2x_1$  o  $x_3x_2x_2x_1x_1x_3$

<sup>12</sup>Nonostante il codice  $C$  non soddisfi la regola del prefisso, non è ambiguo in quanto lo zero indica comunque l'inizio di una *nuova* codeword.

<sup>13</sup>Soddisfare la (13.13) con il segno di uguale è una condizione solamente necessaria, ma non sufficiente, per ottenere di un codice ottimo.

lunga tanti binit quanti sono i bit di informazione che trasporta. Per individuare un codice che *si avvicini* a questa proprietà si può utilizzare la tecnica di *Huffman* presentata appresso, mentre per *modificare* le  $p_k$  si ricorre alla *codifica per blocchi* di simboli esposta al § 13.1.1.4.

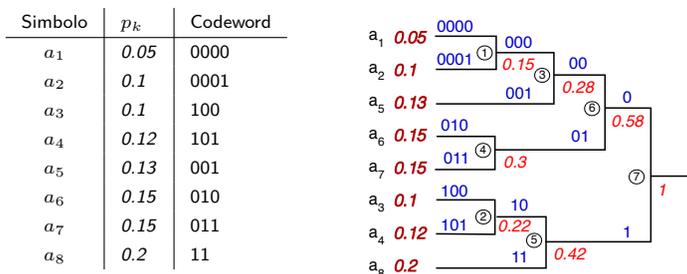
**Codice di Huffman** E' basato su di un *algoritmo* capace di individuare un codice a lunghezza variabile che soddisfa la regola del prefisso, adotta codeword più lunghe per i simboli meno probabili, e tenta di rendere equiprobabili le cifre binarie che compongono le codeword. L'algoritmo definisce<sup>14</sup> un *albero binario*, i cui rami sono etichettati con 1 e 0, e che può essere realizzato attuando i seguenti passi:

- crea una lista contenente i simboli della sorgente, ordinati per valore di probabilità decrescente, ed associa ad ognuno di essi un nodo-foglia dell'albero;
- finché c'è più di un nodo nella lista:
  - rimuovi dalla lista i due nodi con la probabilità più bassa;
  - crea un nuovo nodo interno all'albero con questi due nodi come figli, e con probabilità pari alla somma delle loro probabilità;
  - aggiungi il nuovo nodo alla lista, in ordine di probabilità;
- il nodo rimanente è la radice, e l'albero è completo;
- assegna cifre binarie diverse ad ogni coppia di rami a partire dalla radice, concatenando le quali si ottengono le codeword per i simboli sulle foglie

Si può dimostrare che il codice di Huffman generato in questo modo è il migliore possibile nel caso in cui la statistica dei simboli di sorgente sia nota a priori, nel senso che produce un codebook con il minor numero possibile di binit/simbolo medi  $\bar{N}$ , e le cui codeword allo stesso tempo soddisfano la regola del prefisso e la disuguaglianza di Kraft. La codifica di Huffman è ampiamente utilizzata nel contesto di altri metodi di compressione (metodo DEFLATE di PKZIP, § 13.1.2.3) e di codec multimediali (JPEG e MP3, cap. 21), in virtù della sua semplicità, velocità, ed assenza di brevetti.

Ovviamente ci deve essere un accordo a priori tra sorgente e destinatario a riguardo delle corrispondenze tra parole di codice e simboli (o blocchi di simboli) della sorgente. Nel caso in cui ciò non sia vero, oppure nel caso in cui la statistica dei simboli della sorgente sia stimata a partire dal materiale da codificare, occorre inviare all'inizio della comunicazione anche la tabella di corrispondenza, eventualmente in forma a sua volta codificata.

**Esempio** Una sorgente con  $L = 8$  simboli è caratterizzata dalle probabilità di simbolo riportate in figura, a partire dalle quali si realizza un codice di Huffman mediante la costruzione grafica riportata, in cui le probabilità sono scritte *in rosso, sotto* i rami ed accanto ai simboli, mentre i binit *sopra* i rami, *in blu*. Dopo aver ordinato i simboli in base alle probabilità, si



individuano i due nodi con probabilità più bassa come  $a_1$  e  $a_2$ , che assommano prob. 0.15

<sup>14</sup>Vedi [http://en.wikipedia.org/wiki/Huffman\\_coding](http://en.wikipedia.org/wiki/Huffman_coding)

e sono etichettati come nodo ①; dunque la coppia ora meno probabile è  $a_3$  con  $a_4$ , che cumula prob. 0.22 e si etichetta ②. Quindi, le due prob. minori divengono quelle del nodo ① e del simbolo  $a_5$ , che assommano a 0.28 generando il nodo ③; il passo successivo è quello di accoppiare  $a_6$  con  $a_7$  generando il nodo ④ a cui compete la prob. di 0.3.

Gli ultimi tre passi vedono accoppiare ② con  $a_8$  producendo ⑤ con prob. 0.42, quindi ③ con ④ generando ⑥ con p. 0.58, ed infine ⑤ con ⑥ producendo il nodo radice a cui compete una prob. unitaria.

Si può ora procedere, partendo dalla radice a destra, ad assegnare un binit pari a 0 o 1 ad ogni coppia di rami rispettivamente in alto ed in basso, ripetendo l'assegnazione seguendo le diramazioni verso sinistra, sopra le quali sono mostrate le codeword che si formano, di cui l'inizio in comune replica la configurazione assegnata al padre. Le codeword complete che compaiono sui rami più a sinistra sono quindi riportate alla terza colonna della tabella. Come è possibile verificare, il codice rispetta la regola del prefisso, in quanto nessuna delle codeword è uguale all'inizio di altre.

**Osservazioni** Se calcoliamo  $H_s$ ,  $\bar{N}$  e  $\eta$  per la sorgente ed il codice individuato, si ottiene  $H_s = 2.916$ , non molto meno del massimo  $\log_2 L = 3$  bit a simbolo, corrispondente a probabilità  $p_k$  tutte uguali e pari a  $1/8 = 0.125$ . Il codice consegue una *lunghezza media* di codeword pari a  $\bar{N} = 2.95$ , e come osserviamo usa 3 bit per i 5 simboli con probabilità intermedia, il 15% delle volte usa 4 bit, ed il 20% due. Il codice consegue pertanto una *efficienza*  $\eta = H_s/\bar{N} = 0.988$ , ovvero la sorgente codificata presenta una *ridondanza D* solamente del 1,2%.

**Dynamic Huffman coding** Per eseguire l'algoritmo di Huffman occorre conoscere la probabilità  $p_k$  dei simboli, che deve essere stimata pre-analizzando il messaggio da codificare; inoltre, prima di trasmettere il messaggio codificato occorre inviare anche il codebook prodotto dall'algoritmo, per permettere al decodificatore di funzionare.

La variante *adattiva* dell'algoritmo di generazione del codice prevede invece di utilizzare valori  $p_k$  stimati *dinamicamente* durante l'analisi del messaggio, con quelle  $\hat{p}_k$  costruire l'albero, e con l'albero *corrente* codificare i simboli man mano che vengono presi in considerazione. Durante l'analisi e la codifica del messaggio le  $\hat{p}_k$  si modificano, con esse l'albero, ed il codice. Lo stesso algoritmo adattivo è implementato anche al ricevitore, che sviluppa dal suo lato il medesimo albero, evitando così di dover trasmettere il codebook, e permettendo di adottare la tecnica anche per messaggi prodotti in *tempo reale*. Inoltre, nel caso in cui il messaggio non sia propriamente stazionario e le  $p_k$  non si mantengano costanti nel tempo, l'adattività consente al codice di *seguire* tale variazioni e di conseguire in tal caso prestazioni anche migliori della tecnica *statica*<sup>15</sup>.

### 13.1.1.4 Codifica per blocchi

Riprendiamo la discussione iniziata a pag. 339 relativa al codice binario ottimo per una sorgente  $L$ -aria senza memoria con simboli  $x_k$  a probabilità  $p_k$ , notando che se la lunghezza  $N_k$  delle codeword viene scelta in modo tale che

$$\log_2 \frac{1}{p_k} \leq N_k \leq \log_2 \frac{1}{p_k} + 1 \quad (13.14)$$

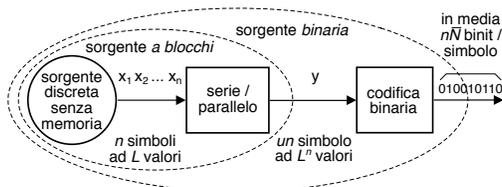
<sup>15</sup>Per approfondimenti si veda <https://www2.cs.duke.edu/csed/curious/compression/adaptivehuff.html>, mentre per una descrizione dell'algoritmo di VITTER [http://en.wikipedia.org/wiki/Adaptive\\_Huffman\\_coding](http://en.wikipedia.org/wiki/Adaptive_Huffman_coding)

si può mostrare che la disuguaglianza di Kraft (13.13) è soddisfatta<sup>16</sup>, e dunque è possibile realizzare un codice *non ambiguo* con tali codeword. Moltiplicando ora i membri di (13.14) per  $p_k$  e sommando su  $k$  si ottiene

$$H_s \leq \bar{N} \leq H_s + 1 \quad (13.15)$$

da cui si deduce che è possibile ottenere un'efficienza  $\eta = \frac{H_s}{\bar{N}} \rightarrow 1$  solo se  $H_s \gg 1$ , oppure se  $N_k \simeq \log_2 \frac{1}{p_k}$  (vedi nota 16).

Ma esiste anche un'altra possibilità: quella di raggruppare i simboli  $x_k$  in blocchi di  $n$  elementi, e considerare l'intero blocco come un *unico simbolo* di una nuova sorgente equivalente con alfabeto a  $L^n$  valori<sup>17</sup>, come rappresentato in figura. Essendo la sorgente senza memoria i suoi simboli sono indipendenti, e quindi si dimostra che l'entropia della nuova sorgente è  $n$  volte quella originale, ossia<sup>18</sup>  $H_s^{blocco} = nH_s$ . Il risultato (13.15) quindi ora si scrive come  $nH_s \leq n\bar{N} \leq nH_s + 1$  in cui  $n\bar{N}$  è il numero medio di binit *per blocco*, e dividendo per  $n$ , otteniamo infine



$$H_s \leq \bar{N} \leq H_s + \frac{1}{n} \quad (13.16)$$

che rappresenta una forma di dimostrazione del teorema (13.10) con  $\epsilon = \frac{1}{n}$ , e che permette di ottenere  $\bar{N} \rightarrow H_s$  se  $n \rightarrow \infty$ , avvicinandosi alle condizioni di codifica ottima per qualsiasi distribuzione delle  $p_k$ .

<sup>16</sup>Infatti se calcoliamo  $K = \sum_{k=1}^L 2^{-N_k}$  per  $N_k$  pari ai due valori indicati in (13.14) otteniamo nel primo caso

$$\sum_{k=1}^L 2^{-\log_2 \frac{1}{p_k}} = \sum_{k=1}^L 2^{\log_2 p_k} = \sum_{k=1}^L p_k = 1$$

mentre nel secondo

$$\sum_{k=1}^L 2^{-\left(\log_2 \frac{1}{p_k} + 1\right)} = \sum_{k=1}^L 2^{\log_2 p_k} \cdot 2^{-1} = 0.5 \sum_{k=1}^L p_k = 0.5$$

Pertanto in entrambi i casi la disuguaglianza di Kraft  $K \leq 1$  è soddisfatta, e per valori intermedi si ottengono valori intermedi.

<sup>17</sup>Pari al numero di *disposizioni con ripetizione* di  $n$  oggetti estratti dagli elementi di un insieme di  $L$ . Ad esempio, raggruppando due ( $n = 2$ ) cifre decimali ( $L = 10$ ), si ottiene un numero da 0 a 99, ovvero un simbolo ad  $L^2 = 100$  valori.

<sup>18</sup>Indicando con  $y$  la v.a. aleatoria discreta in uscita dalla sorgente a blocchi, essa risulta di tipo *multivariato* (§ 5.2.6), le cui le v.a. marginali sono i simboli  $x$  emessi dalla sorgente originale. L'indipendenza statistica di questi ultimi consente di scrivere  $Pr\{y\} = Pr\{x_1\} Pr\{x_2\} \cdots Pr\{x_n\}$  in cui i valori  $x_i$  sono quelli dei simboli *originali* che compongono  $y$ . L'entropia  $H_s^{blocco}$  della sorgente a blocchi è definita come valore atteso dell'informazione  $I(y) = -\log_2 Pr(y)$ , e in base alla proprietà del logaritmo di un prodotto possiamo scrivere  $\log_2 Pr(y) = \log_2 Pr(x_1) + \log_2 Pr(x_2) + \cdots + \log_2 Pr(x_n)$ , ottenendo cioè che  $I(y)$  è pari alla somma dell'informazione legata ad ogni valore  $x$  che partecipa a comporre  $y$ . Pertanto si ottiene

$$\begin{aligned} H_s^{blocco} &= E\{I(y)\} = E\{-\log_2 Pr(x_1) - \log_2 Pr(x_2) - \cdots - \log_2 Pr(x_n)\} = \\ &= \sum_{j=1}^n E\{-\log_2 Pr(x_j)\} = nH_s \end{aligned}$$

ovvero l'entropia della sorgente equivalente è esattamente pari alla somma di quella dei simboli che rappresenta.

**Esercizio** Per applicare questo metodo ad un caso pratico, consideriamo una sorgente binaria senza memoria con le  $p_k$  mostrate in tabella, e raggruppiamone i simboli a coppie, a cui (in virtù dell'indipendenza statistica tra i simboli  $x_i$ ) competono le probabilità congiunte che si ottengono moltiplicando tra loro le probabilità originarie, e quindi codifichiamo i nuovi simboli quaternari con il codice a lunghezza variabile già esaminato. Mentre il valore dell'entropia della sorgente binaria originale è ancora quello calcolato nel primo esempio a pag. 336 e pari a  $H_b = 0.72$  bit a simbolo, la lunghezza media del nuovo codice risulta ora

Simbolo	Prob.	Codeword
$x_1$	.8	1
$x_2$	.2	0
$x_1x_1$	.64	0
$x_1x_2$	.16	10
$x_2x_1$	.16	110
$x_2x_2$	.04	111

$$\bar{N} = 1 \cdot 0.64 + 2 \cdot 0.16 + 3 \cdot 0.16 + 3 \cdot 0.04 = 1.58 \text{ binit}$$

ogni 2 simboli, ossia pari ad una media di 0.79 binit/simbolo binario, effettivamente più vicina al valore di  $H_b = 0.72$ .

**Compromesso velocità-ritardo** Come indicato dalla (13.16), realizzando blocchi via via più lunghi è possibile ridurre la *velocità* media di codifica  $\bar{N} \cdot f_s$  (in binit/sec) rendendo  $\bar{N}$  sempre più vicino all'entropia, ovvero

$$\min [\bar{N}] = H_s + \varepsilon$$

in cui  $\varepsilon \rightarrow 0$  se la lunghezza  $n$  del blocco tende ad infinito. D'altra parte, all'aumentare della dimensione del blocco aumenta di egual misura il *ritardo* che intercorre tra l'emissione di un simbolo e la sua codifica, e di questo va tenuto conto, nel caso sussistano dei vincoli temporali particolarmente stringenti sulla consegna del messaggio.

**Riassumendo** Qualora una sorgente discreta ad  $L$  simboli esibisca un valore di entropia inferiore a  $\log_2 L$ , la velocità binaria  $\bar{N} \cdot f_s$  in uscita dal codificatore di sorgente può essere ridotta e resa prossima all'intensità informativa  $R$  (eq. (13.8)) adottando una codifica a blocchi di lunghezza via via crescente, e utilizzando per i nuovi simboli composti un opportuno codice di Huffman.

**Esercizio** Sperimentare la costruzione di un codice di Huffman basato sul raggruppamento di tre simboli della sorgente binaria dell'esercizio precedente, e verificare se il numero medio di binit/simbolo binario  $\bar{N}$  riesce ad avvicinarsi di più al valore dell'entropia pari a 0.76 bit/binit.

### 13.1.2 Sorgente con memoria

La presenza di memoria significa che i simboli emessi dalla sorgente non possono più essere ritenuti statisticamente indipendenti. Indichiamo quindi con  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  una sequenza di  $n$  di simboli, la cui probabilità congiunta si calcola ora come

$$p(\mathbf{x}) = p(x_1)p(x_2/x_1)p(x_3/x_1, x_2) \dots p(x_n/x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \neq \prod_{k=1}^n p(x_k) \quad (13.17)$$

dato che appunto la dipendenza statistica comporta l'uso delle probabilità condizionali. L'espressione dell'entropia si modifica dunque in

$$H_n = E_{\mathbf{x}} \{I(\mathbf{x})\} = -\frac{1}{n} \sum_{\text{tutte le } \mathbf{x} \text{ possibili}} \sum \dots \sum p(\mathbf{x}) \log_2 p(\mathbf{x}) \text{ bit/simbolo}$$

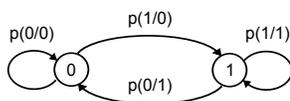
in cui  $p(\mathbf{x})$  è la probabilità congiunta (13.17) di una possibile sequenza di simboli  $\mathbf{x}$ , e la media di insieme svolta su tutte le possibili sequenze  $\mathbf{x}$  di lunghezza  $n$ . La grandezza  $H_n$  prende il nome di *entropia a blocco*, e si dimostra che al crescere di  $n$  il suo valore è *non crescente*, ossia  $H_{n+1} \leq H_n \leq H_{n-1}$ , mentre per  $n \rightarrow \infty$ ,  $H_n$  tende ad un valore  $H_\infty \leq H_s$ , in cui l'uguaglianza è valida solo per sorgenti senza memoria.

### 13.1.2.1 Sorgente Markoviana

Se oltre ad un certo valore  $n_{Max} = M$  la sequenza  $H_n$  non decresce più, allora la sorgente è detta a *memoria finita* o *di Markov* di ordine  $M$ , caratterizzata dal fatto che le probabilità condizionate dipendono solo dagli ultimi  $M$  simboli emessi.

**Esempio** Analizziamo il caso di una sorgente binaria di Markov del primo ordine, per la quale sono definite le probabilità condizionate mostrate a lato, a cui corrisponde il *diagramma di transizione* raffigurato. Essendo  $M = 1$ , lo *stato* della sorgente è determinato dal simbolo emesso per ultimo, che condiziona le probabilità di emissione di un nuovo simbolo: con i valori dell'esempio, si osserva come la sorgente *preferisca* continuare ad emettere l'ultimo simbolo prodotto, piuttosto che l'altro.

$$\begin{array}{ll} p(0/0) = 0.9 & p(1/0) = 0.1 \\ p(0/1) = 0.4 & p(1/1) = 0.6 \end{array}$$



In pratica è come se ora vi fossero  $L^M$  diverse sorgenti  $S_i$  (nel caso dell'esempio,  $2^1 = 2$ ), ognuna associata ad una diversa *storia passata* rappresentata dagli ultimi  $M$  simboli emessi (nell'esempio  $M = 1$ ), identificativi dello *stato*, o *memoria*, della sorgente. In questo caso l'entropia di sorgente può essere calcolata applicando la (13.6) ad ognuno dei possibili stati, ottenendo in tal modo dei valori di *entropia condizionata*  $H(x/S_i)$ , mentre l'entropia di sorgente *complessiva* si ottiene come *valore atteso* dell'entropia condizionata rispetto alle probabilità di trovarsi in ognuno degli stati del modello Markoviano.

Tornando all'esempio, i valori di entropia condizionata risultano pari a

$$\begin{aligned} H(x/0) &= -0.9 \log_2 0.9 - 0.1 \log_2 0.1 = 0.47 \\ H(x/1) &= -0.4 \log_2 0.4 - 0.6 \log_2 0.6 = 0.97 \end{aligned}$$

bit/simbolo, mentre il valore della probabilità di trovarsi in uno dei due stati si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} p(0) = p(0/0)p(0) + p(0/1)p(1) \\ 1 = p(0) + p(1) \end{cases}$$

in cui la prima equazione asserisce che la probabilità di trovarsi in  $S_0$  è pari alla somma di quella di esserci già, per quella di emettere ancora zero, più la probabilità di aver emesso uno, ed ora emettere zero. Sostituendo i valori, si ottiene  $p(0) = 0.8$  e  $p(1) = 0.2$ , ossia gli stessi valori dell'esempio binario senza memoria di pag. 336. Ma mentre in quel caso il valore dell'entropia risultava pari a 0.72 bit/simbolo, ora si ottiene

$$H = p(0) H(x/0) + p(1) H(x/1) = 0.58 \text{ bit/simbolo}$$

mostrando come la presenza di memoria aumenti la predicibilità delle sequenze emesse dalla sorgente.

**Esercizio** Si ripeta il calcolo dell'entropia per un modello di Markov del primo ordine, caratterizzato dalle probabilità  $p(0) = p(1) = 0.5$  e  $p(1/0) = p(0/1) = 0.01$ , mostrando che in questo caso si ottiene una entropia di 0.08 bit/simbolo.

### 13.1.2.2 Codifica per sorgenti con memoria

La discussione appena svolta mostra come l'entropia delle sorgenti con memoria sia sempre *minore* di quella relativa al caso di indipendenza statistica dei simboli emessi, e qualora le probabilità condizionate siano note al codificatore, possono essere usate per calcolare le probabilità per blocco (13.17) e con queste individuare un codice di Huffman in grado di ridurre anche la velocità di codifica, a patto di accettare un maggior ritardo legato all'uso di codici a blocchi.

Ma la dimensione dei blocchi da prendere in considerazione può divenire eccessiva, producendo spropositate tabelle di codeword. Inoltre si può ritenere di *non* conoscere la statistica della sorgente, e di non desiderare effettuare una stima, ed evitare di trasmettere la tabella di codeword. In questi casi, può essere opportuno adottare tecniche diverse dalle precedenti, come le due riportate appresso.

**Codifica run-length** Prendendo come esempio tipico il caso della trasmissione fax, in cui si ha a che fare con un segnale di immagine in bianco e nero, scansionato per righe, che è assimilabile ad una sorgente binaria che emetta uno zero per il bianco, ed un uno per il nero: per la natura delle immagini scansionate, tipicamente ci saranno lunghe sequenze di uni o di zeri, e dunque si può assumere valido un modello di sorgente Markoviano di primo ordine, con elevata probabilità condizionata di rimanere nello stesso stato.

Le lunghe sequenze di bit tutti uguali vengono dette *run* (corse), e la codifica *run-length* consiste nel trasmettere parole di codice che indicano il numero (*length*) di questi bit uguali. In questo caso quindi la codeword è di lunghezza fissa (ad esempio  $n + 1$  binit, il primo dei quali indica se il run è tutto di uni o di zeri), e rappresenta un numero variabile (da 0 a  $2^n - 1$ ) di binit di sorgente. Se ad esempio  $n = 6$  binit, questi  $6+1 = 7$  binit possono codificare fino a 64 simboli di sorgente binaria: un bel risparmio!<sup>19</sup>

**Codifica predittiva** Questa ulteriore tecnica si basa sul fatto che un elevato grado di dipendenza statistica dei messaggi comporta la possibilità di *predire* in qualche modo i simboli a venire, in base all'identità di quelli già emessi. La differenza tra la sequenza predetta  $\hat{x}$  e quella effettiva  $x$  è una nuova sequenza indicata come *errore di predizione*  $e = \hat{x} - x$  che, se il predittore *ci azzecca* per la maggior parte del tempo, è quasi tutta nulla. Il predittore conserva uno *stato interno* che rappresenta gli ultimi bit di ingresso, in base ai quali determina<sup>20</sup> la stima  $\hat{x}$ , da cui ottenere l'errore  $e$  (frequentemente nullo) che viene sottoposto a codifica run-length, e trasmesso.

Ora avviene *un trucco*, dato che in realtà il predittore *non conosce* la sequenza  $x_{k-1}, \dots, x_{k-M}$  da cui predire  $\hat{x}_k$ , ma viene invece *alimentato* con la sequenza di errore  $e$ , in modo che da questa possa determinare l'ultimo (vero) simbolo di ingresso come  $x = \hat{x} - e$ , ed aggiornare il proprio stato interno. Dal lato ricevente opera un predittore identico a quello di codifica, anch'esso alimentato dalla sequenza  $e$  in modo da generare un valore  $\hat{x}$  identico a quello del codificatore, a cui si applica la stessa relazione  $x = \hat{x} - e$  per ottenere il valore del simbolo  $x$  correttamente

<sup>19</sup>In realtà, nel caso specifico del fax le cose non stanno esattamente in questi termini: infatti, anziché usare una parola di lunghezza fissa di  $n$  binit, l'ITU-T ha definito un apposito codebook <http://www.itu.int/rec/T-REC-T.4-199904-S/en> che rappresenta un codice di Huffman a lunghezza variabile, in modo da codificare le run length più frequenti con un numero ridotto di bit.

<sup>20</sup>Il lettore più curioso si chiederà a questo punto, come è fatto il predittore. Molto semplicemente, *scommette* sul prossimo simbolo più probabile, in base alla conoscenza di quelli osservati per ultimi, ed ai parametri del modello markoviano: se il prossimo simbolo viene predetto in base ad una sua probabilità condizionata  $> 0.5$ , allora *la maggior parte* delle volte la predizione sarà corretta, ed il metodo consegue una riduzione di velocità. Nel caso di sorgenti continue, al § 13.1.3.3 troveremo invece alcune particolarità aggiuntive.

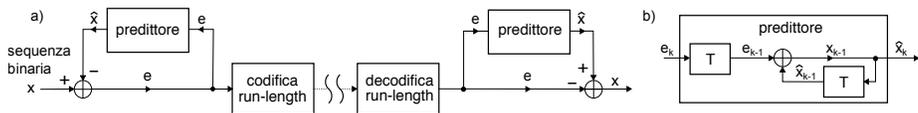


Figura 13.2: a) - schema di un codificatore predittivo binario; b) - architettura del predittore del primo ordine

*decodificato*. Perché lo schema possa funzionare, occorre che i due predittori condividano il medesimo stato interno iniziale.

La fig. 13.2-a) esemplifica l'applicazione della tecnica al caso di sequenze binarie, per le quali l'operazione di differenza è realizzata tramite una somma modulo due  $\oplus$ , dato che scrivendo  $e = \hat{x} \oplus x$  risulta  $e \neq 0$  solamente quando  $\hat{x} \neq x$ . La parte destra della figura mostra quindi l'architettura interna del predittore del primo ordine adottato, che cioè tiene conto del solo simbolo *precedente*  $x_{k-1}$ , e che semplicemente *scommette* che sia uguale al successivo, ovvero  $\hat{x}_k = x_{k-1}$ ; il *vero* simbolo precedente  $x_{k-1}$  è ottenuto come prima descritto, ovvero a partire dalla stima fornita in precedenza  $\hat{x}_{k-1}$  ottenuta mediante un ritardo, e sommata al precedente errore  $e_{k-1}$ , anch'esso ritardato rispetto alla sequenza di ingresso.

Notiamo come la codifica run-length non preveda l'esistenza di un accordo a priori tra trasmettitore e ricevitore, a parte il comune stato di partenza ad inizio messaggio, mentre la codifica predittiva necessita solo di un accordo in merito alla struttura del predittore. Per contro, in presenza di errori di trasmissione i due predittori restano disallineati, finché non si inizia a co-decodificare un nuovo messaggio. Ma lo stesso problema è comune anche al caso di codifica a lunghezza di parola variabile, ed a quello di Huffman dinamico.

### 13.1.2.3 Compressione basata su dizionario

Nella comune accezione del termine un dizionario è costituito da un *array* di stringhe, popolato con le parole esistenti per un determinato linguaggio. Anziché operare carattere per carattere, un codificatore di sorgente testuale potrebbe ricercare la posizione nel dizionario delle parole del messaggio, e quindi trasmettere l'indice della parola: per un dizionario di 25.000 termini bastano 15 bit di indirizzamento, ottenendo un rapporto di compressione variabile, in funzione della lunghezza della parola codificata.

**Metodo di Lempel-Ziv-Welsh** Per evitare di dover condividere la conoscenza dell'intero dizionario tra sorgente e destinatario, che tra l'altro potrebbe essere assolutamente sovradimensionato rispetto alle caratteristiche dei messaggi da trattare, il metodo LZW prevede che il codificatore generi il dizionario in modo graduale, man mano che analizza il testo, e che il decodificatore sia in grado di replicare questa modalità di generazione. Inoltre, il dizionario non è vincolato a contenere le reali *parole* del messaggio, ma semplicemente ospita le sequenze di caratteri effettivamente osservati, di lunghezza due, tre, quattro...

Operando su di un alfabeto ad  $L$  simboli, rappresentabili con  $n = \lceil \log_2 L \rceil$  bit, il dizionario iniziale conterrà i simboli di sorgente alle prime  $L$  posizioni, e posti liberi nelle restanti  $2^n - L$  posizioni<sup>21</sup>. Ogni carattere letto in ingresso viene accodato in una *stringa*, ed il risultato confrontato con le stringhe già presenti nel dizionario. Nel caso non si verifichi nessuna corrispondenza, viene aggiunta una nuova voce di dizionario, e quindi viene trasmesso l'indice

<sup>21</sup>Ad esempio con  $L = 96$  simboli si ha  $n = 7$ , ed un dizionario iniziale con 128 posizioni, di cui 96 occupate e 32 libere.

associato alla sua parte iniziale, escludendo cioè il simbolo concatenato per ultimo, e che ha prodotto l'occorrenza della nuova voce. Nel caso invece in cui la stringa sia già presente (e questo in particolare è vero per la stringa di lunghezza uno corrispondente al primo simbolo analizzato) non si emette nulla, ma si continuano a concatenare simboli fino ad incontrare una stringa mai vista. Presso *Wikipedia*<sup>22</sup> è presente un esempio di risultato della codifica.

```
w = NIL;
while (read a char c) do
  if (wc exists in dictionary) then
    w = wc;
  else
    add wc to the dictionary;
    output the code for w;
    w = c;
  endif
done
output the code for w;
```

La parte iniziale del testo, ovviamente, ha una alta probabilità di contenere tutte coppie di caratteri mai viste prima, e quindi in questa fase vengono semplicemente emessi i codici associati ai simboli osservati. Con il progredire della scansione, aumenta la probabilità di incontrare stringhe già osservate e sempre più lunghe. Ogni volta che viene esaurito lo spazio residuo per i nuovi simboli, viene aggiunto un bit alla lunghezza della codeword, ovvero viene raddoppiata la dimensione del vocabolario. Man mano che viene analizzato nuovo materiale, aumenta la lunghezza delle stringhe memorizzate nel dizionario, che riflette l'effettiva composizione statistica del documento in esame, ivi compresa la presenza di memoria; allo stesso tempo, la dimensione del dizionario (e la lunghezza delle codeword) resta sempre la minima indispensabile per descrivere il lessico effettivamente in uso. Alla fine del processo, il dizionario ottenuto può essere aggiunto<sup>23</sup> *in testa* al file compresso, seguito dalle codeword risultanti dall'algoritmo.

L'algoritmo LZW è usato nel programma di compressione Unix *compress*, per la realizzazione di immagini GIF e TIFF, ed incorporato in altri software, come ad esempio *Adobe Acrobat*.

**Algoritmo Deflate** L'ultimo metodo di compressione senza perdite che esaminiamo è quello che è stato introdotto da PHIL KATZ<sup>24</sup> con il programma PKZIP, e quindi formalizzato nella RFC 1951<sup>25</sup>, e tuttora ampiamente utilizzato per le sue ottime prestazioni e l'assenza di brevetti. Usa una variante dell'algoritmo LZW, al cui risultato applica poi una codifica di Huffman. *Deflate* opera su blocchi di dati con dimensione massima 64 Kbyte, ognuno dei quali può essere replicato intatto (come nel caso in cui i bit siano già sufficientemente imprevedibili), oppure essere compresso con un codice di Huffman statico, oppure ancora dinamico.

Per quanto riguarda la variante di LZW, essa consiste nel *non costruire* esplicitamente il dizionario, ma nell'usare invece *dei puntatori all'indietro* per specificare che una determinata sotto-stringa di ingresso, è in realtà la ripetizione di un'altra già osservata in precedenza. In questo caso, anziché emettere il codice (di Huffman) associato alla codeword già presente nel dizionario, si emette (il codice di Huffman del) la lunghezza della stringa da copiare, e la distanza (nel passato) della stessa. Quindi in pratica, anziché usare una codeword di lunghezza fissa per indicizzare gli elementi del dizionario come per LZW, viene usato un puntatore di lunghezza variabile, privilegiando le copie della sottostringa corrente più prossime nel tempo, oppure quelle con un maggior numero di caratteri uguali.

<sup>22</sup>Vedi ad es. <http://en.wikipedia.org/wiki/Lempel-Ziv-Welch>

<sup>23</sup>Il realtà il dizionario *non viene* aggiunto, ma *ri-generato* durante il processo di decodifica, come illustrato al link di cui alla nota precedente.

<sup>24</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Phil\\_Katz](https://en.wikipedia.org/wiki/Phil_Katz)

<sup>25</sup>Vedi ad es. <http://tools.ietf.org/html/rfc1951>

### 13.1.3 Codifica con perdite di sorgente continua

Come verrà mostrato al § 13.2.4, la massima intensità di informazione  $R$  (eq. (13.8)) che può essere convogliata da un segnale  $x(t)$  di potenza  $S$  ricevuto attraverso un canale ideale con banda  $W$ , ed a cui è sovrapposto un rumore  $n(t)$  gaussiano bianco di potenza  $N$ , non può superare un limite  $C$  noto come *capacità di canale* e pari a  $C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)$  bit per secondo. Nel caso discreto e di codifica senza perdite trattato finora,  $C$  pone semplicemente un limite massimo all'intensità di informazione che può essere trasmessa. Viceversa, nel caso di una sorgente continua  $x(t)$ , abbiamo due strade possibili: intraprendere un processo di campionamento e quantizzazione per produrre un segnale numerico con velocità  $R \leq C$ , incorrendo così in una distorsione di quantizzazione  $D$  tanto minore quanto maggiore è la  $R$  consentita, oppure effettuare una trasmissione analogica in cui

- si riceve  $r(t) = x(t) + n(t)$ , ed il rumore all'uscita del canale rappresenta una distorsione  $d(t) = n(t) = x(t) - r(t)$  di potenza  $D = N$ ;
- le conseguenze della distorsione  $D$  possono essere mitigate aumentando  $\frac{S}{N}$  oppure  $W$ , e quindi  $C$ , che corrisponde ad un aumento dell'intensità di informazione  $R$  che può essere trasferita.

Nel caso continuo pertanto, sia che la sorgente venga quantizzata, sia che se ne effettui la trasmissione come segnale analogico, sussiste un legame inverso tra distorsione e velocità di trasmissione, di cui discutiamo ora.

#### 13.1.3.1 Curva velocità-distorsione

La valutazione della dipendenza tra  $D$  ed  $R$  si avvale di una serie di sviluppi teorici<sup>26</sup> che prendono come caso-tipo quello di una sorgente  $x(t)$  gaussiana, stazionaria, ergodica e bianca, con potenza  $\sigma_x^2$ . In tal caso si ottiene che la *minima distorsione* conseguibile in corrispondenza di una velocità di trasmissione (*rate*) pari ad  $R$  bit/campione assume un valore pari a

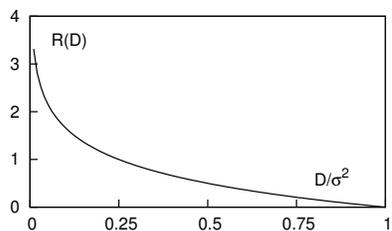
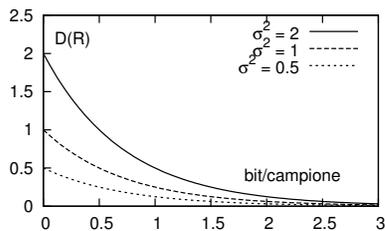
$$D(R)_G = 2^{-2R} \sigma_x^2 \quad (13.18)$$

che risulta essere il *più grande valore minimo* possibile per una potenza  $\sigma_x^2$  assegnata, dato che per sorgenti non gaussiane, oppure gaussiane ma non bianche, si possono ottenere valori inferiori.

D'altra parte, invertendo la (13.18) si ottiene la curva  $R(D)_G$ , che descrive la minima velocità  $R$  necessaria per trasmettere i campioni di una sorgente gaussiana con distorsione  $D$  e potenza  $\sigma_x^2$  assegnate

$$R(D)_G = \begin{cases} -\frac{1}{2} \log_2 \frac{D}{\sigma_x^2} & \text{se } 0 \leq D \leq \sigma_x^2 \\ 0 & \text{se } D \geq \sigma_x^2 \end{cases}$$

la cui seconda riga può essere interpretata osservando che, se la distorsione è superiore alla potenza di segnale, non occorre trasmettere proprio nulla, dato che tanto il ricevitore può rigenerare un segnale di errore, a partire da un rumore gaussiano di potenza  $D$  prodotto in loco.



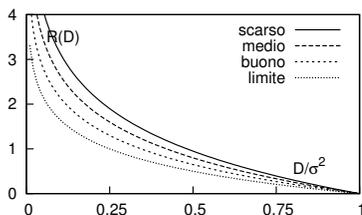
<sup>26</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Rate-distortion\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Rate-distortion_theory)

**Valori limite** Il valore  $D(R)_G$  costituisce un *limite superiore* per ciò che riguarda la distorsione ottenibile ad una certa velocità  $R$ , utile per rapportare le prestazioni del codificatore della nostra sorgente con quelle migliori ottenibili per la sorgente più *difficile*, ossia la gaussiana. Allo stesso tempo, è definito un *limite inferiore*  $D(R)_L$  (ossia, la minima distorsione sotto cui non si può scendere per un dato  $R$ ) per sorgenti *non gaussiane e senza memoria*, in modo da poter scrivere

$$D(R)_L = 2^{-2R}Q \leq D(R) \leq D(R)_G = 2^{-2R}\sigma_x^2 \tag{13.19}$$

in cui  $Q$  è la *potenza entropica* (13.22) e risulta  $Q < \sigma_x^2$  per sorgenti non gaussiane.

In definitiva, per una determinata sorgente per la quale sono disponibili diversi codificatori, potremmo ottenere una famiglia di curve del tipo di quelle mostrate in figura.



### 13.1.3.2 Entropia di sorgente continua

Nel caso discreto abbiamo apprezzato come l'entropia fornisca un potente strumento per valutare il tasso informativo intrinseco di una sorgente, supportando così la ricerca di metodi di riduzione della ridondanza al fine di avvicinare la velocità di trasmissione alla entropia effettiva. Ci chiediamo allora se anche nel caso continuo possa essere definita una entropia, e come questa possa aiutarci nello stabilire dei limiti prestazionali. Estendendo formalmente al caso continuo la definizione trovata per le sorgenti discrete, si ottiene l'espressione

$$h(X) = E \{-\log_2 p_x(x)\} = - \int p_x(x) \log_2 p_x(x) dx \tag{13.20}$$

che è indicata con la  $h$  minuscola per distinguerla dal caso discreto, e che viene detta *entropia differenziale o relativa* perché il suo valore può risultare positivo, negativo o nullo, in funzione della dinamica della variabile aleatoria  $X$ .

**Esempio** Se calcoliamo il valore di entropia differenziale per un processo i cui valori sono descritti da una variabile aleatoria a distribuzione uniforme  $p_x(x) = \frac{1}{A} \text{rect}_A(x)$ , otteniamo il risultato  $h(X) = -\frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \log_2 \left(\frac{1}{A}\right) dx = \log_2 A$  il cui valore effettivo, appunto, dipende dal valore di  $A$ .

Sebbene inadatta ad esprimere il contenuto informativo *assoluto*<sup>27</sup> di una sorgente continua, l'entropia differenziale può comunque essere utile per confrontare tra loro due sorgenti con uguale varianza  $\sigma_x^2$ ; in particolare, il massimo valore di  $h(X)$  per  $\sigma_x^2$  assegnata è ottenuto in

<sup>27</sup>In effetti esiste una misura di entropia *assoluta* per sorgenti continue, che però ha la sgradevole caratteristica di risultare sempre infinita. Infatti, approssimando la (13.20) come limite a cui tende una sommatoria, e suddividendo l'escursione dei valori di  $x$  in intervalli uguali  $\Delta x$ , possiamo scrivere

$$\begin{aligned} h_{abs}(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i p(x_i) \Delta x \log_2 \frac{1}{p(x_i) \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i \left[ p(x_i) \Delta x \log_2 \frac{1}{p(x_i)} + p(x_i) \Delta x \log_2 \frac{1}{\Delta x} \right] = h(x) + h_0 \end{aligned}$$

in cui  $h(x)$  è proprio la (13.20) mentre  $h_0 = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_2 \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_2 \Delta x = \infty$ . D'altra parte, la differenza tra le entropie assolute di due sorgenti  $z$  e  $x$  risulta pari a  $h_{abs}(z) - h_{abs}(x) = h(z) - h(x) + h_0(z) - h_0(x)$ , in cui la seconda differenza tende a  $-\log_2 \frac{\Delta z}{\Delta x}$  che, se  $z$  ed  $x$  hanno la medesima dinamica, risulta pari a zero.

corrispondenza di un processo gaussiano<sup>28</sup>, e risulta pari a

$$h(X)_G = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma_x^2) > h(X) \quad (13.21)$$

ed è per questo motivo che, a parità di velocità  $R$  e di potenza  $\sigma_x^2$ , il processo gaussiano incorre nella *massima distorsione minima* (13.18). Associata alla definizione di entropia differenziale, sussiste quella di *potenza entropica*  $Q$ , scritta come

$$Q = \frac{1}{2\pi e} 2^{2h(X)} \quad (13.22)$$

che per sorgenti gaussiane fornisce  $Q_G = \sigma_x^2$ , mentre per altri tipi di statistiche, si ottiene un valore minore. Applicando questa definizione alla (13.19) osserviamo come il limite inferiore di distorsione  $D(R)_L$  si riduce al diminuire di  $h(X)$ .

### 13.1.3.3 Sorgente continua con memoria

Come per il caso di sorgenti discrete, anche per quelle continue l'esistenza di una dipendenza statistica tra i valori prodotti riduce la quantità di informazione emessa, al punto che a parità di distorsione, questa può essere codificata a velocità ridotta; oppure, a parità di velocità, può essere conseguita una distorsione inferiore. Anche stavolta, la sorgente più *difficile* (ossia a cui compete la *massima distorsione minima*) è quella gaussiana, per la quale risulta che la minima distorsione per  $\sigma_x^2$  assegnata può esprimersi come

$$D(R)_G = 2^{-2R} \gamma_x^2 \sigma_x^2 \quad (13.23)$$

in cui  $0 \leq \gamma_x^2 \leq 1$  rappresenta una misura di *piattezza spettrale*<sup>29</sup>, che vale uno nel caso senza memoria, ovvero di processo *bianco*, e si riduce nel caso di un segnale i cui valori sono correlati tra loro, ed a cui corrisponde una densità spettrale *colorata*.

Nel caso *non gaussiano*, infine, la (13.23) si riscrive sostituendo al posto di  $\sigma_x^2$  la potenza entropica  $Q$  espressa dalla (13.22), ottenendo valori  $D(R)$  ancora inferiori.

L'applicazione dei principi relativi alla codifica di sorgente al caso specifico dei messaggi multimediali (audio e video) viene trattata al capitolo 21.

## 13.2 Codifica di canale

Come già fatto osservare al § 8.5.2, lo scopo della codifica di canale è quello di ridurre il tasso di errore di una trasmissione numerica ricorrendo alla aggiunta di ridondanza, ossia trasmettendo

<sup>28</sup>Questo risultato si ottiene massimizzando la (13.20) rispetto a  $p(x)$  mediante il metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE [http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo\\_dei\\_moltiplicatori\\_di\\_Lagrange](http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_dei_moltiplicatori_di_Lagrange), in modo da tener conto dei vincoli espressi dalle condizioni  $\int p_x(x) dx = 1$  e  $\int x^2 p_x(x) dx = \sigma_x^2$ . Notiamo esplicitamente la differenza rispetto al caso continuo, in cui la d.d.p. che rende massima l'entropia, è invece quella uniforme.

<sup>29</sup>Si può mostrare che  $\gamma_x^2$  può essere interpretato come il rapporto tra la media geometrica e la media aritmetica della densità spettrale di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  del processo  $x(t)$ : indicando con  $S_k = \mathcal{P}_x(f_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , i campioni equispaziati della densità spettrale valutati a frequenze positive  $f_k$  tra zero e la massima frequenza del processo, si ha

$$\gamma_x^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left( \prod_{k=1}^N S_k \right)^{1/N}}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k}$$

Nel caso di un processo bianco, per il quale i valori  $S_k$  sono tutti uguali, le due medie coincidono, e  $\gamma_x^2 = 1$ . Altrimenti,  $\gamma_x^2$  risulta tanto più piccolo quanto più i valori  $S_k$  si discostano dal loro valore medio.

più binit di quanti necessari dopo l'attuazione della codifica di sorgente, e dunque (nel caso di una trasmissione *real-time*) occupare più banda dello stretto necessario.

E' quindi naturale chiedersi: fino a che punto si può arrivare, ovvero di quanto si può ridurre la  $P_e$ , e quanta ridondanza è necessario aggiungere? La risposta fornita in questa sezione è che, finché l'intensità informativa  $R = f_s \cdot H_s$  (eq. (13.8)) si mantiene inferiore al valore di una grandezza  $C$  denominata *capacità di canale*, definita ai § 13.2.3 e 13.2.4, il canale può trasportare l'informazione (teoricamente) *senza errori!* Mentre se al contrario  $R > C$ , non è possibile trovare nessun procedimento in grado di ridurre gli errori - che anzi, divengono praticamente *certi*. Infine per quanto riguarda la ridondanza che occorre aggiungere, pur senza spiegare come fare, la teoria assicura che questa può essere resa *trascurabile!* Ma prima di approfondire l'enunciazione di questi risultati, svolgiamo alcune riflessioni su come

- il processo di decisione svolto dal lato ricevente di un canale numerico può basarsi oltre che sulla conoscenza della statistica di *come avvengono* gli errori, anche su quella che descrive *come sono emessi* i simboli della sorgente;
- il verificarsi di errori costituisca una *perdita di informazione*, vedi § 13.2.2.

### 13.2.1 Canale simmetrico binario e decisore Bayesiano

In figura è mostrato lo schema noto in letteratura come BSC (*binary symmetric channel*) che rappresenta un canale *numerico* al cui ingresso si può presentare uno tra due simboli  $x_1$  e  $x_2$ , con probabilità rispettivamente pari ad  $\alpha$  e  $1 - \alpha$ , dette probabilità *a priori*, vedi § 5.1.4. Qualora non si verifichi errore, agli ingressi  $x_1$  e  $x_2$  corrispondono rispettivamente le uscite  $y_1$  e  $y_2$ , mentre in presenza di errore (con probabilità  $P_e^{bit} = p$ ), l'uscita del canale rappresenta l'ingresso opposto.

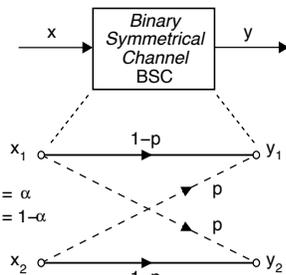
Le probabilità condizionate  $p_{ij} = p(y_i/x_j)$  di osservare  $y_i$  in uscita quando in ingresso è presente  $x_j$  sono dette *probabilità in avanti*, ed il canale è detto *simmetrico* in quanto le  $p_{ij}$  non cambiano in funzione dell'ingresso, essendo espresse nei termini di una probabilità di errore  $p$  e del suo complemento

$$\begin{cases} p(y_2/x_1) = p(y_1/x_2) = p \\ p(y_1/x_1) = p(y_2/x_2) = 1 - p \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad [p_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 - p & p \\ p & 1 - p \end{bmatrix}$$

in cui il valore di  $p$  è quello ottenuto in base alle condizioni di trasmissione (§ 8.4, cap. 14), e caratterizza il canale. Se  $p \neq 0$  la decisione su quale  $x_j$  abbia dato origine al  $y_i$  osservato in uscita viene svolta mediante un procedimento di *verifica di ipotesi* (§ 5.6.1) binaria, basata sul valore assunto da un rapporto tra valori di probabilità.

**Decisione di massima verosimiglianza** Qualora siano note solamente le probabilità in avanti  $p_{ij}$  ma non quelle a priori, la decisione avviene sulla base del *rapporto di verosimiglianza* (§ 5.6.2). Supponendo di ricevere ad es. il valore  $y_1$ , la decisione su quale delle due ipotesi  $x_1$  od  $x_2$  sia più probabile è realizzata in base ad un rapporto  $R_{ML}$  tra le probabilità *in avanti* ed è per questo detta *di massima verosimiglianza* (vedi § 5.6.2.1) o *MAXIMUM LIKELIHOOD*, ovvero

$$R_{ML}(y_1) = \frac{p(y_1/x_1)}{p(y_1/x_2)} = \frac{1 - p}{p} \underset{x_2}{\overset{x_1}{\gtrless}} 1 \quad (13.24)$$



decidendo quindi per l'ipotesi *più verosimile* in funzione del valore maggiore o minore di uno per  $R_{ML}$ . Nel caso risulti  $p < \frac{1}{2}$  la regola (13.24) equivale a scegliere l'ingresso concorde con l'uscita, oppure l'opposto se  $p > \frac{1}{2}$ . Qualora invece si riceva  $y_2$ , il rapporto e la relativa regola

di decisione sono definiti come  $R_{ML}(y_2) = \frac{p(y_2/x_2)}{p(y_2/x_1)} \underset{x_1}{\overset{x_2}{\gtrless}} 1$ .

**Decisione di massima probabilità a posteriori (MAP)** Conoscendo anche le probabilità *a priori*  $p(x_1)$  e  $p(x_2)$ , se i due simboli  $x_1$  ed  $x_2$  non sono equiprobabili<sup>30</sup> possiamo effettuare la decisione confrontando le probabilità *a posteriori*<sup>31</sup>  $p(x_1/y_1)$  e  $p(x_2/y_1)$ , calcolabili applicando il teorema di Bayes (vedi § 5.1.4). Facendo di nuovo il caso di aver ricevuto il simbolo  $y_1$ , scriviamo dunque

$$R_{MAP}(y_1) = \frac{p(x_1/y_1)}{p(x_2/y_1)} = \frac{p(y_1/x_1)p(x_1)}{p(y_1/x_2)p(x_2)} \cdot \frac{p(y_1)}{p(y_1/x_2)p(x_2)} \quad (13.25)$$

$$= \frac{p(y_1/x_1)p(x_1)}{p(y_1/x_2)p(x_2)} \underset{x_2}{\overset{x_1}{\gtrless}} 1 \quad (13.26)$$

mentre ricevendo  $y_2$  rapporto e regola di decisione sono definiti come

$$R_{MAP}(y_2) = \frac{p(y_2/x_2)p(x_2)}{p(y_2/x_1)p(x_1)} \underset{x_1}{\overset{x_2}{\gtrless}} 1$$

Osserviamo subito che  $R_{MAP}$  assume valori  $> 0$  o  $< 1$  *correggendo* la (13.24) in base alla conoscenza delle probabilità *a priori*  $p(x_1)$  e  $p(x_2)$ .

**Riflessioni** Il meccanismo con cui, nella decisione MAP, le probabilità in avanti si combinano con quelle *a priori* può essere analizzato mediante alcune osservazioni: innanzi tutto,  $x_1$  potrebbe essere *così raro* che, in presenza di una moderata probabilità di errore, il ricevitore potrebbe preferire di decidere sempre  $x_2$ , attribuendo l'eventuale ricezione di  $y_1$  dovuta più verosimilmente ad un errore del canale, piuttosto che all'effettiva trasmissione di  $x_1$ . In assenza di canale poi, l'unico rapporto di decisione possibile sarebbe stato quello tra le probabilità *a priori*  $p(x_1)$  e  $p(x_2)$ ; la ricezione di un simbolo  $y_i$  dunque ha portato un miglior livello di informazione, alterando il rapporto di decisione  $R$  in misura tanto maggiore quanto minore è la probabilità di errore.

**Esempio** Verifichiamo i ragionamenti appena svolti riscrivendo per esteso una probabilità *a posteriori*:

$$\begin{aligned} p(x_1/y_1) &= \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{p(y_1/x_1)p(x_1)}{p(y_1/x_1)p(x_1) + p(y_1/x_2)p(x_2)} = \\ &= \frac{(1-p) \cdot p(x_1)}{(1-p) \cdot p(x_1) + p \cdot p(x_2)} = \frac{p(x_1)}{p(x_1) + \frac{p}{1-p}p(x_2)} \end{aligned}$$

<sup>30</sup>In caso contrario (ovvero  $x_1$  ed  $x_2$  sono equiprobabili) la (13.25) è equivalente alla (13.24). Nei casi in cui *non si conosca* la statistica di sorgente, non si può quindi fare altro che attuare una *decisione di massima verosimiglianza*.

<sup>31</sup>Sono indicate come *a posteriori* perché misurano la probabilità del simbolo trasmesso  $x$  *dopo* la conoscenza di quello ricevuto  $y$ .

Se  $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ , il canale è *inservibile* e non trasferisce informazione: infatti si ottiene  $p(x_1/y_1) = p(x_1)$  pari a quella a priori, in quanto  $p(x_1) + p(x_2) = 1$ . D'altra parte se  $p < \frac{1}{2}$  si ottiene

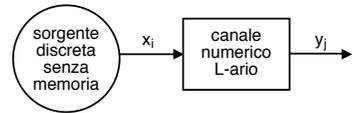
$$p(x_1/y_1) = \frac{p(x_1)}{p(x_1) + \frac{p}{1-p}p(x_2)} > p(x_1)$$

dato che in tal caso  $\frac{p}{1-p} < 0.5$ : si assiste pertanto ad un *aumento* della probabilità di  $x_1$  rispetto quella a priori; se poi la probabilità di errore tende a zero ( $p \rightarrow 0$ ), osserviamo che  $p(x_1/y_1) \rightarrow 1$ .

### 13.2.2 Informazione mutua media per sorgenti discrete

Abbiamo discusso di come l'entropia permetta di valutare la capacità informativa di una sorgente; estendiamo ora il concetto per mostrare come l'*informazione condivisa* tra ingresso ed uscita di un canale consenta di determinare anche la quantità di informazione che viene *persa* a causa degli errori che si sono verificati.

Consideriamo una sorgente discreta che emette simboli  $x$  appartenenti ad un alfabeto finito di cardinalità  $L$ , ossia  $x \in \{x_i\}$  con  $i = 1, 2, \dots, L$ , ed indichiamo con  $y \in \{y_j\}$  (sempre per  $j = 1, 2, \dots, L$ ) il corrispondente simbolo ricevuto mediante un canale discreto, in generale diverso da  $x$ , a causa di errori introdotti dal canale. Conoscendo le densità di probabilità  $p(x_i)$ ,  $p(y_j)$ , e le probabilità congiunte  $p(x_i, y_j)$ , possiamo definire la quantità di informazione *in comune* tra  $x_i$  e  $y_j$ , denominata *informazione mutua*, come<sup>32</sup>



$$I(x_i, y_j) = \log_2 \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} = \log_2 \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} = \log_2 \frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)} \quad \text{bit} \quad (13.27)$$

Notiamo che a seguito di tale definizione, ne deriva che

- se ingresso ed uscita del canale sono *indipendenti* si ha  $p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j)$ , e di conseguenza l'informazione mutua è *nulla*;
- se  $p(y_j/x_i) > p(y_j)$  significa che l'essere a conoscenza della trasmissione di  $x_i$  rende la ricezione di  $y_j$  *più probabile* di quanto non lo fosse a priori, e corrisponde ad una informazione mutua *positiva*;
- la definizione di informazione mutua è *simmetrica*, ovvero  $I(x_i, y_j) = I(y_j, x_i)$ .

Per giungere ad una grandezza  $I(X, Y)$  che tenga conto del comportamento *medio* del canale, ovvero per coppie ingresso-uscita qualsiasi, occorre pesare i valori di  $I(x_i, y_j)$  con le relative probabilità congiunte, ossia calcolarne il valore atteso rispetto a tutte le possibili coppie  $(x_i, y_j)$ :

$$I(X, Y) = E_{X,Y} \{I(x_i, y_j)\} = \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log_2 \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} \quad (13.28)$$

$$= \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log_2 \frac{p(y_j/x_i)}{p(y_j)} \quad (13.29)$$

ottenendo così la quantità denominata *informazione mutua media*, misurata in bit/simbolo, e che rappresenta (in media) quanta informazione ogni simbolo ricevuto trasporta a riguardo di

<sup>32</sup>Per ottenere le diverse forme della (13.27) si ricordi che  $p(x_i, y_j) = p(x_i/y_j)p(y_j) = p(y_j/x_i)p(x_i)$

quello trasmesso. In virtù della simmetria di questa definizione, ci accorgiamo che il valore di  $I(X, Y)$  può essere espresso<sup>33</sup> nelle due forme alternative

$$I(X, Y) = H(X) - H(X/Y) \quad (13.30)$$

$$= H(Y) - H(Y/X) \quad (13.31)$$

in cui l'entropia *condizionale*

$$H(X/Y) = \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(x_i/y_j)} \quad (13.32)$$

prende il nome di *equivocazione*, e rappresenta la quantità media di informazione *persa*, rispetto all'entropia di sorgente  $H(X)$ , a causa della rumorosità del canale. Nel caso in cui il canale non introduca errori, e quindi  $p(x_i/y_j)$  sia pari a 1 se  $j = i$  e zero altrimenti, è facile vedere<sup>34</sup> che  $H(X/Y)$  è pari a zero, e  $I(X, Y) = H(X)$ , ossia tutta l'informazione della sorgente si trasferisce a destinazione. D'altra parte

$$H(Y/X) = \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(y_j/x_i)} \quad (13.33)$$

prende il nome di *noise entropy* dato che considera il processo di rumore come se fosse un segnale informativo: infatti, sebbene si possa essere tentati di dire che l'informazione media ricevuta è misurata dalla entropia  $H(Y)$  della sequenza di osservazione, una parte di essa  $H(Y/X)$  è *falsa*, perché in realtà è introdotta dagli errori.

**Informazione mutua media per canale simmetrico binario** Torniamo ora al caso descritto al § 13.2.1 ed usiamo la (13.31) per calcolare l'informazione mutua media in funzione della probabilità a priori  $p(x_1) = \alpha$  e di quella in avanti  $p_e$ ; iniziamo dunque a valutare  $H(Y)$  e  $H(Y/X)$ . Dal punto di vista dell'uscita del canale, i simboli  $y_1, y_2$  costituiscono l'alfabeto di una sorgente binaria senza memoria, la cui entropia si esprime in termini di  $p(y_1)$  mediante la (13.6), ovvero  $H(Y) = H_b(p(y_1))$ , in cui

$$\begin{aligned} p(y_1) &= p(y_1/x_1)p(x_1) + p(y_1/x_2)p(x_2) = \\ &= (1 - p_e)\alpha + p_e(1 - \alpha) = p_e + \alpha - 2\alpha p_e \end{aligned}$$

e dunque  $H(Y) = H_b(p_e + \alpha - 2\alpha p_e)$ . Per quanto riguarda la *noise entropy*  $H(Y/X)$ , sostituendo  $p(x_i, y_j) = p(y_j/x_i)p(x_i)$  nella (13.33) otteniamo

$$H(Y/X) = \sum_i p(x_i) \left[ \sum_j p(y_j/x_i) \log_2 \frac{1}{p(y_j/x_i)} \right] = H_b(p_e)$$

<sup>33</sup>Infatti

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log_2 \frac{p(x_i/y_j)}{p(x_i)} &= \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \left[ \log_2 \frac{1}{p(x_i)} - \log_2 \frac{1}{p(x_i/y_j)} \right] = \\ &= \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(x_i)} - \sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(x_i/y_j)} \end{aligned}$$

L'ultimo termine è indicato come entropia condizionale  $H(X/Y)$  (eq. (13.32)), mentre il penultimo è pari all'entropia di sorgente  $H(X)$  dato che *saturando* la prob. congiunta  $p(x_i, y_j)$  rispetto ad  $j$ , ovvero  $\sum_j p(x_i, y_j) = p(x_i)$ , si perviene alla (13.30) in base al risultato  $\sum_i \log_2 \frac{1}{p(x_i)} \sum_j p(x_i, y_j) = \sum_i p(x_i) \log_2 \frac{1}{p(x_i)}$ . Per la (13.31), il passaggio è del tutto simile.

<sup>34</sup>Infatti in tal caso la (13.32) diviene  $\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \log_2 \frac{1}{p(x_i/y_j)} = \sum_i p(x_i, y_i) \log_2 1 = 0$

dato che il termine tra parentesi quadre rappresenta appunto l'entropia di una sorgente binaria con simboli a probabilità  $p_e$  e  $1 - p_e$ . Possiamo quindi ora scrivere l'espressione cercata

$$I(X, Y) = H_b(p_e + \alpha - 2\alpha p_e) - H_b(p_e) \quad (13.34)$$

che dipende sia dalla probabilità di errore  $p_e$ , sia dalla prob. a priori dei simboli della sorgente: osserviamo che se  $p_e \ll 1$ , il canale (quasi) non commette errori e risulta  $I(X, Y) \simeq H_b(\alpha) = H(X)$ , mentre se  $p_e \rightarrow \frac{1}{2}$  allora  $I(X, Y) \rightarrow 0$ .

### 13.2.3 Capacità di canale discreto

I risultati ora mostrati, pur permettendo di valutare la perdita di informazione causata dai disturbi, dipendono sia dalle probabilità *in avanti*  $p(y_j/x_i)$  che effettivamente descrivono il comportamento del canale, sia da quelle *a priori*  $p(x_i)$ , che invece attengono unicamente alle caratteristiche della sorgente. Al contrario, vorremmo trovare una grandezza che esprima esclusivamente l'attitudine (o *capacità*) del canale a trasportare informazione, indipendentemente dalle caratteristiche della sorgente. Questo risultato può essere ottenuto provando a variare la statistica della sorgente in tutti i modi possibili, fino a trovare il valore

$$C_s = \max_{p(x)} I(X, Y) \quad \text{bit/simbolo} \quad (13.35)$$

che definisce la *capacità di canale per simbolo* come il massimo valore dell'informazione mutua media, ottenuto in corrispondenza della migliore sorgente possibile<sup>35</sup>. Il pedice  $s$  sta per *simbolo*, e serve a distinguere il valore ora definito da quello che esprime la massima *intensità* di trasferimento dell'informazione espressa in bit/secondo, ottenibile una volta nota la frequenza  $f_s$  con cui sono trasmessi i simboli, fornendo per la capacità di canale il nuovo valore<sup>36</sup>

$$C = f_s \cdot C_s \quad \text{bit/secondo} \quad (13.36)$$

L'importanza di questa quantità risiede nel *teorema fondamentale per canali rumorosi*<sup>37</sup> già anticipato più volte, che asserisce che per ogni canale discreto senza memoria di capacità  $C$

- esiste una tecnica di codifica che consente la trasmissione di informazione a velocità  $R$  e con probabilità di errore per simbolo  $p_e$  *piccola a piacere*, purché risulti  $R < C$ ;
- se è accettabile una probabilità di errore  $p_e$ , si può raggiungere (con la miglior codifica possibile) una velocità  $R(p_e) = \frac{C}{1 - H_b(p_e)} > C$  in cui  $H_b(p_e)$  è l'entropia di una sorgente binaria (13.6);
- per ogni valore di  $p_e$ , non è possibile trasmettere informazione a velocità maggiore di  $R(p_e)$

Il teorema non suggerisce come individuare la tecnica di codifica, né fa distinzioni tra codifica di sorgente e di canale, ma indica le prestazioni limite ottenibili mediante la migliore tecnica possibile, in grado di ridurre a piacere la  $p_e$  purché  $R < C$ , mettendoci al tempo stesso in guardia a non tentare operazioni impossibili. Da questo punto di vista, le prestazioni conseguibili adottando le tecniche di codifica note possono essere valutate confrontandole con quelle *ideali*

<sup>35</sup>In definitiva, questo modo di ottenere una grandezza rappresentativa del solo canale è in qualche modo simile alla via per la quale si definisce la potenza *disponibile* di un generatore (vedi § 15.1.1.3), al variare di tutti i possibili valori di impedenza di carico.

<sup>36</sup>Osserviamo l'invarianza di (13.36) rispetto al numero di livelli con cui è effettuata la trasmissione: se  $M$  bit sono raggruppati per generare simboli ad  $L = 2^M$  livelli, come noto  $f_s$  si riduce di  $M$  volte, mentre  $C_s$  aumenta della stessa quantità, dato che ogni simbolo trasporta ora  $M$  bit anziché uno.

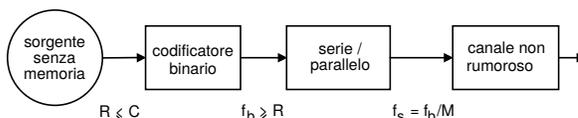
<sup>37</sup>[http://it.wikipedia.org/wiki/Secondo\\_teorema\\_di\\_Shannon](http://it.wikipedia.org/wiki/Secondo_teorema_di_Shannon)

predette dal teorema. Inoltre, dato che la capacità di canale è definita come massimo valore di  $I(X, Y)$  per la migliore  $p(x)$ , qualora la statistica dei messaggi prodotti dal codificatore di sorgente differisca da quella ottima per il canale, l'effettiva informazione mutua media risulterà ridotta rispetto al valore della capacità, così come la massima velocità  $R$ .

Illustriamo l'applicazione di questi risultati con un paio di esempi:

**Canale  $L$ -ario non rumoroso** Consideriamo il caso mostrato in figura, che rappresenta un canale che trasporta *senza errori* simboli con  $L = 2^M$  livelli: in tal caso l'equivocazione  $H(Y/X)$  è nulla, e la (13.30) permette di scrivere  $I(X, Y) = H(X)$ , che è massima se  $P(x_i) = 1/L$  per tutti gli  $i$ , risultando così  $C_s = H_{max}(X) = \log_2 L = M$  bit/simbolo, e  $C = f_s \cdot C_s = f_s \cdot M$  bit/secondo.

I simboli ad  $L$  livelli sono ottenuti a partire da  $M$  bit prodotti da una codifica binaria a velocità  $f_b$ , risultando  $f_b \geq R = H_x$  (vedi eq. (13.9))



in funzione della ottimalità o meno del codificatore; pertanto, risulta  $R \leq f_b = f_s M = C$  con l'uguaglianza valida nel caso in cui il codificatore riesca a rimuovere tutta la ridondanza dei messaggi della sorgente<sup>38</sup>, conseguendo in tal caso il massimo trasferimento di informazione.

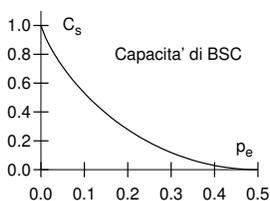
Al contrario, volendo realizzare una velocità  $R > C$ , il codificatore di sorgente dovrebbe produrre codeword con lunghezze tali da violare la disuguaglianza di Kraft (13.13)<sup>39</sup>, e quindi la regola del prefisso non sarebbe rispettata, causando in definitiva errori di decodifica anche in assenza di rumore!

**Capacità del canale simmetrico binario** Esaminiamo l'effetto della presenza di rumore per questo caso già studiato, e per il quale a pag. 355 abbiamo valutato l'espressione dell'informazione mutua media, data dalla (13.34), e pari a

$$I(X, Y) = H_b(p_e + \alpha - 2\alpha p_e) - H_b(p_e)$$

in cui  $H_b(p_e)$  dipende solo dalla probabilità di errore, mentre il termine  $H_b(p_e + \alpha - 2\alpha p_e)$  dipende anche dalla statistica di sorgente, e risulta massimizzato e pari ad 1 se  $p_e + \alpha - 2\alpha p_e = \frac{1}{2}$ , come risulta per qualunque  $p_e$  se  $\alpha = \frac{1}{2}$ , ossia per simboli equiprobabili. Pertanto, la capacità del BSC risulta pari a

$$C_s = H_b(1/2) - H_b(p_e) = 1 - H_b(p_e)$$



ed il suo andamento è rappresentato alla figura a lato<sup>40</sup>, evidenziando che  $C_s \simeq 1$  bit/simbolo se  $p_e \simeq 0$ , ma che poi decade rapidamente a zero se  $p_e \rightarrow 0.5$ .

Quest'ultimo esempio in particolare ci conferma l'esigenza, in presenza di un canale rumoroso, di attuare tecniche di codifica di canale in grado di ridurre la probabilità di errore, in modo da poter sfruttare appieno la capacità che il canale presenta nel caso di  $p_e$  ridotta, e di preferire tra queste le tecniche

<sup>38</sup>Ad esempio se  $L$  non è una potenza di due, un codificatore di sorgente che operi simbolo per simbolo produce necessariamente  $f_b > R$ , mentre se concatena più simboli (§ 13.1.1.4), può avvicinarsi a  $f_b = R$ .

<sup>39</sup>Infatti, potrebbe risultare  $R > C$  solo se  $f_b < R$ , ovvero il codificatore dovrebbe produrre *meno* bit/secondo di quanti bit/secondo produca la sorgente

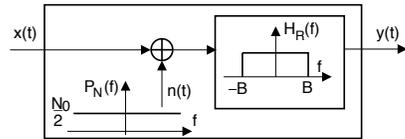
<sup>40</sup>Sono mostrati solo i valori per  $0 \leq p_e \leq 0.5$  dato che successivamente l'andamento di  $C_s$  si riflette in modo speculare.

che vi riescono mantenendo al minimo la quantità dei bit aggiuntivi, dato che altrimenti come noto aumenta la banda occupata dal segnale dati.

### 13.2.4 Capacità di canale continuo

Come anticipato fin da pag. 5, un canale numerico è in realtà una astrazione che ingloba internamente un codificatore di linea o *modem* che, a partire da una sequenza numerica, produce un segnale trasmissibile su di un canale analogico, che a sua volta può essere caratterizzato da un valore di capacità, espresso nei termini dei parametri che descrivono la trasmissione analogica soggiacente.

Una situazione tipica è quella rappresentata dalla figura a lato, in cui al segnale ricevuto è sommato un rumore  $n(t)$  gaussiano, bianco e a media nulla, mentre il filtro di ricezione  $H_R(f)$  impone una limitazione di banda  $2B$ , in modo che la potenza di rumore in ingresso al decisore vale  $P_n = \sigma_n^2 = N_0 B$ . Una tale descrizione viene indicata come *canale AWGN (additive white gaussian noise) limitato in banda*.



Una tale descrizione viene indicata come *canale AWGN (additive white gaussian noise) limitato in banda*.

Indicando ora con  $p(x)$ ,  $p(y)$ ,  $p(x/y)$ ,  $p(y/x)$  le densità di probabilità marginali e condizionali che descrivono *un campione* dei processi di ingresso  $x(t)$  ed uscita  $y(t)$ , entrambi limitati in banda  $\pm B$ , l'applicazione formale della (13.28) al caso continuo porta a scrivere l'espressione dell'informazione mutua media come

$$I(X, Y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) \log_2 \frac{p_Y(y/x)}{p_Y(y)} dx dy \quad \text{bit/campione} \quad (13.37)$$

che è una misura *assoluta*<sup>41</sup> del trasferimento di informazione per campione di uscita. Il massimo valore di (13.37) al variare di  $p_X(x)$  consente anche questa volta di definire la capacità di canale per campione  $C_s = \max_{p(x)} I(X, Y)$ ; in virtù della limitazione di banda, i campioni prelevati ad una frequenza di campionamento  $f_c = 2B$  risultano indipendenti tra loro (vedi § 6.2.4), cosicché la capacità di canale risulta definita come

$$C = 2B \cdot \max_{p(x)} \{I(X, Y)\} \quad \text{bit/secondo} \quad (13.38)$$

Riscrivendo la (13.37) nella forma

$$I(X, Y) = h(Y) - h(Y/X) \quad (13.39)$$

si ottiene una espressione analoga alla (13.31) ma i cui termini sono ora da intendersi come entropia differenziale, definita in (13.20). Osserviamo ora che il termine di *noise entropy*  $h(Y/X) = \int \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, y) \log_2 \frac{1}{p_Y(y/x)} dx dy$  dipende esclusivamente dal rumore additivo, in quanto  $y(t) = x(t) + n(t)$  e quindi  $p_Y(y/x) = p_N(x + n)$ : infatti  $p_Y(y/x)$  altro non è che la gaussiana del rumore, a cui si somma un valor medio fornito dal campione di  $x$ ; quindi  $h(Y/X)$  si riduce all'entropia differenziale di un processo gaussiano, che non dipende dal valor medio, ma solo dall'andamento di  $p_N(n)$ ; pertanto

$$h(Y/X) = \int_{-\infty}^{\infty} p_N(n) \log_2 \frac{1}{p_N(n)} dn = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma_n^2)$$

<sup>41</sup>Per il fatto di avere una ddp di  $y$  sia a numeratore che a denominatore del logaritmo, la (13.37) non soffre dei problemi discussi alla nota 27

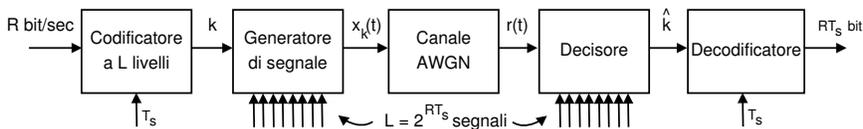


Figura 13.3: Schema ideale di codifica di canale ad errore asintoticamente nullo

come risulta per l'entropia differenziale di sorgenti gaussiane (13.21). Quindi ora il termine della (13.39) che deve essere massimizzato rispetto a  $p(x)$  è solo il primo, ossia  $h(Y)$ , che come sappiamo, è massimo se  $y(t)$  è gaussiano. Dato che il processo ricevuto  $y(t)$  è composto da due termini  $x(t) + n(t)$  di cui il secondo è già gaussiano, si ottiene  $y(t)$  gaussiano a condizione che anche  $x(t)$  sia gaussiano. Indicando con  $\sigma_x^2$  la potenza di quest'ultimo, ed in virtù della indipendenza statistica tra  $x(t)$  e  $n(t)$ , risulta  $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_n^2$ , e quindi

$$h(Y) = \frac{1}{2} \log_2 [2\pi e (\sigma_x^2 + \sigma_n^2)]$$

cosicché la (13.38) si riscrive come

$$\begin{aligned} C &= 2B \cdot \left\{ \frac{1}{2} \log_2 [2\pi e (\sigma_x^2 + \sigma_n^2)] - \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma_n^2) \right\} = \\ &= B \cdot \log_2 \frac{\sigma_x^2 + \sigma_n^2}{\sigma_n^2} = B \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{P_x}{P_n} \right) \quad \text{bit/secondo} \end{aligned}$$

che è proprio il risultato tanto spesso citato, che prende il nome di *legge di Shannon-Hartley*<sup>42</sup> e che esprime la capacità di canale per un canale additivo gaussiano. Tenendo conto che  $P_n = \sigma_n^2 = N_0 B$  e che  $P_x$  è la potenza del segnale ricevuto  $P_s$ , riscriviamo l'espressione della capacità nella sua forma più nota:

$$C = B \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{P_s}{N_0 B} \right) \quad \text{bit/secondo} \quad (13.40)$$

che, associata al teorema fondamentale della codifica espresso al § 13.2.3, stabilisce il massimo tasso informativo trasmissibile senza errori su di un canale AWGN limitato in banda come  $R < B \cdot \log_2 (1 + P_s/N_0 B)$ . Discutiamo ora delle conseguenze di questo risultato.

**Sistema di comunicazione ideale** Una volta noto il massimo tasso di informazione  $R < C$  che il canale può trasportare senza errori, come fare per evitare, appunto, questi ultimi? Il metodo suggerito da Shannon, anziché introdurre ridondanza come avviene per le tecniche di codifica di canale classiche, effettua invece la trasmissione semplicemente ripartendo l'informazione in blocchi codificati mediante simboli di durata elevata. In pratica, si tratta di realizzare una sorta di *trasmissione multilivello* (vedi § 8.1.2.4) come mostrato alla figura 13.3 dove l'informazione generata ad una velocità  $R$  bit/secondo viene trasmessa mediante simboli emessi con periodo  $T_s$  secondi, ognuno dei quali convoglia quindi una quantità di informazione pari a  $M = RT_s$  bit, e dunque occorrono  $L = 2^M$  diversi simboli.

Nella dimostrazione di Shannon ogni simbolo, anziché essere rappresentato da un livello costante, è costituito da un segnale  $x_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, L$  di durata  $T_s$ , ottenuto prelevando una finestra temporale  $T_s$  da una realizzazione di processo gaussiano bianco limitato in banda.

<sup>42</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Shannon-Hartley\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Shannon-Hartley_theorem)

Il ricevitore possiede una copia di tali forme d'onda, e per ogni periodo di simbolo calcola l'errore quadratico  $\varepsilon_k = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} (r(t) - x_k(t))^2 dt$  tra il segnale ricevuto  $r(t)$  ed ognuna delle forme d'onda associate ai simboli, decidendo per la trasmissione del simbolo  $\hat{k}$  la cui forma d'onda  $x_{\hat{k}}(t)$  fornisce l'errore  $\varepsilon_k$  minimo. Mantenendo  $R$  fisso e pari al tasso informativo della sorgente, all'aumentare di  $T_s$  anche  $M = RT_s$  aumenta di pari passo, mentre il numero di simboli  $L = 2^M$  aumenta esponenzialmente. Claude Shannon ha dimostrato<sup>43</sup> che, per  $T_s \rightarrow \infty$ , lo schema indicato riesce effettivamente a conseguire una  $P_e \rightarrow 0$ , tranne per il piccolo particolare che... occorre attendere un tempo che tende a infinito!

In realtà, uno schema di trasmissione numerica che approssima piuttosto bene questo ideale appena discusso esiste veramente, ed è quello esposto al § 14.5.1 e indicato come FSK ortogonale. Infatti, il grafico delle sue prestazioni a pag. 396 mostra come, aumentando  $L$ , lo stesso valore di  $\frac{E_b}{N_0}$  permette di conseguire valori di  $P_e$  via via più piccoli.

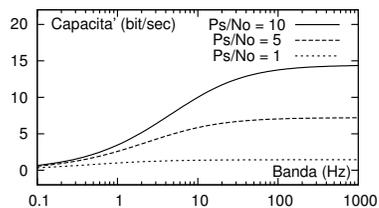
**Minima energia per bit** Il grafico di pag. 396 consente di verificare come per una modulazione numerica FSK (concettualmente simile a quella descritta in fig. 13.3) il valore di  $\frac{E_b}{N_0}$  necessario a conseguire una ben determinata  $P_e$  diviene sempre più piccolo all'aumentare di  $L$ , anche se non può ridursi a meno di un valore limite, ossia deve comunque risultare<sup>44</sup>

$$\frac{E_b}{N_0} \geq \ln 2 = 0,693 \quad \text{ovvero} \quad \frac{E_b}{N_0} \Big|_{dB} \geq -1.6 \text{ dB} \quad (13.41)$$

D'altra parte nell'FSK l'aumento di  $L$  comporta l'aumento, oltre che di  $T_s$ , anche della banda occupata per la trasmissione, e questo ci dà lo spunto per le osservazioni che seguono.

**Compromesso banda-potenza e capacità massima** Il valore limite (13.41) trae origine da una conseguenza della (13.40) già fatta notare a pag. 218, ovvero la possibilità di risparmiare potenza aumentando l'occupazione di banda (o viceversa), dato che a ciò corrisponde un aumento di  $C$ , che però *non può oltrepassare* un valore massimo. Infatti, se nella (13.40) si aumenta  $B$ , aumenta anche la potenza di rumore, e l'effetto finale è che per un canale con *banda infinita* non si ottiene una capacità infinita, bensì il valore

$$\begin{aligned} C_\infty &= \lim_{B \rightarrow \infty} B \cdot \log_2 \left( 1 + \frac{P_s}{N_0 B} \right) = \\ &= \frac{P_s}{N_0 \ln 2} \simeq 1.44 \frac{P_s}{N_0} \end{aligned} \quad (13.42)$$



<sup>43</sup>Senza pretendere di svolgere l'esatta dimostrazione, tentiamo di dare credibilità a questo risultato. Osserviamo quindi che se  $r(t) = x_k(t) + n(t)$ , il valore atteso dell'errore  $\varepsilon_k$  si riduce a  $\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} [n(t)]^2 dt \rightarrow \sigma_n^2$ , dato che essendo  $n(t)$  stazionario ergodico, le medie di insieme coincidono con le medie temporali. Viceversa, se il segnale trasmesso è  $x_h(t)$  con  $h \neq k$ , allora il relativo errore quadratico vale  $\varepsilon_k^{(h)} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} (x_h(t) + n(t) - x_k(t))^2 dt$ , ed il suo valore atteso  $E \{ \varepsilon_k^{(h)} \} \rightarrow \sigma_n^2 + 2\sigma_x^2$  essendo le forme d'onda dei simboli ortogonali tra loro e rispetto al rumore. I valori limite mostrati sono in realtà grandezze aleatorie, ma la loro varianza diviene sempre più piccola all'aumentare di  $T_s$ , e quindi in effetti con  $T_s \rightarrow \infty$  risulta sempre  $\varepsilon_k < \varepsilon_k^{(h)}$ , azzerando la probabilità di errore.

<sup>44</sup>La (13.41) si ottiene considerando che se la capacità di canale per  $B \rightarrow \infty$  fornita dalla (13.42) vale  $C_\infty = \frac{P_s}{N_0 \ln 2}$ , e se deve risultare  $R \leq C$ , allora  $\ln 2 = \frac{P_s}{N_0 C_\infty} \leq \frac{P_s}{N_0 R} = \frac{E_b}{N_0}$ .

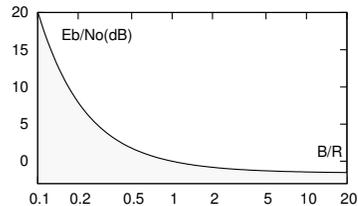
(vedi nota<sup>45</sup>) che individua anche il limite *assoluto* al massimo tasso informativo  $R$  trasmissibile. Alla precedente figura è mostrato l'andamento effettivo della (13.40) in funzione di  $B$ , per alcuni valori di  $\frac{P_s}{N_0}$  di esempio.

**Limite inferiore per  $\frac{E_b}{N_0}$**  Una volta assegnato il tasso informativo  $R < C$  della sorgente e la banda  $B$  del canale, partendo dalla (13.40) si può ottenere<sup>46</sup> una relazione che esprime il valore di  $\frac{E_b}{N_0}$  necessario a conseguire una trasmissione senza errori (nel caso ideale):

$$\frac{E_b}{N_0} > \frac{B}{R} \left( 2^{\frac{R}{B}} - 1 \right) \quad (13.43)$$

e che, espressa in dB, è graficata nella figura a lato, in cui l'area grigia indica i valori di  $\frac{E_b}{N_0}$  vietati, ossia per i quali è impossibile ottenere una trasmissione senza errori.

Notiamo innanzitutto che, mentre per  $\frac{B}{R} = 1$  il sistema ideale richiede un valore di  $\frac{E_b}{N_0}$  pari ad almeno 0 dB, questo si riduce nel caso in cui la trasmissione occupi una banda maggiore del tasso informativo  $R$ , fino a raggiungere (già per valori  $B > 10R$ ) il limite (13.41) di -1.6 dB. D'altra parte, qualora la trasmissione impegni una banda inferiore ad  $R$ , il valore di  $\frac{E_b}{N_0}$  necessario aumenta in modo piuttosto brusco.



Compromesso banda-potenza per un sistema ideale

**Prestazioni di sistemi di comunicazione reali** La verifica dei comportamenti appena evidenziati può essere svolta confrontando le prestazioni ideali (13.43) con quelle ottenibili adottando le tecniche di modulazione numerica già discusse, e per le quali si riesce a ridurre la banda occupata come nel caso della trasmissione multilivello<sup>47</sup>, oppure la si aumenta, come nel caso dell'FSK.

La figura 13.4 riporta i valori di  $\frac{E_b}{N_0}$  vs  $\frac{B}{R}$  per le tecniche di modulazione numerica QAM (§ 14.3.1) e FSK ortogonale (pag. 394): a partire dai rispettivi andamenti della  $P_e$  in funzione di  $\frac{E_b}{N_0}$  ed  $L$ , si sono ricavati i valori di  $\frac{E_b}{N_0}$  necessari ad ottenere una  $P_e$  pari a  $10^{-5}$  per diversi valori di  $L$ , e questi sono stati riportati nel grafico assieme alla banda occupata, valutata come segue.

<sup>45</sup>La (13.42) si ottiene riscrivendo la (13.40) nella forma

$$C = \frac{P_s}{N_0 \frac{P_s}{N_0 B}} \cdot \frac{\ln \left( 1 + \frac{P_s}{N_0 B} \right)}{\ln 2} = \frac{P_s}{N_0 \ln 2} \cdot \frac{\ln (1 + \lambda)}{\lambda}$$

in cui  $\ln$  è il logaritmo *naturale* in base  $e$ , e si è posto  $\frac{P_s}{N_0 B} = \lambda$ . Ricordando ora lo sviluppo di Maclaurin  $f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \Big|_{x=0} \cdot \frac{x^n}{n!} \right)$  e che  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ , il termine  $\ln(1 + \lambda)$  può essere espanso in serie di potenze come  $\ln(1 + \lambda) = \lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda^3 + \dots$ ; notando infine che per  $B \rightarrow \infty$  si ha  $\lambda \rightarrow 0$ , e che  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \lambda)}{\lambda} = 1$ , si giunge in definitiva al risultato (13.42).

<sup>46</sup>Riscrivendo la (13.40) come  $2^{\frac{C}{B}} - 1 = \frac{P_s}{N_0 B}$ , moltiplicando ambo i membri per  $\frac{B}{R}$ , e semplificando il risultato, si ottiene  $\frac{B}{R} (2^{\frac{C}{B}} - 1) = \frac{P_s}{N_0 R}$ . L'uguaglianza individua la circostanza limite in cui  $R = C$ , mentre se nell'esponente di 2 a primo membro sostituiamo  $C$  con  $R$ , e  $R < C$ , il primo membro diviene più piccolo, e pertanto  $\frac{B}{R} (2^{\frac{R}{B}} - 1) < \frac{P_s}{N_0 R}$ . Infine, notiamo che  $\frac{P_s}{N_0 R} = \frac{E_b}{N_0}$ , da cui il risultato mostrato (13.43).

<sup>47</sup>Vedi ad es. il caso di banda base al § 8.4.9 o quello del QAM al § 14.3.1.

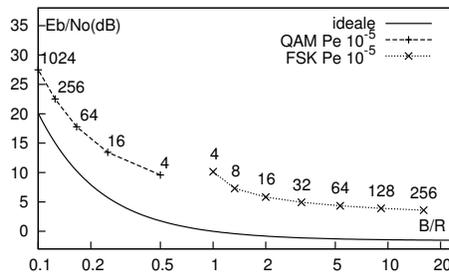


Figura 13.4: Prestazioni di QAM ed FSK confrontate con quelle ideali

Considerando di adottare per il QAM un impulso di Nyquist a banda minima, la banda occupata risulta pari a  $B_{QAM} = \frac{f_b}{\log_2 L}$ , e pertanto

$$\left. \frac{B}{R} \right|_{QAM} = \frac{1}{\log_2 L}$$

mentre come riportato a pag. 396, per l'FSK ortogonale si ha  $B_{FSK} \simeq \frac{f_b}{2} \frac{L}{\log_2 L}$ , e dunque

$$\left. \frac{B}{R} \right|_{FSK} = \frac{L}{2 \log_2 L}$$

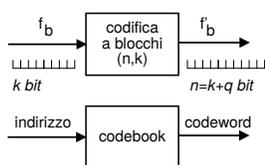
Possiamo osservare come per le due tecniche di trasmissione l'andamento dei valori di  $\frac{E_b}{N_0}$  in funzione di  $\frac{B}{R}$  ricalchi abbastanza fedelmente quello ideale, a parte una perdita di efficienza, che si riduce per  $L$  crescente.

### 13.3 Codici di canale

Dopo aver esposto i risultati che la teoria dell'informazione fornisce a riguardo delle migliori prestazioni ottenibili, proseguiamo il discorso iniziato al § 8.5.2.1 su come aggiungere ridondanza ad un flusso binario a velocità  $f_b$  da trasmettere su di un canale numerico, in modo da realizzare una protezione FEC capace di ridurre la probabilità di errore per bit  $P_e$  in ricezione. Ricordiamo che al § 13.2.3 abbiamo mostrato come, aumentando il ritardo di codifica, la probabilità di errore può essere resa piccola a piacere, purché  $f_b = R < C$ , essendo  $C$  la capacità di canale. Ma mentre la soluzione teorica basata su segnalazione asintoticamente ortogonale di fig. 13.3 prevede un aumento *esponenziale*<sup>48</sup> della banda occupata, le tecniche illustrate nel seguito consentono di mantenere la relazione tra grado di protezione e banda occupata di tipo *proporzionale*.

**Tasso di codifica, velocità binaria ed  $E_b/N_0$**  Riprendiamo la notazione introdotta a

<sup>48</sup>Consideriamo infatti di rappresentare (ad esempio) le forme d'onda ortogonali mediante un *rect* posto all'interno del periodo di simbolo  $T$ , in modo da non sovrapporsi ai *rect* associati a simboli diversi (vedi § 6.8.2). All'aumentare del periodo di simbolo  $T$  il numero di bit/simbolo  $M = f_b T$  aumenta in modo proporzionale, mentre il numero di possibili simboli  $L = 2^M = 2^{f_b T}$  aumenta esponenzialmente. Pertanto, ogni *rect* ha a disposizione un intervallo temporale pari a  $T/2^{f_b T}$  e quindi la sua durata tende a zero esponenzialmente se  $T \rightarrow \infty$ , mentre la sua banda tende ad infinito, sempre con legge esponenziale rispetto a  $T$ .



pag. 227 per i codici a blocchi, per i quali ad ogni  $k$  bit in ingresso corrispondono *codeword* con lunghezza  $n = k + q > k$  mediante l'aggiunta di  $q$  bit di protezione in funzione dei primi  $k$ : tale procedura realizza un *codice*  $(n, k)$ , la cui efficienza è misurata dal *tasso di codifica* (o CODE RATE)

$$R_c = \frac{k}{n} < 1$$

che rappresenta la frazione di bit informativi sul totale di quelli trasmessi, nonché l'inverso del fattore di *espansione di banda*: la nuova velocità di trasmissione in presenza di codifica vale infatti

$$f'_b = \frac{f_b}{R_c}$$

Osserviamo ora che all'aumento della velocità di segnalazione (essendo  $f'_b > f_b$ ) corrisponde una eguale diminuzione del rapporto  $E_b/N_0 = \frac{P_s}{N_0 f'_b} = R_c \frac{P_s}{N_0 f_b}$ , e conseguentemente si assiste ad un *peggioramento* della probabilità di errore *grezza* del decisore: pertanto, la capacità correttiva del codice deve essere tale da compensare anche questo aspetto. Per mantenere limitato l'effetto descritto, così come l'espansione di banda, vorremmo trovare codificatori per cui  $R_c$  sia il più possibile vicino ad uno.

**Distanza di Hamming, distanza minima e capacità correttiva** Al § 8.5.2.1 si è definita  $d_H(x_i, x_j)$  come il numero di bit in cui le *codeword*  $x_i$  e  $x_j$  differiscono, pari al minimo numero di errori sul bit affinché una si trasformi nell'altra. Valutando la distanza di Hamming  $d_H$  per tutte le possibili coppie di *codeword*, si definisce la *distanza minima del codice*  $d_m = \min_{i \neq j} d_H(x_i, x_j)$ , che descrive quanto le *codeword* siano vicine nel caso peggiore.

**Esempio** Con  $k = 4$  e  $q = 3$  esistono  $2^4 = 16$  *codeword* su  $2^7 = 128$  possibili configurazioni degli  $n = k + q$  bit della *codeword*. Ciò significa che ci sono  $2^3 = 8$  *non-codeword* per ogni *codeword*. Sarebbe bene scegliere le *CW* in modo che si risultino *distanti* l'una dall'altra!

Come discusso al § 8.5.2.1, la capacità di correzione del codice è direttamente legata alla *minima distanza*  $d_m$ , sussistendo le relazioni

- per rivelare  $l$  (o meno) errori per *codeword* occorre  $d_m \geq l + 1$
- per correggere  $t$  (o meno) errori per *codeword* occorre  $d_m \geq 2t + 1$

Un codice è tanto più *potente* quanti più errori è in grado di correggere, e dunque deve possedere  $d_m$  elevato. In un codice a blocchi  $(n, k)$  i  $k$  bit del messaggio originale assumono tutte le configurazioni possibili, e quindi contribuiscono alla distanza tra *codeword* per un solo bit; per ottenere  $d_m > 1$  occorre pertanto sfruttare gli  $n - k = q$  bit di protezione, portando a scrivere

$$d_m \leq q + 1 = n - k + 1$$

che evidenzia la relazione tra  $d_m$  e la quantità di bit aggiunti  $q$ . L'uguaglianza sussiste solo per una particolare classe di codici<sup>49</sup> tra cui il codice a ripetizione, discusso a pag. 229, che adottando una dimensione di blocco in ingresso  $k = 1$  ha però un tasso di codifica  $R_c = k/n = 1/n$  molto inefficiente.

<sup>49</sup>Indicati come codici MDS, vedi [http://en.wikipedia.org/wiki/Singleton\\_bound#MDS\\_codes](http://en.wikipedia.org/wiki/Singleton_bound#MDS_codes).

**Guadagno di codifica  $G_c$**  La distanza  $d_m$  ed il tasso  $R_c$  non possono essere scelti indipendentemente, dato che per aumentare  $d_m$  occorre aumentare i bit di protezione  $q$ , a cui corrisponde una diminuzione del valore di  $R_c$ . Inoltre, il miglioramento in termini di  $P_e$  dovuto ad un codice di canale può essere equiparato a quello corrispondente a un aumento della potenza di segnale, di un fattore pari a

$$G_c^a = d_m R_c \tag{13.44}$$

indicato come *guadagno di codifica asintotico*<sup>50</sup>.

Tale risultato è valido nel caso di *soft-decoding*<sup>51</sup> (pag. 367), ed è descritto come *asintotico* in quanto è valido solo per valori di  $E_b/N_0$  elevati: infatti all'aumentare della potenza di rumore, per qualunque codice e metodo di decisione il valore di  $G_c$  si riduce, fino a divenire inferiore ad uno, quando gli errori sono così numerosi da non poter più essere corretti.

Mostriamo ora delle soluzioni che consentono di ottenere un adeguato potere di correzione, senza per questo aumentare di molto la velocità di trasmissione del flusso codificato.

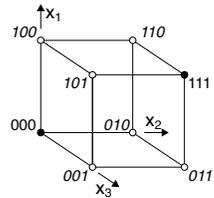
### 13.3.1 Codice lineare a blocchi

Le proprietà di questa classe di codici di canale possono essere meglio analizzate interpretando l'insieme delle possibili codeword da un punto di vista algebrico, ed adottando una notazione matriciale idonea a descrivere la classe di codici *a blocchi*, mentre per i codici *ciclici* (§ 13.3.1.2) interverrà una notazione polinomiale.

Iniziamo ricordando che il *codebook* (§ 8.5.2.1) di un codice a blocchi  $(n, k)$  è composto da sequenze di  $n$  bit indicate come *codeword*  $\mathbf{x}$  espresse mediante un *vettore* ad elementi binari

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)$$

che può assumere solo  $2^k$  diversi valori tra i  $2^n$  possibili, mentre la ricezione di una delle rimanenti  $2^n - 2^k$  combinazioni di bit segnala la presenza di almeno un errore. In figura è riportato l'esempio del codice a ripetizione 3:1 in cui  $k = 1$  ed  $n = 3$  e per il quale le uniche due codeword corrispondono ai vettori  $x_1 x_2 x_3$  pari a 000 ed 111 rappresentati come pallini, mentre i cerchi vuoti indicano gli  $8-2=6$  vettori binari che *non sono* codeword, scritti in *corsivo*.



**Codice lineare** Il codice è detto *lineare* se le  $2^k$  codeword costituiscono uno *spazio lineare* (§ 2.4.2), ovvero se comprendono la codeword nulla, e la somma di due codeword è anch'essa una parola di codice. La somma tra due codeword è definita in base alla matematica binaria *modulo due*, espressa mediante l'operatore di *OR esclusivo*  $\oplus$  bit a bit come

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 \oplus y_1 \quad x_2 \oplus y_2 \quad \dots \quad x_n \oplus y_n) \tag{13.45}$$

Notiamo incidentalmente che, in virtù dell'algebra modulo 2 indotta dall'operatore  $\oplus$ , la somma tra vettori binari produce un nuovo vettore con elementi pari ad uno nelle posizioni in cui essi differiscono, dunque in numero pari alla  $d_H$  tra i vettori.

<sup>50</sup>In altre parole, se  $G_c = 2$  significa che l'adozione del codice permette di conseguire un valore di  $P_e$  pari a quello ottenibile con una trasmissione a potenza doppia, ma non codificata.

<sup>51</sup>Nel caso di decisioni *hard* o bit a bit, si ottiene una espressione del tipo  $G_{c,hard}^a = R_c (t + 1)$ , in cui  $t$  è il numero di bit per parola che il codice è in grado di correggere.

**Distanza  $d_m$  per codici lineari** Definiamo ora *peso*  $w(\mathbf{z})$  di una codeword  $\mathbf{z}$  il numero di *uni* in essa contenuti, ovvero la sua distanza di Hamming rispetto alla cw nulla, cioè  $w(\mathbf{z}) = d_H(\mathbf{z}, \mathbf{0})$ . Per un codice lineare la minima distanza del codice  $d_m$  può essere valutata come il *minimo peso* tra tutte le codeword non zero<sup>52</sup>, ossia

$$d_m = \min_{\mathbf{z} \neq \mathbf{0}} [w(\mathbf{z})]$$

**Codice sistematico e rappresentazione matriciale** Con il termine *sistematico* si intende un codice che ottiene gli  $n$  bit delle codeword  $\mathbf{x}$  concatenando per primi i  $k$  bit da proteggere, indicati con  $\mathbf{m}$ , a cui seguono i  $q = n - k$  bit di protezione, indicati con  $\mathbf{c}$ . Ovvero come abbiamo implicitamente assunto fino ad ora, anche se si tratta di una scelta per nulla scontata. Mostriamo più sotto che un codice sistematico è anche lineare; le sue codeword vengono quindi scritte nella forma

$$\mathbf{x} = (m_1 \ m_2 \ \cdots \ m_k \ c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_q)$$

ovvero come un vettore riga partizionato  $\mathbf{x} = (\mathbf{m} \mid \mathbf{c})$ , in modo da poterlo calcolare a partire dal vettore  $\mathbf{m}$  dei bit da proteggere moltiplicando lo stesso per una *matrice generatrice*<sup>53</sup>  $k \times n$  con struttura generale  $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k \mid \mathbf{P}]$ , in cui  $\mathbf{I}_k$  è una matrice identità  $k \times k$  e  $\mathbf{P}$  è una sotto-matrice di elementi binari  $k \times q$ . Le codeword si ottengono quindi come  $\mathbf{x} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{G}$ , ovvero

$$[m_1 \cdots m_k \ c_1 \cdots c_q] = [m_1 \cdots m_k] \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & p_{11} & \cdots & p_{1q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & p_{k1} & \cdots & p_{kq} \end{bmatrix} \quad (13.46)$$

in modo che  $\mathbf{P}$  produca i  $q$  bit di protezione come  $\mathbf{c} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{P}$ , in cui sono valide le normali regole di moltiplicazione tra matrici, tranne per l'accortezza di usare la *somma modulo due* anziché quella convenzionale. Il valore della (generica)  $j$ -esima ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) componente di  $\mathbf{c}$  si calcola pertanto come

$$c_j = m_1 p_{1j} \oplus m_2 p_{2j} \oplus \cdots \oplus m_k p_{kj}$$

in cui il prodotto tra cifre binarie equivale all'operatore logico di AND. Osserviamo quindi che ciascuna colonna di  $\mathbf{P}$  individua un sotto-insieme di elementi di  $\mathbf{m}$  su cui calcolare una *somma di parità*, fornendo il motivo per cui questo sotto-blocco di matrice  $\mathbf{G}$  è rappresentato dalla lettera  $\mathbf{P}$ . Ma non è ancora stato detto nulla che ci possa aiutare a scegliere i coefficienti  $p_{ij}$  allo scopo di ottenere i valori  $d_m$  e  $R_c$  desiderati: il *codice di Hamming* (§ 13.3.1.1) ci fornisce una possibile soluzione.

<sup>52</sup>Infatti dalla definizione di somma tra cw otteniamo che  $d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  è pari al peso  $w(\mathbf{z})$  della codeword  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ : infatti  $\mathbf{z}$  presenterà componenti  $z_j = 1$  solo in corrispondenza di elementi  $x_j \neq y_j$ . Ma per la linearità anche  $\mathbf{z}$  appartiene al codebook, ovvero sommando tra loro tutte le possibili coppie ottingo l'intero codebook, e dunque la ricerca su tutte le coppie si trasforma in una ricerca su tutte le codeword.

<sup>53</sup>Questa *fantomatica* matrice *generatrice* che cala dall'alto in realtà ha una genesi ben razionale.

Se infatti definiamo una base ortogonale  $\{\mathbf{u}_i\}$  per lo spazio  $k$ -dimensionale descritto da tutti i possibili vettori  $\mathbf{m}$  come i  $k$  vettori con componenti tutte nulle tranne quella in posizione  $i$ -esima e pari ad 1, possiamo allora scrivere un generico vettore  $\mathbf{m}$  con componenti binarie  $m_i$  come una combinazione lineare di vettori della base, ovvero  $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{u}_i$ . Indicando ora con  $\mathbf{g}_i$  la codeword (di  $n$  elementi) associata a ciascun vettore  $\mathbf{u}_i$ , otteniamo che ad un generico vettore  $\mathbf{m}$  è associata la codeword  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{g}_i = \mathbf{m} \cdot \mathbf{G}$ , in cui  $\mathbf{G}$  è la nostra *matrice generatrice* di dimensione  $k \times n$  le cui righe sono pari alle codeword  $\mathbf{g}_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, k$  associate ai vettori della base  $\mathbf{u}_i$ .

**Linearità di un codice sistematico** La linearità di un codebook sistematico può essere verificata qualora riusciamo a mostrare che la somma di due qualunque codeword è ancora una parola del codebook. A tale scopo, dato che la somma modulo due tra vettori binari  $\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{x}_2$  avviene bit per bit (eq. (13.45)), consideriamo le due parti  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{c}$  di una codeword  $\mathbf{x}$  in modo indipendente. Dato che  $\mathbf{m}$  può assumere una qualunque delle  $2^k$  configurazioni possibili, è sempre vero che  $\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2$  appartiene allo stesso insieme. Per quanto riguarda i  $q$  bit di protezione  $\mathbf{c}$ , osserviamo che  $\mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_1 \oplus \mathbf{c}_2 = \mathbf{m}_1 \mathbf{P} \oplus \mathbf{m}_2 \mathbf{P} = (\mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2) \mathbf{P}$ , e dunque  $\mathbf{c}_3$  corrisponde alla protezione di  $\mathbf{m}_3$ , ovvero  $\mathbf{x}_3 = (\mathbf{m}_3 | \mathbf{c}_3)$  è una codeword esistente.

### 13.3.1.1 Codice di Hamming

È un codice a blocchi  $(n, k)$  sistematico e lineare che permette di conseguire un tasso di codifica elevato pur mantenendo un buon potere correttivo. Aggiunge  $q \geq 3$  bit di controllo ai  $k$  bit informativi per formare codeword di lunghezza complessiva

$$n = 2^q - 1$$

ottenendo un tasso di codifica pari a

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{n - q}{n} = 1 - \frac{q}{2^q - 1}$$

$q$	$n$	$k$	$R_c$
3	7	4	0.57
4	15	11	0.73
5	31	26	0.84
6	63	57	0.9
7	127	120	0.94

che aumenta con il crescere di  $q$ , come mostrato in tabella. Le sue codeword si individuano ponendo *le righe* della sottomatrice  $\mathbf{P}$  pari a tutte le parole di  $q$  bit con *due o più* uni, in qualsiasi ordine. Ma la cosa *più simpatica*, è che per un codebook siffatto si ottiene una distanza di Hamming minima  $d_m = 3$ , indipendentemente dalla scelta di  $q$ .

**Esempio:** codice di Hamming  $(7, 4)$ . Corrisponde al caso più semplice di scegliere  $q = 3$ , e quindi  $n = 2^3 - 1 = 7$  e  $k = 7 - 3 = 4$ . Una possibile matrice generatrice è quindi pari a

$$\mathbf{G} = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

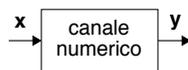
a cui corrispondono le seguenti  $2^4 = 16$  codeword, per ognuna delle quali si è evidenziato il peso  $w(\mathbf{x})$ , confermando che  $d_m = 3$ .

$\mathbf{m}$	$\mathbf{c}$	$w(\mathbf{x})$	$\mathbf{m}$	$\mathbf{c}$	$w(\mathbf{x})$
0000	000	0	1000	101	3
0001	011	3	1001	110	4
0010	110	3	1010	011	4
0011	101	4	1011	000	3
0100	111	4	1100	010	3
0101	100	3	1101	001	4
0110	001	3	1110	100	4
0111	010	4	1111	111	7

Dato che sia  $\mathbf{m}$  che  $\mathbf{c}$  assumono tutte le configurazioni possibili, è verificata la linearità del codice (pag. 363), ossia che la somma di una qualunque coppia di codeword corrisponde ad una terza codeword. Notiamo infine che ognuna della  $2^q = 8$  triplette di protezione  $\mathbf{c}$  viene usata nel codebook per due volte, ma associata a coppie di sequenze  $\mathbf{m}$  da proteggere con valori di distanza di Hamming almeno pari a tre.

**Correzione basata sulla distanza** Indichiamo ora con  $\mathbf{y}$  la parola di codice ricevuta; in presenza di errori, risulta  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ . Il metodo *diretto* per rivelare ed eventualmente correggere gli errori presenti è quello di confrontare gli  $n$  bit ricevuti con tutte le possibili  $2^k$  codeword, e se nessuna di queste risulta uguale ad  $\mathbf{y}$ , scegliere la  $\hat{\mathbf{x}}$  con la minima distanza di Hamming, ossia quella per la quale il peso  $w(\mathbf{y} \oplus \hat{\mathbf{x}})$  è minimo, ovvero

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \{w(\mathbf{y} \oplus \mathbf{x})\}$$



**Correzione basata sulla sindrome** Un metodo che non richiede una ricerca esaustiva si basa invece sul calcolo della cosiddetta *sindrome*, ottenuta mediante moltiplicazione del vettore  $\mathbf{y}$  ricevuto per una matrice  $n \times q$  di *controllo parità*  $\mathbf{H}$ , definita come  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{I}_q \end{bmatrix}$  in cui  $\mathbf{P}$  è la stessa matrice di parità utilizzata nella matrice generatrice  $\mathbf{G}$ , e  $\mathbf{I}_q$  è una matrice identità di dimensioni  $q \times q$ . La matrice  $\mathbf{H}$  esibisce la simpatica proprietà<sup>54</sup> che, se moltiplicata per una qualunque codeword valida, fornisce un vettore *nullo* di dimensione  $q$ , ossia

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{H} = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

Al contrario, se moltiplicata per un vettore  $\mathbf{y}$  non appartenente al codebook, fornisce un vettore detto *sindrome*  $\mathbf{s} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}$  non nullo, e quindi il suo calcolo permette la *rivelazione* (nei limiti consentiti da  $d_m$ ) dell'occorrenza di errori.

**Esempio** considerando di nuovo il caso di  $q = 3$ , la corrispondente matrice di controllo parità  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{I}_q \end{bmatrix}$  è mostrata a lato. E' facile verificare che per tutte le possibili codeword  $\mathbf{x}$  (ad es.  $\mathbf{x} = [0100111]$ ) si ottiene  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{H} = [000]$ . Poniamo ora che si verifichi una sequenza di errore  $\mathbf{e} = [0010010]$ , dando luogo alla ricezione della parola  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{e} = [0110101]$ : per essa si ottiene una sindrome  $\mathbf{s} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H} = [100]$ .

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda la *correzione*, iniziamo scrivendo il vettore ricevuto come  $\mathbf{y} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{e}$ , dove  $\mathbf{e}$  è un vettore di  $n$  bit le cui componenti sono diverse da zero in corrispondenza dei bit errati di  $\mathbf{y}$ . Il calcolo della sindrome fornisce allora

$$\mathbf{s} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H} = (\mathbf{x} \oplus \mathbf{e}) \cdot \mathbf{H} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{H} \oplus \mathbf{e} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}$$

visto che come detto sopra, la sindrome delle codeword è nulla. Ma dato che la sindrome ha dimensione di  $q$  elementi, tutte le  $2^n$  possibili sequenze di errore  $\mathbf{e}$  danno luogo a sole  $2^q$  diverse sindromi, e quindi la conoscenza della sindrome non consente di risalire direttamente a  $\mathbf{e}$ . Osserviamo però che, riprendendo i risultati esposti a pag. 225, la probabilità  $P(m, n)$  che si siano verificati  $m$  errori su  $n$  bit decresce al crescere di  $m$ , e pertanto il vettore  $\hat{\mathbf{e}}$  che con maggior probabilità ha prodotto ognuna delle  $2^q$  sindromi  $\mathbf{s} \neq 0$ , è quello (tra tutti quelli che producono la stessa  $\mathbf{s}$ ) con il minor peso:

$$\hat{\mathbf{e}} = \underset{\mathbf{e}: \mathbf{e} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{s}}{\operatorname{argmin}} \{w(\mathbf{e})\}$$

Osserviamo inoltre che il vettore di errore *più probabile* e con *peso minimo* è quello con *un solo* bit diverso da zero; indichiamo tali  $n$  possibili vettori di errore come  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), qualora solo l' $i$ -esimo bit (di  $n$ ) sia pari ad uno. Accade poi che (per costruzione) che la sindrome

<sup>54</sup>In effetti la simpatia c'entra ben poco, ed  $\mathbf{H}$  è costruita in modo che le sue  $q$  colonne siano *ortogonali* a tutte le  $k$  righe di  $\mathbf{G}$  (oltre che tra loro), individuando così una base di rappresentazione per il *sottospazio* di dimensione  $2^q$  *complemento ortogonale* di quello di dimensione  $2^k$  descritto dalle codeword di lunghezza  $n = k + q$ . La dimostrazione che ho trovato (per provare che per codici sistematici il risultato è quello mostrato nel testo) contiene un errore, e non la cito.

$s_i$  associata ad  $e_i$ , calcolata come  $s_i = e_i \cdot \mathbf{H}$ , corrisponda esattamente all' $i$ -esima riga tra le  $n$  righe di  $\mathbf{H}$ . Pertanto l'indice  $i$  della riga che corrisponde alla sindrome calcolata, identifica l'indice del bit che ha subito errore.

Notiamo infine che se si verificano più errori di quanti  $d_m$  permetta di correggere, è inutile (anzi dannoso) cercare di eseguire la correzione, perché il numero di errori complessivo può risultare ancora più elevato. Nel caso del codice di Hamming in cui  $d_m = 3$  si può correggere un solo errore per codeword, in accordo alla procedura discussa. Se invece  $\mathbf{e}$  contiene *due* errori, la sua moltiplicazione per  $\mathbf{H}$  produce comunque una delle  $2^q$  possibili sindromi, ed il tentativo di correzione produce un vettore  $\hat{\mathbf{x}}$  contenente *tre* errori.

**Esempio** Un gruppo di bit 1001 è protetto dal codice di Hamming di pag. 365 producendo  $\mathbf{x} = 1001110$ , mentre in ricezione si osserva  $\mathbf{y} = 1101110$ . Il calcolo della sindrome  $\mathbf{s} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H}$  fornisce il risultato  $\mathbf{s} = 111$ , che corrisponde alla seconda riga di  $\mathbf{H}$ , ovvero al vettore di errore  $\hat{\mathbf{e}} = 0100000$ , cioè proprio quello che si è verificato. Se invece avvengono *due* errori, e si riceve ad es.  $\mathbf{y} = 1111110$ , si ottiene  $\mathbf{s} = 101$ , a cui corrisponde  $\hat{\mathbf{e}} = 1000000$ , e quindi il calcolo  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} \oplus \hat{\mathbf{e}}$  produce ora  $\hat{\mathbf{x}} = 0111110$ , che appunto contiene tre errori.

**Esercizio** Un flusso binario con codifica di Hamming (31, 26) è affetto da  $P_e = 10^{-4}$ . Determinare la probabilità *residua* di errore *sul bit* dopo decodifica. **Risposta** Osserviamo che in presenza di un solo errore nella codeword questo viene corretto, mentre con due errori la correzione basata sulla sindrome ne sbaglia tre; il caso con più di due errori si considera improbabile, vedi § 8.5.1.1. La prob. di 2 errori su 31 è (eq. (8.24)) pari a  $P(2, 31) \simeq \frac{31 \cdot 30}{2} (P_e)^2 = 4.65 \cdot 10^{-6}$ , e l'evento di errore comporta 3 bit errati su 26 decodificati, dunque la  $P_e^{bit}$  residua si ottiene come  $\frac{3}{26} \cdot 4.65 \cdot 10^{-6} = 5.36 \cdot 10^{-7}$ .

**Errori non indipendenti** Nel caso in cui gli errori *non* siano indipendenti e dunque *non avvengano* in modo isolato nel tempo, ma in sequenza come nel caso del *fast fading* (§ 16.3.4.4), il solo codice di Hamming è del tutto inadeguato alla loro correzione, mentre una soluzione comunemente adottata in tal caso è quella di ricorrere alla tecnica dell'*interleaving* (§ 8.5.2.3) in cui  $m$  codeword di lunghezza  $n$  uscenti dal codificatore sono scritte per righe, e quindi lette per colonne prima di trasmettere il flusso numerico risultante: ciò consente di correggere fino ad  $m$  errori consecutivi, in quanto in ricezione il processo inverso di *de-interleaving* ridistribuisce i bit errati su  $m$  diverse codeword. In alternativa, si possono utilizzare le soluzioni descritte nel seguito.

**Soft decision decoding** Finora la decodifica di canale è stata applicata *a valle* del processo di decisione<sup>55</sup>, in modo da individuare le codeword come quelle con la minima *distanza di Hamming* rispetto al risultato prodotto dal decisore. Se invece le due operazioni sono *fuse* in un unico elemento che opera su interi blocchi di  $n$  campioni  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  prelevati dal segnale ricevuto, e che tenta di individuare le codeword trasmesse come quelle con la minima *distanza euclidea* rispetto a quanto ricevuto<sup>56</sup>, si ottengono prestazioni migliori a spese di una maggior complessità di calcolo. Questa tecnica valuta le distanze  $d_E(\mathbf{y}, \mathbf{x}^j) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i^j)^2$  tra i valori  $y_i$ , effettivamente ricevuti, e quelli che si sarebbero dovuti ricevere nell'ipotesi che fosse stata trasmessa una delle possibili codeword  $\mathbf{x}^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j)$ , decidendo quindi per la

<sup>55</sup>Per questo detta *hard decision decoding* in quanto opera su decisioni già prese.

<sup>56</sup>Tale possibilità è indicata come *soft decision decoding* (decodifica con decisione morbida) in quanto richiede operazioni in virgola mobile; si veda ad es. la spiegazione fornita presso <http://www.gaussianwaves.com/2009/12/hard-and-soft-decision-decoding-2/>.

codeword  $\hat{\mathbf{x}}$  tale che  $d_E(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}})$  è minima<sup>57</sup>. In tal modo si ottengono prestazioni equivalenti a quelle dell'approccio *hard decoding* operante con un  $E_b/N_0$  di circa 2 dB più elevato.

### 13.3.1.2 Codici ciclici

Sono un sottoinsieme dei codici lineari a blocchi, con la condizione aggiuntiva che se  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  è una codeword, lo sono anche tutti i suoi *scorrimenti ciclici*<sup>58</sup>, ovvero le codeword  $\mathbf{x}^{(1)} = (x_2, x_3, \dots, x_1)$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} = (x_3, x_4, \dots, x_2)$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{x}^{(n)} = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ . In tal caso sussistono delle proprietà algebriche aggiuntive che si basano sulla teoria dei *campi di Galois*<sup>59</sup>, i cui elementi sono polinomi  $x(p) = x_1p^{n-1} + x_2p^{n-2} + \dots + x_{n-1}p + x_n$  nella variabile  $p$ , con coefficienti binari definiti a partire dagli elementi delle codeword  $\mathbf{x}$ ; per tale motivo, i codici ciclici sono detti anche codici *polinomiali*<sup>60</sup>: senza volerli addentrare nei particolari della teoria<sup>61</sup>, citiamo direttamente i principali risultati.

Un codice ciclico  $(n, k)$  è completamente definito a partire da un *polinomio generatore*  $g(p) = p^{n-k} + g_2p^{n-k-1} + \dots + g_{n-k}p + 1$  di grado  $n - k$  e che deve risultare un divisore di  $p^n + 1$ , ovvero essere tale che  $p^{n+1}/g(p) = q(p)$  con resto nullo<sup>62</sup>. Una volta definito  $g(p)$ , è possibile ottenere la matrice generatrice  $\mathbf{G}$  del codice in forma *sistemica*  $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k | \mathbf{P}]$ , calcolando le  $k$  righe di  $\mathbf{P}$  come i coefficienti del polinomio *resto* della divisione tra  $p^i$  e  $g(p)$ , con  $i = n - 1, n - 2, \dots, n - k$ .

**Esempio** Troviamo la matrice generatrice in forma sistemica per un codice ciclico  $(7, 4)$ . Osserviamo innanzitutto che  $p^7 + 1$  si fattorizza come  $p^7 + 1 = (p + 1)(p^3 + p^2 + 1)(p^3 + p + 1)$ , e scegliamo  $g(p) = p^3 + p^2 + 1$  come polinomio generatore. Il calcolo di  $p^i/p^3+p^2+1$  per  $i = 6, 5, 4, 3$  fornisce come resti i polinomi  $p^2 + p$ ,  $p + 1$ ,  $p^2 + p + 1$ ,  $p^2 + 1$ , pertanto

$$\text{la matrice generatrice risulta } \mathbf{G} = \left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]. \text{ Osserviamo che, a}$$

parte una permutazione, le righe di  $\mathbf{P}$  sono le stesse di quelle che definiscono il codice di Hamming di pag. 365: infatti, anche quest'ultimo rientra nella classe dei codici ciclici.

D'altra parte nel caso di un codice ciclico le codeword  $\mathbf{x}$  associate ai bit  $\mathbf{m}$  da proteggere possono ottenersi non solo utilizzando  $\mathbf{G}$  come descritto dalla (13.46), ma anche in base alla seguente proprietà: indicando con  $m(p) = m_1p^{k-1} + m_2p^{k-2} + \dots + m_{k-1}p + m_k$  il polinomio associato ai  $k$  bit da codificare, il polinomio associato alla corrispondente codeword  $\mathbf{x}$  si ottiene come il *prodotto*  $x(p) = m(p) \cdot g(p)$ , e quindi gli elementi  $x_i$  della codeword sono individuati come la *convoluzione discreta*<sup>63</sup> tra i coefficienti di  $m(p)$  e  $g(p)$ :  $x_i = \sum_{j=1}^k m_j g_{i-j+1}$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ , operazione che può essere realizzata mediante un filtro FIR con coefficienti dati dai valori  $g_i$ .

Notiamo infine che nel testo si è già incontrato un codice polinomiale (e quindi ciclico) al § 8.5.3.3 a proposito del CRC: i  $q$  bit di protezione possono quindi essere anche ottenuti mediante

<sup>57</sup>Si veda lo sviluppo a pag. 458 per mettere in relazione la distanza  $d_E(\mathbf{y}, \mathbf{x}^j)$  con la verosimiglianza logaritmica  $\ln(p_n(\mathbf{y}|\mathbf{x}^j))$  della v.a.  $n$ -dimensionale  $\mathbf{y}$  rispetto all'ipotesi che sia stata trasmessa la codeword  $\mathbf{x}^j$ , in presenza del rumore gaussiano  $n$  in sede di decisione.

<sup>58</sup>Ad esempio, il codice [000, 110, 101, 011] è un codice ciclico, mentre [000, 010, 101, 111] no. Notiamo che gli scorrimenti della codeword 000, sono la codeword stessa.

<sup>59</sup>[http://it.wikipedia.org/wiki/Campo\\_finito](http://it.wikipedia.org/wiki/Campo_finito)

<sup>60</sup>Si veda [http://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial\\_code](http://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_code)

<sup>61</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Cyclic\\_code](http://en.wikipedia.org/wiki/Cyclic_code)

<sup>62</sup>Si applicano le regole di divisione tra polinomi [http://it.wikipedia.org/wiki/Divisione\\_dei\\_polinomi](http://it.wikipedia.org/wiki/Divisione_dei_polinomi)

<sup>63</sup>Il valore dei coefficienti del polinomio prodotto è indicato anche come *prodotto di Cauchy* (vedi [http://it.wikipedia.org/wiki/Prodotto\\_di\\_Cauchy](http://it.wikipedia.org/wiki/Prodotto_di_Cauchy)), e che si ottenga come una convoluzione è facilmente verificabile: dati ad es.  $a(p) = a_0 + a_1p + a_2p^2$  e  $b(p) = b_0 + b_1p$ , si ottiene  $c(p) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)p + a_2p^2 = \sum_{i=0}^2 p^i \sum_{j=0}^2 a_j b_{i-j}$ . La notazione lievemente diversa del testo, è dovuta al diverso modo di indicizzare i coefficienti.

l'utilizzo di un registro a scorrimento controeazionato<sup>64</sup>, e lo stesso può essere usato anche per il calcolo della sindrome dal lato ricevente.

**Codice BCH** Prende il nome dalle iniziali dei rispettivi inventori, e rappresenta una sottoclasse dei codici ciclici, in grado di correggere fino a  $t < n$  errori: per ottenere questo risultato occorre scegliere un numero di bit di protezione  $q \leq mt$  in cui  $m \geq 3$  è un intero, una lunghezza delle codeword pari a  $n = 2^m - 1$ , ed un polinomio generatore  $g(p)$  di grado massimo  $mt$  le cui radici sono potenze dell'elemento primitivo  $\alpha$  del campo di Galois  $GF(2^m)$ <sup>65</sup>. In tal caso si ottiene  $d_m \geq 2t + 1$ , e la capacità di correggere fino a  $t$  errori. Nel caso in cui  $t = 1$ , si ricade nel caso dei codici di Hamming. La fase di correzione degli errori può essere realizzata mediante il calcolo di una sindrome, per mezzo di una matrice di controllo  $\mathbf{H}$  realizzata a partire dalle potenze dell'elemento primitivo  $\alpha$ , o sfruttando nuovamente proprietà algebriche, che eventualmente si traducono in soluzioni circuitali basate su registri a scorrimento controeazionati. Inoltre, è anche possibile applicare l'algoritmo iterativo di *Berlekamp-Massey*<sup>66</sup>.

**Codice di Reed-Solomon** Si tratta di un sottoinsieme dei codici BCH, caratterizzato<sup>67</sup> da parole di codice ad elementi *non binari* ma bensì  $L$ -ari; scegliendo  $L = 2^k$  si possono mappare  $k$  bit della sequenza informativa  $\mathbf{m}$  in un singolo elemento del codice.

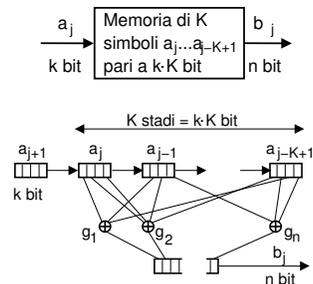
Un codice di *Reed Solomon*  $(N, K)$  pone quindi in corrispondenza  $K$  simboli ad  $L$  livelli prelevati da  $\mathbf{m}$ , in  $N$  simboli ad  $L$  livelli della codeword, che viene poi trasmessa mediante un sistema di modulazione eventualmente anch'esso ad  $L$  livelli. I parametri del codice di Reed-Solomon sono espressi dalle relazioni  $N = L - 1 = 2^k - 1$ ,  $K = 1, 3, \dots, N - 2$  e  $d_m = N - K + 1$ , ed è in grado di correggere fino a  $t = \frac{d_m - 1}{2}$  simboli  $L$ -ari per codeword; il codice è quindi particolarmente indicato nel caso in cui gli errori siano *vicini* tra loro, dato che probabilmente incidono su di un solo simbolo (o due).



### 13.3.2 Codice convoluzionale

Individua un modo di realizzare la codifica di canale che, a differenza dei codici a blocchi, produce una sequenza binaria i cui valori dipendono da gruppi di bit di ingresso *temporalmente sovrapposti*, in analogia all'integrale di convoluzione che fornisce valori che dipendono da *intervalli* dell'ingresso, pesati dai valori della risposta impulsiva. Un generico codice convoluzionale è indicato con la notazione  $CC(n, k, K)$ , che lo descrive capace di generare gruppi di  $n$  bit di uscita (sequenza  $\{b\}$ ) in base alla conoscenza di  $K$  simboli di ingresso (sequenza  $\{a\}$ ), ognuno composto da  $k$  bit.

La memoria dei  $K$  ingressi è usualmente rappresentata mediante un registro a scorrimento che ospita gli ultimi  $K \cdot k$  bit di ingresso, dove per ogni nuovo simbolo  $a_j$  che entra da sinistra, i precedenti scorrono a destra, ed il più "vecchio" viene dimenticato. Ognuno degli  $n$  bit di uscita



<sup>64</sup>Forse ho trovato dove si spiega come faccia un registro a scorrimento controeazionato a svolgere questo genere di compiti: penso che in una prossima edizione sarà interessante aggiungerlo.

<sup>65</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/BCH\\_code](http://en.wikipedia.org/wiki/BCH_code)

<sup>66</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Berlekamp-Massey\\_algorithm](http://en.wikipedia.org/wiki/Berlekamp-Massey_algorithm)

<sup>67</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Reed-Solomon\\_error\\_correction](http://en.wikipedia.org/wiki/Reed-Solomon_error_correction)

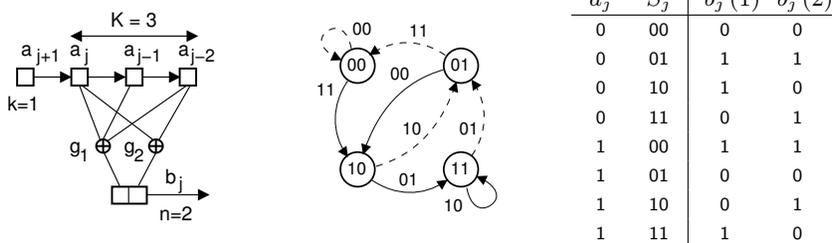


Figura 13.5: Architettura del codice convoluzionale  $CC(2,1,3)$ , diagramma di transizione e tabella della verità.

$b_j(i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  è ottenuto a partire dai  $k \cdot K$  bit di memoria, eseguendo una somma modulo 2 tra alcuni di essi<sup>68</sup>. Resta valido quindi il concetto di *coding rate*  $R_c = \frac{k}{n}$  che rappresenta quanti bit di informazione sono presenti per ogni gruppo di  $n$  bit in uscita dal codificatore.

**Diagramma di transizione** Una volta definito il meccanismo di calcolo di  $b_j$  a partire da  $a_j$ , il codificatore può essere descritto mediante un *diagramma di transizione*, costituito da  $2^{(K-1)k}$  stati  $S$  associati a tutte le possibili combinazioni di bit degli ultimi  $K - 1$  simboli di ingresso; ad ogni stato competono quindi  $2^k$  transizioni, una per ogni possibile nuovo  $a_j$  di ingresso, ed ognuna delle quali termina sul nuovo stato che si è determinato. Ad ogni transizione, è infine associato in modo univoco il gruppo di  $n$  bit  $b_j(a_j, S_j)$  da emettere in uscita<sup>69</sup>.

**Esempio: CC(2,1,3)** Per fissare le idee, consideriamo un codice convoluzionale che produca due bit per ogni bit di ingresso, in funzione dei due bit precedenti, ovvero  $CC(n, k, K) = CC(2, 1, 3)$  con  $g_1 = [1 \ 1 \ 1]$  e  $g_2 = [1 \ 0 \ 1]$ , caratterizzato da un coding rate  $R_c = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$ , e mostrato nella parte sinistra della figura 13.5. A questo corrisponde il diagramma di transizione mostrato al centro, in cui le transizioni tra stati sono tratteggiate o piene, in corrispondenza rispettivamente dei valori  $a_j$  pari a zero o ad uno, e sono etichettate con la coppia di bit in uscita  $b_j$ , calcolabile mediante i vettori generatori  $g_{1,2}$ , come risulta dalla tabella della verità mostrata a destra. Come si può notare, ogni stato ha *solo due* transizioni, e quindi solo *due valori* di uscita (la metà dei 4 possibili con due bit); inoltre, questi valori differiscono in entrambi i bit<sup>70</sup>.

Qualora si ponga in ingresso la sequenza  $\{a\} = \{\dots 010100\}$ <sup>(71)</sup>, è possibile osservare che la sequenza di stati risulta  $\{S\} = \{\dots, 01, 10, 01, 10, 00\}$ , mentre quella di uscita è  $\{b\} = \{\dots, 10, 00, 10, 11\}$ , semplicemente seguendo il diagramma di transizione, a partire dallo stato iniziale 00. D'altra parte, è possibile anche il procedimento opposto: conoscendo  $\{b\}$ , si può risalire ad  $\{a\}$ , percorrendo di nuovo le transizioni etichettate con i simboli  $b_j$ . In definitiva, osserviamo come ad ogni coppia  $(\{a\}, \{b\})$  sia biunivocamente associata una sequenza di stati  $\{S\}$ .

<sup>68</sup>Gli  $n$  modi di scegliere quali dei  $k \cdot K$  bit sommare, per ottenere ognuno degli  $n$  bit di uscita, sono determinati mediante  $n$  vettori generatori  $g_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , di lunghezza  $k \cdot K$ , contenenti una serie di cifre binarie zero od uno, a seconda che l'*i-esimo* sommatore modulo due sia connesso (o meno) al corrispondente bit di memoria.

<sup>69</sup>Lo stesso valore di  $b_j$  potrebbe essere prodotto da più di una delle  $2^{k \cdot K}$  diverse memorie del codificatore.

<sup>70</sup>La dipendenza di  $b_j$  da  $(a_j, S_j)$  è legata alla scelta dei generatori  $g_i$ . Nel caso in cui un valore  $b_j(i)$  sia sempre uguale ad uno dei  $k$  bit di  $a_j$ , il codice è detto *sistematico*. La scelta dei  $g_i$  può essere effettuata mediante simulazioni numeriche, per individuare l'insieme che determina le migliori prestazioni.

<sup>71</sup>Per comodità di rappresentazione, il bit più a destra nella sequenza  $\{a\}$  è il primo in ordine di tempo ad entrare nel codificatore.

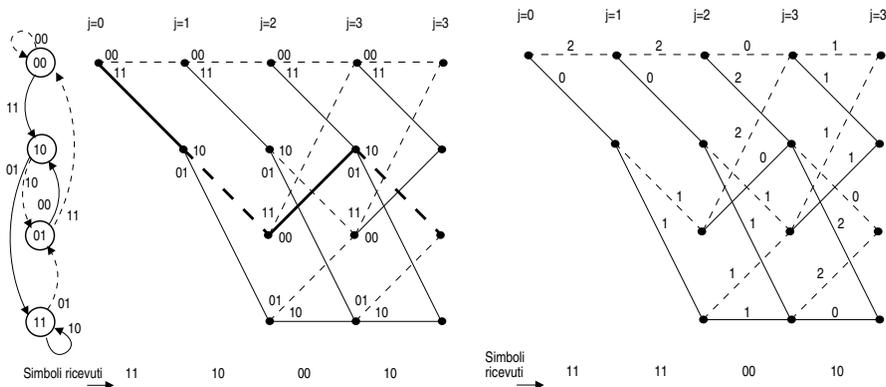
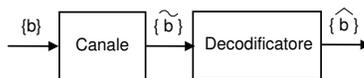


Figura 13.6: Diagramma a traliccio e costi  $d_H$  per la sequenza ricevuta

**Diagramma a traliccio** Per meglio visualizzare le possibili sequenze di stati, costruiamo il *diagramma a traliccio* (TRELLIS) del codificatore, mostrato a sinistra di fig. 13.6 riportando sulle colonne i possibili stati attraversati ai diversi istanti  $j$ , collegando i *nod*i del traliccio con transizioni piene o tratteggiate nei casi in cui siano relative ad ingressi pari ad 1 o 0, e riportando sulle transizioni stesse i valori di uscita. Con riferimento alla sequenza *codificata*  $\{b\}$  riportata in basso, l'effettiva successione di stati  $\{S\}$  è rappresentata dalle linee più spesse.

**Decodifica di Viterbi** Consideriamo ora il caso in cui la sequenza codificata  $\{b\}$  venga trasmessa su di un canale, e che sia ricevuta *con errori*. In generale, non sarà più possibile rintracciare una sequenza di stati tale da produrre *esattamente* la sequenza ricevuta  $\{\tilde{b}\}$ , ed il problema diviene quello di individuare la sequenza di stati  $\{S\}$  tale da produrre una  $\{\hat{b}\}$  la più vicina possibile a  $\{\tilde{b}\}$ . Allo scopo di misurare questa differenza, utilizziamo la *distanza di Hamming*  $d_H(\hat{b}, \tilde{b})$  che rappresenta il numero di bit diversi tra  $\{\tilde{b}\}$  e le possibili  $\{\hat{b}\}$ <sup>72</sup>, e etichettiamo gli archi del traliccio con le  $d_H(\hat{b}_j, \tilde{b}_j)$  tra il simbolo da emettere  $\hat{b}_j$  e quello osservato in ricezione  $\tilde{b}_j$  (vedi lato destro di fig. 13.6). In tal modo, per ogni particolare sequenza di stati  $\{S\}$  è possibile determinare un *costo* pari alla somma delle  $d_H(\hat{b}_j, \tilde{b}_j)$  relative alle transizioni attraversate dal traliccio<sup>73</sup>. Pertanto, la sequenza  $\{\hat{b}\}$  più vicina a  $\{\tilde{b}\}$ , ossia tale che



$$d_H(\hat{b}, \tilde{b}) = \min_{\{S\}} \left\{ \sum_j d_H(b_j, \tilde{b}_j) \right\}$$

può essere individuata come quella associata alla sequenza di stati  $\{\hat{S}\}$  di *minimo costo*<sup>74</sup>.

Dato che da ogni stato si dipartono  $2^k$  archi, ad ogni istante il numero di percorsi alternativi aumenta di un fattore  $2^k$ , crescendo molto velocemente all'aumentare di  $j$ . L'enumerazione

<sup>72</sup>Questo caso viene indicato con il termine *hard-decision decoding* in quanto il ricevitore *ha già* operato una decisione (quantizzazione) rispetto a  $\tilde{b}$ . Al contrario, se i valori ricevuti sono passati *come sono* al decodificatore di Viterbi, questo può correttamente valutare le probabilità  $p(\tilde{b}/\hat{b})$  ed operare in modalità *soft decoding*, conseguendo prestazioni migliori.

<sup>73</sup>Ad esempio, con riferimento alla fig. 13.6, la  $\{S\} = \{00, 10, 11, 01, 10\}$  ha un *costo* pari a 3.

<sup>74</sup>Qualora la distanza tra  $\tilde{b}_j$  ed un possibile  $\hat{b}_j$  sia espressa come probabilità condizionata  $p(\tilde{b}_j/\hat{b}_j)$ , il processo di decodifica è detto di *massima verosimiglianza*.

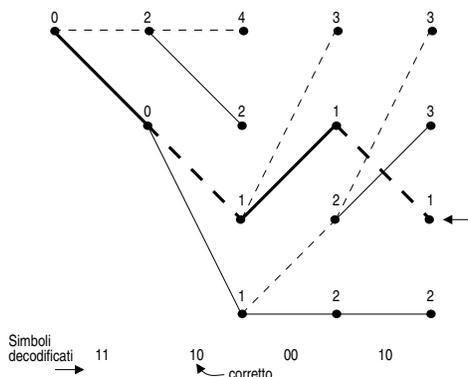


Figura 13.7: Decodifica di Viterbi come percorso di minimo costo

*completa* dei percorsi può essere però evitata, notando che quando due percorsi con costi diversi si incontrano in uno stesso nodo, quello di costo *maggiore* sicuramente *non* è la parte iniziale del percorso di minimo costo, e quindi può essere eliminato.

Questa filosofia si applica al caso in questione con riferimento alla figura 13.7, che mostra come il calcolo dei *costi parziali* avvenga *per colonne* da sinistra a destra, scrivendo sopra ad ogni nodo il costo del *miglior* percorso che lo raggiunge. Ad ogni colonna sono scartati i percorsi che si incontrano con uno migliore, cosicché il numero di percorsi *sopravvissuti* è sempre pari al numero di stati  $2^{(K-1)k}$ .

Una freccia posta all'estremità destra della figura indica la minima  $d_H(\hat{b}, \tilde{b})$ , associata al percorso a tratto spesso, e che permette di individuare la  $\{\tilde{b}\}$ , che come si vede è *quella esatta*.

Tralasciamo ora di approfondire la teoria che consente l'analisi dettagliata dell'algoritmo, e ci limitiamo alle seguenti

## Riflessioni

- l'esempio fornito si mostra in grado di correggere un errore pur impiegando un coding rate pari ad  $\frac{1}{2}$ , migliore (ad es.) di quello ( $\frac{1}{3}$ ) del codice a ripetizione;
- la  $d_H$  del miglior percorso corrisponde al numero di bit errati (nel caso in cui siano stati corretti) nella  $\tilde{b}$  ricevuta;
- si verifica errore (cioè  $\{\tilde{b}\} \neq \{b\}$ ) se esiste una  $\hat{b} \neq b$  tale che  $d_H(\hat{b}, \tilde{b})$  è *minore* di  $d_H(b, \tilde{b})$ ;
- le capacità di correzione del codice migliorano aumentando la  $d_H$  tra le possibili sequenze  $\{b\}$ <sup>75</sup>;
- la  $d_H$  tra diverse  $\{b\}$  aumenta con  $\frac{K}{k}$ , in quanto la matrice di transizione tra stati diviene più sparsa, ed i valori di  $\{b\}$  sono più interdipendenti;
- se il miglioramento di cui sopra è ottenuto aumentando  $K$ , ciò equivale ad estendere nel tempo la memoria del codificatore, ma senza per questo alterare il tasso di codifica  $R_c = \frac{k}{n}$ .

<sup>75</sup>La minima distanza tra le sequenze codificate è indicata come  $d_{min}$ , e può essere trovata come la  $d_H$  tra una  $\{b^0\}$  tutta nulla ( $\{b^0\} = \{\dots 00000000\}$ ) e quella con il minor numero di uni, che si diparte e ritorna (nel traliccio) dallo stato 00.

## **Parte II**

# **Trasmissione dei segnali**



## Prefazione alla seconda parte

**D**opo che nella prima parte si è affrontato lo studio dei segnali, sia di banda base che modulati, sono stati esaminati gli effetti prodotti sugli stessi dai sistemi lineari e dai disturbi additivi, si sono illustrate le tecniche della trasmissione numerica di banda base, e sono stati approfonditi i temi della teoria dell'informazione e della codifica di canale, ci occupiamo ora delle modalità necessarie a *trasmettere* le informazioni impresse sul segnale.

Nel capitolo 14 le tecniche di modulazione studiate nei capp. 9 e 10 vengono applicate ai segnali numerici, *dando vita* ad una vera e propria *famiglia* di tecniche, impiegate per assolvere alle comuni necessità quotidiane, dal modem ADSL alla televisione, dalla telefonia cellulare al WiFi.

Il capitolo 15 sviluppa tre argomenti che, anche se *marginali* rispetto alla trasmissione dei segnali, sono profondamente legati agli aspetti *fisici* che la caratterizzano: innanzi tutto viene svolta una analisi degli effetti che i *circuiti elettrici* producono sui segnali in transito; quindi, viene descritta la modalità con cui tenere conto del *rumore* introdotto dagli apparati, compreso il caso dei collegamenti sviluppati mediante una catena di ripetitori; infine, si affronta in modo abbastanza approfondito il tema della *equalizzazione*, ovvero come ovviare agli effetti di distorsione lineare eventualmente introdotta da un canale.

La caratterizzazione dei mezzi fisici di trasmissione, ovvero il cavo in rame, il canale radio e la fibra ottica, viene svolta al cap. 16, ponendola nel contesto del *bilancio di collegamento*, ovvero della valutazione della potenza necessaria a coprire una determinata distanza<sup>76</sup>. Nel caso del canale radio, viene approfondito lo studio delle particolarità che rendono le trasmissioni mobili una sorta di palestra, in cui le basi teoriche discusse nella prima parte dispiegano tutta la loro versatilità, consentendo di ottenere un modello concettuale dei fenomeni, e volgerli a vantaggio dell'esigenza trasmissiva.

---

<sup>76</sup>O equivalentemente, della distanza che è possibile coprire conoscendo la potenza trasmessa, e quella che è necessario ricevere.

## Modulazione numerica

**S**ONO qui discusse le tecniche adottate qualora il segnale da trasmettere in forma modulata non sia analogico, ma costituito da una sequenza numerica, o simbolica. Il contesto applicativo può variare su un ampio ventaglio di casi, come le forme di broadcast digitale (terrestre o satellitare), le reti di accesso WIFI o di telefonia cellulare, i modem e l'ADSL, le comunicazioni satellitari dallo spazio profondo, i ponti radio numerici per flussi dati ottenuti come moltiplicazione temporale di più sorgenti, di tipo multimediale e/o provenienti da reti a pacchetto... in pratica, la gran parte delle comunicazioni dati che *non* viaggiano su fibra ottica.

In tutti questi casi ci si trova in presenza di un canale trasmissivo di tipo *passa-banda*, quindi inadatto a trasportare un segnale dati realizzato mediante codici di linea di *banda base* (vedi § 8.2), e dunque è necessario produrre un segnale modulato (vedi cap. 9) per trasportare la banda del segnale in accordo ai vincoli imposti dal canale. Ora non vengono però semplicemente applicate le tecniche esposte al cap. 10, ma queste vengono rese specifiche alla caratteristica del segnale dati di essere costituito da sequenze di simboli appartenenti ad un alfabeto finito, da mappare (agli istanti di simbolo) su un insieme finito di punti nello spazio, che per segnali modulati è lo spazio dell'involuppo complesso.

### 14.1 Modulazione di ampiezza

In questo caso l'informazione numerica è impressa sulla portante alterando le ampiezze di una (o entrambe, come mostrato al § 14.3) delle componenti analogiche di bassa frequenza.

#### 14.1.1 Modulazione BPSK

È l'acronimo di *Bi-Phase Shift Keying*<sup>1</sup>, e individua una tecnica per il trasporto dell'informazione basata sull'utilizzo di 2 possibili fasi per la portante:

$$x_{BPSK}(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad \text{dove} \quad \varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k \text{rect}_{T_b}(t - kT_b) \quad (14.1)$$

con i valori  $\varphi_k$  pari a  $\pm \frac{\pi}{2}$  per rappresentare le cifre binarie 0 ed 1 trasmesse agli istanti  $kT_b$ . Sebbene l'operazione così definita corrisponda ad una modulazione di fase (§ 10.3), è facile mostrare come possa essere realizzata mediante una comune modulazione di ampiezza BLD-PS (§ 10.1.1) con segnalazione antipodale (§ 6.8.1). Se definiamo infatti un segnale  $m(t)$  come un

<sup>1</sup>Letteralmente, *slittamento di tasto a due fasi*.

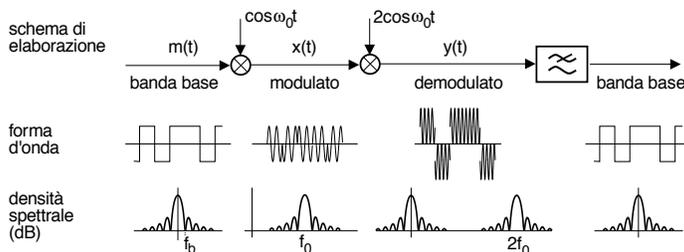


Figura 14.1: Architettura di mo-demodulazione BPSK, forme d'onda, e densità spettrali

codice di linea NRZ bipolare (§ 8.2.1), che assume valori  $\pm 1$  in corrispondenza delle cifre binarie 0 ed 1, allora il segnale

$$x_{BPSK}(t) = m(t) \cos \omega_0 t$$

è equivalente a quelle espresso dalla (14.1), e la sua mo-demodulazione coerente avviene mediante l'architettura mostrata alla fig. 14.1. Il segnale uscente dal moltiplicatore di demodulazione<sup>2</sup> ha espressione

$$y(t) = x(t) \cdot 2 \cos \omega_0 t = 2m(t) \cdot \cos^2 \omega_0 t = m(t) + m(t) \cdot \cos 2\omega_0 t$$

e dunque il codice di linea  $m(t)$  può essere riottenuto mediante filtraggio passa-basso. La parte centrale di fig. 14.1 mostra la *forma d'onda* che corrisponde alle elaborazioni previste, mentre nella parte inferiore sono raffigurate le densità spettrali corrispondenti (esprese in dB, vedi § 7.1), tenendo conto<sup>3</sup> di eq. (8.2), di fig. 3.5, e della mo-demodulazione BLD-PS (§ 10.1.1.1).

Una buona caratteristica di questa tecnica è l'andamento *costante* dell'ampiezza della portante modulata, che permette di utilizzare la massima potenza del trasmettitore, appena inferiore al valore che inizia a produrre fenomeni di distorsione (§ 7.3). L'aspetto negativo è l'elevata occupazione di banda, legata all'uso di forme d'onda rettangolari per  $m(t)$  che, nel caso di trasmissione su canali con limitazioni di banda, causa vincoli sulla massima frequenza binaria. Per questi motivi, il metodo è particolarmente indicato nel caso di collegamenti in cui la potenza di trasmissione è limitata, ma non la banda<sup>4</sup>.

**Alternative per l'impulso di banda base  $g(t)$**  Riprendendo i concetti discussi al § 8.2, in questo capitolo il segnale dati di *banda base* (ovvero pre-modulazione) è realizzato mediante una delle seguenti possibilità di scelta per  $g(t)$ :

- impulso NRZ o rettangolare (pag. 205), che determina una occupazione di banda multipla di  $f_b = 1/T_b$ ;
- impulso con trasformata a coseno rialzato (§ 8.2.2.3), che occupa una banda pari a  $\frac{f_s}{2} (1 + \gamma)$ ;
- impulso a banda minima (pag. 211), che riduce l'occupazione di frequenza ad  $\frac{f_s}{2}$ , ma presenta difficoltà realizzative.

<sup>2</sup>Qui e nel seguito assumiamo di disporre di una portante di demodulazione omodina o coerente (§ 10.2.1), ossia priva di errori di fase e frequenza, così come di una perfetta temporizzazione di simbolo; le considerazioni al riguardo di quest'ultimo aspetto sono svolte all'appendice 14.11.

<sup>3</sup>Il segnale di banda base  $m(t) = \sum_k a_k \cdot g(t - kT_b)$  in cui  $g(t) = \text{rect}_{T_b}(t)$  ed i simboli  $a_k$  sono a media nulla ed indipendenti, ha una densità di potenza  $\mathcal{P}_m(f) = \frac{\sigma_A^2}{T_b} \text{sinc}^2(fT_b)$ , il cui andamento è mostrato in fig. 3.5 di pag. 69.

<sup>4</sup>Come ad esempio i collegamenti satellitari, vedi § 20.3.

Gli aspetti prima evidenziati per il BPSK sono quindi *sovvertiti* qualora il segnale  $m(t)$  sia generato utilizzando forme d'onda  $g(t)$  con occupazione di banda limitata, come nel caso del coseno rialzato, per il quale la banda occupata a frequenze positive risulta pari a  $B_{BPSK} = f_b(1 + \gamma)$ , doppia rispetto al caso di banda base, a causa della modulazione BLD, mentre l'ampiezza del segnale modulato *non è più costante*. Infatti, in corrispondenza degli istanti  $kT_b$  l'ampiezza di  $x_{BPSK}(t)$  assume esattamente uno dei valori ( $\pm 1$ ) del segnale dati  $m(t)$ , ma nell'intervallo tra due istanti  $kT_b < t < (k + 1)T_b$  l'ampiezza dipende della somma di tutte le *code* delle funzioni  $g(t)$  relative ai simboli trasmessi (vedi fig. 8.7 a pag. 212).

### 14.1.2 Modulazione L-ASK

Ci riferiamo ora al caso in cui si operi una classica AM-BLD (da cui il termine *Amplitude Shift Keying* - ASK) a partire da un segnale dati  $m(t)$  multilivello (§ 8.1.2.4), producendo un segnale modulato di espressione

$$x_{L-ASK}(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{dove} \quad m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \text{rect}_{T_s}(t - kT_s)$$

in cui  $m(t)$  agli istanti  $kT_s$  assume valori  $a_k$  distribuiti uniformemente, in un intervallo  $\Delta$ , su  $L$  livelli di ampiezza centrati sullo zero<sup>5</sup>.

L'ampiezza di L-ASK subisce dunque variazioni, come mostrato nella figura soprastante per un caso con  $L = 8$ , in cui è rappresentato anche un diagramma detto



*costellazione*, che rappresenta i valori assunti dall'involuppo complesso in corrispondenza degli istanti di simbolo, che in virtù della AM-BLD presenta la sola c.a. di b.f.  $x_c(t)$ . Ogni  $a_k$  rappresenta dunque  $M = \log_2 L$  bit, ed il periodo di simbolo  $T_s = MT_b$  ha durata multipla di  $T_b$ , pertanto la banda occupata da L-ASK è *minore* rispetto a quella del BPSK di un fattore pari a  $M = \log_2 L$ <sup>6</sup>.

Anche in questo caso, se  $m(t)$  è generato mediante un impulso a coseno rialzato anziché con uno NRZ<sup>7</sup>, la densità spettrale assume il noto andamento (vedi pag. 211) riportato ora in figura 14.2, assieme ai corrispettivi valori in dB. Pertanto la banda a frequenze positive occupata da  $x_{L-ASK}(t)$  con  $g(t)$  a coseno rialzato vale

$$B_{L-ASK} = f_s(1 + \gamma) = \frac{f_b}{\log_2 L}(1 + \gamma) \quad (14.2)$$

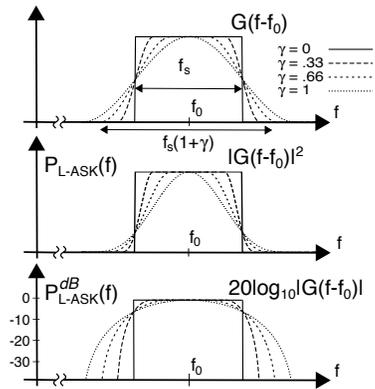
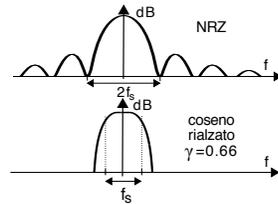


Figura 14.2: Densità spettrale L-ASK in diverse unità di misura

<sup>5</sup>Per chi si sta chiedendo quanto valgono questi livelli, diciamo che il livello  $i$ -esimo (con  $i = 0, 1, \dots, L - 1$ ) corrisponde al valore  $a^i = i \cdot \frac{\Delta}{L-1} - 1$ . Verificare per esercizio con  $\Delta = 2$  ed  $L = 4$ .

<sup>6</sup>Ad esempio: se  $L = 32$  livelli, la banda si riduce di 5 volte, ed infatti con  $M = 5$  bit si individuano  $L = 2^M = 32$  configurazioni. Dato che il numero  $M$  di bit/simbolo deve risultare un intero, si ottiene che i valori validi di  $L$  sono le potenze di 2.

<sup>7</sup>Notiamo che mentre per il BPSK scegliere il primo al posto del secondo comporta perdere i benefici di una ampiezza costante, nel caso multilivello l'ampiezza è intrinsecamente variabile.

**Efficienza spettrale o densità di informazione** E' definita come il rapporto  $\rho$  tra la frequenza binaria e la banda occupata

$$\rho = \frac{f_b}{B} \quad (14.3)$$

e si esprime in *bit/sec/Hz*, rappresentando appunto quanti bit/sec sono trasmessi per ogni Hz utilizzato. Nel caso di L-ASK con impulsi a banda minima ( $\gamma = 0$ ) si trova allora

$$\rho_{L-ASK} = \frac{f_b}{B} = \log_2 L \quad (14.4)$$

mentre per altre forme di modulazione e/o di impulsi si ottengono altri valori<sup>8</sup>, confrontando i quali si valuta la bontà di un metodo rispetto all'altro nei termini dell'utilizzo di banda. Ad esempio, se compariamo il risultato per  $\rho_{L-ASK}$  con quello relativo ad una trasmissione numerica di banda base (vedi eq. (8.20)), notiamo un *peggioramento* di un fattore 2, dovuto all'uso di una AM-BLD. Come per il caso analogico, la banda potrebbe essere dimezzata adottando una AM-BLU, ma vedremo invece tra breve che si preferisce seguire approcci diversi, come ad esempio PSK e QAM.

### 14.1.3 Valutazione delle prestazioni

**SNR,  $E_b/N_0$  ed efficienza spettrale** Nell'analisi delle prestazioni delle tecniche di modulazione numerica che affronteremo, la probabilità di errore per simbolo  $P_e$  (*simbolo*) o per bit  $P_e$  (*bit*) sarà espressa in funzione della grandezza  $\frac{E_b}{N_0}$ , introdotta a pag. 217, che rappresenta l'equivalente del rapporto segnale rumore di riferimento  $SNR_0 = \frac{P_x}{N_0 W}$  definito al § 11.2.1.1<sup>9</sup>, nel senso che come questo, consente il confronto tra tecniche diverse<sup>10</sup>.

D'altra parte, una trasmissione AM-BLD numerica che occupi una banda a frequenze positive  $B$  si presenta in ingresso al decisore con un

$$SNR = \frac{P_x}{P_n} = \frac{E_b f_b}{2B \cdot N_0/2} = \frac{E_b}{N_0} \frac{f_b}{B} = \rho \frac{E_b}{N_0} \quad (14.5)$$

in cui  $P_n$  è limitata da un filtro di ricezione, e  $\rho$  è l'efficienza spettrale definita alla (14.3); pertanto  $\frac{E_b}{N_0}$  è anche indicato come *SNR normalizzato* o *SNR per bit*. Nel caso di  $g(t)$  a banda minima (§ 8.2.2.3) la (14.4) fornisce  $\rho_{L-ASK} = \log_2 L$  e dunque  $SNR = \log_2 L \frac{E_b}{N_0}$ , mentre a pag. 217, eq. (8.16), si deriva la relazione tra  $\frac{E_b}{N_0}$  e  $SNR$  per il caso particolare di un segnale dati a coseno rialzato.

Invertendo la (14.5) si ottiene  $\frac{E_b}{N_0} = \frac{SNR}{\rho}$ , che evidenzia come, a parità di  $SNR$ , al miglioramento dell'efficienza spettrale corrisponda una diminuzione di  $\frac{E_b}{N_0}$ , che a sua volta è causa di un peggioramento della probabilità di errore, in accordo con il *compromesso banda-potenza*, vedi § 8.4.7.

**Probabilità di errore BPSK e L-ASK** Viene calcolata per un segnale L-ASK in funzione di  $E_b/N_0$ , al variare del numero di livelli, ottenendo il caso BPSK per  $L = 2$ .

Al § 14.1.2 abbiamo osservato come l'L-ASK sia ottenibile mediante una modulazione AM-BLD di un segnale dati di banda base (vedi anche fig. 14.3), e come discusso al § 11.2.1.1, l' $SNR$

<sup>8</sup>Vedi tabella 14.1 a pag. 399.

<sup>9</sup>Ricordiamo che  $P_x$  esprime la potenza ricevuta,  $N_0$  rappresenta il doppio della  $P_n(f)$  presente al decisore, e  $W$  è la banda del segnale modulante.

<sup>10</sup>Infatti come discusso a pag. 217  $E_b = \frac{P_x}{f_b}$ , come  $N_0$ , dipende solamente da *parametri di sistema* ( $P_x$  e  $f_b$ ), mentre invece non dipende dai *parametri di trasmissione*  $L$  e  $\gamma$  e dal tipo di modulazione.

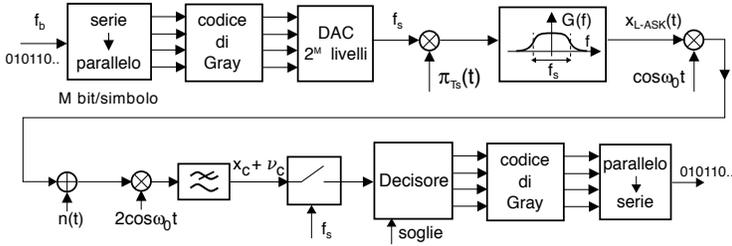


Figura 14.3: Schema di mo-demodulazione per un segnale L-ASK

in uscita dal filtro di ricezione (e dunque  $E_b/N_0$ , vedi eq. (14.5)) per una modulazione AM-BLD è pari al rapporto  $SNR_0$  tra potenza ricevuta e potenza di rumore nella banda del segnale *modulante*. Pertanto, l' $SNR$  (e  $E_b/N_0$ ) dopo demodulazione di L-ASK è pari a quello che si avrebbe per il segnale dati di banda base da cui ha origine. Le prestazioni per un segnale dati di banda base a coseno rialzato sono ricavate al § 8.4.9, che riportiamo quindi di seguito come probabilità di errore *per simbolo* dell'L-ASK<sup>11</sup>

$$P_e^{L-ASK}(\text{simbolo}) = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{3 \frac{E_b}{N_0} \frac{\log_2 L}{L^2 - 1}} \right\} \quad (14.6)$$

che è valida per un segnale con  $\gamma = 0$ , ossia a *banda minima*<sup>12</sup>. Le curve di  $P_e^{L-ASK}(\text{bit})$  in funzione di  $\left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{dB}$  sono quelle di fig. 8.10 a pag. 222, dove si tiene anche conto dell'uso di un codice di Gray (§ 8.4.9.1) per associare i livelli a configurazioni binarie.

Come anticipato, per  $L = 2$  la (14.6) esprime le prestazioni del BPSK, ovvero

$$P_e^{BPSK}(\text{bit}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\} \quad (14.7)$$

che come prima si riferisce al caso di banda minima, ed i cui valori sono graficati in fig. 14.4, identica alla (8.18) ottenuta per il caso di banda base, ed alla (6.38) relativa al filtro adattato.

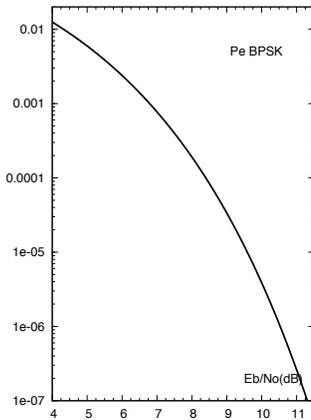


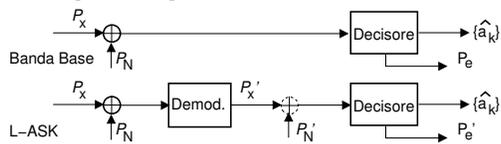
Figura 14.4: Prestazioni BPSK

<sup>11</sup>Forniamo qui una contro-dimostrazione forse inutilmente elaborata. Con riferimento alla figura seguente, il calcolo della  $P_e$  per l'L-ASK si imposta definendo valori di  $E_b$  ed  $N_0$  equivalenti a quelli

di banda base, ma ottenuti dopo demodulazione, e cioè  $E'_b = P'_x T_b$  e  $N'_0 = P'_N / W$  (infatti,  $P'_N = \frac{N'_0}{2} 2W$ , con  $W = \frac{f_s}{2} = \frac{f_b}{2 \log_2 L}$ ). L'equivalenza è presto fatta, una volta tarato il demodulatore in modo che produca in uscita la componente in fase  $x_c(t)$  limitata in banda tra  $\pm W$ .

Infatti in tal caso (vedi § 11.2.1)  $P'_x = P_{xc} = k_a^2 P_M = 2P_x$  e quindi  $E'_b = P'_x T_s = 2P_x T_s = 2E_b$ ; per il rumore si ottiene  $N'_0 = \frac{P'_N}{W}$  in cui  $P'_N = P_{nc} = \sigma_{nc}^2 = \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} 4W$  e quindi  $N'_0 = 2N_0$ . Pertanto, il valore  $E'_b/N'_0$  su cui si basa ora il decisore è lo stesso  $E_b/N_0$  in ingresso al demodulatore.

<sup>12</sup>Se  $\gamma \neq 0$ , valgono le considerazioni svolte al § 8.4.9.



Per completare i confronti, osserviamo che ora all'aumentare di  $L$  la banda (14.2) (per  $\gamma = 0$ )

$$B_{L-ASK} = f_s = \frac{f_b}{\log_2 L}$$

si riduce, mentre la  $P_e$  (14.6) aumenta: ciò può tornare utile in presenza di canali con limitazioni di banda ma non di potenza, dato che in tal caso la  $P_e$  può essere ripristinata aumentando la potenza e quindi  $E_b/N_0$ , in base al cosiddetto *compromesso banda-potenza*. Al § 14.5.1 vedremo come nella tecnica di FSK ortogonale lo stesso compromesso operi in direzione opposta, ovvero riuscendo a migliorare  $P_e$  al prezzo di aumentare l'occupazione di banda.

## 14.2 Modulazione di fase

Prendiamo ora in esame il caso in cui l'informazione viene rappresentata dalla fase della portante.

### 14.2.1 Modulazione QPSK ed L-PSK

Questi due acronimi si riferiscono alla possibilità di usare rispettivamente *quattro* oppure  $L > 4$  scelte diverse<sup>13</sup> per la fase, dando luogo ad un segnale modulato con espressione

$$x_{L-PSK}(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

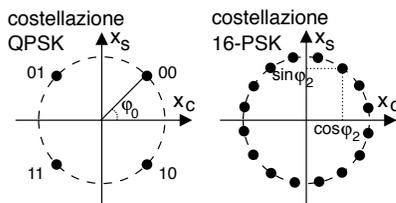
e quindi un inviluppo complesso

$$\underline{x}_{L-PSK}(t) = ae^{j\varphi(t)} = a \cos \varphi(t) + ja \sin \varphi(t) \quad (14.8)$$

in cui

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k \text{rect}_{T_s}(t - kT_s) \quad \text{e} \quad \varphi_k \in \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{L-1}\} \quad (14.9)$$

La generica fase  $\varphi_i = \frac{\pi}{L} + i \cdot \frac{2\pi}{L}$  con  $i = 0, 1, \dots, L-1$  rappresenta una delle  $L = 2^M$  possibili combinazioni di  $M$  bit di ingresso, e corrisponde ad uno dei punti mostrati nelle *costellazioni* di figura, che individuano il valore dell'inviluppo complesso ricevuto in assenza di rumore negli istanti di simbolo  $t = kT_s$  ed a cui si fanno corrispondere gruppi di bit in accordo alla codifica di Gray (§ 8.4.9.1). Lo stesso valore di fase è quindi mantenuto per tutto il periodo di simbolo se  $\varphi(t)$  è realizzata mediante rettangoli come indicato nella (14.9). Ma l'espressione (14.8) di  $\underline{x}_{L-PSK}(t)$  in termini di  $\{x_c, x_s\}$  evidenzia come il risultato sia ottenibile mediante una modulazione AM in fase e quadratura<sup>14</sup>, suggerendo l'implementazione del modulatore secondo lo schema di fig. 14.5, in cui i valori di  $\cos \varphi_i$  e  $\sin \varphi_i$  per gli  $L$  diversi gruppi di  $M$  bit sono precalcolati in una memoria a sola lettura, ed impiegati come ampiezze per realizzare due segnali dati di banda base, usati quindi come c.a di b.f. per il modulatore in fase e quadratura.



**Occupazione di banda** L'uso di un codice NRZ per  $\varphi(t)$ , e quindi per  $x_c$  ed  $x_s$ , produce una occupazione di banda elevata per  $x_{L-PSK}(t)$ , la cui densità di potenza in tal caso

<sup>13</sup>Il caso in cui  $L = 2$  ricade nel BPSK già discusso

<sup>14</sup>che non è una modulazione AM-BLU dato che  $x_s \neq \hat{x}_c$

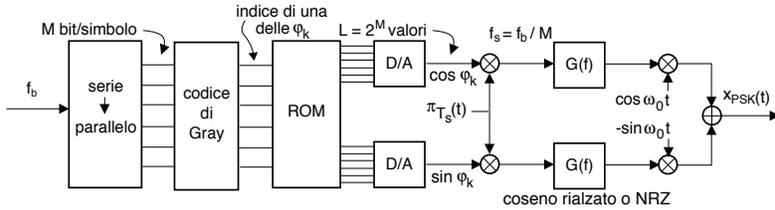


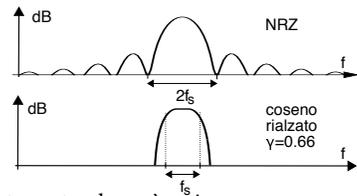
Figura 14.5: Modulatore L-PSK

acquisisce un andamento  $(\frac{\sin x}{x})^2$  centrato in  $f_0$  e con lobo principale di estensione<sup>15</sup> pari ad  $2f_s = 2f_b/M$ , come rappresentato in figura per una densità di potenza in dB. L'occupazione di banda può essere limitata a

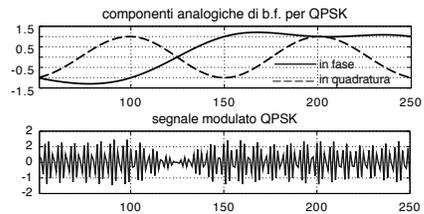
$$B_{L-PSK} = f_s (1 + \gamma)$$

se si realizza  $\varphi(t)$  mediante impulsi  $g(t)$  a coseno rialzato, potendo così scrivere

$$\underline{x}_{L-PSK}(t) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\varphi_k} \cdot g(t - kT_s) \tag{14.10}$$



**Dinamica delle ampiezze** Adottando un impulso  $g(t)$  a coseno rialzato anziché rettangolare,  $\underline{x}(t)$  passa dai punti della costellazione *solo* negli istanti di simbolo, mentre nell'intervallo tra due di essi segue traiettorie con ampiezza variabile<sup>16</sup>, come illustrato nella figura a fianco, non permettendo al segnale modulato di rispettare la proprietà di ampiezza costante che una modulazione angolare dovrebbe avere<sup>17</sup>. Pertanto la scelta tra NRZ o coseno rialzato dipende dalla necessità di limitare la dinamica delle ampiezze, piuttosto che l'estensione della banda.



**Traiettoria di  $\underline{x}(t)$**  Altrettanto interessante può essere riflettere sulla fig. 14.6 in cui si mostrano  $x_c$  ed  $x_s$  ancora per una modulazione QPSK, valutate con  $g(t)$  a coseno rialzato ( $\gamma = 0.5$ ) per 10 campioni per simbolo, e mostrate per 10 simboli in coordinate cartesiane e polari; al centro è mostrato la corrispondente evoluzione per  $\underline{x}(t)$ , mentre a destra si mostra la traiettoria di  $\underline{x}(t)$  visualizzata per 100 simboli.

**Efficienza spettrale** Per L-PSK l'efficienza spettrale è identica a quanto ottenuto per l'ASK con ugual numero di livelli, dato che per entrambe la frequenza di simbolo risulta pari a  $f_s = \frac{f_b}{\log_2 L}$ ,

<sup>15</sup>Infatti un rettangolo di durata  $T_s$  ha trasformata  $\text{sinc}(T_s f)$ , con il primo zero in  $f = 1/T_s = f_s$ , e la modulazione AM-BLD produce un raddoppio della banda occupata.

<sup>16</sup>Se viceversa  $g(t) = \text{rect}_{T_s}(t)$ ,  $|\underline{x}|$  giace su di un cerchio, spostandosi *istantaneamente* da un punto all'altro della costellazione

<sup>17</sup>Nella parte superiore della figura è mostrato l'andamento delle c.a. di b.f. per 5 simboli di un QPSK realizzato adottando  $g(t)$  a coseno rialzato con  $\gamma = 0.5$ , e si può notare che ognuna di esse assume il valore  $\pm 1$  in corrispondenza di ogni periodo di simbolo. Nella parte inferiore è riportato il corrispondente segnale modulato, che come si vede non è affatto ad ampiezza costante.

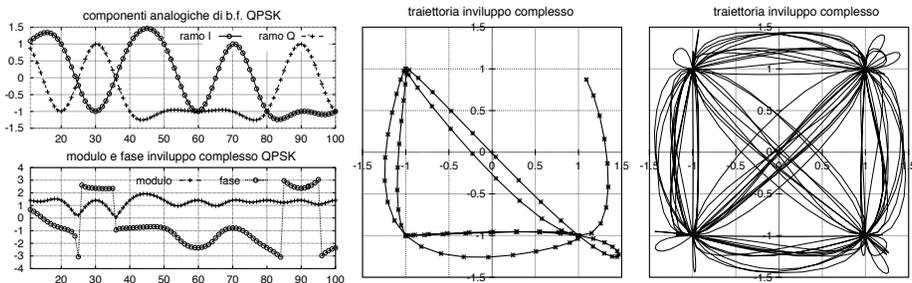


Figura 14.6: Andamento delle c.a. di b.f.  $x_c$  ed  $x_s$  per dieci simboli di segnale QPSK, in coordinate cartesiane e polari (a sn.), traiettoria dell'involuppo complesso  $\underline{x}(t)$  per 10 simboli (al centro) e per 100 simboli (a ds.)

e dunque (per coseno rialzato con  $\gamma = 0$ ) si ottiene

$$\rho_{L-PSK} = \frac{f_b}{B} = \frac{f_s \log_2 L}{f_s} = \log_2 L$$

Dal punto di vista delle prestazioni, occorre distinguere il caso in cui  $L = 4$  (indicato come QPSK = *Quadrature Phase Shift Keying*) da quello con  $L$  generico, in quanto sussistono due diverse architetture per il demodulatore.

### 14.2.2 Prestazioni QPSK

In questo caso (PSK con 4 livelli) il demodulatore coerente è costituito da due rami indipendenti in fase e quadratura (vedi fig. 14.8), che operano ad una frequenza di simbolo  $f_s$  pari a metà di quella binaria. In virtù di come la codifica di Gray dispone la costellazione (vedi fig. 14.7), ogni ramo del decisore opera su di uno solo della coppia di bit associati al simbolo trasmesso; le due decisioni vengono poi ri-serializzate. Entrambi i rami si comportano quindi come un demodulatore L-ASK (§ 14.1.2) con  $L=2$ , ovvero un BPSK, e per un segnale dati a coseno rialzato *a banda minima* ( $\gamma = 0$ ) la probabilità di errore relativa ad ogni singolo ramo è espressa<sup>18</sup> dalla (14.7), fornendo

$$P_e^c = P_e^s = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\}$$

che rappresenta la probabilità che una componente analogica di b.f. ottenuta demodulando il segnale con sovrapposto rumore,

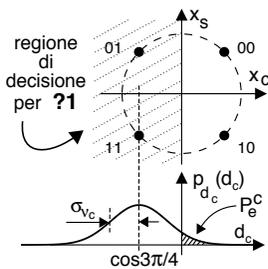
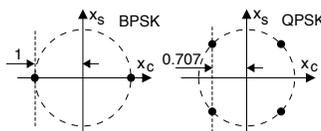


Figura 14.7: Costellazione QPSK e calcolo della  $P_e^c$

<sup>18</sup>In effetti, dovremmo verificare che l'attuale valore di  $E_b/N_0$  sia lo stesso del caso BPSK: mentre per  $N_0$  al § 11.1.4 si mostra che è vero, per quanto riguarda  $E_b$  (a prima vista) sembra che il suo valore si dimezzi. Infatti, a parità di potenza ricevuta, i punti di costellazione del BPSK giacciono all'intersezione tra l'asse cartesiano della c.a. di b.f. ed il cerchio di raggio pari all'ampiezza  $a$  del segnale ricevuto, mentre nel QPSK le fasi formano un angolo di  $45^\circ$  rispetto agli assi, moltiplicando per  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  le coordinate cartesiane, e riducendo dunque la potenza delle c.a. di b.f. di un fattore 2, e così pure il valore di  $E_b$ . In realtà, la durata doppia del periodo di simbolo  $T_s = 2T_b$  compensa questa riduzione, e dunque anche l' $E'_b$  di ogni ramo  $E'_b = P_x T_s$  si mantiene invariato.



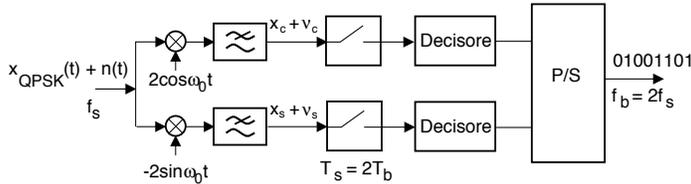


Figura 14.8: Demodulatore QPSK

valutata all'istante di decisione  $kT_s$ , giaccia nell'area mostrata in basso<sup>19</sup> della figura 14.7. La probabilità di errore (per impulso a banda minima) *in un bit* della sequenza re-serializzata risulta quindi<sup>20</sup>

$$P_e^{QPSK}(\text{bit}) = P_e^c \cdot Pr\{c\} + P_e^s \cdot Pr\{s\} = \frac{1}{2} (P_e^c + P_e^s) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\} \quad (14.11)$$

in cui  $Pr\{c\} = Pr\{s\} = 1/2$  sono le probabilità che il bit ricevuto provenga dal ramo in fase o da quello in quadratura; d'altra parte, la probabilità di errore *per simbolo* risulta  $P_e(\text{simbolo}) \simeq P_e^c + P_e^s = \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\}$  (trascurando nuovamente la probabilità di un errore contemporaneo su entrambi i rami, vedi nota 20).

Osserviamo quindi come il QPSK consenta di ottenere *le stesse prestazioni* del BPSK, graficate in fig. 14.4, utilizzando solo *metà banda*, in virtù del  $T_s$  doppio:

$$B_{QPSK} = f_s = \frac{f_b}{2} (1 + \gamma)$$

Quest'ultima osservazione permette di scrivere  $\rho_{QPSK} = \frac{f_b}{B_{QPSK}} = 2 = 2 \cdot \rho_{BPSK}$ , e suggerisce un ulteriore<sup>21</sup> punto di vista rispetto all'invarianza delle prestazioni rispetto al BPSK: infatti, dimezzando la banda si dimezza anche la varianza del rumore in ingresso al demodulatore, e ciò compensa la riduzione di ampiezza delle c.a. di b.f. del segnale per il caso QPSK.

**Ottimalità di BPSK e QPSK** Se queste tecniche sono attuate mediante un  $G(f) = \operatorname{rect}_{f_s/2}(f)$  ovvero a banda minima, in presenza di demodulazione *coerente* il filtro passabasso che precede il campionatore del decisore costituisce *un filtro adattato* (vedi § 6.8.1) con segnalazione *antipodale*, e le prestazioni sono quelle ottime, come si verifica confrontando l'eq. (6.38) con le (14.7) e (14.11). Se viceversa  $G(f)$  non è a banda minima, ma di Nyquist, la coerenza di demodulazione permette comunque di adottare in ricezione un filtro adattato (§ 8.4.10) al posto del passabasso mostrato in fig. 14.3, e dunque ottenere le medesime prestazioni.

<sup>19</sup>All'istante di decisione  $k$  su ciascun ramo si osserva una v.a. gaussiana  $d_{c,s}$  con varianza  $\sigma_{v_{c,s}}^2$  (vedi fig. 11.2 a pag. 303) e valor medio  $x_c(kT_s) = \cos \varphi_k$  e  $x_s(kT_s) = \sin \varphi_k$ , dove  $\varphi_k$  è la fase del punto di costellazione trasmesso all'istante  $t = kT_s$ , vedi eq. (14.10). Nell'esempio di figura, la decisione per il secondo dei due bit del simbolo cambia in funzione del segno di  $d_c$ , e dunque si commette errore sul ramo in fase se ad es. si trasmette ?1, ma il rumore su quel ramo ha un valore sufficientemente positivo da far superare lo zero in corrispondenza dell'istante di decisione.

<sup>20</sup>In effetti all'istante di decisione potrebbe verificarsi errore su *entrambi* i rami, ma tale evento avviene con probabilità  $P_e^c \cdot P_e^s$  che si ritiene tanto più trascurabile rispetto a  $P_e^c$  quanto più quest'ultimo è piccolo.

<sup>21</sup>Ulteriore rispetto al commento alla nota 18, dove il ragionamento è svolto sull' $E_b/N_0$ , mentre ora sull' $SNR$ .

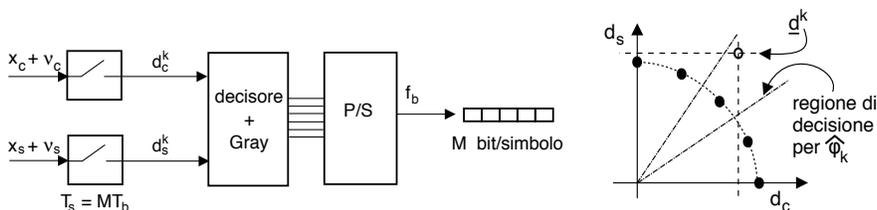


Figura 14.9: Demodulatore L-PSK

### 14.2.3 Prestazioni L-PSK

In questo caso il demodulatore ha una differente architettura (vedi fig. 14.9), ed il decisore opera congiuntamente su entrambi i rami, per ottenere la stima del gruppo di  $M = \log_2 L$  bit associati ad una delle possibili fasi  $\varphi_k$ . Indicando con  $d_{c,s}^k$  le c.a. di b.f. demodulate all'istante  $t = kT_s$ , la decisione avviene calcolando  $\varphi_k^d = \arctan \frac{d_s^k}{d_c^k}$  e stabilendo all'interno di quale regione di decisione  $\hat{\varphi}_k$  cada la fase ricevuta  $\varphi_k^d$ , a cui il decisore fa corrispondere una codeword di Gray (fig. 14.10). All'aumentare del numero di livelli  $L$ , la potenza di rumore (che concorre alla probabilità di errore) diminuisce con la stessa legge di riduzione della banda, ovvero con il  $\log_2 L$ , mentre la spaziatura tra le regioni di decisione diminuisce con legge lineare rispetto ad  $L$ . Pertanto, l'aumento del numero di livelli produce un peggioramento della  $P_e$ . Senza approfondire i relativi conti, forniamo direttamente il risultato (con  $\gamma = 0$ ) della probabilità di errore sul simbolo

$$P_e^{L-PSK}(\text{simbolo}) = \text{erfc} \left\{ \sin \left( \frac{\pi}{L} \right) \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \log_2 L} \right\} \quad (14.12)$$

che rappresenta la probabilità di decidere di aver ricevuto un  $\hat{\varphi}_k \neq \varphi_k$  (diverso da quello trasmesso) e che, se  $P_e \ll 1$ , è approssimata con la probabilità di invadere (a causa del rumore) una regione di decisione contigua (vedi fig. 14.9).

Confrontando il risultato con quello (eq. 14.6) per l'ASK, osserviamo che l'assenza del termine  $(1 - \frac{1}{L})$  è dovuto alla *circolarità* della costellazione, che il termine  $\sin(\frac{\pi}{L})$  è un fattore che rappresenta il peggioramento all'aumentare di  $L$ , ed il  $\log_2 L$  sotto radice è il miglioramento dovuto alla riduzione di banda. Il risultato (14.12) è una approssimazione valida se  $P_e \ll 1$ , e via via più accurata con  $L$  crescente.

Nella tabella alla pagina seguente è riportato il risultato del confronto, per uno stesso valore di  $P_e$ , dei valori  $\frac{E_b}{N_0}$  necessari per L-PSK (14.12), contro quelli necessari (14.6) per L-ASK: si è eseguito il rapporto tra gli argomenti degli  $\text{erfc} \{ \}$ , si è elevato al quadrato, indicato come  $\Delta$ , ed il risultato è espresso in dB: quest'ultimo rappresenta (a parte il termine  $(1 - \frac{1}{L})$  dell'L-ASK) il miglioramento di

$L$	$\Delta_{E_b/N_0} = \frac{1}{3} (L^2 - 1) \sin^2 \frac{\pi}{L}$	$\Delta_{E_b/N_0}(\text{dB})$
4 (QPSK)	2.5	4
8	3.07	4.88
16	3.23	5.1
32	3.28	5.2
64	3.29	5.2

prestazioni in dB dell'L-PSK rispetto ad L-ASK, ovvero i dB di potenza risparmiata a parità di probabilità di errore. Tale risultato (4-5 dB di miglioramento) porta a prediligere sempre il PSK rispetto all'ASK.

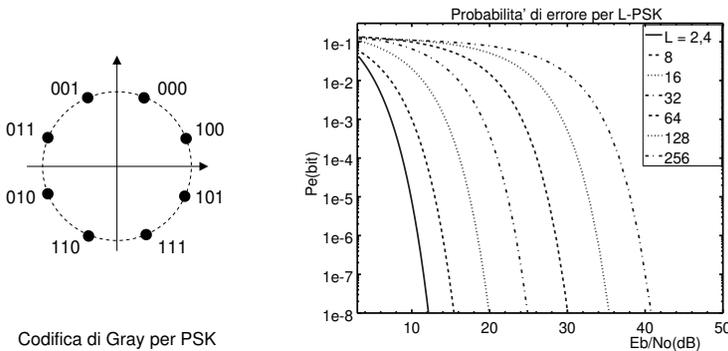


Figura 14.10: Prestazioni L-PSK con codice di Gray

E' opportuno osservare che, qualora si desideri ottenere un valore di probabilità di errore *per bit*, questo è pari a

$$P_e(\text{bit}) = \frac{P_e(\text{simbolo})}{\log_2 L}$$

a patto di associare, a livelli contigui, gruppi di bit differenti in una sola posizione, come previsto dal codice di Gray<sup>22</sup> (mostrato nella figura 14.10), in modo che l'errore tra due fasi  $\varphi_k$  contigue provochi l'errore di un solo bit nel gruppo di  $\log_2 L$  bit associati a ciascun livello. Le curve di probabilità di errore per bit, riportate anch'esse in fig. 14.10, sono calcolate in questo modo.

### 14.3 Modulazione QAM

Questo acronimo sta per *Quadrature Amplitude Modulation*, ed individua la tecnica di modulazione che utilizza due portanti in quadratura come il psk

$$x_{QAM}(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t$$

ma a differenza del psk, ora le componenti di banda base  $x_c$  ed  $x_s$  *non* dipendono da una stessa sequenza di fasi, ma sono originate da due flussi di dati distinti.

Con riferimento alla fig. 14.11, osserviamo che sebbene  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  si ottengano a partire da una medesima sequenza numerica  $\{a_k\}$ , i bit di quest'ultima sono distribuiti alternativamente sui due rami (sequenze  $b_c[n]$  e  $b_s[n]$  in figura) a velocità dimezzata<sup>23</sup>, suddividendo un gruppo di  $M$  bit in due simboli costituiti da  $M' = M/2$  bit. Dalle sequenze  $b_c$  e  $b_s$  ad  $M'$  bit/simbolo poi si ottengono (mediante codifica di Gray) i valori  $c_c$  e  $c_s$  con  $L' = 2^{M'} = 2^{M/2} = \sqrt{2^M} = \sqrt{L}$  livelli, che attraversando in forma impulsiva il filtro  $G(f)$ , danno luogo ai segnali di banda base  $x_c$  ed  $x_s$ .

La sequenza di operazioni descritte determina una costellazione *quadrata*, composta da  $L = (L')^2$  punti<sup>24</sup>, che rappresentano le coordinate (nel piano dell'involuppo complesso) in cui  $\underline{x}$  è

<sup>22</sup>vedi il § 8.4.9.1

<sup>23</sup>In pratica, l'indice  $n$  si incrementa ogni due incrementi dell'indice  $k$ .

<sup>24</sup>Per come si è impostato lo schema di distribuzione dei bit tra i rami,  $L$  deve risultare un quadrato perfetto. Nulla impedisce di elaborare schemi diversi con costellazioni di forma *non quadrata*, vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Quadrature\\_amplitude\\_modulation#Non-rectangular\\_QAM](https://en.wikipedia.org/wiki/Quadrature_amplitude_modulation#Non-rectangular_QAM), ma in genere la soluzione quadrata è preferita per semplicità realizzativa.

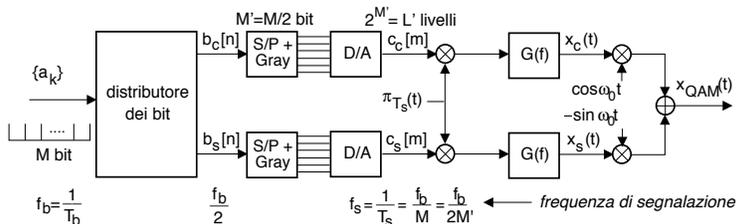
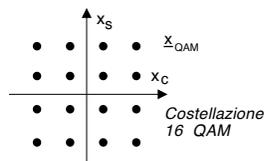


Figura 14.11: Architettura di un modulatore QAM

forzato a transitare in corrispondenza degli istanti di Nyquist multipli del periodo di simbolo  $T_s$ , che risulta essere pari a

$$T_s = T_b \cdot M = \frac{1}{f_b} \log_2 L$$



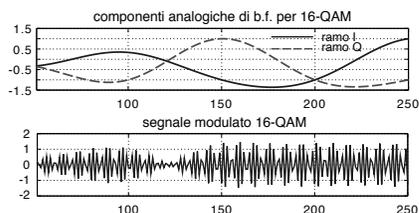
**Esempio** il 16-QAM si ottiene con  $m = 4$  bit/simbolo ( $L = 16 = 2^M = 2^4$ ) e sui due rami sono presenti  $L' = \sqrt{16} = 4$  livelli, ottenendo il risultato di una costellazione quadrata di  $L = 4 \times 4 = 16$  punti.

**Occupazione di banda** Se  $G(f)$  è a coseno rialzato con roll off  $\gamma$ , allora la banda a frequenze positive di  $x_c$  ed  $x_s$  risulta pari a  $\frac{f_s}{2} (1 + \gamma) = \frac{f_b}{2 \log_2 L} (1 + \gamma)$ , mentre quella di  $x_{QAM}$  è pari al doppio, a causa della modulazione AM-BLD-PS operata sui due rami del modulatore, ovvero

$$B_{QAM} = \frac{f_b}{\log_2 L} (1 + \gamma) = f_s (1 + \gamma)$$

e quindi uguale a quella di ASK e PSK con uguale numero di livelli (di cui condivide quindi anche l'efficienza spettrale).

**Dinamica delle ampiezze** Nella parte superiore della figura a lato è mostrato l'andamento di  $x_c$  ed  $x_s$  per 5 simboli di un 16-QAM realizzato a partire da un segnale dati con  $\gamma = 0.5$ , e si può notare che in corrispondenza di ogni periodo di simbolo entrambe assumono uno tra i valori  $-1, -0.33, 0.33, 1$ . Nella parte inferiore è riportato il corrispondente segnale modulato, che come si vede non è affatto ad ampiezza costante.



### 14.3.1 Prestazioni di QAM

Nella parte sinistra di fig. 14.12 è mostrata la costellazione per un 16-QAM in presenza di rumore ( $E_b/N_0 = 10$  dB). La distanza tra due punti di costellazione è maggiore (a parità di  $L$ ) del caso PSK, e pertanto c'è da aspettarsi un miglioramento delle prestazioni (a parità di  $E_b/N_0$ ), in quanto l'area che individua la probabilità di errore è ridotta.

Il segnale QAM viene demodulato secondo lo schema di fig. 14.13, che ci permette di constatare come su ciascuno dei due rami in fase e quadratura transita un segnale ASK multilivello

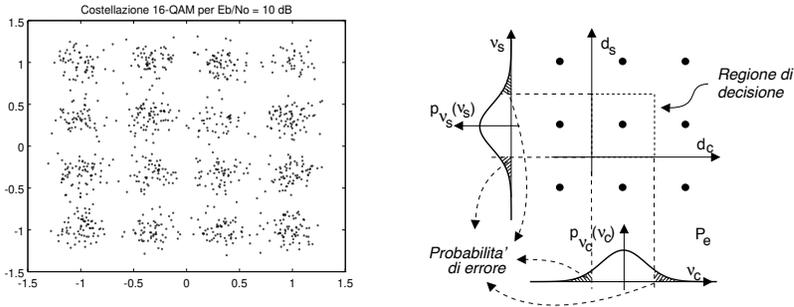


Figura 14.12: Costellazione 16-QAM in presenza di rumore (a sn), calcolo della  $P_e$  sui rami (a ds)

con  $L' = \sqrt{L}$ , e dunque possiamo adottare<sup>25</sup> l'espressione (14.6) (relativa ad un impulso  $g(t)$  a banda minima) per definire la probabilità di errore su ciascuno dei due rami, pari a

$$\begin{aligned}
 P_\alpha &= P_e^c(\text{simbolo}) = P_e^s(\text{simbolo}) = \\
 &= \left(1 - \frac{1}{L'}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{3 \frac{E_b}{N_0} \frac{\log_2 L'}{(L')^2 - 1}} \right\}
 \end{aligned}$$

Ricordando ora che  $L' = \sqrt{L} = (L)^{1/2}$ , e dunque  $\log_2 L' = \frac{1}{2} \log_2 L$ , si ottiene

$$P_\alpha = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} \frac{E_b}{N_0} \frac{\log_2 L}{L - 1}} \right\} \tag{14.13}$$

La probabilità di errore (a simbolo) complessiva, cioè la probabilità che il segnale ricevuto  $\underline{d} = \underline{x} + \underline{v}$  cada fuori della regione di decisione relativa all' $\underline{x}$  trasmesso (vedi parte destra di fig. 14.12), risulta  $P_e(\text{simbolo}) \simeq P_\alpha + P_\alpha = 2P_\alpha$ , assumendo trascurabile la probabilità di sbagliare entrambe  $x_c$  ed  $x_s$ . Questa stessa ipotesi, assieme all'utilizzo di un codice di Gray per codificare i gruppi di bit associati ai livelli dei due rami, consente di esprimere la probabilità di

<sup>25</sup>Per applicare la (14.6) dobbiamo verificare se il valore di  $E_b/N_0$  è lo stesso nei due casi (vedi nota 18). Mentre per  $N_0$  non vi sono dubbi, notiamo (vedi § 10.4.3 per il caso di c.a. di b.f. incorrelate) che la potenza ricevuta  $\mathcal{P}_x$  si dimezza su entrambi i rami, così come la  $f_b$ , e pertanto si ottiene  $E_b' = \frac{\mathcal{P}_x/2}{f_b/2} = \frac{\mathcal{P}_x}{f_b} = E_b$ .

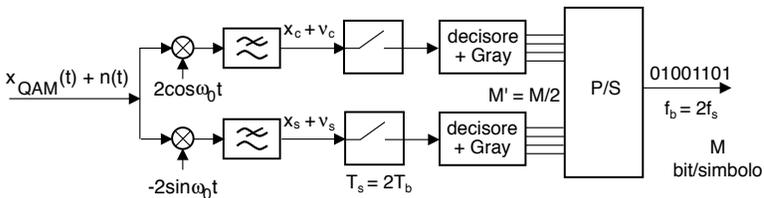


Figura 14.13: Demodulatore QAM

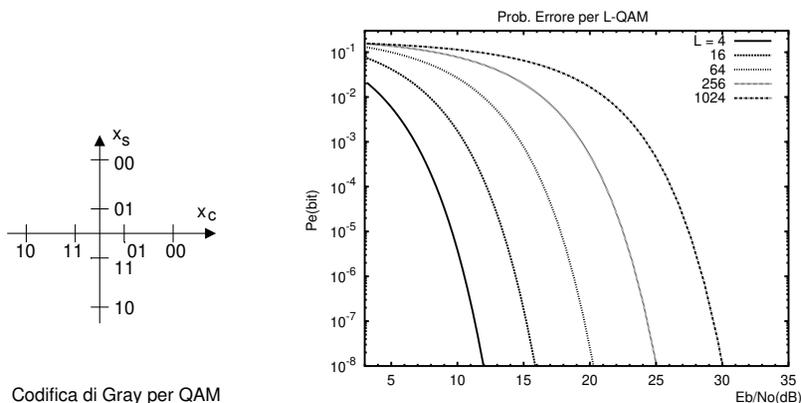


Figura 14.14: Prestazioni L-QAM con codice di Gray

errore per bit come

$$\begin{aligned}
 P_e^{QAM}(\text{bit}) &= \frac{P_e(\text{simbolo})}{\log_2 L} = \\
 &= \frac{2}{\log_2 L} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 E_b \log_2 L}{2 N_0 L - 1}} \right\} \quad (14.14)
 \end{aligned}$$

In figura 14.14 troviamo le curve dei valori di  $P_e(\text{bit})$ , per diversi valori di  $L$ , al variare di  $\frac{E_b}{N_0}$  espresso in dB; il confronto con le curve relative al PSK permette di valutare l'entità del miglioramento di prestazioni. Come è evidente, la modulazione QAM offre prestazioni sensibilmente superiori rispetto alla PSK.

**Esercizio** Consideriamo un sistema di modulazione numerica PSK con 16 fasi, per il quale si riceve una potenza di segnale  $\mathcal{P}_x = 10^{-3} \text{ (Volt)}^2$ , in presenza di una densità di potenza di rumore  $\mathcal{P}_N(f) = 2 \cdot 10^{-11} \text{ (Volt)}^2/\text{Hz}$ . Si desidera ricevere un flusso numerico a velocità  $f_b = 1 \text{ Mbit/sec}$  e si considerino impulsi a coseno rialzato con  $\gamma = 0$ .

- 1) Quale è la  $P_e$  per bit al ricevitore? E la banda occupata?
- 2) Quale nuovo valore di  $P_e$  si ottiene usando invece una modulazione QAM con lo stesso numero di punti di costellazione?
- 3) Nel caso 16-QAM, qualora si desideri ancora la  $P_e$  ottenuta al punto 1), quanta potenza è sufficiente ricevere?
- 4) Nel caso QAM con la  $P_e$  del punto 1), qualora si desideri dimezzare la banda occupata, che potenza è necessario ricevere?
- 5) Nel caso 16-QAM con la  $P_e$  del punto 1) e  $\mathcal{P}_x = 10^{-3} \text{ (Volt)}^2$ , quale nuova  $f_b$  è possibile raggiungere?

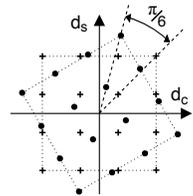
**Soluzione**

1. Osserviamo che  $E_b = \mathcal{P}_x \cdot T_b = \frac{\mathcal{P}_x}{f_b} = \frac{10^{-3}}{10^6} = 10^{-9} \text{ (Volt)}^2/\text{Hz}$ , mentre  $N_0 = 2\mathcal{P}_N(f) = 4 \cdot 10^{-11} \text{ (Volt)}^2/\text{Hz}$ , pertanto  $\frac{E_b}{N_0} = 25$  e  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 10 \log_{10} 25 \simeq 14 \text{ dB}$ .

- (a) Dalle curve delle prestazioni per il PSK si trova che con  $E_b/N_0 = 14$  dB, si ottiene  $P_e = 10^{-3}$  qualora si utilizzino 16 livelli.
- (b) La banda occupata risulta  $B = \frac{f_b}{\log_2 L} = \frac{10^6}{4} = 250$  KHz.
2. Le curve delle prestazioni per il QAM mostrano che con  $E_b/N_0 = 14$  dB e 16 livelli, si ottiene  $P_e \simeq 3 \cdot 10^{-6}$ .
3. le stesse curve mostrano che, con il 16-QAM, la  $P_e = 10^{-3}$  si ottiene con  $E_b/N_0 = 10.5$  dB, ovvero  $14 - 10.5 = 3.5$  dB in meno, che corrispondono ad una potenza  $P'_x = \frac{P_x}{10^{0.35}} = \frac{10^{-3}}{2.24} = 4.47 \cdot 10^{-5}$  (Volt)<sup>2</sup>.
4. Dimezzare la banda occupata a utilizzare  $M = 8$  bit/simbolo, ovvero raddoppiare  $\log_2 L$ , e dunque un numero di livelli  $L = 2^M = 256 = (L')^2$ . Le curve delle prestazioni per il 256-QAM mostrano che per ottenere  $P_e = 10^{-3}$  occorre  $E_b/N_0 \simeq 18.3$  dB, pari ad un aumento di  $18.3 - 14 = 4.3$  dB, che equivale ad una potenza  $P'_x = 10^{0.43} P_x \simeq 2.7 \cdot 10^{-3}$  (Volt)<sup>2</sup>.
5. Ci ritroviamo nelle stesse condizioni del punto 3), con un eccesso di 3.5 dB nel valore di  $E_b/N_0$ , che può essere speso riducendo di egual misura  $T_b$ , e quindi aumentando  $f_b$ . Risulta:  $T'_b = \frac{T_b}{10^{0.35}}$  e quindi  $f'_b = \frac{1}{T'_b} = \frac{10^{0.35}}{T_b} = 10^{0.35} \cdot f_b = 10^{0.35} \simeq 2.24$  Mb/sec.
- E se  $\gamma \neq 0$ ? La trattazione del caso di banda base (pag. 221), mostra che l'argomento sotto radice della  $\text{erfc}\{\}$  subisce un peggioramento di  $(1 + \gamma)(1 - \frac{\gamma}{4})$ , che (per esempio) con  $\gamma = 0.5$  fornisce 1.31, che deve essere compensato da una uguale diminuzione di  $E_b/N_0$ . Nel caso 5), ad esempio, la  $f_b$  risulterà quindi limitata a  $f'_b = f_b/1.31 = 1.71$  Mb/sec.

## 14.4 Codifica differenziale

Se la portante con cui si effettua la demodulazione presenta un errore di fase<sup>26</sup>, il piano dell'involuppo complesso subisce una rotazione, producendo decisioni sistematicamente errate a causa dello spostamento dei punti di costellazione ottenuti campionando le c.a. di b.f. (pallini) rispetto a quelli che si otterrebbero nel caso di demodulazione *coerente* (crocette). Per rimediare al problema, si può estendere il principio *differenziale* (espresso a pag. 207 per segnali di banda base) al caso delle modulazioni numeriche, rendendo la decisione su quale punto di costellazione sia stato ricevuto indipendente dalla fase della portante di demodulazione, ma dipendente invece dalla fase dell'involuppo complesso osservata *per il simbolo precedente*. Ciò si realizza modificando il criterio con cui sono determinati i punti di costellazione da trasmettere, scegliendoli ora in funzione di *una coppia* di simboli consecutivi, anziché di uno solo.

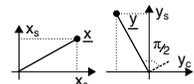


### 14.4.1 Modulazione DBPSK

Per illustrare la tecnica, procediamo con un esempio relativo al caso di trasmissione BPSK della sequenza  $x_k = 001011011010010$  e mostriamo come la codifica differenziale consenta di neutralizzare un errore di fase di  $\pi$ . La fig. 14.15, simile<sup>27</sup> a quella a pag. 346, mostra la sequenza

<sup>26</sup>Il cui effetto su  $x_c(t)$  è stato discusso al § 10.2.3.1. Facciamo ricadere in questa casistica l'ambiguità di fase dei sistemi di recupero portante come descritto al § 10.2.2.1, ma anche la distorsione di fase introdotta dal canale non selettivo in frequenza, vedi § 12.1.2.4. Che un errore di fase si traduca in una rotazione dell'involuppo complesso può essere mostrato considerando che l'operazione di demodulazione omodina corrisponde a valutare  $\mathcal{R}\{\underline{x}e^{j\omega_0 t}\}$ , mentre una portante  $\cos(\omega_0 t + \varphi)$  corrisponde a  $\mathcal{R}\{\underline{x}e^{j\omega_0 t}e^{j\varphi}\}$ , equivalente alla demodulazione coerente di  $\underline{y} = \underline{x}e^{j\varphi}$  ossia un involuppo complesso *ruotato*. In figura, un caso per cui  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

<sup>27</sup>La similitudine non è per nulla casuale, dato che qualora il predittore mostrato a pag. 346 sia realizzato mediante un elemento di ritardo, i due schemi di elaborazione coincidono.



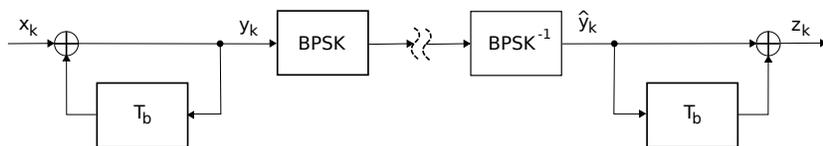


Figura 14.15: Codifica e detezione differenziali

delle operazioni necessarie, e che consistono nel trasformare il messaggio binario  $x_k$  in quello  $y_k$  in base alla relazione

$$y_k = x_k \oplus y_{k-1} \quad (14.15)$$

(in cui l'operatore  $\oplus$  rappresenta un *or esclusivo*), e quindi effettuare la modulazione BPSK di  $y_k$  anziché di  $x_k$ . Dal lato ricevente, il segnale BPSK viene demodolato ottenendo la sequenza  $\hat{y}_k$ , che viene a sua volta trasformata in  $z_k$  in base all'espressione

$$\begin{aligned} x_k &= 001011011010010 \\ y_k &= 001101101100011 \\ z_k &= /01011011010010 \end{aligned}$$

$$z_k = \hat{y}_k \oplus \hat{y}_{k-1} \quad (14.16)$$

che, in assenza di errori (ossia se  $\hat{y}_k = y_k$  per tutti i  $k$ ), permette di ottenere nuovamente i valori del messaggio originario<sup>28</sup>  $x_k$  a partire dalla sequenza  $z_k$ , come la figura del riquadro precedente consente di verificare tramite un esempio.

Se assumiamo ora di rappresentare lo zero con una fase nulla, e l'uno con una fase di  $\pi$ , possiamo riscrivere la (14.1) come

$$x_{BPSK}(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad \text{con} \quad \varphi(t) = \pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \text{rect}_{T_b}(t - kT_b) \quad (14.17)$$

e ponendo per semplicità il periodo di bit pari ad un ciclo di portante, possiamo confrontare in fig. 14.16 la forma d'onda BPSK associata alla sequenza originaria  $x_k$ , con quella ottenibile utilizzando nella (14.17)  $y_k$  anziché  $x_k$  ed indicata come DBPSK, in cui la D sta appunto per *differenziale*. Pertanto quando il demodulatore BPSK di fig. 14.15 riceve il segnale DBPSK, in assenza di errori si produce in uscita la sequenza  $y_k$ , e quindi il circuito mostrato realizza l'operazione  $z_k = \hat{y}_k \oplus \hat{y}_{k-1}$ , permettendo di ottenere la sequenza originaria. Verifichiamo ora che il segnale di partenza viene recuperato anche se la portante di demodulazione presenta un errore di fase di  $\pi$ , tale da causare l'inversione della forma d'onda e quindi di tutti i bit decodificati, producendo un messaggio  $\hat{y}_k = \bar{y}_k = 110010010011100$  (la soprallineatura rappresenta l'inversione logica). Infatti, applicando la (14.16) alla sequenza  $\hat{y}_k = \bar{y}_k$  si ottiene di nuovo la sequenza originaria, dato che  $a \oplus b = \bar{a} \oplus \bar{b}$ .

D'altra parte, lo schema di fig. 14.15 non è l'unico possibile, osservando che la sequenza  $x_k$  può anche essere derivata *direttamente* dall'esame visivo della forma d'onda DBPSK, in quanto i bit della sequenza  $y_k$  cambiano nel caso in cui il corrispondente bit di  $x_k$  è un uno, mentre *non cambiano* se è un zero, e dunque lo stesso accade per il segno della forma d'onda BPSK. Il demodulatore può essere dunque sostituito da uno in fase e quadratura, in modo da calcolare la fase a partire dalle c.a. di b.f. come  $\varphi = \arctan \frac{d_s}{d_c}$ , e quindi determinare la sequenza  $x_k$  in base alle *variazioni* di fase, senza dover applicare la (14.16), consentendo di applicare il principio anche in presenza di errori di fase qualsiasi, e non solo pari a  $\pi$ .

<sup>28</sup>A parte per il primo bit, che ha il solo scopo di stabilire il riferimento di fase per la decodifica del successivo. Da un punto di vista formale, sostituendo la (14.15) nella (14.16) e in assenza di errori (ossia  $\hat{y}_k = y_k$ ) si ottiene  $\hat{z}_k = \hat{y}_k \oplus \hat{y}_{k-1} = x_k \oplus y_{k-1} \oplus y_{k-1} = x_k$ .

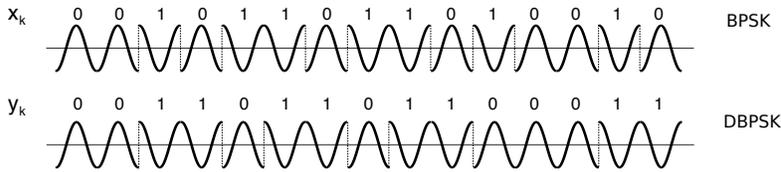


Figura 14.16: Segnale BPSK e BPSK differenziale

**Prestazioni DBPSK** Esaminiamo ora cosa accade in presenza di errori: supponiamo di ricevere un messaggio  $y_k = 00\underline{0}101101100011$ , in cui il terzo bit (sottolineato) è errato. Calcolando  $z_k = \hat{y}_k \oplus \hat{y}_{k-1}$  questa volta si ottiene  $z_k = /00111011010010$  che risulta uguale a  $x_k$  tranne che nel terzo e quarto bit. Infatti, dato che  $z_k$  dipende dagli indici  $k$  e  $k-1$  di  $y$ , l'effetto dell'errore non si propaga oltre il bit successivo a quello errato. Dato quindi che ad ogni errore del decisore si ottengono due bit errati anziché uno, a prima vista possiamo dire che a parità di  $E_b/N_0$ , il DBPSK è affetto da un tasso di errore *circa doppio* di quello del BPSK. Una analisi più approfondita (che omettiamo) fornisce l'espressione

$$P_e^{DBPSK}(bit) = \frac{1}{2}e^{-\frac{E_b}{N_0}} \quad (14.18)$$

che equivale ad un peggioramento di prestazioni di circa 1 dB rispetto al BPSK, ed il cui andamento è riportato a pag. 398.

#### 14.4.2 DQPSK

Il concetto di codifica differenziale può essere facilmente esteso al caso di L-PSK, semplicemente mettendo in corrispondenza le configurazioni di bit previste dal codice di Gray con rotazioni di fase  $\Delta\theta$  (tra simboli successivi) contigue, come esemplificato nella tabella che segue<sup>29</sup> per  $L = 4$ <sup>(30)</sup>, ovvero nel caso della modulazione DQPSK. L'involuppo complesso di tale segnale assumerà quindi, negli istanti di simbolo, valori la cui fase dipende dalla fase del simbolo precedente, incrementata del  $\Delta\theta$  mostrato in tabella, consentendo la corretta ricezione anche in presenza di una portante di demodulazione affetta da errori di fase multipli di  $\frac{\pi}{2}$ . Anche qui se (a causa del rumore) si verifica un errore di ricezione, questo si propaga anche al simbolo successivo.

$x_{k-1}x_k$	$\Delta\theta$
00	0
01	$\pi/2$
11	$\pi$
10	$-\pi/2$

Anche nel caso del QAM si può applicare una forma di codifica differenziale, ma lo schema di corrispondenza tra gruppi di bit e punti della costellazione è più complesso<sup>31</sup>, e non viene qui trattato.

Infine, la modulazione differenziale può essere proficuamente sfruttata nella trasmissione OFDM (§ 14.8.8), al fine di evitare la necessità di equalizzazione.

### 14.5 Modulazione di frequenza L-FSK

Qualora si desideri che l'ampiezza del segnale modulato si mantenga strettamente costante si può adottare la tecnica di modulazione FSK (*Frequency Shift Keying*), che associa ad ogni simbolo

<sup>29</sup>Tratta da *Andrea Goldsmith*, *Wireless Communications*, pag. 151.

<sup>30</sup>Nel caso di  $L > 4$  la tabella si modifica molto semplicemente scrivendo accanto al codice di Gray al  $L$  livelli, la sequenza crescente delle fasi differenziali  $\Delta\theta_k = k \frac{2\pi}{L-1}$ .

<sup>31</sup>Vedi ad es. *Krzysztof Wesolowski*, *Introduction to Digital Communication Systems*, Wiley, pag. 328.

$a_k$  ottenuto raggruppando  $M$  bit, uno tra  $2^M = L$  possibili valori (o *livelli*) di frequenza  $f_k$ , da sommare a quello della portante in accordo all'espressione

$$x_{FSK}(t) = \cos [2\pi (f_0 + m(t)) t] \quad \text{dove} \quad m(t) = \Delta \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cdot \text{rect}_{T_s}(t - kT_s)$$

dove ogni elemento della sequenza  $f_k$  assume uno tra i valori  $\{0, 1, 2, \dots, L-1\}$ . Si tratta in altri termini di una portante la cui frequenza nominale  $f_0$  è alterata di una quantità  $\Delta \cdot f_k$  Hz per un intervallo temporale pari al periodo di simbolo  $T_s$ , in cui  $\Delta$  rappresenta ora la spaziatura (uniforme) tra le frequenze associate agli  $L$  livelli. Pertanto l'espressione può essere riscritta come

$$x_{FSK}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos [2\pi (f_0 + \Delta f_k) t] \cdot \text{rect}_{T_s}(t - kT_s) \quad (14.19)$$

Il risultato è senza dubbio ad ampiezza costante; se  $T_s \gg \frac{1}{f_0}$  si può adottare uno schema di demodulazione basato su di un VCO ed un PLL (vedi § 10.2.2.2 e 10.3.2.1) riportato (per  $L = 2$ ) in figura 14.17, in cui all'uscita del passa basso ritroviamo il segnale modulante.

Lo schema è effettivamente utilizzato per modem a bassa velocità e basso costo, ed ha il pregio di funzionare anche in presenza di errori tra l' $f_0$  usata dal vco del trasmettitore e quella del ricevitore. Per raggiungere velocità  $f_b$  più elevate a parità di  $L$ , occorre ridurre  $T_s$ , in modo da aumentare  $f_s = \frac{1}{T_s}$  e quindi  $f_b = f_s M = f_s \log_2 L$ . In tal caso può essere necessario ricorrere ad un demodulatore più complesso, come descritto al § seguente.

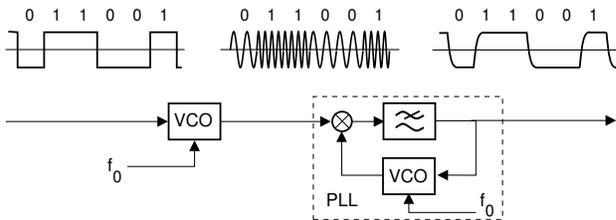


Figura 14.17: Modem FSK a bassa velocità

### 14.5.1 Modulazione FSK ortogonale

Nel caso in cui si realizzi la condizione  $\Delta = \frac{i}{2T_s}$  con  $i$  intero, le diverse frequenze  $f_0 + \Delta f_k$  sono *ortogonali*<sup>32</sup>, e può essere adottato un *demodulatore a correlazione* (vedi § 6.8.2), realizzato mediante un banco di correlatori ed una decisione di massimo, in cui l' $n$ -esimo correlatore esegue

$$\int_0^{T_s} \cos [2\pi (f_0 + m\Delta) t] \cos [2\pi (f_0 + n\Delta) t] dt \quad (14.20)$$

dove  $f_0 + m\Delta$  rappresenta la frequenza (incognita) in arrivo, mentre  $f_0 + n\Delta$  è una delle frequenze possibili, con  $n \in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$ . Essendo tali frequenze tra

<sup>32</sup>La discussione al riguardo è sviluppata al § 14.12.1, definendo anche le condizioni di demodulazione *incoerente* e *coerente*, ovvero se le portanti generate in ricezione  $\cos [2\pi (f_0 + \Delta f_k) t + \phi_k]$  presentino o meno una fase  $\phi_k$  casuale rispetto a quella trasmessa. In particolare, la spaziatura  $\Delta$  multipla di  $\frac{1}{2T_s}$  garantisce ortogonalità solo nel caso di modulazione *coerente*, mentre nel caso *incoerente* occorre una spaziatura *doppia*, ossia  $\Delta$  multiplo di  $\frac{1}{T_s}$ .

loro ortogonali<sup>33</sup> entro l'intervallo di integrazione, al termine del calcolo una sola delle uscite sarà diversa da zero. Come discusso al § 6.8, in presenza di rumore l'uscita di ogni correlatore diviene una v.a. con varianza  $\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$ , *corrompendo* l'ortogonalità tra simboli, e dunque si rende necessaria l'operazione di confronto per realizzare una decisione di *massima verosimiglianza* (§ 5.6.2.1). Indicando infatti con  $r_n$ ,  $n = 0, 1 \dots, L-1$  la grandezza prodotta dal campionatore  $n$ -esimo, e con  $\mathbf{r} = r_0, r_1, \dots, r_{L-1}$  il vettore aleatorio  $L$ -dimensionale corrispondente, la scelta del maggiore tra gli  $r_n$  corrisponde a scegliere l'ipotesi  $f_{\hat{n}}$  che rende massima la  $p(\mathbf{r}/f_{\hat{n}})$ <sup>34</sup>.

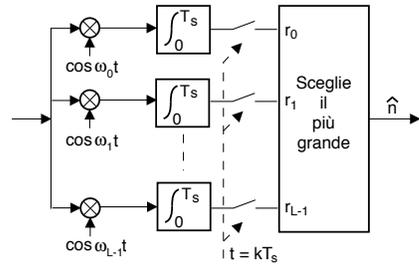


Figura 14.18: Demodulatore FSK a correlazione

**Occupazione di banda** In generale, se ogni diversa  $f_k$  è equiprobabile, l'FSK ha una densità spettrale del tipo<sup>35</sup> mostrato alla figura 14.19. Se  $L \gg 1$ , l'occupazione di banda complessiva risulta quindi (circa) uguale a  $L \cdot \Delta$ . Nel caso di *modulazione coerente* (vedi nota 32) la minima spaziatura è di  $\Delta = \frac{1}{2T_s} = \frac{f_b}{2}$ , e dunque nel caso di  $L$  elevato la minima banda occupata può essere approssimata come

$$B_{FSK}^{coerente} \simeq L \cdot \frac{f_b}{2} = \frac{f_b}{2} \cdot \frac{L}{\log_2 L} \tag{14.21}$$

mentre per quanto riguarda l'efficienza spettrale si ottiene

$$\rho_{FSK} = \frac{f_b}{B} = f_b \cdot \frac{2}{f_b} \cdot \frac{\log_2 L}{L} = \frac{2}{L} \log_2 L$$

ossia  $\frac{L}{2}$  volte peggiore dell'L-ASK (pag. 380). Ma: se l'efficienza spettrale è così bassa, che vantaggi ci sono ad usare l'FSK? ... a sua difesa, portiamo i seguenti argomenti:

**Il caso semplice con  $T_s \gg \frac{1}{f_0}$**  può essere demodulato con lo schema a PLL rappresentato in fig. 14.17, di facile realizzazione ed

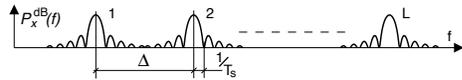


Figura 14.19: Densità spettrale per FSK lento

<sup>33</sup>La condizione di ortogonalità tra le forme d'onda associate ai diversi simboli corrisponde alla intercorrelazione nulla tra le forme d'onda in un periodo (§ 6.1.4), ed infatti scegliendo opportunamente  $\Delta$  ed  $f_0$  (vedi § 14.12.1) l'integrale (14.20) vale  $\mathcal{R}_{nm} = \begin{cases} .5 \cdot T_s & \text{se } n = m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ . Ciò si dimostra (ricordando che  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$ ), notando che per  $m = n$  l'uscita del correlatore vale  $\frac{1}{2} \int_0^{T_s} (1 + \cos(4\pi(f_0 + m\Delta)t)) dt$ , e scegliendo opportunamente  $f_0$  e  $\Delta$  (vedi § 14.12.1), il coseno che viene integrato descrive un numero intero di periodi all'interno dell'intervallo  $(0, T_s)$ , fornendo quindi un contributo nullo. Se invece  $n \neq m$  la funzione integranda non contiene il termine costante, ma di nuovo in virtù di § 14.12.1, contiene solo termini a media nulla.

<sup>34</sup>Infatti il vettore  $\mathbf{r}$  ha una d.d.p. condizionata  $p(\mathbf{r}/f_n)$  gaussiana multidimensionale a componenti indipendenti, e dunque (vedi § 5.5.1) si fattorizza nel prodotto di  $L$  gaussiane monodimensionali con uguale varianza e media nulla, tranne per la componente  $n = m$  relativa all'ipotesi realmente occorsa, che presenta una media non nulla. Pertanto per ogni possibile ipotesi  $f_n$  la  $p(\mathbf{r}/f_n)$  è concentrata sulla  $n$ -esima componente, e dunque decidere per  $\hat{n} = \arg \max_n \{r_n\}$  equivale a scegliere  $\hat{n} = \arg \max_n \{p(\mathbf{r}/f_n)\}$ .

<sup>35</sup>Difatti la (14.19) può essere riscritta come la somma di  $L$  segnali  $x_k(t)$ , uno per ogni possibile valore di  $f_k$ , costituiti da un codice di linea rz che modula la corrispondente  $f_0 + \Delta f_k$ , a cui corrisponde dunque un tono intermittente. Essendo i simboli indipendenti e (in virtù della portante) a media nulla, la (6.45) di pag. 174 si riduce alla nota forma  $\mathcal{P}_{X_k}(f) = \frac{\sigma_A^2}{T_s} |G_k(f)|^2$  in cui  $G_k(f) = \mathcal{F}\{g_k(t)\}$  e  $g_k(t) = \cos[2\pi(f_0 + \Delta f_k)t] \text{rect}_{T_s}(t)$ ; applicando ora il risultato di fig. 3.4 a pag. 66 si ottiene la densità di potenza mostrata in fig. 14.19.

economico; ad esempio, veniva usato per salvare su *compact cassette* audio i dati degli *home computer* degli anni '70<sup>36</sup>

**Nel caso a due livelli** l'efficienza spettrale è *quasi*  $\rho_{BFSK} = \frac{2}{L} \log_2 L \Big|_{L=2} = 1$ , come per il caso del BPSK<sup>37</sup>. Al contrario, al crescere di  $L$  l'efficienza spettrale diviene sempre peggiore.

**La probabilità di errore** Si può dimostrare che l'uso dello schema di fig. 14.18 e di portanti di demodulazione ortogonali e coerenti<sup>38</sup> permette di ottenere una

$$P_e^{FSK}(\text{simbolo}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \left( \int_{-\infty}^{z + \sqrt{\log_2 L \cdot E_b/N_0}} e^{-y^2} dy \right)^{L-1} dz \quad (14.22)$$

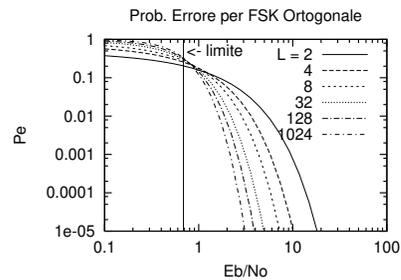
che deve essere valutata per via numerica, e che può essere resa *piccola a piacere*, nei limiti previsti dalla teoria dell'informazione<sup>39</sup>, semplicemente aumentando  $L^{40}$  (e dunque  $T_s$ ). La figura a lato mostra i valori della (14.22) in funzione di  $E_b/N_0$  per diversi valori di  $L$ , e illustra come all'aumentare di quest'ultimo sia necessaria sempre minor potenza per ottenere la stessa  $P_e$ , a patto che risulti

$$E_b/N_0 > \ln 2 = 0,69$$

che rappresenta il valore noto come *limite di Shannon-Hartley*, ricavato alla (13.41) a pag. 359.

Il miglioramento di  $P_e$  con  $L$  è una manifestazione del *compromesso banda-potenza*: osserviamo infatti che anche la banda occupata  $B_{FSK} \simeq \frac{f_b}{2} \frac{L}{\log_2 L}$  *aumenta* (a parità di  $f_b$ ) all'aumentare di  $L$ , e dunque a parità di  $E_b/N_0$  l'FSK riesce ad ottenere  $P_e$  arbitrariamente piccole, a spese di una occupazione di banda sempre maggiore. L'aumento di  $L$  però non può essere illimitato, sia per le limitazioni di banda del canale, che a causa della complessità del ricevitore, a cui si aggiunge il ritardo temporale necessario ad accumulare gli  $M = \log_2 L$  bit che realizzano un simbolo con un enorme numero  $L$  di livelli.

**Discussione sull'ottimalità per  $L \rightarrow \infty$**  Osserviamo innanzitutto che il ricevitore a correlazione commette errore nel caso in cui il rumore sovrapposto al segnale di ingresso sia casualmente "simile" ad una delle cosinusoidi utilizzate per la trasmissione. In tal caso, l'uscita dell'integratore relativo alla frequenza "simile" può superare quella relativa alla frequenza trasmessa, e corrotta dal medesimo rumore. All'aumentare di  $L$  (per  $f_b$  fisso) aumenta il periodo di simbolo  $T_s = \frac{\log_2 L}{f_b}$  e quindi diventa sempre più "difficile" per il rumore emulare "bene" una



<sup>36</sup>tipo: Sinclair Spectrum, Commodore Vic20 e 64 ... Come noto, le cassette audio soffrono di variazioni di velocità di trascinamento del nastro (*wow & flutter*), ma il PLL non ne risente.

<sup>37</sup>Tranne che, essendo ora presenti solo 2 frequenze, l'approssimazione (14.21) non è più corretta. In particolare, con riferimento alla fig. 14.19, è tanto meno corretta quanto più  $f_s$  è elevata, che corrisponde ad oscillazioni del  $\text{sinc}^2$  più estese in frequenza.

<sup>38</sup>Ovvero qualora siano soddisfatte le condizioni per  $f_0$  e  $\Delta$  valutate al § 14.12.1 per il caso di demodulazione coerente, e si verifichi la *sincronizzazione* tra le forme d'onda in ingresso ai correlatori del banco.

<sup>39</sup>Ovvero tenendo conto che (vedi § 13.2.3)  $f_b$  non può superare la capacità di canale (eq. (13.40)), che a sua volta non può superare il limite  $C_\infty$  espresso dalla (13.42).

<sup>40</sup>A pagina 396 è esposta una motivazione informale di questo comportamento.

della frequenza di segnalazione, e quindi si riduce la probabilità di errore. La nota 43 a pag. 359 propone una interpretazione analitica di questo fenomeno.

Chiaramente, all'aumentare di  $L$  aumenta proporzionalmente la complessità del ricevitore, che deve disporre di un numero di correlatori crescente. Pertanto, le prestazioni ideali per  $L$  che tende ad infinito rivestono solamente un interesse teorico.

### 14.6 Demodulazione incoerente

Nel caso in cui la portante di demodulazione non abbia la stessa fase di quella ricevuta, ci si trova nelle condizioni espote al § 10.2.3.1, ossia il piano dell'involuppo complesso risulta ruotato, rendendo impraticabili le tecniche di modulazione di fase, a meno di non adottare tecniche differenziali (§ 14.4).

In realtà è ancora praticabile la tecnica ook (*on off keying*), ovvero una modulazione PAM della portante con un impulso NRZ polare, oltre a quella dell'FSK *incoerente*. Per entrambe si tratta di rivelare la presenza/assenza di una sinusoide nel rumore, per la durata di un bit  $T_b$  o di un simbolo  $T_s$ , e si ricorre allo schema di demodulazione discusso al § 10.2.4 e riportato a fianco, in cui la portante di demodulazione è una di quelle dell'FSK, oppure l'unica nel caso di ook, ed il generico passa basso è realizzato come un integratore, ovvero con risposta impulsiva<sup>41</sup>  $h(t) = \frac{1}{T_s} \text{rect}_{T_s}(t)$ , ovvero ancora come un *filtro adattato* all'impulso di trasmissione  $g(t) = \text{rect}_{T_s}(t)$ <sup>42</sup>, in modo da scrivere il segnale ricevuto come

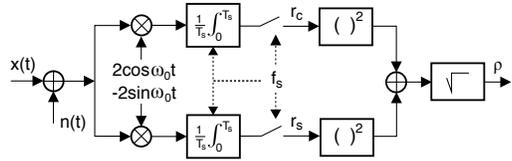


Figura 14.20: Demodulatore incoerente di involuppo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \text{rect}_{T_s}(t - kT_s) \cos(\omega_0 t + \theta)$$

in cui  $a_k = A$  se la frequenza  $f_0$  è attiva durante il simbolo  $k$ , oppure  $a_k = 0$  nel caso opposto. Il rumore  $n(t)$  in ingresso, con densità di potenza  $\frac{N_0}{2}$ , rende le grandezze di osservazione  $r_c$  e  $r_s$  due v.a., che nel caso di segnale presente hanno valor medio<sup>43</sup>  $m_c = A \cos \theta$  e  $m_s = A \sin \theta$ , oppure zero per segnale assente, mentre in entrambi i casi e per entrambi i rami la varianza risulta pari a<sup>44</sup>  $\sigma^2 = N_0/T_s$ .

La decisione se sia presente o meno la frequenza è basata sul *modulo* dell'involuppo complesso  $r = r_c + jr_s$ , ovvero  $\rho = \sqrt{r_c^2 + r_s^2}$ , ed attuata mediante l'approccio di massima verosimiglianza espoto al § 11.3.2. Nelle ipotesi poste, il caso in cui  $a_k = 0$  corrisponde ad osservare una v.a. di Rayleigh (pag. 308) con d.d.p.

$$p_P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$$

<sup>41</sup>Ad esempio realizzato mediante un *integrate and dump* (pag. 166), che deve essere *resettato* a fine  $T_s$ .

<sup>42</sup>Il fattore  $1/T_s$  che compare nell'espressione di  $h(t)$  rende l'energia dell'impulso complessivo  $g(t) * h(t) = \text{tri}_{2T_s}(t)$  (vedi eq. (3.25)) *normalizzata* rispetto a  $T_s$  (vedi § 3.8.7).

<sup>43</sup>Infatti il segnale demodulato (as es.) sul ramo in fase ha ampiezza costante  $A \frac{1}{T_s} \cos \theta$ , che risulta moltiplicata per  $T_s$  quando integrato su tale periodo.

<sup>44</sup>Infatti il filtro adattato ha una  $|G(f)|^2 = \text{sinc}^2(T_s f)$ , e dunque il rumore alla sua uscita (vedi § 11.1.4 e pag. 149) presenta una densità di potenza  $\mathcal{P}_n(f) = N_0 \text{sinc}^2(T_s f)$ . La potenza di rumore perciò risulta pari a  $P_n = \sigma^2 = \frac{N_0}{T_s}$ , in quanto  $n(t)$  è a media nulla, e  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(T_s f) = \frac{1}{T_s}$ . Quest'ultimo risultato può essere verificato considerando che  $\text{sinc}^2(T_s f)$  ha antitrasformata  $\frac{1}{T_s} \text{tri}_{2T_s}(t)$ , e che per la proprietà del valore iniziale (pag. 57)  $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(T_s f) = \frac{1}{T_s} \text{tri}_{2T_s}(t=0) = \frac{1}{T_s}$ .

mentre se  $a_k = A$  si osserva<sup>45</sup> una v.a. di Rice, con d.d.p.

$$p_P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}} \cdot I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right)$$

ed in questa circostanza si è trovato (eq. 11.16) che se le due ipotesi di segnale presente ( $H_1$ ) ed assente ( $H_0$ ) sono equiprobabili e la soglia di decisione è posta pari a  $A/2$ , la probabilità di errore può essere approssimata come  $P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{A^2}{8\sigma^2}}$ .

Nel caso dell'OOK, osserviamo che  $A^2/2$  è la potenza di una sinusoida di ampiezza  $A$ , ma se questa per metà del tempo (gli  $a_k = 0$ ) è spenta, la potenza si dimezza, e così risulta  $E_b = P_s T_b = \frac{A^2}{4} T_b$ ; sostituendo dunque  $\frac{A^2}{4} = \frac{E_b}{T_b}$  e  $\sigma^2 = N_0/T_b$  nell'espressione della  $P_e$  otteniamo

$$P_e^{OOK}(bit) = P_e^{2-FSK}(bit) = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2N_0}} \quad (14.23)$$

La stessa espressione descrive anche le prestazioni per una modulazione FSK a due livelli: in tal caso infatti la decisione avviene confrontando due v.a.  $\rho_1, \rho_2$  con distribuzione una di Rice e l'altra di Rayleigh, ottenute duplicando lo schema di fig. 14.20 per le due frequenze (ortogonali) utilizzate, associate ad uno stesso bit uno o zero, e dunque il problema statistico è identico al precedente. La figura 14.21 permette il confronto delle prestazioni tra le tecniche di modulazione binarie presentate.

Nel caso poi di una modulazione L-FSK *incoerente*, la decisione avviene scegliendo tra  $L$  v.a.  $\rho_i$  di cui una distribuita Rice e tutte le altre Rayleigh; lo sviluppo analitico è un po' più complesso, e fornisce un risultato che seppur peggiore del caso coerente, lo approssima abbastanza bene per  $L$  ed  $E_b/N_0$  elevati.

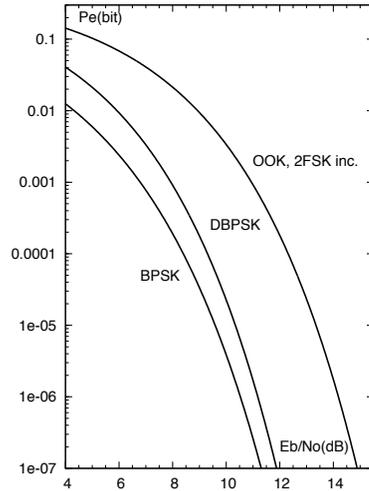


Figura 14.21: Confronto di prestazioni per demodulazione binaria coerente, differenziale, e incoerente

## 14.7 Schema riassuntivo delle prestazioni

La tabella 14.1 mette a confronto le prestazioni ottenibili con le tecniche di modulazione fin qui discusse, per un segnale dati a banda minima, e con simboli costituiti da  $M = \log_2 L$  bit. Se  $\gamma \neq 0$ , si deve aggiungere un termine  $(1 + \gamma) (1 - \frac{\gamma}{4})$  al denominatore sotto radice, procedendo come indicato al § 8.4.9.

## 14.8 Modulazione OFDM

La sigla sta per ORTHOGONAL FREQUENCY DIVISION MULTIPLEX, ossia *multiplazione a divisione di frequenza ortogonale*. Si tratta della tecnica di modulazione numerica adottata per le trasmissioni ADSL<sup>46</sup>, DVB-T, e WiFi, ed ha la particolarità di utilizzare in modo *ottimo* la banda del canale, e di ricondurre l'operazione di equalizzazione ad un prodotto tra vettori.

<sup>45</sup>La discussione a pag. 309 fa riferimento ad una sola v.a. (quella in fase) a media  $A$ , mentre nel caso attuale sia ha  $\rho = A$  ma con una fase qualsiasi. Per le proprietà di simmetria radiale del problema, la conclusione è valida anche nel nostro caso.

<sup>46</sup>ADSL = Asymmetric Digital Subscriber Line, vedi § 19.9.4.

Metodo	bit/simbolo	$P_e(\text{bit})$ con codifica di Gray ed impulso a banda minima	Banda RF	$\rho$ [bit/sec/Hz]
BPSK	1	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\}$	$f_b (1 + \gamma)$	$\frac{1}{(1+\gamma)}$
QPSK	2	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\}$	$\frac{f_b}{2} (1 + \gamma)$	$\frac{2}{(1+\gamma)}$
OOK, 2-FSK	1	$\frac{1}{2} \exp \left( -\frac{E_b}{2N_0} \right)$ (incoerente, impulso RZ)	$\sim 2f_b$	$\sim \frac{1}{2}$
L-ASK	$M$	$\frac{1}{M} \left( 1 - \frac{1}{L} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{3 \frac{E_b}{N_0} \frac{M}{L^2 - 1}} \right\}$	$f_b \frac{(1+\gamma)}{M}$	$\frac{M}{(1+\gamma)}$
L-PSK	$M$	$\frac{1}{M} \operatorname{erfc} \left\{ \sin \left( \frac{\pi}{L} \right) \sqrt{\frac{E_b}{N_0} M} \right\}$	$f_b \frac{(1+\gamma)}{M}$	$\frac{M}{(1+\gamma)}$
L-QAM	$M$	$\frac{2}{M} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{L}} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} \frac{E_b}{N_0} \frac{M}{L-1}} \right\}$	$f_b \frac{(1+\gamma)}{M}$	$\frac{M}{(1+\gamma)}$
L-FSK incoerente	$M$	vedi pag. 398	$f_b \frac{L}{M}$	$\frac{M}{L}$
L-FSK coerente	$M$	eq (14.22) a pag. 396	$f_b \frac{L}{2M}$	$\frac{M}{2L}$

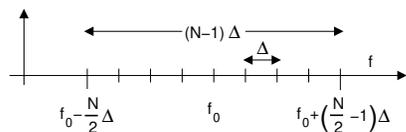
Tabella 14.1: Confronto tra metodi di modulazione numerica

### 14.8.1 Rappresentazione nel tempo ed in frequenza

La modulazione OFDM suddivide una sequenza binaria su  $N$  diversi flussi, trasmessi a divisione di frequenza mediante forme d'onda ortogonali. Concettualmente possiamo pensare l'OFDM come una evoluzione<sup>47</sup> della modulazione FSK, in cui le diverse frequenze sono spaziate tra loro di  $\Delta$  Hz come descritto dall'espressione

$$f_n = f_0 + \Delta \cdot \left( n - \frac{N}{2} \right) \tag{14.24}$$

con  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  e sono utilizzate contemporaneamente, mentre su ognuna di esse si realizza una modulazione numerica anche a più livelli (es. QPSK o QAM) con impulso NRZ rettangolare di durata  $T$ .



Indicando quindi con  $a_n^k = a_{n_c}^k + j a_{n_s}^k$  le coordinate nel piano dell'involuppo complesso di un generico punto della costellazione realizzata per la portante  $f_n$  all'istante  $t = kT$ , il segnale OFDM può essere scritto come

$$\begin{aligned} x_{OFDM}(t) &= \sum_k \operatorname{rect}_T(t - kT) \sum_{n=0}^{N-1} \left( a_{n_c}^k \cos \omega_n(t - kT) - a_{n_s}^k \sin \omega_n(t - kT) \right) \tag{14.25} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) * \left( \operatorname{rect}_T(t) \sum_{n=0}^{N-1} \left( a_{n_c}^k \cos \omega_n t - a_{n_s}^k \sin \omega_n t \right) \right) \tag{14.26} \end{aligned}$$

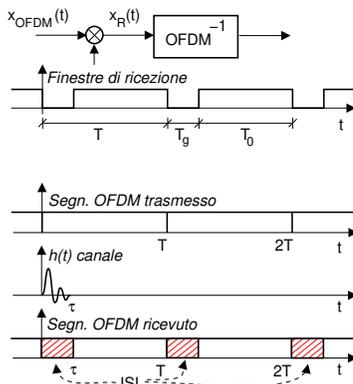
<sup>47</sup>La trasmissione numerica contemporanea su più portanti è a volte indicata con il nome di *Multi Carrier Modulation* (MCM) o *Discrete Multi Tone* (DMT). La modulazione FSK utilizza invece una portante alla volta, in quanto la sua definizione prevede la presenza di un solo oscillatore.

in cui la prima sommatoria (su  $k$ ) identifica gli istanti di simbolo, e la seconda (su  $n$ ) le diverse portanti. Tale segnale presenta<sup>48</sup> un inviluppo complesso rispetto a  $f_0$  pari a

$$\underline{x}_{OFDM}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) * \left( \text{rect}_T(t) \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n e^{j2\pi[\Delta(n - \frac{N}{2})]t} \right) \quad (14.27)$$

L'espressione (14.26) non vincola la durata  $T$  di un simbolo ad un valore particolare; deve però risultare  $T \geq T_0 = \frac{1}{\Delta}$ , in quanto il ricevitore opera sul segnale  $x_R(t)$  ottenuto per moltiplicazione con una finestra temporale di estensione  $T_0 = \frac{1}{\Delta}$ , allo scopo di rendere ortogonali tra loro<sup>49</sup> le frequenze  $f_n = f_0 + \Delta \cdot (n - \frac{N}{2})$ , e mettere in grado il ricevitore di calcolare i valori  $\underline{a}_n^k$  per tutti gli  $n$  presenti all'istante  $t = kT$ , mediante un ricevitore concettualmente simile a quello a correlazione presentato a pag. 394.

L'intervallo  $T_0$  è detto *periodo principale* del simbolo OFDM, mentre la differenza  $T_g = T - T_0$  è indicata come *tempo di guardia*, od anche *preambolo*, ed il segnale ricevuto durante  $T_g$  non è usato in ricezione. Il motivo di tale "spreco"<sup>50</sup> risiede nel fatto che, in presenza di un canale che introduce distorsione lineare, la parte iniziale di ogni simbolo risulta corrotta (vedi figura) da una interferenza intersimbolica (ISI) dovuta al risultato della convoluzione tra la coda del simbolo precedente e l' $h(t)$  del canale. Consideriamo ora un solo simbolo (fissiamo  $k = 0$  e consideriamo l'origine dei tempi ritardata di  $T_g$ ) ricevuto nell'intervallo  $T_0 = \frac{1}{\Delta} \leq T$ , con inviluppo complesso



$$\underline{x}_{T_0}(t) = \text{rect}_{T_0}(t) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n e^{j2\pi[\Delta(n - \frac{N}{2})]t} \quad (14.28)$$

e calcoliamone la trasformata per determinare l'occupazione di banda:

$$\underline{X}_{T_0}(f) = T_0 \text{sinc}(fT_0) * \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n \delta\left(f - \Delta\left(n - \frac{N}{2}\right)\right) = \quad (14.29)$$

$$= T_0 \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n \text{sinc}\left(\left(f - \Delta\left(n - \frac{N}{2}\right)\right)T_0\right) \quad (14.30)$$

<sup>48</sup>Osserviamo innanzitutto che per un segnale

$$x(t) = \cos \omega_1 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t})$$

risulta  $x^+(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_1 t}$ , e quindi il suo inviluppo complesso  $\underline{x}(t)$  calcolato rispetto ad  $f_0$  vale

$$\underline{x}(t) = 2x^+(t) e^{-j\omega_0 t} = 2 \frac{1}{2} e^{j\omega_1 t} e^{-j\omega_0 t} = e^{j(\omega_1 - \omega_0)t}$$

Allo stesso modo, si ottiene che per  $y(t) = \sin \omega_1 t$  risulta  $\underline{y}(t) = \frac{1}{j} e^{j(\omega_1 - \omega_0)t}$ . Pertanto, considerando che  $\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j$ , ad ogni termine  $z_k(t) = a_{n_c}^k \cos \omega_n t - a_{n_s}^k \sin \omega_n t$  corrisponde un  $\underline{z}(t) = a_{n_c}^k e^{j(\omega_n - \omega_0)t} + j a_{n_s}^k e^{j(\omega_n - \omega_0)t} = \underline{a}_n^k e^{j2\pi(f_n - f_0)t}$ . Applicando ora la (14.24) si ottiene  $f_n - f_0 = \Delta \cdot (n - \frac{N}{2})$  e quindi la (14.27).

<sup>49</sup>Come mostrato per il caso *incoerente* discusso al § 14.12.1

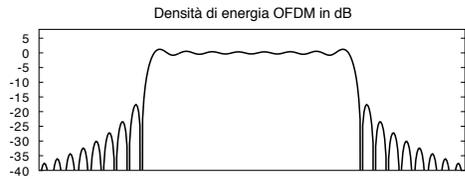
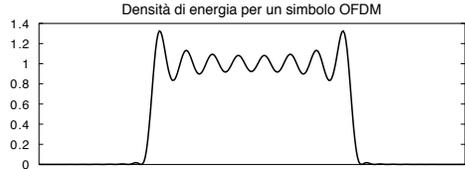
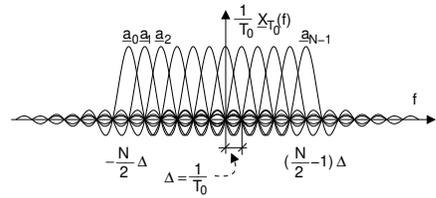
<sup>50</sup>Infatti la frequenza di simbolo  $f_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0 + T_g}$  risulta ridotta rispetto al caso in cui  $T_g$  sia nullo.

Otteniamo allora la costruzione grafica mostrata alla figura a lato, dove si evidenzia come ogni funzione *sinc* risulti moltiplicata per uno dei coefficienti  $\underline{a}_n$ , che potrebbero quindi essere ri-ottenuti in ricezione campionando (in modo complesso)  $\underline{X}(f)$  su frequenze spaziate di  $\Delta$ .

Per quanto riguarda la densità di potenza  $\mathcal{P}_{\underline{x}_R}(f)$  dell'involuppo complesso  $\underline{x}_R(t)$  ricevuto e finestrato, consideriamo l'espressione (vedi § 6.3.1)

$$\mathcal{P}_{\underline{x}_R}(f) = \frac{1}{T} E \left\{ \left| \underline{X}_{T_0}(f) \right|^2 \right\} \quad (14.31)$$

in cui  $\left| \underline{X}_{T_0}(f) \right|^2$  è la densità di energia di un simbolo OFDM (eq. (14.30)): la figura a lato ne mostra l'andamento (in scala lineare ed in dB) per un simbolo a 32 portanti, di cui 16 (esterne) *spente* (vedi appresso), mentre per le 16 centrali si è posto  $\underline{a}_n = 1$ . Notiamo come si ottenga una densità spettrale di potenza *quasi rettangolare* pur utilizzando simboli a durata finita.



**Potenza complessiva** Mostriamo ora come mettere in relazione la potenza ricevuta complessiva  $\mathcal{P}_{x_R}$  di  $x_R(t)$  e del suo involuppo complesso  $\mathcal{P}_{\underline{x}_R}$

$$\mathcal{P}_{x_R} = \int \mathcal{P}_{\underline{x}_R}(f) df \quad (14.32)$$

con la dinamica dei valori  $\underline{a}_n$  utilizzati per modulare le singole portanti: nel seguito ci riferiamo a costellazioni L-QAM, indicando con  $M_n$  ed  $L_n = 2^{M_n}$  rispettivamente il numero di bit e di punti di costellazione per la portante n-esima, ad ognuna delle quali la (14.26) attribuisce una potenza  $\mathcal{P}_n$ .

Per calcolare la (14.32) mediante la (14.31) utilizzando l'espressione di  $\underline{X}_{T_0}(f)$  fornita dalla (14.30), osserviamo che le funzioni *sinc* ( $fT_0$ ) che vi compaiono *sono ortogonali* se spaziate per un multiplo di  $\Delta = \frac{1}{T_0}$ , ovvero (vedi § 4.1.3) sussiste la condizione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}((f - n\Delta)T_0) \text{sinc}((f - m\Delta)T_0) df = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \frac{1}{T_0} & \text{se } n = m \end{cases}$$

Pertanto, introducendo una insignificante<sup>51</sup> traslazione di  $f$  pari a  $\frac{N}{2}\Delta$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\underline{x}_R} &= \frac{1}{T} \int E \left\{ \left| \underline{X}_{T_0}(f) \right|^2 \right\} df = \\ &= \frac{1}{T} \int T_0^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E \{ \underline{a}_n \underline{a}_m^* \} \text{sinc}((f - \Delta n)T_0) \text{sinc}((f - \Delta m)T_0) df = \\ &= \frac{T_0^2}{T} \sum_{n=0}^{N-1} E \{ \underline{a}_n^2 \} \int \text{sinc}^2((f - \Delta n)T_0) df = \frac{T_0^2}{T} \sum_{n=0}^{N-1} E \{ \underline{a}_n^2 \} \frac{1}{T_0} = \frac{T_0}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_{\underline{a}_n}^2 \end{aligned}$$

<sup>51</sup>Equivalentemente a definire l'involuppo complesso con riferimento ad una portante a frequenza pari alla prima delle  $f_n$ .

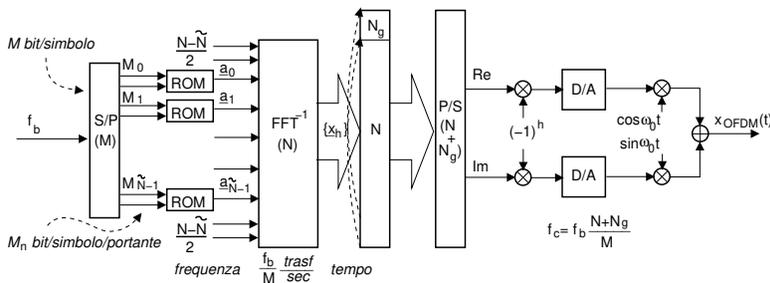


Figura 14.22: Architettura di un modulatore OFDM numerico

in quanto i termini *incrociati* prodotti dalla doppia sommatoria si annullano<sup>52</sup>.

Scegliendo il lato della costellazione QAM in modo opportuno<sup>53</sup>, si può ottenere  $\sigma_{\underline{a}_n}^2 = E \{ \underline{a}_n^2 \} = 2\mathcal{P}_n$ , in cui  $\mathcal{P}_n$  è la potenza per la n-esima portante QAM; considerando infine (vedi eq. (9.20) a pag. 260) che

$$\mathcal{P}_{x_R} = \mathcal{P}_{x_R}^+ + \mathcal{P}_{x_R}^- = \frac{2}{4} \mathcal{P}_{x_R} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{x_R}$$

possiamo scrivere

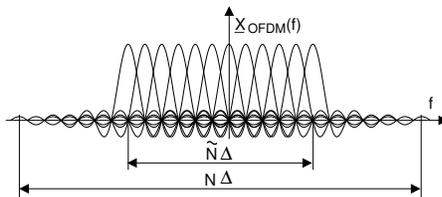
$$\mathcal{P}_{x_R} = \frac{1}{2} \frac{T_0}{T} \sum_{n=0}^{N-1} 2\mathcal{P}_n = \frac{T_0}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{P}_n$$

in cui è evidenziata la perdita di potenza legata alla presenza del preambolo.

### 14.8.2 Architettura di modulazione

Una caratteristica fondamentale della modulazione OFDM è quella di essere realizzata senza *oscillatori e integratori*, ma attraverso l'uso della elaborazione numerica. Con riferimento alla figura 14.22, il flusso binario a frequenza  $f_b$  viene *parallelizzato* per formare simboli ad  $L = 2^M$  livelli a frequenza  $f_s = \frac{f_b}{M} = \frac{f_b}{\log_2 L}$ . Questi  $M$  bit/simbolo sono suddivisi in  $\tilde{N}$  gruppi di  $M_n$  ( $n = 0, 1, \dots, \tilde{N}-1$ ) bit ciascuno, con  $M = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} M_n$ , e ad ogni gruppo di  $M_n$  bit corrisponde un punto di costellazione  $\underline{a}_n$ , scelto tra  $L_n = 2^{M_n}$  punti possibili.

La sequenza  $\{\underline{a}_n\}$  viene poi *arricchita* con  $N - \tilde{N}$  valori nulli (metà all'inizio e metà alla fine) ottenendo una nuova sequenza  $\{\underline{a}_n\}$  di  $N$  valori, in modo che la sommatoria in (14.30) dia luogo ad un involuppo complesso praticamente limitato in banda (vedi figura) tra (circa)  $\pm \frac{N}{2} \cdot \Delta$  Hz, che può essere pertanto rappresentato dai suoi campioni  $\underline{x}_{T_0}$  ( $hT_c$ ) presi a frequenza  $f_c = N \cdot$



<sup>52</sup>Vedi nota 21 a pag. 39

<sup>53</sup>Al § 8.8.1 si è mostrato che se gli  $a_n$  sono v.a. indipendenti e distribuite uniformemente su  $L'$  livelli tra  $\pm A$ , si ottiene  $\sigma_a^2 = \frac{A^2}{3} \frac{L'+1}{L'-1}$ . Nel caso di una costellazione QAM quadrata ad  $L$  livelli si ha  $L' = \sqrt{L}$ , e se le realizzazioni sui rami in fase e quadratura sono indipendenti risulta  $\sigma_{\underline{a}_n}^2 = E \{ (a_{nc} + ja_{ns})^2 \} = 2\sigma_a^2 = \frac{2A^2}{3} \frac{\sqrt{L}+1}{\sqrt{L}-1}$ ; volendo eguagliare tale valore a  $2\mathcal{P}_n$ , occorre quindi scegliere  $A = \sqrt{3\mathcal{P}_n \frac{\sqrt{L}-1}{\sqrt{L}+1}}$ .

$\Delta \frac{\text{campioni}}{\text{secondo}}$ . Il blocco indicato come  $\text{FFT}^{-1}$  svolge esattamente il calcolo di campioni temporali di  $\underline{x}_{T_0}$ , calcolando<sup>54</sup>

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi \frac{n}{N} h} = \frac{1}{(-1)^h} \underline{x}_{T_0}(hT_c) \quad (14.33)$$

Il risultato della  $\text{FFT}^{-1}$  è quindi una sequenza di valori complessi  $\{\underline{x}_h\}$ , che a meno di un segno alterno rappresentano i campioni dell'involuppo complesso  $\underline{x}_{T_0}(t)$  espresso dalla (14.28) relativamente ad un simbolo. Dopodiché, il preambolo da trasmettere durante il tempo di guardia  $T_g$  è ottenuto *aggiungendo* in testa a  $\{\underline{x}_h\}$  un gruppo di campioni prelevati dalla coda<sup>55</sup>.

Infine, le parti reale ed immaginaria di  $\{\underline{x}_h\}$  sono inviate ad una coppia di convertitori D/A operanti a  $f_c = \frac{N+N_g}{T} = \frac{N}{T_0} = N\Delta$  in modo da ottenere le c.a. di b.f., utilizzate per produrre il segnale  $x_{OFDM}(t)$  mediante una coppia di modulatori in fase e quadratura.

### 14.8.3 Efficienza dell'OFDM

Come vedremo al § 14.8.9, questa è una tra le tecniche di modulazione che meglio approssima i risultati della teoria dell'informazione, tanto più quanto maggiore è la sua efficienza. Quest'ultima si ottiene considerando che solo  $\tilde{N}$  portanti su  $N$  trasportano informazione, e che solo  $f_c \cdot T_0$  campioni su  $f_c \cdot T$  sono unici; combinando queste quantità si ottiene

$$\rho = \frac{\tilde{N} T_0}{N T} = \frac{\tilde{N} T - T_g}{N T} = \frac{\tilde{N}}{N} \left( 1 - \frac{T_g}{T} \right)$$

che misura la frazione di segnale utile rispetto all'occupazione di banda ed al numero di campioni/simbolo presenti in  $x_{OFDM}(t)$ . La ridondanza introdotta (le portanti vuote ed il preambolo) ha gli stessi scopi di quella introdotta dal roll-off  $\gamma$  di un impulso a coseno rialzato, in quanto

<sup>54</sup>La (14.33) è in qualche modo simile alla formula di ricostruzione (2.7) (vedi pag. 32) per il segnale (complesso) periodico limitato in banda  $\pm \frac{1}{2} F$

$$\underline{x}(t) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} X_m e^{j2\pi m F t}$$

che calcolata per  $t = hT_c = \frac{h}{N\Delta}$  fornisce  $\underline{x}(hT_c) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} X_m e^{j2\pi \frac{m}{N} h}$ . Ponendo ora  $n = m + \frac{N}{2}$  e  $Y_n = X_{n-\frac{N}{2}}$  otteniamo

$$\underline{x}(hT_c) = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n e^{j2\pi \frac{n-N/2}{N} h} = e^{-j\pi h} \sum_{n=0}^{N-1} Y_n e^{j2\pi \frac{n}{N} h}$$

dato che  $(n - \frac{N}{2}) \frac{1}{N} = \frac{n}{N} - \frac{1}{2}$ . Osservando ora che dalla (14.28) con  $T_c = \frac{1}{N\Delta}$  si ha

$$\underline{x}(hT_c) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi \Delta (n - \frac{N}{2}) \frac{h}{N\Delta}} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi \Delta \frac{n-N/2}{N} h} = e^{j\pi h} \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi \frac{n}{N} h}$$

e che  $e^{-j\pi h} = (-1)^h$ , si ottiene la (14.33).

La coppia di relazioni

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} x_h e^{-j2\pi \frac{h}{N} n} \quad \text{e} \quad x_h = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j2\pi \frac{n}{N} h}$$

sono chiamate *Discrete Fourier Transform* (DFT) diretta e inversa, in quanto costituiscono la versione discreta della trasformata di Fourier (vedi § 4.4), e consentono il calcolo di una serie di campioni in frequenza a partire da campioni nel tempo e viceversa.

<sup>55</sup>In effetti la (14.33) fornisce un risultato periodico rispetto ad  $h$ , con periodo  $N$ , ossia con periodo  $N \cdot T_c = N \frac{1}{f_c} = N \frac{1}{N\Delta} = \frac{1}{\Delta} = T_0$  per la variabile temporale. Per questo motivo il *preambolo* dell'OFDM è detto anche *estensione ciclica*.

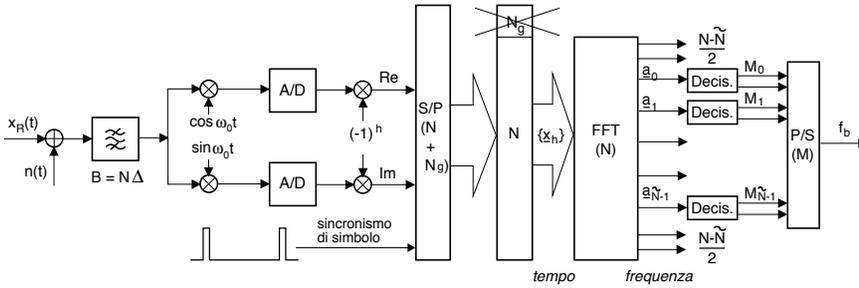


Figura 14.23: Architettura di un demodulatore OFDM numerico

evita che si verifichino fenomeni di interferenza tra simboli, e realizza un segnale limitato in banda. Osserviamo che l'efficienza migliora all'aumentare di  $T$  e di  $N$ , dato che  $T_g$  ed  $N - \tilde{N}$  sono fissi.

**Esercizio** Un flusso binario a velocità  $f_b = 1$  Mbps è trasmesso mediante modulazione OFDM con portante 1 GHz, caratterizzata da:  $\tilde{N} = 464$  portanti attive su  $N = 512$  totali,  $M_n = 2$  bit a portante, con modulazione QPSK, e  $T_g = 28 \mu\text{sec}$  di tempo di guardia. Calcolare: 1) il numero di bit/simbolo  $M$  ed il corrispondente periodo di simbolo  $T$  e 2) la spaziatura tra portanti  $\Delta = 1/T_0$  e la corrispondente occupazione di banda.

1.  $M = M_n \cdot \tilde{N} = 2 \cdot 464 = 928$  bit/simbolo, e  
 $T = 1/f_b \cdot M = 10^{-6} \cdot 928 = 928 \mu\text{sec}$ ;
2.  $T_0 = T - T_g = 928 - 28 = 0.9$  msec, dunque  $\Delta = 1/T_0 \simeq 1.11$  KHz, e  
 $B = N \cdot \Delta = 512 \cdot 1.11 \cdot 10^3 \simeq 568$  KHz.

#### 14.8.4 Architettura di demodulazione

Per ottenere gli elementi della sequenza  $\{a_n\}$  e quindi il gruppo di  $M$  bit che hanno originato il simbolo, si adotta l'architettura mostrata in figura 14.23 che svolge una azione del tutto inversa a quella del modulatore. Innanzitutto il ricevitore deve acquisire il sincronismo di frequenza (vedi § 14.8.11), in modo che il segnale ricevuto possa essere demodulato in fase e quadratura, e le C.A. di B.F. campionate a frequenza  $f_c = \frac{N+N_g}{T}$ . Dopo l'inversione di segno ad indici alterni, e dopo avere acquisito il sincronismo di simbolo,  $f_c \cdot T$  campioni complessi sono bufferizzati, quindi gli  $N_g$  campioni del preambolo rimossi, e sugli  $N$  valori del periodo principale viene calcolata una FFT (vedi nota 54), ottenendo i valori

$$\frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} x_h e^{-j2\pi \frac{h}{N} n} = X_{T_0} \left( \left( n - \frac{N}{2} \right) \Delta \right) = a_n \quad (14.34)$$

Solo gli  $\tilde{N}$  valori centrali sono avviati verso altrettanti decisorie, che determinano il punto di costellazione più vicino all' $a_n$  ricevuto per ogni portante, associandovi il relativo codice di  $M_n$  bit, ed il risultato finale è quindi serializzato per produrre gli  $M$  bit che hanno dato origine al simbolo.

#### 14.8.5 Prestazioni

Al § 14.12.2 viene svolta una laboriosa analisi per arrivare a valutare l'espressione della  $P_e^{bit}$  in caso di tempo di guardia  $T_g = 0$  ed in presenza di rumore additivo gaussiano limitato alla

stessa banda del segnale; il risultato è confrontato con quello ottenibile per una trasmissione QAM che occupi la medesima banda dell'OFDM, trasporti lo stesso flusso  $f_b$ , utilizzi ovviamente una sola portante con un adeguato numero di livelli, e adotti un impulso a coseno rialzato che determini la stessa (in)efficienza spettrale legata nell'OFDM alla presenza delle  $\tilde{N}$  portanti spente. Il risultato è che le prestazioni *sono identiche*.

*E allora dov'è la convenienza? E' il tema delle prossime sottosezioni.*

### 14.8.6 Sensibilità alla temporizzazione

Con l'OFDM *non siamo* nelle condizioni di demodulazione coerente come per l'FSK (§ 14.5.1), e le portanti del simbolo OFDM ricevuto mantengono ortogonalità (§ 14.12.1) purché finestrate su di un periodo  $T_0 = \frac{1}{\Delta}$ . Pertanto, nel caso in cui il ricevitore non acquisisca una perfetta sincronizzazione di simbolo, se l'ISI introdotta dal canale ha una durata minore di  $T_g$ , la FFT di demodulazione può operare su di un gruppo di campioni presi a partire dalla coda del preambolo, riducendo così la sensibilità rispetto agli errori di sincronizzazione.

### 14.8.7 Equalizzazione

Consideriamo il caso in cui la trasmissione attraverso un canale la cui  $h(t)$  è descritta da un involuppo complesso  $\underline{H}(f)$  in cui il modulo non è costante e/o la fase non è lineare: in tal caso  $\underline{X}_{T_0}(f)$  di (14.30) si altera a causa del filtraggio, ed i suoi campioni  $\underline{a}_n$  restituiti dalla (14.34) si modificano in  $\tilde{\underline{a}}_n = \underline{a}_n \cdot \underline{H}_n$  in cui  $\underline{H}_n = H_n e^{j\varphi_n} = \underline{H}(f - \Delta(n - \frac{N}{2}))$  sono i campioni (complessi) di  $\underline{H}(f)$ . Come anticipato, l'equalizzazione è quindi ridotta ad eseguire un semplice prodotto tra la sequenza dei valori ricevuti  $\tilde{\underline{a}}_n$  e quella di equalizzazione  $\frac{e^{-j\varphi_n}}{H_n}$  che inverte l'effetto del canale, ovviamente purché si conosca  $\underline{H}(f)$ , od una sua stima.

### 14.8.8 Codifica differenziale

Nel caso in cui la distorsione lineare introdotta dal canale non sia *eccessiva*, si può evitare del tutto lo stadio di equalizzazione, e ricorrere ad una *codifica differenziale* (§ 14.4), che risulta particolarmente semplice qualora le sottoportanti siano modulate PSK o QPSK. In tal caso infatti il processo di demodulazione per ogni sottoportante non risente di variazioni di guadagno, ovvero variazioni di  $H_n = |\underline{H}_n|$ , e dunque devono essere compensate le sole variazioni di fase  $\varphi_n$  tra una portante e l'altra, ognuna delle quali determina la corrispondente rotazione (vedi nota a pag. 18) del piano dell'involuppo complesso su cui sono riferiti gli  $\underline{a}_n$ , rispetto alla disposizione degli assi per la portante  $n - 1$ .

Acquisendo dunque un primo riferimento di fase da una *portante pilota* (§ 14.8.11) sempre accesa senza trasportare informazione, si può prendere quello per demodulare la portante successiva, acquisire da questa un nuovo riferimento di fase, e iterare il procedimento per tutte le portanti. Questo risultato si ottiene applicando la teoria del § 14.4 alla sequenza simbolica di valori complessi  $\underline{a}_n$  da trasmettere, sostituendo nelle (14.15) e (14.16) l'OR esclusivo con una operazione di prodotto, ed aggiungendo una operazione di coniugato, come mostrato in fig. 14.24, in cui  $R$  rappresenta un ritardo unitario.

Dal lato della trasmissione, le portanti sono dunque modulate a partire dalla sequenza

$$\underline{d}_n = \underline{a}_n \cdot \underline{d}_{n-1}$$

con  $n = 0, 1, \dots, \tilde{N} - 1$ , avendo posto  $\underline{d}_0 = 1$ . In assenza di rumore e di distorsione lineare la sequenza  $\underline{d}_n$  è ricevuta inalterata, ed è così disponibile in uscita dal demodulatore OFDM; da

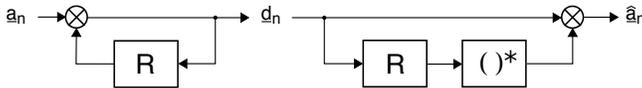


Figura 14.24: Codifica differenziale per simboli complessi,  $R$  rappresenta un ritardo

essa si ottiene quindi

$$\hat{a}_n = \underline{d}_n \cdot \underline{d}_{n-1}^* = \underline{a}_n \cdot \underline{d}_{n-1} \cdot \underline{d}_{n-1}^* = \underline{a}_n \cdot |\underline{d}_{n-1}|^2 \quad (14.35)$$

che presenta dunque la stessa fase di  $\underline{a}_n$ . In presenza di distorsione lineare, al posto di  $\underline{d}_n$  si riceve  $\tilde{\underline{d}}_n = \underline{d}_n \cdot \underline{H}_n$  in cui  $\underline{H}_n = H_n e^{j\varphi_n}$  sono i campioni della risposta in frequenza del canale, e dunque la (14.35) fornisce

$$\hat{a}_n = \tilde{\underline{d}}_n \cdot \tilde{\underline{d}}_{n-1}^* = \underline{a}_n \cdot \underline{d}_{n-1} \cdot \underline{H}_n \cdot \underline{d}_{n-1}^* \cdot \underline{H}_{n-1}^* = \underline{a}_n \cdot |\underline{d}_{n-1}|^2 \cdot \Delta H_n \cdot e^{j\Delta\varphi_n}$$

in cui  $\Delta H_n = |\underline{H}_n \underline{H}_{n-1}^*|$  (ma il modulo non ci interessa), e  $\Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$  è la differenza tra i valori della risposta di fase del canale valutata per due portanti contigue, e rappresenta l'entità di cui è ruotato il piano dell'involuppo per i simboli trasportati dalle due portanti. Pertanto, se questa è di lieve entità (essendo le portanti vicine), produce un errore trascurabile.

Accenniamo brevemente ad un'ulteriore possibilità di applicare il principio differenziale, oltre che portante per portante, anche ad interi simboli OFDM consecutivi: in questo caso il vettore di simboli  $\underline{a}_n^k$  da trasmettere all'istante  $k$  viene combinato con i valori del vettore trasmesso al simbolo precedente  $k-1$ , ovvero  $\underline{d}_n^k = \underline{a}_n^k \cdot \underline{d}_{n-1}^{k-1}$ . In questo modo possono essere contrastati i fenomeni tempo-varianti che modificano il canale, per una stessa portante  $n$ , simbolo dopo simbolo.

### 14.8.9 Ottimalità

Come stiamo per mostrare, questa proprietà è intimamente legata alla possibilità dell'OFDM di assegnare valori di potenza differenti alle diverse portanti.

La trasmissione numerica con una  $f_b$  elevata, eseguita utilizzando una tecnica ad una sola portante, deve necessariamente occupare una banda molto ampia, rendendo scarsamente applicabile la semplificazione di cui al § 12.1.2.4; in tal caso  $H(f)$  presenta distorsione di ampiezza, la cui equalizzazione (§ 15.4) causa una *colorazione* del rumore in ingresso al demodulatore, ed un peggioramento delle prestazioni. Un problema analogo nasce nel caso in cui il rumore non sia bianco, ad esempio perché derivante da un segnale interferente.

In entrambi i casi, per tenere conto dell'andamento incostante di  $\mathcal{P}_N(f)$ , la valutazione della *capacità di canale*<sup>56</sup>  $C = W \log_2 \left( 1 + \frac{\mathcal{P}_r}{W N_0} \right)$  valida in presenza di un rumore bianco  $\mathcal{P}_N(f) = \frac{N_0}{2}$  e con una potenza ricevuta  $\mathcal{P}_r$  in una banda (positiva)  $W$ , si modifica come segue. Se consideriamo il canale scomposto in *infinite sottobande* entro le quali le densità di potenza di segnale e di rumore possono ritenersi costanti, l'espressione della capacità diviene:

$$C = \sup_{\mathcal{P}_r(f)} \int_{f \in I_f} \log_2 \left( 1 + \frac{\mathcal{P}_r(f)}{\mathcal{P}_N(f)} \right) df \quad (14.36)$$

<sup>56</sup>Come discusso ai § 13.2.3 e 13.2.4, il risultato della teoria di Shannon asserisce che  $f_b = C$  è la massima velocità di trasmissione per cui si può (teoricamente) conseguire una probabilità di errore nulla, ma anche che il canale consegue capacità  $C$  massima a seguito di una oculata scelta di come trasmettere il messaggio.

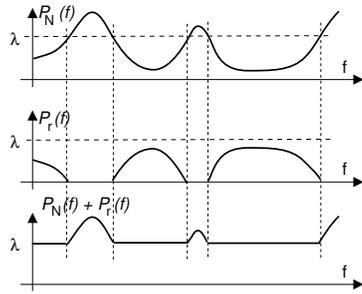
in cui  $I_f$  rappresenta l'insieme delle frequenze in cui è presente il segnale, ovvero  $I_f = \{f : \mathcal{P}_r(f) > 0\}$ , e  $\mathcal{P}_r(f)$  viene fatto variare in tutti i modi possibili, con i vincoli  $\int_{f \in I_f} \mathcal{P}_r(f) df = \mathcal{P}_r$ , e  $\mathcal{P}_r(f) \geq 0$ . La (14.36) asserisce quindi che, nel caso in cui  $\mathcal{P}_N(f)$  in ingresso al canale non sia bianco, la massima capacità trasmissiva  $C$  (e dunque velocità  $f_b$ ) può essere raggiunta *sagomando in modo opportuno* la densità di potenza  $\mathcal{P}_r(f)$  del segnale ricevuto.

Per determinare l'andamento ottimo<sup>57</sup> di  $\mathcal{P}_r(f)$  si ricorre al *calcolo delle variazioni* basato sui *moltiplicatori di Lagrange*<sup>58</sup>, che in questa sede non approfondiamo, ottenendo la soluzione

$$\mathcal{P}_r(f) + \mathcal{P}_N(f) = \begin{cases} \lambda & \text{se } \mathcal{P}_N(f) < \lambda \\ \mathcal{P}_N(f) & \text{se } \mathcal{P}_N(f) \geq \lambda \end{cases} \quad (14.37)$$

detta anche *del riempimento d'acqua* perché asserisce che (vedi figura) il segnale debba essere presente in misura maggiore nelle regioni di frequenza dove il rumore è minore. La costante  $\lambda$  è scelta in modo tale da ottenere  $\int \mathcal{P}_r(f) df = \mathcal{P}_r$ .

In un sistema di modulazione numerica a singola portante,  $\mathcal{P}_r(f)$  non può essere modificato a piacere, in quanto il suo andamento è vincolato dal particolare formatore di impulsi  $G(f)$  scelto per ottenere una ricezione priva di ISI. Nel caso dell'OFDM invece, la potenza assegnata a ciascuna portante può essere variata liberamente, e se la  $\mathcal{P}_r(f)$  che realizza le condizioni (14.37) viene resa nota al modulatore, è possibile avvicinarsi alla velocità massima permessa dalla (14.36).



**Bit loading** In particolare, si ottiene che la massima velocità  $f_b$  è conseguibile attribuendo a tutte le portanti la medesima probabilità di errore, e quindi in definitiva determinando dei valori  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_n$  per ogni portante  $n = 0, 1, \dots, \tilde{N} - 1$  tali da rendere le  $P_{e/n} = P_e$ . Questo risultato può essere ottenuto scegliendo le potenze  $\mathcal{P}_n$  in accordo alla (14.37), e quindi trasmettere (o caricare) più bit  $M_n$  sulle portanti  $n$  per le quali  $\mathcal{P}_n$  è maggiore.

### 14.8.10 Codifica

Abbiamo appena mostrato come, conoscendo la  $\mathcal{P}_N(f)$  e la  $H(f)$  del canale, sia possibile equalizzare  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{\mathcal{P}_r(f)}{|H(f)|^2}$  e al contempo soddisfare (14.37) e rendere massima la  $f_b$ . Nel caso di collegamenti tempo-varianti però, la  $H(f)$  non è nota, ed anche se lo fosse non esiste garanzia che rimanga costante. In tal caso allora non ha senso determinare una distribuzione ottima della potenza e dei bit sulle portanti, mentre invece occorre aggiungere della ridondanza al segnale trasmesso mediante un codice di canale, allo scopo di correggere i bit errati.

Osserviamo ora che, nel caso di una modulazione a portante singola, in presenza di una  $H(f)$  tempo-variante, il processo di equalizzazione è particolarmente complesso in quanto deve *inseguire* le variazioni di  $H(f)$ . Se l'equalizzazione non è perfetta, insorge ISI e la trasmissione può divenire rapidamente così piena di errori da renderne impossibile la correzione anche adottando codici di canale.

<sup>57</sup>Ovvero, che rende massima la (14.36)

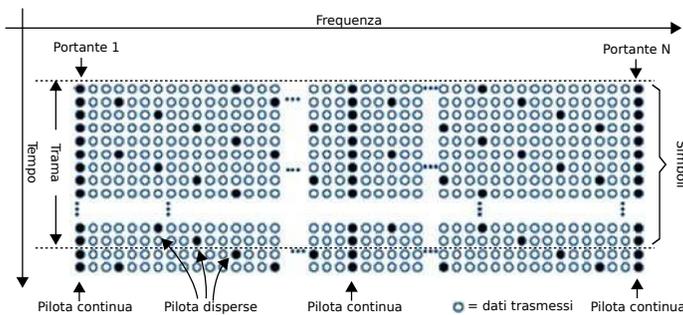
<sup>58</sup>Vedi ad es. [http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo\\_dei\\_moltiplicatori\\_di\\_Lagrange](http://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_dei_moltiplicatori_di_Lagrange)

Nel caso dell'OFDM, al contrario, l'andamento di  $H(f)$  determina un peggioramento di prestazioni solamente per quelle portanti per le quali  $H(f)$  si è ridotto<sup>59</sup>. Pertanto, l'applicazione di un codice di canale (§ 13.3) al blocco di  $M$  bit che costituisce un simbolo, seguito da una operazione di scrambling (§ 8.5.2.3), consente al lato ricevente di recuperare l'informazione trasmessa anche nel caso in cui per alcune portanti si determini un elevato tasso di errore.

La trasmissione OFDM in cui è presente una codifica di canale prende il nome di trasmissione COFDM (*Coded OFDM*).

### 14.8.11 Portanti pilota

Fin qui abbiamo assunto che il ricevitore OFDM mostrato in fig. 14.23 operi in condizioni di sincronismo sia per quanto riguarda la portante di demodolazione, sia per gli intervalli di simbolo. A questo scopo alcune delle sottoportanti - dette *pilota* - non sono usate per trasmettere dati, ma sono mantenute costantemente attive, con potenza di poco superiore alle altre, allo scopo di facilitare la sincronizzazione in frequenza. In figura è rappresentato il caso per il DVB-T, in cui ogni riga rappresenta le portanti di un simbolo, e quelle pilota si trovano in posizione fissa; sono inoltre mostrate delle *portanti disperse* (SCATTERED) le cui posizioni evolvono ciclicamente di simbolo in simbolo, e consentono di acquisire un sincronismo sia di simbolo che di trama, oltre che eventualmente a permettere una stima della  $H(f)$  del canale attraversato.



## 14.9 Sistemi a spettro espanso

In questa tecnica di modulazione la stessa banda di frequenze è utilizzata contemporaneamente da più trasmissioni differenti, che non interferiscono tra loro grazie all'uso di forme d'onda mutuamente ortogonali; ciò avviene adottando una opportuna *trasformazione* del messaggio da trasmettere, in modo che questo occupi una banda molto maggiore di quella originaria, e sulla manipolazione inversa in ricezione: tale caratteristica è quindi indicata con il termine di *spread spectrum*<sup>60</sup>, e la tecnica di trasmissione risultante prende anche il nome di *multiplazione a divisione di codice* o CDM.

Sebbene la doppia operazione di *spreading/despreading* non produca nessun vantaggio effettivo nei riguardi delle prestazioni ottenibili nel caso in cui la ricezione sia disturbata dalla sola presenza di rumore additivo gaussiano, si ottengono invece i seguenti altri benefici:

- altre trasmissioni e/o disturbi *a banda stretta* che occupano la stessa regione di frequenza occupata dal segnale espanso causano una potenza interferente ridotta;

<sup>59</sup>Si consideri ad esempio il caso in cui  $H(f)$  ha origine da un fenomeno di cammini multipli, che determina un andamento di  $H(f)$  selettivo in frequenza (§ 16.3.4.5).

<sup>60</sup>To *spread* = spalmare, vedi ad es. lo *spread butter*.

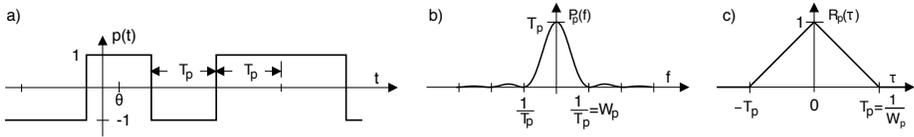


Figura 14.25: a) - sequenza pseudonoise; b) densità di potenza; c) autocorrelazione

- la densità spettrale del segnale trasmesso può confondersi con quella del rumore, rendendo la trasmissione stessa poco rilevabile da parte di soggetti ostili;
- per conoscere il contenuto della trasmissione occorre poter riprodurre in ricezione una esatta replica della trasformazione attuata.

### 14.9.1 Sequenze pseudo-casuali

La trasformazione che produce l'espansione spettrale si basa sull'utilizzo di una sequenza cosiddetta *pseudo-noise* o PN (§ 14.9.3), ovvero le cui caratteristiche statistiche *si avvicinano* a quelle di un rumore stazionario bianco e cioè a valori incorrelati, tranne che questi non sono casuali ma *deterministici*, in modo che la loro ripetizione ciclica rende la sequenza PN riproducibile dal lato ricevente. La fig. 14.25a mostra una parte di un possibile segnale dati  $p(t)$  pseudo casuale, bipolare, di durata  $L \cdot T_p$

$$p(t) = \sum_{k=0}^{L-1} a_k g(t - kT_p - \theta) \tag{14.38}$$

con  $\theta$  v.a. uniforme tra  $\pm T_p/2$ , realizzato mediante impulsi NRZ bipolari  $g(t) = \text{rect}_{T_p}(t)$  di durata  $T_p$ , la cui polarità è stabilita dagli  $L$  valori  $a_k$ , scelti pari a  $\pm 1$  in modo da avvicinarsi alle condizioni<sup>61</sup>

- media nulla e varianza unitaria, cioè  $m_A = 0, \sigma_A^2 = 1$ ;
- una autocorrelazione  $\mathcal{R}_a(n)$  la più piccola possibile con  $n \neq 0$ , *mimando* così la proprietà di indipendenza statistica.

Al § 6.9.3 abbiamo mostrato che un segnale simile a  $p(t)$  ed espresso dalla (14.38), nel caso in cui gli  $a_k$  siano v.a. indipendenti a media nulla, presenta uno spettro di densità di potenza<sup>62</sup>

$$\mathcal{P}_p(f) = \sigma_A^2 \frac{\mathcal{E}_G(f)}{T_p} = T_p \text{sinc}^2(fT_p) \tag{14.39}$$

rappresentato in fig. 14.25b, e per il quale la frequenza  $W_p = \frac{1}{T_p}$  ne approssima l'occupazione di banda: prendiamo dunque questo risultato come una accettabile approssimazione per  $p(t)$ .

<sup>61</sup>Data la sequenza deterministica  $a_k = \{a_0, a_1, \dots, a_{L-1}\}$  di lunghezza  $L$ , media e varianza sono definiti come  $m_A = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} a_k, \sigma_A^2 = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} (a_k - m_A)^2$ , e l'autocorrelazione tra coppie di elementi a distanza  $n$  è definita come

$$\mathcal{R}_a(n) = \frac{1}{L-n} \sum_{k=0}^{L-n-1} a_k a_{k+n}$$

Considerando invece la sequenza periodica ottenuta ripetendo gli  $a_k$ , possiamo definire la stessa grandezza come  $\mathcal{R}_a(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} a_k a_{(k+n) \bmod L}$ , detta anche *autocorrelazione ciclica*.

<sup>62</sup>Avendo scelto  $g(t) = \text{rect}_{T_p}(t)$ , risulta  $G(f) = T_p \text{sinc}(fT_p)$  e quindi  $\mathcal{E}_G = |G(f)|^2 = T_p^2 \text{sinc}^2(fT_p)$ , che diventa la (14.39) dato che  $\sigma_A^2 = 1$ .

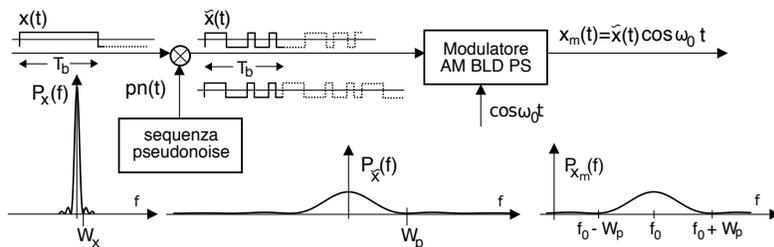


Figura 14.26: Generazione di un segnale modulato DSSS

Dalla (14.39) consegue che l'autocorrelazione di  $p(t)$  si esprime come<sup>63</sup>

$$\mathcal{R}_p(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_p(f) \} = \text{tri}_{2T_p}(\tau) \tag{14.40}$$

mostrata in fig. 14.25c, e che appunto si azzerava per  $\tau \geq T_p$ . Sebbene le sequenze pseudo-noise utilizzate realmente (§ 14.9.3) non aderiscano esattamente a queste caratteristiche, vi si avvicinano in modo soddisfacente per gli scopi delle telecomunicazioni.

**Chip rate** L'estensione temporale  $T_p$  di un simbolo di  $p(t)$  è indicata come *periodo di chip*<sup>64</sup>, e ci si riferisce ai suoi simboli come *chip*, per distinguerli dai bit; pertanto, la frequenza  $f_p = W_p = 1/T_p$  è detta *chip rate*.

### 14.9.2 Modulazione per sequenza diretta

Consiste nel prodotto  $\tilde{x}(t) = x(t)pn(t)$  tra un segnale di banda base  $x(t)$  e la ripetizione ciclica del segnale PN  $pn(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(t - iT_p)$ , e quindi nel prodotto del risultato per una portante sinusoidale, prendendo complessivamente il nome di *Direct Sequence Spread Spectrum* (o DSSS).

Sebbene l'effetto di espansione spettrale sia valido per  $x(t)$  qualsiasi, affrontiamo l'analisi con riferimento ad un segnale  $x(t)$  numerico binario NRZ antipodale ossia polare<sup>65</sup>, il cui periodo di bit  $T_b \gg T_p$  ne determina una densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  del tipo di (14.39) ma con banda  $W_x \ll W_p$ . La fig. 14.26 illustra la situazione, facendo notare anche come scegliendo  $T_b = LT_p$  e moltiplicando i bit del messaggio per la sequenza di chip della PN si ottiene di fatto una *sequenza di sequenze* PN, ognuna con segno invertito o meno a seconda del valore dei singoli bit del messaggio, e con una banda che è quella di un segnale dati a frequenza  $f_p = W_p \gg f_b$ . Osserviamo che il segnale *allargato*  $\tilde{x}(t)$  è così chiamato anche perché la potenza  $\mathcal{P}_{\tilde{x}}$  è la stessa<sup>66</sup>  $\mathcal{P}_x$  di  $x(t)$ , che ora risulta però *spalmata* sulla banda  $W_p$  di  $pn(t)$ .

<sup>63</sup> Applicando il teorema di Wiener si ottiene  $\mathcal{R}_p(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_p(f) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ T_p \text{sinc}^2(fT_p) \} = \text{tri}_{2T_p}(\tau)$ , vedi tabella a pag. 76.

<sup>64</sup> Oltre che indicare un circuito integrato, la parola *chip* è la stessa usata per le patine fritte olandesi, e prima ancora per *scheggia, frammento o truciolo*.

<sup>65</sup> Il prodotto tra due segnali dati di tipo *polare* a frequenza  $f_b$  e  $f_p = Lf_b$ , è equivalente a creare il segnale dati partendo dall'*or esclusivo*  $\oplus$  delle corrispondenti rappresentazioni binarie fatte da zeri ed uni, come mostrato dalle tabelle poste a lato.

a	b	$\oplus$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a	b	$\times$
-1	-1	1
-1	1	-1
1	-1	-1
1	1	1

<sup>66</sup> Considerando  $x(t)$  realizzazione di un processo ergodico indipendente da  $pn(t)$ , la potenza di  $\tilde{x}(t)$  risulta (§ 6.5.3)  $\overline{\tilde{x}^2} = E \{ x^2(t)pn^2(t) \} = \overline{x^2} = \mathcal{P}_x$ , dato che dalla (14.40) si ha  $E \{ pn^2(t) \} = 1$ .

L'effetto di espansione spettrale può essere verificato anche in base all'osservazione che la densità di potenza  $\mathcal{P}_{\tilde{x}}(f)$  è il risultato della convoluzione in frequenza<sup>67</sup>

$$\mathcal{P}_{\tilde{x}}(f) = \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_{pn}(f) \simeq \int_{-W_x}^{W_x} \mathcal{P}_x(\lambda) \mathcal{P}_{pn}(f - \lambda) d\lambda$$

in cui la definizione degli estremi di integrazione tiene conto del fatto che  $\mathcal{P}_x(f) \approx 0$  per  $|f| > W_x$ . Considerando ora che  $W_p \gg W_x$ , notiamo che per  $|\lambda| \leq W_x$  si ha  $\mathcal{P}_{pn}(f - \lambda) \simeq \mathcal{P}_{pn}(f)$ , e quindi

$$\mathcal{P}_{\tilde{x}}(f) \approx \left[ \int_{-W_x}^{W_x} \mathcal{P}_x(\lambda) d\lambda \right] \mathcal{P}_{pn}(f) = \mathcal{P}_x \mathcal{P}_{pn}(f)$$

Infine,  $\tilde{x}(t)$  è usato per modulare AM-BLD-PS una portante a frequenza  $f_0$ , producendo il segnale  $x_m(t) = \tilde{x}(t) \cos 2\pi f_0 t$ .

### 14.9.2.1 Guadagno di processo

Il rapporto di espansione spettrale

$$G_p = \frac{W_p}{W_x} = \frac{T_b}{T_p} = \frac{f_p}{f_b} \quad (14.41)$$

tra la banda del segnale allargato e quella del segnale di partenza varia tipicamente tra 10 e 10000 volte, ossia tra 10 e 40 dB, e viene indicato come *guadagno di processo* (o *processing gain*), in quanto come vedremo rappresenta una misura del miglioramento dell'SNR nel caso di presenza di segnali interferenti.

### 14.9.2.2 Despredding

Per proseguire nell'analisi, consideriamo lo schema di ricevitore mostrato in fig. 14.27, nella cui parte sinistra è mostrato il segnale modulato ricevuto  $x_m(t) = \tilde{x}(t) \cos \omega_0 t$  con potenza<sup>68</sup>  $\mathcal{P}_R = \frac{1}{2} \mathcal{P}_x$ , a cui si sovrappone un disturbo gaussiano  $n(t)$  (od un interferente a banda stretta  $z(t)$ ), ed insieme attraversano il filtro passabanda di ricezione caratterizzato da una banda di rumore  $B_R \gg W_p \gg W_x$ , dato che deve lasciar passare l'intero spettro *allargato*, compresi i suoi lobi laterali.

Dopo demodulazione omodina si ottiene il nuovo segnale di banda base  $y(t) = \tilde{x}(t) + n_c(t)$  in cui  $n_c(t)$  è la componente in fase del disturbo. A questo punto avviene l'operazione di *despredding* che si avvale della possibilità per il ricevitore di generare la stessa sequenza PN usata in trasmissione, in forma *temporalmente sincrona*, in modo da poter scrivere

$$\tilde{y}(t) = [\tilde{x}(t) + n_c(t)] pn(t) = x(t) pn^2(t) + n_c(t) pn(t) = x(t) + \tilde{n}_c(t)$$

in virtù dei valori  $\pm 1$  assunti da  $pn(t)$ . Pertanto, mentre il messaggio  $x(t)$  è tornato quello precedente all'allargamento,  $n(t)$  e/o il disturbo  $z(t)$  subiscono le *spreading* descritto al § 14.9.2. Un successivo filtraggio passa-basso con banda  $W_x$  pari a quella di segnale produce infine il risultato  $y_d(t) = x(t) + n_d(t)$ , in cui il segnale utile ha potenza  $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_x = 2\mathcal{P}_R$ , mentre per il termine di disturbo additivo  $n_d(t)$  è stata rimossa la potenza che cade al di fuori della banda di segnale.

<sup>67</sup>L'autocorrelazione del prodotto di processi indipendenti è pari al prodotto delle autocorrelazioni (§ 6.5.3), ed a questo si applica la proprietà di equivalenza tra prodotto nel tempo e convoluzione in frequenza, applicato alle trasformate delle autocorrelazioni, in base al teorema di Wiener (§ 6.2.1).

<sup>68</sup> $\tilde{x}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$  con  $\varphi$  v.a. a d.d.p. uniforme può essere considerato come il prodotto di due processi statisticamente indipendenti, la cui potenza è il prodotto delle potenze, vedi § 6.5.3

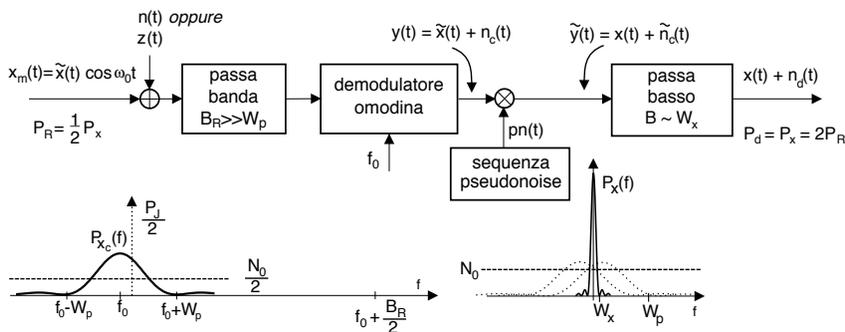


Figura 14.27: Ricevitore DSSS con rumore additivo  $n(t)$  o interferenza  $z(t)$

### 14.9.2.3 Prestazioni in presenza di rumore

La componente in fase (dopo demodulazione omodina) del rumore bianco  $n(t)$  con densità di potenza  $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$  ha densità<sup>69</sup>  $\mathcal{P}_{n_c}(f) = N_0 \text{rect}_{B_R}(f)$  e dunque autocorrelazione

$$\mathcal{R}_{n_c}(\tau) = N_0 B_R \text{sinc}(B_R \tau)$$

Allo scopo di valutare la densità di potenza  $\mathcal{P}_{\tilde{n}_c}(f)$  del rumore  $\tilde{n}_c(t)$  dopo despreading, con l'aiuto della figura a lato osserviamo che l'autocorrelazione di  $\tilde{n}_c(t)$  è pari a  $\mathcal{R}_{\tilde{n}_c}(\tau) = \mathcal{R}_{n_c}(\tau) \mathcal{R}_p(\tau)$ , e che  $\mathcal{R}_{n_c}(\tau) \simeq 0$  con  $|\tau| \gg \frac{1}{B_R} \ll \frac{1}{W_p}$ , mentre  $\mathcal{R}_p(\tau) \simeq 1$  con  $|\tau| \ll T_p = \frac{1}{W_p}$ : pertanto possiamo scrivere  $\mathcal{R}_{\tilde{n}_c}(\tau) \simeq \mathcal{R}_{n_c}(\tau)$  e quindi

$$\mathcal{P}_{\tilde{n}_c}(f) \simeq \mathcal{P}_{n_c}(f) = N_0 \text{rect}_{B_R}(f)$$

La componente di rumore  $n_d(t)$  in uscita dall'ultimo passa basso con banda  $\simeq W_x$  ha pertanto una potenza  $N_d \simeq 2N_0 W_x$ , permettendo di valutare il rapporto segnale-rumore dopo demodulazione come

$$\left( \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_{n_c}} \right)_d = \frac{2\mathcal{P}_R}{2N_0 W_x} = \frac{\mathcal{P}_R}{N_0 W_x}$$

ossia proprio pari all' $SNR$  di riferimento (pag. 304), mostrando come la concatenazione delle operazioni di spreading e despreading *non alteri* le prestazioni del processo di modulazione nei confronti del rumore bianco.

### 14.9.2.4 Prestazioni in presenza di un tono interferente

Mostriamo che se il termine di disturbo additivo  $z(t)$  occupa una banda relativamente stretta in rapporto a  $B_R$ , allora la sua potenza dopo demodulazione risulterà *ridotta* di un fattore pari al guadagno di processo  $W_p/W_x$ . Come caso limite, consideriamo un *tono* interferente sinusoidale (o *jammer*), in cui

$$z(t) = \sqrt{2\mathcal{P}_j} \cos(\omega_0 + \omega_z)t$$

<sup>69</sup>vedi § 12.1.2

con potenza  $\mathcal{P}_z = \mathcal{P}_j$  alla frequenza  $f_0 + f_z$ : dopo demodulazione si ottiene  $z_c(t) = \sqrt{2\mathcal{P}_j} \cos \omega_z t$  e

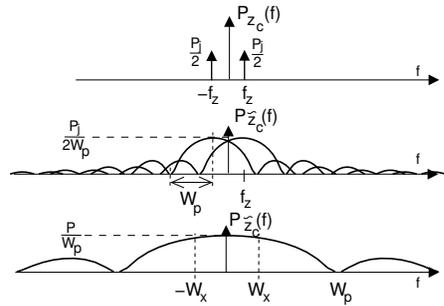
$$\mathcal{P}_{z_c}(f) = \frac{\mathcal{P}_j}{2} [\delta(f - f_z) + \delta(f + f_z)] \quad (14.42)$$

Moltiplicando quindi il tono interferente demodulato  $z_c(t)$  per  $pn(t)$  come necessario per il despreading, si ottiene un disturbo  $\tilde{z}_c(t)$  con densità di potenza  $\mathcal{P}_{\tilde{z}_c}(f) = \mathcal{P}_{z_c}(f) * \mathcal{P}_p(f)$ , mostrata alla riga centrale di fig. 14.28<sup>70</sup>, permettendo di apprezzare l'effetto di *allargamento* subito dal tono interferente. Notiamo ora che la massima interferenza si ottiene quando  $|f_z| \ll W_p$ , al limite pari a zero, come mostrato all'ultima riga della figura in scala espansa per il caso limite di  $f_z = 0$ . Pertanto, il limite superiore della potenza interferente uscente dal passa basso con banda  $W_x$  è

$$\mathcal{P}_{z_d} = \int_{-W_x}^{W_x} \mathcal{P}_{\tilde{z}_c}(f) df \leq 2W_x \frac{\mathcal{P}_j}{W_p}$$

e dunque il rapporto segnale-interferente diviene

$$\left( \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_{z_d}} \right)_d \geq 2\mathcal{P}_R \frac{W_p}{2W_x \mathcal{P}_j} = \frac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_j} \frac{W_p}{W_x}$$



mostrando quindi un miglioramento esattamente pari al guadagno di processo eq. (14.41). Figura 14.28: Despreading di tono interferente

### 14.9.2.5 Accesso multiplo

Una frequente applicazione delle tecniche spread spectrum consiste nel permettere la comunicazione *contemporanea* di una pluralità di soggetti, possibile qualora ognuno di essi adotti una diversa sequenza PN: la tecnica prende allora il nome di CDMA (*Code Division Multiple Access*). Mostriamo che in tal caso per ogni comunicazione l'effetto delle altre si riduce ad un modesto innalzamento del rumore di fondo, tanto più piccolo quanto minore è il valore della *intercorrelazione* tra i codici PN utilizzati.

Dopo la demodulazione, il termine interferente  $z(t)$  causato da  $N$  diversi utenti, ognuno con un diverso codice  $pn_i(t)$  e segnale dati  $x_i(t)$ , può essere scritto come

$$z(t) = \sum_{i=1}^N A_i x_i(t - \tau_i) pn_i(t - \tau_i) \cos \theta_i$$

in cui  $A_i$ ,  $\tau_i$  e  $\cos \theta_i$  sono rispettivamente ampiezza, ritardo di simbolo e fase della portante relativi all' $i$ -esimo utente. Assumendo ora eguali tra loro le ampiezze del segnale utile  $x(t)$  e degli interferenti, dopo il despreading otteniamo

$$\tilde{y}(t) = x(t) + \left[ \sum_{i=1}^N x_i(t - \tau_i) pn_i(t - \tau_i) \cos \theta_i \right] pn(t)$$

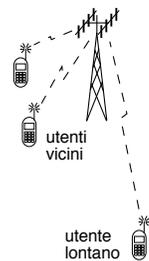
<sup>70</sup>Il risultato si ottiene tenendo conto delle eq. (14.39) e (14.42), effettuando la convoluzione, e ricordando che  $T_p = 1/W_p$ .

Se realizziamo ora il filtro passa basso di fig. 14.27 come un integratore esteso ad un periodo di bit, ovvero un filtro adattato al segnale NRZ<sup>71</sup>, il valore della sua uscita campionata al termine della durata del  $k$ -esimo periodo di bit risulta

$$\begin{aligned} d(kT_b) &= T_b x(kT_b) + \sum_{i=1}^N \left[ \cos \theta_i \int_{(k-1)T_b}^{kT_b} x_i(t - \tau_i) p_{n_i}(t - \tau_i) p_n(t) dt \right] \\ &= T_b x(kT_b) + z_d(kT_b) \end{aligned}$$

in cui  $z_d(kT_b)$  rappresenta il termine di interferenza complessiva da parte di tutti gli altri  $N$  utenti, indicata come *interferenza multiutente* o MUI (multi-user interference). Dato che i valori di  $x_i$  possono essere  $\pm 1$ , l'integrale calcola in effetti l'*intercorrelazione*  $\mathcal{R}_{p_0 p_i}(\tau_i)$  (§ 6.1.4) tra la sequenza PN usata per la propria trasmissione, e le sequenze PN usate dagli altri, calcolata per un ritardo  $\tau_i$ . Pertanto, scegliendo la famiglia di sequenze pseudo-noise in modo che esibiscano una intercorrelazione molto ridotta (in teoria nulla, se le PN fossero esattamente *ortogonali*), l'effetto degli interferenti si riduce in egual misura.

**Controllo di potenza** Qualora un utente di un sistema CDMA sia sensibilmente più lontano dal ricevitore rispetto agli altri, se tutti trasmettono con la stessa potenza, l'attenuazione subita dal segnale dell'utente lontano fa sì che il termine MUI aumenti di importanza, anche in presenza di intercorrelazione bassa, producendo un notevole degrado della qualità della trasmissione. Questo fenomeno è indicato come *effetto near-far*. Per ovviare al problema, un sistema CDMA viene usualmente corredato di un meccanismo di *controllo di potenza*, espletato dalla stazione radio base<sup>72</sup>, che misurando la potenza ricevuta da ciascun utente, ne richiede la diminuzione ai vicini e/o l'aumento ai lontani, in modo da ricevere la medesima potenza da ciascuno di essi.



**Prestazioni multi-utente con PN incorrelate** Consideriamo il caso in cui le trasmissioni CDMA di  $K$  diversi utenti siano tutte ricevute con la medesima potenza  $\mathcal{P}_x$ , e le sequenze PN utilizzate da ciascuno di essi abbiano una intercorrelazione nulla. Allora, per una generica trasmissione la potenza interferente  $\mathcal{P}_{n_d}$  risulta ridotta rispetto a quella effettivamente ricevuta di una quantità pari al guadagno di processo, e quindi il *rapporto segnale-interferenza* (indicato come SIR) risulta circa pari a<sup>73</sup>

$$SIR = \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_{n_d}} = \frac{\mathcal{P}_x}{(K-1)\mathcal{P}_x/G_p} = \frac{G_p}{K-1}$$

Dato che le PN effettivamente utilizzate *non presentano* intercorrelazione nulla, il risultato mostrato costituisce una approssimazione limite rispetto alla quale valutare la qualità delle prestazioni effettivamente ottenute. Nel caso di trasmissione a due livelli la prob. di errore (14.7) minima (a causa degli interferenti) diviene quindi

$$P_e^{BPSK}(\text{bit}) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left\{ \sqrt{SIR} \right\} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{G_p}{K-1}} \right\}$$

<sup>71</sup>Eventualmente realizzato come descritto a pag. 166, supponendo inoltre che sia verificata la condizione di sincronizzazione temporale.

<sup>72</sup>Ossia l'antenna con cui tutti telefonini nella medesima cella sono in comunicazione.

<sup>73</sup>In tal caso infatti i  $K-1$  interferenti sono assimilabili ad un rumore gaussiano (in virtù del teorema centrale del limite) con potenza complessiva  $(K-1)\mathcal{P}_x$  e limitato in banda alla stessa banda  $W_p$  del segnale utile. Dopo despreading, la densità spettrale interferente  $N_{01/2}$  si allarga su di una banda  $G_p W_p$ , e si riduce di ampiezza dello stesso fattore  $G_p$ . Pertanto il filtro passa basso a valle del despreading lascia passare una potenza interferente pari a  $(K-1)\mathcal{P}_x/G_p$ .

Infine, per tener conto allo stesso tempo sia dell'effetto degli interferenti che del rumore gaussiano comunque presente, può essere usato il *rapporto segnale-rumore più interferente* (o SINR) definito come

$$SINR = \frac{P_x}{P_{n_d} + P_n} = \left( \frac{P_{n_d} + P_n}{P_x} \right)^{-1} = \left( \frac{K-1}{G} + \frac{N_0}{E_b} \right)^{-1}$$

ossia pari *al parallelo* degli SNR, come discusso a pag. 194.

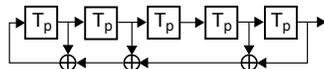
**Esempio** In un sistema CDMA-DSSS si desidera una  $P_e = 10^{-6}$ , a cui la tecnica di modulazione adottata fa corrispondere un  $E_b/N_0 = 13$  dB. Trascurando il rumore termico, determinare il massimo numero  $K$  di utenti contemporaneamente attivi se  $G_p = 30$  dB.

Imponendo  $E_b/N_{0I} = G_p/(K-1) = 10^{1.3} = 20$  si ottiene  $K = (G_p+20)/20 = 1020/20 = 51$ .

### 14.9.3 Famiglie di sequenze pseudo casuali

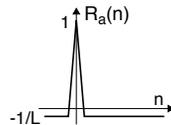
Accenniamo brevemente ad alcune tipologie di sequenze pseudo noise.

**Sequenze di massima lunghezza** Una prima possibilità è quella delle sequenze- $m$ , o di *massima lunghezza*, ottenute mediante dei registri a scorrimento controeazionati<sup>74</sup> con  $m$  ritardi, simili a quelli discussi a proposito del CRC (pag. 233) ma con la struttura mostrata in figura, in cui non è presente nessun ingresso esterno ed il bit che *rientra* è calcolato in base all'OR esclusivo di una combinazione di bit di stato.



Dato che con  $m$  bit si ottengono  $2^m$  configurazioni dello stato, ma che quella *tutti zeri* arresterebbe il processo di generazione, le sequenze di *massima lunghezza*<sup>75</sup> sono composte da  $L = 2^m - 1$  bit (ognuno dei quali corrisponde ad una diversa configurazione dello stato) che si ripetono ciclicamente, e sono ottenute per particolari scelte<sup>76</sup> di quali bit far partecipare alla controeazione.

Tra le proprietà positive annotiamo la *quasi equiprobabilità* dei bit uno e zero, la equa distribuzione delle sequenze di bit uguali<sup>77</sup>, ed una *autocorrelazione ciclica*  $\mathcal{R}_a(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} a_k a_{(k+n) \bmod L}$  che vale 1 per  $n = 0$  ed  $-1/L$  altrimenti (vedi figura)<sup>78</sup>. D'altra parte, l'*intercorrelazione* ciclica tra due diverse sequenze- $m$  (di uguale lunghezza  $L$ ) presenta valori massimi che sono una percentuale apprezzabile di  $\mathcal{R}_a(0)$ , rendendo necessario individuare altre soluzioni per i casi di accesso multiplo.



**Sequenze di Gold e Kasami** Le sequenze di *Gold* si ottengono eseguendo l'OR esclusivo bit a bit di due diverse<sup>79</sup> sequenze- $m$  **a** e **b** di uguale lunghezza  $L$ ; ripetendo il procedimento per tutti i  $2^m - 1$  possibili scorrimenti temporali di **b** rispetto ad **a**, ed includendo **a**, si ottengono

<sup>74</sup>Vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Linear\\_feedback\\_shift\\_register](https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_feedback_shift_register)

<sup>75</sup>In quanto in linea di principio il periodo della sequenza può essere inferiore al massimo.

<sup>76</sup>Anche in questo caso come al § 8.5.3.3 la posizione degli XOR può essere associata ad un polinomio generatore, e per produrre una sequenza di massima lunghezza occorre scegliere un *polinomio primitivo*, vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Primitive\\_polynomial\\_\(field\\_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Primitive_polynomial_(field_theory)). A parità di  $m$ , cambiando polinomio si ottengono sequenze differenti ma di uguale lunghezza, ed il loro numero massimo  $N$  aumenta all'aumentare di  $m$  con legge  $N = (2^m - 2)/m$ .

<sup>77</sup>Indicando con *run* una sequenza di bit uguali, su  $2^m - 1$  bit si trova un run di uni lungo  $m$ , un run di zeri lungo  $m - 1$ , e quindi  $2^{m-i-2}$  run sia di zeri che di uni di lunghezza  $i$ , per  $1 < i \leq m - 2$ .

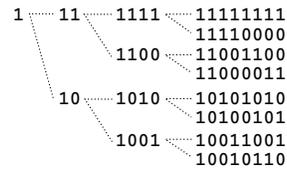
<sup>78</sup>L'autocorrelazione si intende calcolata a partire da valori *bipolari*, ossia ottenuti a partire dalla sequenza binaria facendo corrispondere  $\pm 1$  ai valori 0, 1, vedi nota 65.

<sup>79</sup>La coppia di sequenze- $m$  non è qualsiasi, ma scelta tra quelle con una intercorrelazione massima ridotta, chiamate *sequenze preferite*.

$2^m$  diverse sequenze, con una intercorrelazione massima pari a  $\sqrt{2/L}$ . Una soluzione lievemente diversa è quella di *Kasami*, in cui una delle due sequenze- $m$  di partenza viene *decimata* ciclicamente, e che produce  $2^{m/2}$  sequenze, con intercorrelazione massima pari a  $1/\sqrt{L}$ .

**Sequenze di Walsh-Hadamard**<sup>80</sup> Si tratta di sequenze ortogonali, ovvero per le quali risulta  $\sum_{k=0}^{L-1} a_k b_k = 0$ , ossia  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono sequenze *incollegate* qualora allineate, e che sono generate mediante l'algoritmo iterativo schematizzato in figura, che individua un numero di  $L = 2^m$  sequenze, di lunghezza  $L$ .

Possono dunque essere usate nel contesto di un sistema di accesso multiplo, qualora gli apparati possano essere sincronizzati tra loro come per il collegamento *in discesa* tra una stazione radio base, ed i terminali radiomobili associati ad essa<sup>81</sup>. Il lato meno positivo di queste sequenze è una autocorrelazione che presenta diversi picchi secondari, e dunque non sono idonee ad assolvere la funzione di sincronizzazione (§ 14.11.1). D'altra parte, la proprietà di ortogonalità può altresì essere sfruttata per realizzare una *segnalazione* ortogonale (§ 6.8.2) nel contesto di una comunicazione punto-punto.



**Sequenze di Barker** Presentano valori di autocorrelazione (*non ciclica*)  $\mathcal{R}_a(n) = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1-|n|} a_m b_{m+|n|}$  con valori  $\mathcal{R}_a(0) = 1$  e  $|\mathcal{R}_a(n)| \leq 1/L$  per  $1 \leq n < L$ , e come le sequenze- $m$  esibiscono buone proprietà rispetto al bilanciamento ed alle corse. L'aspetto negativo è che la massima lunghezza di sequenza conosciuta è  $L = 13$ , e con questa lunghezza, ne esiste solo una! Nonostante ciò, sono utilizzate ad esempio nei sistemi di accesso WiFi.

#### 14.9.4 Frequency Hopping

Si tratta di una diversa tecnica *spread spectrum*, in cui la sequenza PN è di tipo *multilivello*, ed è utilizzata in uno schema L-FSK incoerente (§ 14.5) per cambiare in continuazione la frequenza portante a cui avviene la trasmissione, tipicamente FSK anch'essa (vedi figura 14.29), da cui il nome di *saltando di frequenza* (traduzione letterale di FREQUENCY HOPPING). Per una corretta ricezione, è necessaria una accurata sincronizzazione temporale tra la PN usata in trasmissione e quella in ricezione.

Anche in questo caso si verifica un fenomeno di espansione spettrale, ma stavolta non tutta la banda è occupata in modo *permanente* come nel DSSS, ma anzi durante ogni *salto* si occupa solo la banda necessaria alla modulazione *non allargata*. In questo caso un disturbo a banda stretta provoca interferenza solo durante il salto che occupa la sua stessa frequenza, e dunque può essere facilmente contrastata adottando una codifica di canale (§ 13.3). Inoltre, la tecnica FHSS è proficuamente impiegata in sistemi di accesso multiplo CDMA, dato che possono avvenire contemporaneamente più trasmissioni FHSS utilizzando per esse differenti sequenze PN a bassa intercorrelazione.

Se il periodo di chip (ovvero il tempo per cui il vco permane sulla stessa frequenza) è più breve del periodo di simbolo, il sistema è detto *fast frequency hopping* o FFHSS, mentre se è maggiore è detto *slow FH* o SFHSS.

<sup>80</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Hadamard\\_code](https://en.wikipedia.org/wiki/Hadamard_code)

<sup>81</sup>Ma in tal caso, anziché *accesso multiplo*, potremmo definire la modalità di trasmissione come un *broadcast ortogonale*.

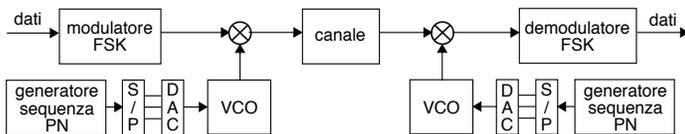
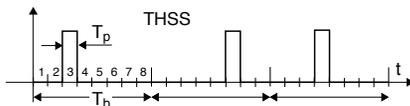


Figura 14.29: Schema di una trasmissione Frequency Hopping

### 14.9.5 Time Hopping o UWB

In questo caso la trasmissione avviene su intervalli temporali molto ridotti, e dunque con una occupazione di banda molto elevata (a volte indicata come *ultra wide band* o UWB<sup>82</sup>); l'altro aspetto in comune con le tecniche a spettro espanso è il posizionamento pseudo-casuale degli impulsi nell'ambito di una trama temporale, in base ad una sequenza PN<sup>83</sup>. La figura a lato raffigura un segnale THSS di banda base, in cui per ogni bit viene trasmesso un chip con  $T_p \ll T_b$ , posizionato su (ad es.) una di otto possibili posizioni, in maniera pseudo casuale.

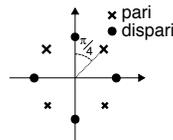


### 14.10 Altre possibilità

Diamo un accenno ad altre tecniche di modulazione numerica, che non sono state sviluppate in questo capitolo.

**Offset keying<sup>84</sup>** Una variante del QPSK detta OQPSK, in cui la temporizzazione dei rami I e Q viene *sfasata* di metà del periodo di simbolo, in modo che la fase dell'involuppo complesso non vari per più di  $\pi/2$  ogni  $T_s$ , e dunque il modulo dell'involuppo complesso non può più annullarsi: ciò si traduce in una dinamica delle ampiezze ridotta, evitando così i problemi legati alla distorsione non lineare (§ 7.3).

**Modulazione  $\pi/4$**  Un'altra variante del QPSK, in cui ogni simbolo viene mappato alternativamente su due costellazioni QPSK *ruotate* di  $\pi/4$ , in modo che i possibili salti di fase tra simboli contigui possono essere di  $\pm 45^\circ$  e  $\pm 135^\circ$  anziché 90 e 180 come nel QPSK. L'alternanza tra le due costellazioni avviene in base ad una modulazione differenziale, realizzata associando ad ogni simbolo la rotazione riportata in tabella<sup>85</sup>.



La trasmissione può dunque essere ricevuta adottando un ricevitore in fase e quadratura, dato che per decidere il simbolo ricevuto non è necessario un riferimento di fase assoluto, ma ci si basa su quello del simbolo precedente. Inoltre, la sincronizzazione è semplificata in quanto c'è un cambio di fase ad ogni simbolo, anche nel caso siano ...tutti uguali.

$a_k a_{k-1}$	$\Delta\theta$
11	$45^\circ$
01	$135^\circ$
00	$-135^\circ$
10	$-45^\circ$

**Minimum shift keying - MSK<sup>86</sup>** Indica una modulazione FSK binaria *coerente* in cui  $\Delta$  assume il *minimo* valore  $\frac{1}{2T_s}$  (vedi § 14.12.1), e per la quale il segnale modulato mantiene una *continuità di fase* tra bit contigui, come mostrato in fig. in cui  $f_0 = 1.25 \cdot f_b$  e



<sup>82</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/Ultra-wideband>

<sup>83</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/Time-hopping>

<sup>84</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Phase-shift\\_keying#Variants](https://en.wikipedia.org/wiki/Phase-shift_keying#Variants)

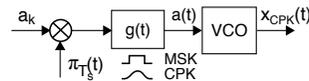
<sup>85</sup>Dunque ad esempio la sequenza 001011 produce una sequenza di fasi  $-135^\circ, -180, -135^\circ$

<sup>86</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Minimum-shift\\_keying](https://en.wikipedia.org/wiki/Minimum-shift_keying)

$f_1 = 1.75 \cdot f_b$ , e quindi  $\Delta = 0.5f_b = 1/2T_b$ : questa caratteristica consente una riduzione della banda occupata, in virtù dell'assenza di brusche variazioni di ampiezza.

**Modulazione a fase continua - CPK<sup>87</sup>** Come per il caso precedente si realizza un segnale privo di discontinuità, facendo evolvere la fase dell'involuppo complesso *con continuità* tra il valore iniziale e quello finale, nell'arco di un periodo di simbolo. Per fissare le idee, consideriamo l'uscita di un vco  $x_{CPK}(t) = A \cdot \text{sen} \left( 2\pi f_0 t + 2\pi \Delta \int_0^t a(\tau) d\tau \right)$  alimentato da un segnale dati  $a(t) = \sum_{k=1}^L a_k g(t - kT_s)$  come in figura.

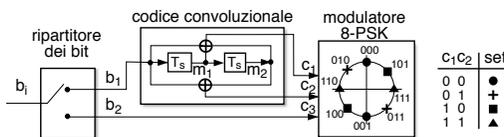
Scegliendo  $g(t) = \text{rect}_{T_b}(t)$  ed  $a_k \in \{0, 1\}$  si ottiene l'MSK, e la variazione della fase avviene in modo lineare (integrale di un rettangolo) realizzando una FM; nel CPK si utilizza invece un sagomatore privo di discontinuità (ad es. un coseno rialzato nel tempo, ovvero  $g(t) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi t/T_s) \text{rect}_{T_s}(t)$ ), realizzando un segnale modulato (per così dire) sia in fase che in frequenza. Questa ulteriore *dolcezza* dell'involuppo complesso<sup>88</sup> determina un ulteriore risparmio di banda; d'altra parte la *fase di partenza* per ciascun simbolo dipende da quelli precedentemente trasmessi, e dunque il segnale deve essere decodificato nella sua interezza e non simbolo per simbolo.



**Risposta parziale<sup>89</sup>** Si tratta ancora di una modulazione angolare e dunque adotta lo schema mostrato sopra, ma stavolta  $g(t)$  ha una durata maggiore di  $T_s$ : ciò riduce ancor di più la banda, ma introduce interferenza intersimbolica (ISI) in modo *controllato*, nel senso che è noto come i simboli precedenti incidono sul valore dell'attuale. Per questo, la decodifica può avvenire mediante una MLSD (§ 15.4.5), con un lieve peggioramento di prestazioni (in presenza di rumore) rispetto alla assenza di ISI. In questa categoria rientra il GMSK<sup>90</sup>, una forma di MSK a risposta parziale in cui  $g(t)$  ha un andamento *gaussiano* (ma ovviamente troncato nel tempo), e che è utilizzato diffusamente (GSM, 802.11 FHSS, BLUETOOTH) in virtù della ridottissima occupazione spettrale<sup>91</sup>.

**Modulazione codificata a traliccio - TCM<sup>92</sup>** E' una tecnica che combina la codifica di canale (§ 13.3) con il processo di modulazione, e che anziché aumentare il numero di bit da trasmettere e quindi la banda, aumenta il *numero di punti* di costellazione per simbolo. A prima vista ciò comporterebbe un peggioramento di prestazioni, ma queste sono compensate dal guadagno di codifica associato alla ridondanza introdotta, che si manifesta in un vincolo sui possibili valori della sequenza di simboli, che viene a dipendere anche dal valore di un certa quantità di bit precedenti.

Per fissare le idee, riferiamoci all'esempio di figura: i bit in arrivo  $b_i$  sono inviati alternativamente ( $b_1$ ) ad un codificatore convoluzionale (2,1,2) (§ 13.3.2) con tasso  $R_c = \frac{1}{2}$ , e ( $b_2$ ) ad un modulatore 8-PSK. In questo esempio il codificatore è realizzato come in fig. 13.5 a pag. 370, e dunque produce due bit  $c_1 c_2$  in uscita per ognuno che ne entra, in funzione di due bit precedenti  $m_1 m_2$



<sup>87</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Continuous\\_phase\\_modulation](http://en.wikipedia.org/wiki/Continuous_phase_modulation)

<sup>88</sup>Dato che a differenza di MSK, tra due simboli anche la derivata di  $x_{CPK}(t)$  è continua.

<sup>89</sup>Vedi ad es. <http://complextoreal.com/wp-content/uploads/2013/01/qpr.pdf>

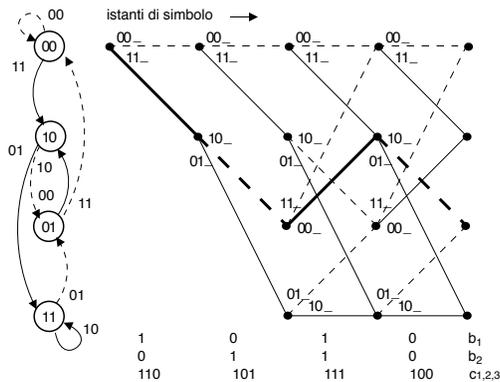
<sup>90</sup>Vedi ad es. <http://www.emc.york.ac.uk/reports/linkpcp/appd.pdf>

<sup>91</sup>Un pò come realizzare un segnale dati a banda minima, senza ricorrere ad un passa basso ideale.

<sup>92</sup>Vedi ad es. <http://complextoreal.com/wp-content/uploads/2013/01/tcm.pdf>

(o di stato); anche questo risultato viene inviato al modulatore 8-PSK, le cui 8 possibili fasi sono state suddivise in quattro partizioni come in figura, ed assegnate alle configurazioni binarie (non di Gray) indicate, in modo che per ogni partizione il bit di ingresso non codificato  $c_3 = b_2$  sceglie uno tra due punti più distanti possibile.

Le possibili sequenze  $c_{1,2}$  in uscita dal codificatore sono schematizzate mediante l'automata mostrato nella figura a lato, in cui gli stati sono etichettati con il valore dei bit  $m_{1,2}$ , e le transizioni con il codice di uscita  $c_{1,2}$  corrispondente all'ingresso  $b_1$  pari a zero (linea a tratti) o uno (linea continua), così come calcolate in base agli EX-OR. Le possibili sequenze  $c_{1,2,3}$  in ingresso al modulatore sono descritte da tutti i percorsi di attraversamento del *traliccio*<sup>93</sup> di figura, in cui le righe corrispondono allo stato  $m_{1,2}$  e le colonne agli istanti di simbolo,



mentre le transizioni (continue o tratteggiate a seconda se  $b_1$  è 1 o 0) sono etichettate con i bit associati alla costellazione 8-PSK, a meno del bit  $b_2$  che è indicato dal sottolineato. In definitiva, la sequenza di simboli PSK corrispondente ad un ingresso (ad es.) 10 01 11 00 è 110 101 111 100, come mostrato in basso in figura, e corrispondente alla linea spessa.

La ricezione di questo segnale si svolge in due fasi: nella prima si individua il punto di costellazione, per ogni istante di simbolo  $k$  ed ogni partizione  $p$ , più vicino al segnale ricevuto  $r_k$ , e si valuta la relativa *verosimiglianza logaritmica*  $-\log [p(r_k/p)]$ , riportandone il valore sull'arco del traliccio a cui si riferisce (vedi anche § 15.4.5). Nella seconda si individua nel traliccio il percorso di minimo costo mediante l'applicazione dell'algoritmo di Viterbi, illustrato a pag. 371.

Notiamo come le scelte fatte abbiano messo in corrispondenza le transizioni uscenti (od entranti) in uno stesso stato, con partizioni disposte in modo ortogonale, ovvero con la massima distanza tra i punti. Ad ogni periodo di simbolo, solo 4 delle 8 fasi sono possibili. Si può mostrare che il semplice schema dell'esempio permette un miglioramento di  $E_b/N_0$  di 3 dB, e quasi altri 3 possono essere aggiunti per codificatori di maggior complessità.

**Sistemi MIMO**<sup>94</sup> Acronimo di *Multiple Input Multiple Output*, è realizzato utilizzando più di una antenna sia in trasmissione che in ricezione, attuando così una *trasmissione in diversità* in grado di aumentare la capacità di un collegamento radio grazie allo sfruttamento del fenomeno dei *cammini multipli*.

**Radio Cognitiva**<sup>95</sup> Attiene a come trasmettere *intelligentemente* in modo da usare i migliori canali radio a disposizione, in presenza di altre comunicazioni contemporanee: analizzando con continuità lo spettro radio, modifica conseguentemente i parametri di trasmissione e ricezione per permettere un utilizzo più efficiente dello spettro radio nella propria regione di spazio.

<sup>93</sup> TRELLIS in inglese, da cui il nome del metodo *trellis coded modulation*.

<sup>94</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/MIMO>, <http://complextoreal.com/wp-content/uploads/2013/01/mimo.pdf>

<sup>95</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Cognitive\\_radio](http://en.wikipedia.org/wiki/Cognitive_radio)

## 14.11 Sincronizzazione

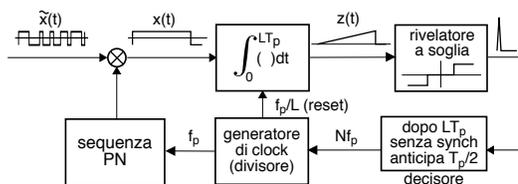
Nelle trasmissioni numeriche occorre ottenere allo stesso tempo sia la sincronizzazione della portante di demodulazione, nei limiti delle ambiguità di fase residue, sia la corretta temporizzazione di simbolo, per campionare le c.a. di b.f. ricevute al centro del periodo di simbolo<sup>96</sup>, ed evitare l'insorgenza di ISI. Le due problematiche possono essere affrontate l'una di seguito all'altra, adottando le soluzioni già espote<sup>97</sup>. D'altra parte sono ora possibili varianti, come ad esempio il *Costas loop*<sup>98</sup> che, utilizzando entrambe le c.a. di b.f., realizza l'aggancio di frequenza anche per tecniche di modulazione a portante soppressa, oppure procedure che tentano di acquisire per primo il sincronismo di simbolo, e quindi usano i valori delle c.a. di b.f. ricevute per effettuare correzioni alla fase dell'oscillatore di demodulazione<sup>99</sup>.

Qualora la portante di demodulazione presenti una ambiguità di fase residua si può applicare la tecnica della codifica differenziale esposta al § 14.4, oppure inserire una sequenza di simboli noti (o *flag*) all'inizio della trama trasmissiva, in modo che il confronto tra i valori previsti e quelli ricevuti permetta di correggere tale ambiguità. Da notare che i *flag* o *trailer* ad inizio trama possono essere vantaggiosamente usati anche da schemi di recupero del clock del tipo di quelli al § 8.7.2.1.

### 14.11.1 Sincronizzazione per sistemi a spettro espanso

In questo caso occorre anche considerare la modalità di acquisizione della fase della sequenza PN, necessaria al despreading, che avviene in due fasi: la prima si svolge come una ricerca sequenziale ed ha una precisione di metà del periodo di chip  $T_p$ , mentre la seconda riduce l'errore mediante una tecnica a controeazione, e lo mantiene tale.

Considerando già avvenuta la sincronizzazione di portante e la demodulazione, possiamo considerare lo schema in figura detto *sliding correlator*, in cui l'integratore (ad es. un integrate and dump) calcola appunto la correlazione tra la PN in arrivo e quella generata localmente.



Schema di un *sliding correlator*

In caso di coincidenza temporale, il risultato  $z(t)$  è una rampa (negativa se il bit fosse stato  $-1$ ), mentre per un ritardo  $\theta$  il risultato dell'integrazione all'istante  $LT_p$  è l'autocorrelazione  $R_{\hat{x}}(\theta)$ , più termini di rumore a valor atteso nullo. Al termine del periodo di bit  $T_b = LT_p$  il generatore di clock resetta l'integratore, non prima però che il rivelatore a soglia abbia prodotto un impulso di sincronismo, inibendo il componente di decisione e terminando la ricerca. In assenza di sincronizzazione, il decisore fa invece avanzare la fase della PN di  $T_p/2$ , tentando di nuovo l'aggancio. Il metodo richiede dunque  $2L^2T_p$  secondi (nel caso peggiore), tempo che può essere ridotto eseguendo più ricerche in parallelo.

Una volta acquisita la sincronizzazione *lasca*, il controllo della generazione della PN passa ad un circuito indicato come *delay locked loop* o DLL, che può essere realizzato in diversi modi, e di cui discutiamo il funzionamento dello schema *canonico* mostrato in fig. 14.30. Un

<sup>96</sup>Od alla fine, come nel caso di un ricevitore a correlazione, o basato su di un filtro adattato.

<sup>97</sup>Per il recupero della portante si possono usare circuiti del tipo di § 10.2.2.1, mentre l'uso del PLL (§ 10.2.2.2) non è possibile a causa della assenza di residui di portante. Una volta acquisito il sincronismo di frequenza, quello di simbolo può essere ottenuto mediante schemi operanti in banda base, come quelli al § 8.7.2.1.

<sup>98</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Costas\\_loop](http://en.wikipedia.org/wiki/Costas_loop)

<sup>99</sup>Vedi ad es. [http://en.wikipedia.org/wiki/Carrier\\_recovery#Decision-directed](http://en.wikipedia.org/wiki/Carrier_recovery#Decision-directed)

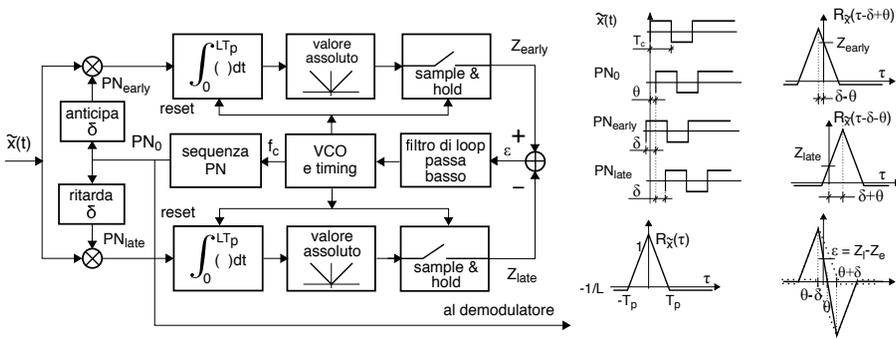
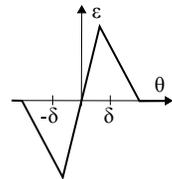


Figura 14.30: Delay locked loop e forme d'onda relative

generatore pseudonoise produce la sequenza  $PN_0$  affetta dall'errore di temporizzazione residuo  $-T_p/2 \leq |\theta| \leq T_p/2$ , che ai fini della discussione assumiamo come un ritardo, e dunque scriviamo  $PN_0 = \tilde{x}(t - \theta)$ ; lo scopo del DLL è di rendere  $\theta = 0$ . Da  $PN_0$  sono derivate due nuove sequenze,  $PN_{early} = \tilde{x}(t - \theta + \delta)$  e  $PN_{late} = \tilde{x}(t - \theta - \delta)$ , che differiscono da  $PN_0$  per un anticipo o ritardo  $\delta < T_p/2$ , e che sono moltiplicate per il segnale allargato di banda base  $\tilde{x}(t)$ . L'integratore del ramo superiore (*early*) calcola pertanto l'autocorrelazione<sup>100</sup>  $R_{\tilde{x}}(\delta - \theta) = \int_0^{LT_p} \tilde{x}(t) \tilde{x}(t - \theta + \delta) dt$  tra  $\tilde{x}(t)$  e la sua copia *in anticipo* di  $\delta - \theta$ , mentre quello inferiore (*late*) calcola  $R_{\tilde{x}}(-\delta - \theta)$  tra  $\tilde{x}(t)$  e la sua copia *in ritardo* di  $\delta + \theta$  (vedi lato destro di fig. 14.30): questi due risultati sono campionati<sup>101</sup> a fine sequenza, ed indicati con  $z_{early}$  e  $z_{late}$ ; notiamo che se  $\theta = 0$ , si ha  $z_{early} = z_{late} = R_{\tilde{x}}(\delta)$ .

Proseguendo con l'esempio, osserviamo come l'evenienza  $z_{early} > z_{late}$  indichi che  $PN_{early}$  è più vicina a  $PN_0$  di quanto non lo sia  $PN_{late}$ , e dunque stiamo andando... troppo piano<sup>102</sup>. In questo caso la differenza  $\varepsilon = z_{early} - z_{late}$  risulta positiva (vedi costruzione grafica in basso a ds in fig. 14.30), e ciò determina (attraverso il filtro di loop) una *accelerazione* del vco, che tende quindi a ridurre il ritardo iniziale  $\theta$ . Se si fosse verificato l'opposto ( $\theta < 0$  e dunque  $z_{early} < z_{late}$ ) sarebbe risultato  $\varepsilon < 0$ , a cui corrisponde un *rallentamento* del vco.

Man mano che  $\theta$  si riduce,  $PN_{early}$  e  $PN_{late}$  tendono a disporsi simmetricamente in anticipo ed in ritardo di  $\delta$  rispetto a  $PN_0$ , in modo che  $z_{early}$  e  $z_{late}$  prendono il medesimo valore e la loro differenza  $\varepsilon$  si annulla, la  $f_c$  prodotta dal vco è costante, e  $PN_0$  è esattamente in fase con  $\tilde{x}(t)$ . Mentre  $\theta$  si azzera, la costruzione grafica in basso a destra di fig. 14.30 *transla* verso sinistra, in modo che corrisponda  $\varepsilon = 0$  per  $\theta = 0$ . Ciò consente di riformulare l'approccio grafico come nella figura a lato, che rappresenta l'errore  $\varepsilon$  in funzione del disallineamento  $\theta$ , detta anche *curva di discriminazione* o *curva-s*, e che evidenzia l'intervallo  $|\theta| < \delta$  entro il quale il sistema converge. Questa figura è simile a quella discussa al § 10.2.2.2 a proposito del PLL, ed infatti l'analisi delle prestazioni ha molto in comune. In particolare una diminuzione della banda del filtro di loop, se da un lato riduce le capacità di inseguire rapide variazioni di ritardo (come potrebbe essere per effetto doppler), d'altro canto attenua l'influenza del rumore sulla varianza della stima di  $\theta$ .



<sup>100</sup>L'esempio si riferisce ad una sequenza PN di massima lunghezza, della cui autocorrelazione si è discusso a pag. 415.

<sup>101</sup>Il blocco che valuta il valore assoluto dell'uscita dell'integratore è necessario in quanto  $\tilde{x}(t)$  trasporta anche l'informazione  $x(t)$ , che determina l'eventuale inversione di segno della sequenza PN, e dunque un cambiamento di segno per l'uscita dell'integratore.

<sup>102</sup>In altri termini, le tre copie della PN dovrebbero *slittare* a sinistra, e quindi il periodo della PN deve essere ridotto.

Una possibile variante opera direttamente sul segnale modulato, e per questo è indicato come DLL *incoerente*, non necessitando della sincronizzazione di portante. Al posto dell'integratore utilizza un filtro passabanda centrato sulla portante, seguito da un demodulatore di inviluppo. Una ulteriore variante, indicata come *tau-dither loop*, affronta e risolve il problema legato ad un possibile diverso guadagno tra i due rami del DLL.

## 14.12 Appendici

### 14.12.1 Ortogonalità tra simboli sinusoidali

Al § 14.5.1 si è introdotta la modulazione FSK ortogonale, e nelle note è iniziata la discussione relativa alla condizione di ortogonalità tra la forma d'onda sinusoidale di durata  $T_s$  ricevuta, e quella prodotta al ricevitore come ingresso ai correlatori di un banco. Prendiamo pertanto ora in considerazione segnali del tipo  $\cos[2\pi(f_0 + \Delta f_k)t + \phi_k]$ , in cui è inclusa una differenza (o errore) di fase aleatorio tra le forme d'onda, in modo da esaminare le differenze tra il caso di modulazione coerente ed incoerente.

Iniziamo dunque con lo sviluppare l'espressione dell'integrale di intercorrelazione  $\rho = \int_0^{T_s} \cos[2\pi(f_0 + m\Delta)t] \cos[2\pi(f_0 + n\Delta)t + \phi] dt$  facendo uso della relazione  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$  e riferendoci per semplicità al caso di due frequenze contigue (ponendo  $m = 0$  ed  $n = 1$ ):

$$\rho = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \{ \cos[2\pi(2f_0 + \Delta)t + \phi] + \cos[2\pi\Delta t - \phi] \} dt = \quad (14.43)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos[2\pi(2f_0 + \Delta)t + \phi] dt + \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos[2\pi\Delta t - \phi] dt \quad (14.44)$$

Per quanto riguarda il primo integrale, esso assume un valore nullo se  $2f_0 + \Delta = \frac{k}{T_s}$ , perché in tal caso in un intervallo  $T_s$  entrano un numero intero di periodi, ed il coseno ha valor medio nullo. Concentriamoci allora sul valore di  $\Delta$  che annulla anche il secondo integrale, che riscriviamo facendo uso della relazione  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_s} \cos(2\pi\Delta t - \phi) dt = \\ &= \int_0^{T_s} [\cos(2\pi\Delta t) \cos \phi + \sin(2\pi\Delta t) \sin \phi] dt = \\ &= \frac{\sin(2\pi\Delta t)}{2\pi\Delta} \Big|_0^{T_s} \cdot \cos \phi - \frac{\cos(2\pi\Delta t)}{2\pi\Delta} \Big|_0^{T_s} \cdot \sin \phi = \\ &= T_s \left[ \frac{\sin(2\pi\Delta T_s)}{2\pi\Delta T_s} \cdot \cos \phi + \frac{1 - \cos(2\pi\Delta T_s)}{2\pi\Delta T_s} \cdot \sin \phi \right] \end{aligned} \quad (14.45)$$

Osserviamo ora che, nel caso in cui  $\phi = 0$ , il secondo termine della (14.45) si annulla per qualunque  $\Delta$ . Esaminiamo quindi ora solamente il primo termine, individuando così il risultato relativo al caso di

**Modulazione coerente** Si riferisce al caso in cui  $\phi = 0$ . Il termine  $\frac{\sin(2\pi\Delta T_s)}{2\pi\Delta T_s} = \text{sinc}(2\Delta T_s)$  si annulla per  $\Delta = \frac{k}{2T_s}$ , e quindi la minima spaziatura tra portanti risulta  $\Delta = \frac{1}{2T_s} = \frac{f_s}{2}$ ; pertanto, le frequenze utilizzate dovranno essere del tipo  $f_0 + k \frac{f_s}{2}$ .

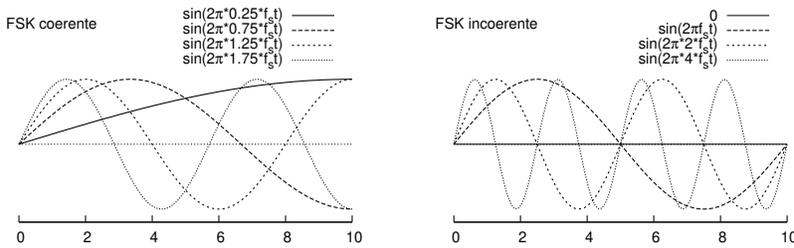


Figura 14.31: Forme d'onda ortogonali nei casi di modulazione *coerente* ed *incoerente*

Per fare in modo che *anche* il primo termine della (14.44) si annulli, deve sussistere la relazione  $2f_0 + \Delta = 2f_0 + \frac{f_s}{2} = \frac{k}{T_s} = kf_s$ , che fornisce la condizione  $f_0 = f_s \frac{2k-1}{4}$ , ossia  $f_0$  deve essere scelta come uno tra i valori  $\frac{1}{4}f_s, \frac{3}{4}f_s, \frac{5}{4}f_s, \frac{7}{4}f_s, \dots$ . Notiamo come la spaziatura  $\frac{f_s}{2}$  ora individuata tra i possibili valori per la portante, coincide con quella  $\Delta$  tra le frequenze di segnalazione. Pertanto la parte sinistra della figura 14.31 rappresenta, disegnate in un intervallo pari a  $T_s$ , sia le portanti che possono essere usate, sia le prime frequenze che è possibile adottare per un modulazione FSK *coerente* basata sul valore minimo di  $f_0$  pari a  $\frac{1}{4}f_s$ <sup>103</sup>.

Nel caso in cui  $f_0$  non assuma uno dei valori individuati, il primo termine di (14.44) non si annulla, ma se  $f_0 \gg \frac{1}{T_s}$ , risulta trascurabile rispetto al secondo. Pertanto, se  $f_0 \gg f_s$  la scelta di  $f_0$  non è più determinante.

**Modulazione incoerente** In questo caso si ha  $\phi \neq 0$ . In generale la (14.45) presenta entrambi i termini; mentre il primo (come già osservato) si annulla per  $\Delta = \frac{k}{2T_s}$ , il secondo invece è nullo solo se  $\Delta = \frac{k}{T_s}$ . Questa circostanza determina il risultato che occorre ora adottare una spaziatura tra portanti doppia della precedente, e pari cioè a  $\Delta = f_s$ .

Torniamo ad esaminare la (14.44): ora il suo primo termine si annulla se  $2f_0 + \Delta = 2f_0 + f_s = kf_s$ , che determina la condizione  $f_0 = f_s \frac{k-1}{2}$ , ossia  $f_0 = 0, \frac{1}{2}f_s, f_s, \frac{3}{2}f_s, \dots$ . Notiamo come la spaziatura  $\frac{f_s}{2}$  tra i possibili valori per la portante sia identica al caso precedente, mentre la spaziatura necessaria alle frequenze di segnalazione è raddoppiata. La circostanza che ora sia ammessa anche una “portante a frequenza nulla” consente quindi di tracciare la parte destra della figura 14.31, che mostra le prime frequenze di segnalazione che è possibile adottare per una modulazione FSK *incoerente* basata sul valore minimo di  $f_0 = 0$ .

**Verifica grafica** In figura 14.32 è mostrato il risultato del prodotto di due frequenze distanti  $\frac{f_s}{2}$  e calcolate in assenza di errore di fase (a sinistra) e con un errore di fase pari a  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Si può notare come in questo secondo caso si perda l'ortogonalità tra i segnali, essendo il risultato prevalentemente negativo.

### 14.12.2 Prestazioni della modulazione OFDM

Il calcolo della  $P_e$  per bit accennato al § 14.8.5 si basa su quello relativo alle probabilità di errore  $P_{e_n}$  condizionato alle singole portanti. Dato che la portante *n-esima* trasporta  $M_n$  bit/simbolo,

<sup>103</sup> Possiamo notare come la spaziatura tra le frequenze di segnalazione di  $\frac{f_s}{2}$  fa sì che due forme d'onda con una differenza di frequenza  $n\Delta = n\frac{f_s}{2}$  accumulino in un intervallo  $T_s$  una differenza di fase di  $n\pi$ , ovvero un numero intero di semiperiodi.

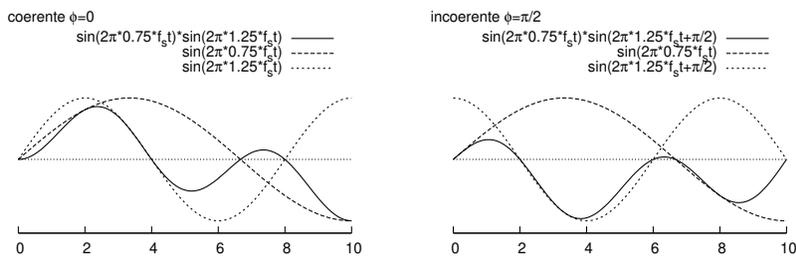


Figura 14.32: Prodotto di due frequenze ortogonali distanti  $\frac{f_s}{2}$  in assenza di errore di fase (a sn) e con errore pari a  $\phi = \frac{\pi}{2}$  (a ds)

la probabilità che un bit generico provenga dalla portante  $n$ -esima risulta pari a  $Pr(n) = \frac{M_n}{M}$  e quindi la probabilità che sia errato è pari a

$$P_e = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} Pr(n) P_{e/n} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} M_n P_{e,n} \quad (14.46)$$

### 14.12.2.1 Calcolo della $P_e$ per portante

Per determinare il valore di  $P_{e,n}$  per la portante  $n$ -esima si applica il risultato trovato al § 14.3.1 per la modulazione QAM, che esprime  $P_{e,n}$  in funzione del numero di livelli  $L_n = 2^{M_n}$  e dal rapporto  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_n$  per tale frequenza. Ma l'eq. (14.14) è ricavata considerando la densità di potenza del rumore in ingresso al ricevitore limitata da un filtro con banda pari a quella del segnale QAM, mentre ora tale filtro lascia passare l'intera banda  $N\Delta$  occupata dal segnale OFDM, e quindi occorre valutare l'effetto prodotto da questo rumore sui valori  $\underline{a}_n$  ottenuti mediante FFT. Inoltre, vorremmo pervenire ad un risultato valido anche in presenza di rumore non bianco, e/o di una distribuzione di potenza sulle portanti non uniforme. Pertanto, al posto del rapporto  $E_b/N_0$  che compare nella (14.14) utilizziamo ora il rapporto  $SNR_n$  tra la quota di potenza di segnale che raggiunge l' $n$ -esimo decisore, e la varianza (dovuta al rumore) della v.a.  $\underline{a}_n$  su cui si basa tale decisione, ottenendo così<sup>104</sup>

$$P_{e/n} = \frac{2}{\log_2 L_n} P_{\alpha_n} \quad \text{in cui} \quad P_{\alpha_n} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L_n}}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} SNR_n \frac{1}{L_n - 1}} \right\} \quad (14.47)$$

<sup>104</sup>La (14.47) può essere derivata dalle (14.13) e (14.14) considerando  $\frac{E_b}{N_0} = \frac{SNR_n}{\log_2 L_n}$ , ovvero invertendo l'eq. (8.16)  $SNR = \frac{E_b}{N_0} \frac{2 \log_2 L}{(1+\gamma)}$  con  $\gamma = 0$  e notando che a differenza del caso di banda base, per segnali AM la banda (e la potenza di rumore) raddoppia. Ma se questa è una spiegazione troppo sintetica, ripercorriamo tutti i passaggi.

Partiamo dalla probabilità di errore condizionata (8.10)  $P_\delta = \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\Delta}{2\sqrt{2}\sigma_n(L-1)} \right\}$  del caso di multilivello di banda base, ed osserviamo che per un impulso rettangolare  $g(t) = \operatorname{rect}_{T_0}(t)$  la (8.12) si modifica in  $\mathcal{P}_R = \frac{\Delta^2}{12} \frac{L+1}{L-1}$  in quanto  $\mathcal{P}_R = \int \mathcal{P}_R(f) df = \int \sigma_A^2 \frac{|G(f)|^2}{T_0} df$  dove  $\sigma_A^2 = \frac{\Delta^2}{12} \frac{L+1}{L-1}$  come ottenuto al § 8.8.1, mentre  $\int |G(f)|^2 df = \int T_0^2 \operatorname{sinc}^2(fT_0) df = T_0$  (vedi nota 44).

In tal modo, eseguendo i passaggi di cui alla nota 49 a pag. 217 otteniamo  $P_\delta = \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{12\mathcal{P}_R(L-1)/(L+1)}{2\sqrt{2}\sigma_n(L-1)}} \right\} = \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{L^2-1} SNR} \right\}$  che conduce alla (14.47) ricordando che per il QAM ogni ramo ha  $\sqrt{L}$  livelli, e che eseguendo il valore atteso rispetto alle probabilità dei simboli si ottiene  $P_e(\text{bit}) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}}\right) P_\delta$  (vedi eq. (8.11)).

ed in cui  $P_{\alpha_n}$  esprime la probabilità di errore su di uno dei rami (in fase od in quadratura) della  $n$ -esima costellazione QAM con  $L_n$  punti, che rappresentano gruppi di bit secondo la codifica di Gray. Per il calcolo di

$$SNR_n = \frac{\mathcal{P}_{R_n}^c}{\mathcal{P}_{N_n}^c} = \frac{\mathcal{P}_{R_n}^s}{\mathcal{P}_{N_n}^s} = \frac{\frac{1}{2}\mathcal{P}_{R_n}}{\frac{1}{2}\mathcal{P}_{N_n}} = \frac{\mathcal{P}_{R_n}}{\mathcal{P}_{N_n}}$$

osserviamo che la potenza  $\mathcal{P}_{R_n}$  dell'involuppo complesso del segnale ricevuto sulla portante  $n$ -esima è pari a

$$\mathcal{P}_{R_n} = 2\mathcal{P}_{R_n} = 2\frac{T_0}{T}\alpha_n\mathcal{P}$$

in cui  $\mathcal{P}$  è la potenza totale ricevuta, e  $\alpha_n = \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}}$  è la frazione di potenza assegnata alla  $n$ -esima portante. Resta quindi da determinare  $\mathcal{P}_{N_n}$ .

### 14.12.2.2 Potenza di rumore per portante

Per quanto riguarda  $\mathcal{P}_{N_n}$ , si tratta di applicare la (14.34) alla sequenza  $\{(-1)^h \underline{n}(hT_c)\}$  dei campioni dell'involuppo complesso del rumore, e determinare il valore

$$\mathcal{P}_{N_n} = E\{(\underline{N}_n)^2\} = \sigma_{\underline{N}_n}^2 \quad \text{in cui} \quad \underline{N}_n = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} (-1)^h \underline{n}(hT_c) e^{-j2\pi \frac{h}{N}n}$$

tenendo conto del fatto che i valori  $\underline{n}(hT_c)$  sono a media nulla, che (con  $n$  fissato) la FFT ne effettua una combinazione lineare con coefficienti  $e^{-j2\pi \frac{h}{N}n}$ , e che essendo  $\underline{n}(t)$  ergodico è possibile scambiare medie temporali e di insieme. Sviluppando

$$(\underline{N}_n)^2 = \underline{N}_n \underline{N}_n^* = \frac{1}{N^2} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{h-k} \underline{n}(hT_c) \underline{n}^*(kT_c) e^{-j2\pi \frac{h-k}{N}n}$$

e tenendo conto che  $E\{(-1)^{h-k} \underline{n}(hT_c) \underline{n}^*(kT_c)\} = e^{j\pi(h-k)} \mathcal{R}_{\underline{N}}((h-k)T_c)$  otteniamo<sup>105</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{N_n} &= \frac{1}{N^2} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{R}_{\underline{N}}((h-k)T_c) e^{j\pi(h-k)} e^{-j2\pi \frac{h-k}{N}n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N} \mathcal{R}_{\underline{N}}(mT_c) e^{j2\pi \frac{mT_c}{2T_c}} e^{-j2\pi \frac{m}{N}n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} z(m) e^{-j2\pi \frac{m}{N}n} \end{aligned} \quad (14.48)$$

in cui l'ultima riga semplifica l'espressione introducendo la sequenza  $\{z(m)\}$  di lunghezza  $N$ , che si ottiene campionando

$$z(t) = \left(1 - \frac{|t|}{NT_c}\right) \mathcal{R}_{\underline{N}}(t) e^{j2\pi \frac{t}{2T_c}} \quad (14.49)$$

<sup>105</sup>La riduzione da due ad una sommatoria, si ottiene scrivendo esplicitamente tutti i termini della doppia sommatoria, e notando che si ottiene per  $N$  volte lo stesso termine  $\mathcal{R}_{\underline{N}}(0)$ ,  $N-1$  volte i termini  $\mathcal{R}_{\underline{N}}(T_c) e^{j\pi} e^{-j2\pi \frac{1}{N}n}$  e  $\mathcal{R}_{\underline{N}}(-T_c) e^{-j\pi} e^{j2\pi \frac{1}{N}n}$ ,  $N-2$  volte quelli  $\mathcal{R}_{\underline{N}}(2T_c) e^{j2\pi} e^{-j2\pi \frac{2}{N}n}$  e  $\mathcal{R}_{\underline{N}}(-2T_c) e^{-j2\pi} e^{j2\pi \frac{2}{N}n}$ , e così via.

agli istanti  $t = mT_c$  con  $T_c = \frac{1}{N\Delta}$ . Mostriamo ora come, per  $N$  sufficientemente elevato, la (14.48) possa essere calcolata in funzione dei campioni di  $Z(f) = \mathcal{F}\{z(t)\}$ , ed in particolare di come risulti

$$\mathcal{P}_{N_n} \simeq \Delta \cdot Z(f)|_{f=n\Delta} \simeq 4\Delta \cdot \mathcal{P}_N(f_n)$$

Analizzando i termini che compaiono in (14.49), osserviamo che il prodotto  $\mathcal{R}_N(t) e^{j2\pi \frac{t}{2T_c}}$  ha trasformata pari a  $\mathcal{P}_N(f)$ , traslata in frequenza di  $-\frac{1}{2T_c} = -\frac{N\Delta}{2}$ , ovvero

$$\mathcal{F}\left\{\mathcal{R}_N(t) e^{j2\pi \frac{t}{2T_c}}\right\} = \mathcal{P}_N\left(f - \frac{N\Delta}{2}\right)$$

mentre il termine  $\left(1 - \frac{|t|}{NT_c}\right) = \text{tri}_{2NT_c}(t) = \text{tri}_{\frac{\Delta}{2}}(t)$  possiede come noto trasformata  $\mathcal{F}\left\{\text{tri}_{\frac{\Delta}{2}}(t)\right\} = \frac{1}{\Delta} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{\Delta}\right)$ ; pertanto per  $N$  elevato il prodotto  $z(t) = \mathcal{R}_N(t) e^{j2\pi \frac{t}{2T_c}} \cdot \text{tri}_{\frac{\Delta}{2}}(t)$  ha trasformata

$$Z(f) = \mathcal{P}_N\left(f - \frac{N\Delta}{2}\right) * \frac{1}{\Delta} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{\Delta}\right) \simeq \mathcal{P}_N\left(f - \frac{N\Delta}{2}\right)$$

avendo approssimato  $\frac{1}{\Delta} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{\Delta}\right)$  come un impulso di area unitaria, per  $N\Delta$  grande rispetto a  $\Delta$ .

Dato che  $\mathcal{P}_N(f)$  è limitato in banda tra  $\pm \frac{N\Delta}{2}$ , allora  $Z(f)$  è limitato in una banda compresa tra  $f = 0$  ed  $f = N\Delta$ , e  $z(t)$  è perfettamente rappresentato dai suoi campioni  $z(m) = z(mT_c)$  che compaiono nella (14.48); in particolare, per  $N$  sufficientemente elevato, si ottiene<sup>106</sup> che

<sup>106</sup>Se campioniamo  $z(t)$  con periodo  $T_c = \frac{1}{N\Delta}$ , il segnale  $Z^\bullet(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z(f - m \cdot N\Delta)$  non presenta aliasing (vedi figura), ed il passaggio di  $z^\bullet(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(mT_c) \delta(t - mT_c)$  attraverso un filtro di ricostruzione



$H(f) = \frac{1}{N\Delta} \text{rect}_{N\Delta}\left(f - \frac{N\Delta}{2}\right)$  restituisce il segnale originario. Scriviamo pertanto

$$z(t) = z^\bullet(t) * h(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(mT_c) \delta(t - mT_c) * \text{sinc}(N\Delta t) e^{j\pi N\Delta t}$$

ed effettuiamone la trasformata:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \mathcal{F}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} z(mT_c) \delta(t - mT_c)\right\} \cdot \frac{1}{N\Delta} \text{rect}_{N\Delta}\left(f - \frac{N\Delta}{2}\right) \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} z(mT_c) e^{-j2\pi \frac{m}{N\Delta} f}\right] \cdot \frac{1}{N\Delta} \text{rect}_{N\Delta}\left(f - \frac{N\Delta}{2}\right) \end{aligned}$$

che, calcolata alle frequenze  $f = n\Delta$  con  $n = 0, 1, \dots, N-1$  fornisce

$$Z(f)|_{f=n\Delta} = \frac{1}{N\Delta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(mT_c) e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$$

Se ora non disponiamo di tutti i campioni  $z(mT_c)$ , ma solo degli  $2N-1$  valori con  $m = -(N-1), \dots, 0, 1, \dots, N-1$ , la relazione precedente si applica ad un nuovo segnale  $z'(t) = z(t) \cdot \text{rect}_{2NT_c}(t)$ , fornendo

$$Z'(f)|_{f=n\Delta} = \frac{1}{N\Delta} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} z(mT_c) e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$$

In virtù delle proprietà delle trasformate, risulta

$$Z'(f) = Z(f) * \mathcal{F}\{\text{rect}_{2NT_c}(t)\} \simeq Z(f) * \delta(f) = Z(f)$$

in cui l'approssimazione è lecita per  $N$  elevato.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\underline{N}_n} &= \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} z(m) e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} \simeq \Delta \cdot Z(f)|_{f=n\Delta} = \\
&= \Delta \cdot \mathcal{P}_{\underline{N}} \left( n\Delta - \frac{N\Delta}{2} \right) = \Delta \cdot \mathcal{P}_{\underline{N}} \left( \Delta \left( n - \frac{N}{2} \right) \right) = \\
&= 4\Delta \cdot \mathcal{P}_{\underline{N}}^+ \left( f_0 + \Delta \left( n - \frac{N}{2} \right) \right) = 4\Delta \cdot \mathcal{P}_N(f_n) = 2\Delta \cdot \mathcal{N}_0(f_n)
\end{aligned}$$

in cui si è tenuto conto che  $\mathcal{P}_{\underline{N}}(f) = 4\mathcal{P}_N^+(f + f_0)$  e si è indicata la densità di potenza in ingresso come  $\mathcal{P}_N(f) = \frac{\mathcal{N}_0(f)}{2}$ .

### 14.12.2.3 Prestazioni per portante

Siamo finalmente in grado di scrivere

$$\begin{aligned}
SNR_n &= \frac{\mathcal{P}_{E_n}}{\mathcal{P}_{\underline{N}_n}} = \frac{2\frac{T_0}{T} \alpha_n \mathcal{P}}{2\Delta \mathcal{N}_0(f_n)} = \frac{T_0}{T} \alpha_n \frac{T_0 \mathcal{P}}{\mathcal{N}_0(f_n)} = \frac{T_0}{T} \alpha_n \frac{E_s}{\mathcal{N}_0(f_n)} = \\
&= \frac{T_0}{T} \alpha_n \frac{E_b M}{\mathcal{N}_0(f_n)} = \frac{T_0}{T} \frac{E_{b_n}}{E_b} \frac{E_b M}{\mathcal{N}_0(f_n)} = \frac{T_0}{T} \frac{E_{b_n} M}{\mathcal{N}_0(f_n)}
\end{aligned}$$

avendo posto  $T_0 \mathcal{P} = E_s = E_b M$  pari all'energia di un simbolo di durata  $T_0 = \frac{1}{\Delta}$ , ed avendo riscritto  $\alpha_n = \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}}$  come  $\alpha_n = \frac{E_{b_n}}{E_b}$  in modo da porre in evidenza la  $E_{b_n}$  della portante n-esima. La  $P_e$  per portante risulta quindi

$$P_{e/n} = \frac{2}{M_n} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{L_n}} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 T_0}{2 T} \frac{E_{b_n}}{\mathcal{N}_0(f_n)} \frac{M}{L_n - 1}} \right\} \quad (14.50)$$

### 14.12.2.4 Caso di rumore bianco

Se  $\mathcal{P}_N(f)$  non dipende da  $f$ , possiamo scrivere

$$\mathcal{P}_N^+(f) = \frac{\mathcal{N}_0}{2} \operatorname{rect}_{N\Delta}(f - f_0)$$

e semplificare la (14.50), sostituendo ad  $\mathcal{N}_0(f_n)$  la costante  $\mathcal{N}_0$ . In questo caso, il risultato  $\mathcal{P}_{\underline{N}_n} = 2\Delta \cdot \mathcal{N}_0$  può essere ottenuto direttamente dalla (14.48): infatti, risulta

$$\mathcal{R}_{\underline{N}}(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_{\underline{N}}(f) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ 4\mathcal{P}_N^+(f + f_0) \} = 2\mathcal{N}_0 N \Delta \operatorname{sinc}(N \Delta t)$$

e dunque  $\mathcal{R}_{\underline{N}}(t) = 0$  con  $t = mT_c = \frac{m}{N\Delta}$  per  $m \neq 0$ . Ciò permette di scrivere in definitiva

$$\mathcal{P}_{\underline{N}_n} = \frac{1}{N} \mathcal{R}_{\underline{N}}(0) = \frac{1}{N} 2\mathcal{N}_0 N \Delta = 2\Delta \cdot \mathcal{N}_0$$

### 14.12.2.5 Confronto con la portante singola

Proviamo a verificare se la modulazione OFDM è vantaggiosa in termini di prestazioni rispetto ad una QAM monoportante che trasporti il medesimo flusso binario  $f_b$ , occupi la stessa banda, ed a parità di potenza impiegata. Nel caso OFDM, considerando un tempo di guardia  $T_g = T - T_0$  nullo, in presenza di rumore bianco, e scegliendo un intervallo di simbolo  $T_0 = \frac{1}{\Delta}$  da cui derivare  $M^{OFDM} = T_0 \cdot f_b$ , si ottiene  $\alpha_n = \frac{1}{N}$  e dunque valori  $E_{b_n} = \alpha_n E_b = \frac{E_b}{N}$  uguali per le diverse portanti; pertanto la 14.50 diviene

$$P_e^{OFDM} = P_{e/n} = \frac{2\tilde{N}}{M^{OFDM}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L_n}}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 E_b}{2 N_0} \frac{1}{\tilde{N}} \frac{M^{OFDM}}{L_n - 1}} \right\}$$

Nel caso QAM a portante singola, considerando un impulso a coseno rialzato e roll-off  $\gamma = \frac{N}{N} - 1$  si determina una occupazione di banda pari a  $B = f_s (1 + \gamma)$  che, se eguagliata a quella del caso OFDM, fornisce  $f_s = \tilde{N} \Delta = \frac{\tilde{N}}{T_0}$  e quindi  $M^{QAM} = \frac{f_b}{f_s} = \frac{M^{OFDM}}{N}$ . Pertanto, visto il risultato del § 14.3.1 si ottiene

$$\begin{aligned} P_e^{QAM} &= \frac{2}{M^{QAM}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 E_b}{2 N_0} \frac{M^{QAM}}{L - 1}} \right\} \\ &= \frac{2\tilde{N}}{M^{OFDM}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 E_b}{2 N_0} \frac{1}{\tilde{N}} \frac{M^{OFDM}}{L - 1}} \right\} \end{aligned}$$

che risulta identico a  $P_e^{OFDM}$  qualora si noti che  $L_n = 2^{M_n} = 2^{\frac{M^{OFDM}}{N}}$  e  $L = 2^{M^{QAM}} = 2^{\frac{M^{OFDM}}{N}} = L_n$ .

## Caratterizzazione circuitale, rumore e equalizzazione

**P**RIMA di affrontare (nel prossimo capitolo) il tema dei collegamenti, dedichiamoci in questo ad approfondire tre argomenti in qualche modo *marginali* rispetto alla trasmissione dei segnali, ma profondamente collegati all'aspetto fisico che caratterizza, appunto, la trasmissione. Può essere di aiuto far precedere la lettura di questo capitolo da un ripasso di quanto esposto al cap. 7; viceversa, è possibile saltare direttamente al capitolo successivo, e tornare qui seguendo qualche riferimento ad uno dei temi seguenti.

Come prima cosa, illustriamo il modo di descrivere un segnale che attraversa un circuito elettrico, di immediata applicabilità nel caso dei collegamenti in cavo, ma che rappresenta un passaggio obbligato per qualunque interfaccia elettrica, quindi anche per i collegamenti radio. Viene poi ripreso il discorso sul rumore termico (§ 7.4.2.1), allargandone le cause anche alla rumorosità introdotta dai circuiti attraversati, e giungendo ad un modo per tenere conto dei diversi contributi in maniera unitaria. Quindi, viene affrontata l'analisi dei collegamenti composti da più tratte collegate da ripetitori, ed anche qui sono tratte delle conclusioni per quanto riguarda l'effetto del rumore. Infine, viene approfondito lo studio delle tecniche di equalizzazione adottate nel caso di una modulazione numerica trasmessa su di un canale che presenta distorsione lineare (§ 7.2).

### 15.1 Modello circuitale dei segnali

Innanzitutto, eseguiamo il passaggio da “segnale” come fin qui descritto, alla corrispondente grandezza elettrica che lo veicola.

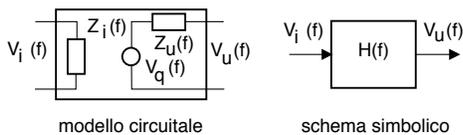
**Potenza di segnale e grandezze elettriche** La caratterizzazione energetica dei segnali è stata finora svolta *a prescindere* dalla natura fisica degli stessi: ovvero, non si è mai specificato se si trattasse di tensioni o correnti, né si sono indicate le impedenze in gioco. Trattando ora di grandezze elettriche le potenze di segnale, di tensione o di corrente, saranno misurate in  $(\text{Volt})^2$  o in  $(\text{Ampere})^2$  rispettivamente.

**Esempio** Sia  $x(t)$  un segnale di tensione. La sua potenza  $\mathcal{P}_x$  ha unità di misura  $[V^2]$ , mentre la sua densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  si esprime in  $[V^2/\text{Hz}]$ .

Eseguiamo quindi una distinzione relativa al ruolo che il circuito ha nei confronti del segnale, tradizionalmente basata sul suo *numero di porte* del circuito.

**Numero di porte** Le coppie di morsetti a cui applicare o da cui prelevare un segnale vengono denominate *porte*. In questo senso un *generatore* che appunto produce il segnale, ed una *impedenza* di carico che ne assorbe la potenza, costituiscono reti ad *una* porta. Al contrario, l'oggetto che abbiamo fin qui indicato come filtro, o canale, da un punto di vista circuitale è un sistema fisico dotato di una relazione ingresso-uscita, e per questo indicato come rete *due* porte.

**Modello di rappresentazione** Un circuito può essere rappresentato mediante il suo *modello circuitale*, in cui sono evidenziati generatori, resistenze, impedenze, generatori controllati..., oppure il suo *schema simbolico*, in cui sono solo mostrate le relazioni funzionali tra i segnali in transito.



**Proprietà delle reti due porte** Le proprietà di *linearità*, *permanenza*, *realizzabilità ideale* e *fisica*, *stabilità*, già definite al § 1.5.4 per i sistemi fisici, possono essere verificate o meno nelle reti due porte. D'altra parte, alcune relazioni e grandezze che nella *teoria dei circuiti* sono definite per segnali puramente sinusoidali, come per la *corrente alternata*, nella *teoria dei segnali* devono essere ridefinite in modo da tenere nel giusto conto i *diversi contenuti frequenziali* presenti nei segnali con un contenuto informativo.

### 15.1.1 Bipoli

**Passivi** Non contengono generatori, e sono caratterizzati dalle relazioni esistenti tra la tensione ai loro capi e la corrente che vi scorre (entrante). Il legame tra le due grandezze è una *convoluzione*

$$v(t) = i(t) * z(t)$$

in cui si suppone  $i(t)$  la causa e  $v(t)$  l'effetto. La trasformata di Fourier fornisce  $V(f) = I(f) \cdot Z(f)$  in cui  $Z(f)$  prende il nome di *impedenza*, e può scriversi nei termini di parte reale ed immaginaria:

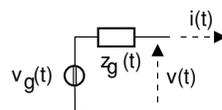
$$Z(f) = R(f) + jX(f)$$

in cui  $R(f)$  (*resistenza*) è una funzione *pari* di  $f$  (e sempre positiva), mentre  $X(f)$  (*reattanza*) è *dispari*: pertanto,  $Z(f) = Z^*(-f)$  e quindi  $z(t)$  è reale. Allo stesso tempo, è definita *l'ammettenza*

$$Y(f) = \frac{1}{Z(f)} = \frac{1}{R(f) + jX(f)} = \frac{R(f) - jX(f)}{|Z(f)|^2}$$

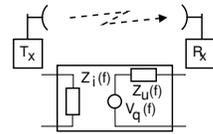
e la corrispondente  $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\}$ , permettendo di scrivere  $i(t) = v(t) * y(t)$ , in cui il ruolo di causa ed effetto per  $i(t)$  e  $v(t)$  è invertito.

**Attivi** Sono bipoli al cui interno è presente un generatore. Per il teorema di THÉVENIN,<sup>1</sup> qualunque circuito può essere ridotto ad un generatore di tensione con in serie un'impedenza (vedi figura), in cui  $V_g(f)$  rappresenta la tensione a vuoto, ossia quando  $I(f) = 0$  (considerata uscente nei bipoli attivi).



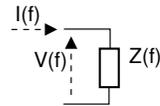
<sup>1</sup>Vedi ad es. [http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_di\\_Thévenin](http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Thévenin)

**Esempio** Una antenna trasmittente (§ 16.3.1) è schematizzabile come un bipolo passivo, di impedenza pari all'impedenza di ingresso dell'antenna, che assorbe la potenza erogata dal trasmettitore. Una antenna ricevente è schematizzabile come un generatore di tensione con in serie la propria impedenza di uscita, e trasferisce allo stadio di ingresso del ricevitore la potenza ricevuta per via elettromagnetica.



**15.1.1.1 Potenza assorbita da un bipolo**

Se ad un bipolo passivo di impedenza  $Z(f)$  è applicato un segnale di tensione con spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_v(f)$ , la potenza dissipata sul bipolo (o assorbita), indicata come  $\mathcal{W}_z$  per distinguerla da quella di segnale  $\mathcal{P}_v$ , ha densità



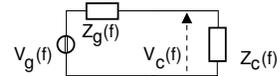
$$\mathcal{W}_z(f) = \mathcal{P}_v(f) \cdot \Re \{Y(f)\} = \mathcal{P}_v(f) \frac{R(f)}{|Z(f)|^2} \quad \left[ \frac{V^2}{\Omega \cdot Hz} \right] = \left[ \frac{Watt}{Hz} \right] \quad (15.1)$$

La dimostrazione della relazione illustrata è fornita al § 15.5.1. La dipendenza di  $Y(f)$  dalla frequenza svolge pertanto una azione filtrante, e la potenza totale assorbita (o dissipata) su  $Z(f)$  vale

$$\mathcal{W}_z = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f) \frac{R(f)}{|Z(f)|^2} df \quad [Watt]$$

**15.1.1.2 Connessione tra generatore e carico**

La tensione ai capi del carico è valutabile applicando la regola del partitore<sup>2</sup>:



$$V_c(f) = V_g(f) \frac{Z_c(f)}{Z_c(f) + Z_g(f)}$$

ossia  $V_c(f) = V_g(f) H(f)$  con  $H(f) = \frac{Z_c(f)}{Z_c(f) + Z_g(f)}$ . La densità di potenza di segnale ai capi del carico vale  $\mathcal{P}_{v_c}(f) = \mathcal{P}_{v_g}(f) |H(f)|^2$ , e la densità di potenza dissipata su  $Z_c(f)$  risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{z_c}(f) &= \mathcal{P}_{v_c}(f) \frac{R_c(f)}{|Z_c(f)|^2} = \mathcal{P}_{v_g}(f) \left| \frac{Z_c(f)}{Z_c(f) + Z_g(f)} \right|^2 \frac{R_c(f)}{|Z_c(f)|^2} = \\ &= \mathcal{P}_{v_g}(f) \frac{R_c(f)}{|Z_c(f) + Z_g(f)|^2} \end{aligned} \quad (15.2)$$

Osserviamo dunque che la densità di potenza assorbita dal carico dipende da  $Z_c(f)$ , che compare sia a denominatore, che a numeratore con  $R_c(f)$ . Ci chiediamo allora quale sia il valore di  $Z_c$  che realizza il massimo trasferimento di potenza tra generatore e carico, sfruttando così appieno la potenzialità del generatore detta potenza disponibile.

<sup>2</sup>[http://it.wikipedia.org/wiki/Partitore\\_di\\_tensione](http://it.wikipedia.org/wiki/Partitore_di_tensione)

### 15.1.1.3 Potenza disponibile e massimo trasferimento di potenza

La  $\mathcal{W}_{z_c}(f)$  espressa da (15.2) risulta massimizzata qualora il suo denominatore viene reso minimo, ed al § 15.5.2 si mostra che ciò avviene qualora risulti  $R_c(f) = R_g(f)$  e  $X_c(f) = -X_g(f)$ , ovvero  $Z_c(f) = Z_g^*(f)$ , in modo da poter enunciare

$$\begin{aligned} \text{se} \quad Z_c(f) &= Z_g^*(f) & (15.3) \\ \text{allora} \quad \mathcal{W}_{z_c}(f) &= \max_{Z_c(f)} \{\mathcal{W}_{z_c}(f)\} = \frac{\mathcal{P}_{v_g}(f)}{4R_g(f)} = \mathcal{W}_{d_g}(f) \end{aligned}$$

Il valore  $\mathcal{W}_{d_g}(f) = \frac{\mathcal{P}_{v_g}(f)}{4R_g(f)}$  prende il nome di spettro di potenza *disponibile* del generatore, dipende solo dai suoi parametri  $\mathcal{P}_{v_g}(f)$  e  $R_g(f)$ , e rappresenta la *massima* potenza ceduta ad un carico che è *adattato* per il *massimo trasferimento di potenza*<sup>3</sup>.

La potenza disponibile  $\mathcal{W}_{d_g}(f)$  è pertanto *una grandezza caratteristica* del generatore; la potenza effettivamente ceduta ad un carico generico  $Z_c(f) \neq Z_g^*(f)$ , risulta inferiore a  $\mathcal{W}_{d_g}(f)$  di una quantità

$$\alpha(f) = \frac{4R_g(f)R_c(f)}{|Z_g(f) + Z_c(f)|^2}$$

(vedi § 15.5.3) e quindi in generale si ha  $\mathcal{W}_{z_c}(f) = \alpha(f)\mathcal{W}_{d_g}(f)$ .

### 15.1.1.4 Adattamento di impedenza per assenza di distorsione lineare

Abbiamo già osservato come la tensione ai capi del carico abbia valore  $V_c(f) = V_g(f) \cdot \frac{Z_c(f)}{Z_c(f) + Z_g(f)} = V_g(f)H(f)$ . Ci chiediamo ora quali condizioni debbano sussistere affinché  $H(f)$  si comporti come un *canale perfetto* (pag. 183), ovvero risulti  $|H(f)| = \text{cost}$  e  $\arg\{H(f)\} = -2\pi f\tau$ : tali condizioni sono anche indicate come *assenza di distorsione lineare*. Il risultato cercato si ottiene qualora si ponga

$$Z_c(f) = \alpha Z_g(f) \quad \text{con } \alpha \text{ reale}$$

infatti in tal caso risulta  $H(f) = \frac{\alpha Z_g(f)}{(1+\alpha)Z_g(f)} = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ , ossia  $H(f)$  costante. La condizione  $Z_c(f) = \alpha Z_g(f)$  prende il nome di *adattamento di impedenza*, a volte ristretta al caso in cui  $\alpha = 1$ .

$Z_g(f)$  **reale** Notiamo che massimo trasferimento di potenza ed assenza di distorsione lineare possono sussistere *congiuntamente*, a patto che  $Z_g(f) = R_g$ , ovvero che sia il generatore che il carico siano caratterizzati da una impedenza reale.

## 15.1.2 Reti due porte

Come anticipato, un circuito accessibile mediante due coppie di morsetti è detto rete due porte, e può essere rappresentata secondo almeno due diversi formalismi: il *modello circuitale* e lo *schema simbolico*.

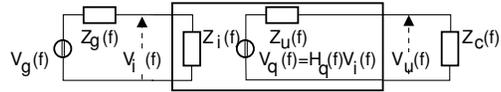
<sup>3</sup>E' bene notare esplicitamente che questo massimo è valido solo nel caso in cui non sia possibile modificare la  $Z_g(f)$ . Altrimenti, per un qualunque valore fissato di  $Z_c(f)$ , il massimo di  $\mathcal{W}_{z_c}(f)$  si ottiene quando  $Z_g(f) \rightarrow 0$ .

### 15.1.2.1 Modello circuitale

In figura è mostrato un possibile modello circuitale<sup>4</sup> per una rete due porte, caratterizzata in termini di impedenza di ingresso  $Z_i(f)$ , di uscita  $Z_u(f)$ , e di un generatore controllato con tensione a vuoto  $V_q(f) = H_q(f) V_i(f)$ ; le condizioni di chiusura sono quelle di un generatore  $V_g(f)$  con impedenza  $Z_g(f)$  in ingresso, e di una impedenza di carico  $Z_c(f)$  in uscita.

La tensione  $V_i(f)$  all'ingresso della rete

$$V_i(f) = V_g(f) H_i(f)$$



dipende da quella del generatore  $V_g(f)$  mediante il rapporto di partizione  $H_i(f) = \frac{Z_i(f)}{Z_g(f) + Z_i(f)}$ , così come la tensione in uscita

$$V_u(f) = V_q(f) H_u(f)$$

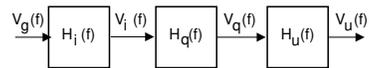
dipende da quella del generatore controllato  $V_q(f)$  mediante il rapporto di partizione  $H_u(f) = \frac{Z_c(f)}{Z_u(f) + Z_c(f)}$ . Combinando queste relazioni, si ottiene che la risposta in frequenza complessiva  $H(f)$  risulta:

$$V_u(f) = V_g(f) H_i(f) H_q(f) H_u(f) = V_g(f) H(f) \quad (15.4)$$

La relazione mostra come  $H(f)$  dipenda, oltre che dalla risposta in frequenza intrinseca della rete  $H_q(f)$ , anche dalle *condizioni di adattamento* che si realizzano in ingresso ed in uscita.

### 15.1.2.2 Schema simbolico

Lo stesso modello circuitale descritto può essere rappresentato equivalentemente mediante lo schema simbolico rappresentato a lato, in cui sono evidenziate le tre funzioni di trasferimento sopra ricavate, e che operano sui segnali indicati. Lo schema simbolico ha il vantaggio di trascendere dal modello circuitale soggiacente, e di rendere del tutto evidente come la risposta in frequenza complessiva abbia origine dal prodotto di tre termini, di cui solo uno ( $H_q(f)$ ) rappresenta la rete due porte in senso stretto.



### 15.1.2.3 Trasferimento energetico

Applicando ora la (15.1) alla potenza ceduta al carico  $Z_c(f)$  dal generatore controllato  $V_q(f)$ , e tenendo conto della (15.4), si ottiene:

$$\mathcal{W}_c(f) = \mathcal{P}_{v_u}(f) \frac{R_c(f)}{|Z_c(f)|^2} = \mathcal{P}_{v_g}(f) |H(f)|^2 \frac{R_c(f)}{|Z_c(f)|^2}$$

Proseguiamo ora l'analisi cercando di individuare una relazione di trasferimento energetico che possa rappresentare caratteristiche esclusive della rete.

<sup>4</sup>Sono chiaramente possibili modelli diversi, basati su topologie e relazioni differenti. Esistono infatti circuiti a T, ad L, a scala, a traliccio, a pigreco; le relazioni tra le grandezze di ingresso ed uscita possono essere espresse mediante modelli definiti in termini di impedenze, ammettenze, e parametri ibridi.

Il caso qui trattato è quello di un modello ibrido, con la particolarità di non presentare influenze esplicite dell'uscita sull'ingresso. Qualora il circuito che si descrive presenti una dipendenza, ad esempio di  $Z_i$  da  $Z_c$ , o  $Z_u$  da  $Z_g$ , questo deve risultare nell'espressione della grandezza dipendente. Viceversa, qualora il circuito presenti in ingresso un generatore controllato da una grandezza di uscita, il modello non è più applicabile.

**Guadagno di tensione** E' definito come il rapporto tra tensione di uscita e di ingresso:

$$G_v(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = H_q(f) H_u(f)$$

Evidentemente, dipende dalle condizioni di chiusura all'uscita della rete.

**Guadagno di potenza** E' il rapporto tra la potenza ceduta al carico e quella assorbita all'ingresso della rete:

$$\begin{aligned} G_W(f) &= \frac{W_c(f)}{W_i(f)} = \mathcal{P}_{v_g}(f) |H(f)|^2 \frac{R_c(f)}{|Z_c(f)|^2} \cdot \frac{1}{\mathcal{P}_{v_g}(f)} \frac{|Z_g(f) + Z_i(f)|^2}{R_i(f)} = \\ &= |H(f)|^2 \frac{R_c(f)}{R_i(f)} \cdot \left| \frac{Z_g(f) + Z_i(f)}{Z_c(f)} \right|^2 = \\ &= |H_q(f)|^2 \cdot \frac{R_c(f)}{R_i(f)} \cdot \left| \frac{Z_i(f)}{Z_u(f) + Z_c(f)} \right|^2 \end{aligned}$$

ed evidentemente è ancora funzione di  $Z_c(f)$  <sup>(5)</sup>. Notiamo ora che, qualora il carico sia adattato per il massimo trasferimento di potenza ( $Z_c(f) = Z_u^*(f)$ ), la potenza ceduta a  $Z_c(f)$  (e quindi  $G_W(f)$ ) è massima, e la dipendenza di  $G_W(f)$  da  $Z_c(f)$  decade, risultando

$$G_{W_{Max}}(f) = |H_q(f)|^2 \cdot \frac{|Z_i(f)|^2}{4R_i(f) R_u(f)} \quad (15.5)$$

**Guadagno disponibile** Il rapporto tra la potenza disponibile di uscita, e quella disponibile del generatore posto in ingresso della rete (indipendentemente dal fatto che l'ingresso della rete presenti o meno le condizioni per il massimo trasferimento di potenza) è detto *guadagno disponibile*, e risulta:

$$\begin{aligned} G_d(f) &= \frac{W_{d_u}(f)}{W_{d_g}(f)} = \frac{\mathcal{P}_{v_q}(f)}{4R_u(f)} \cdot \frac{4R_g(f)}{\mathcal{P}_{v_g}(f)} = \\ &= \mathcal{P}_{v_g}(f) |H_i(f)|^2 |H_q(f)|^2 \cdot \frac{R_g(f)}{R_u(f)} \cdot \frac{1}{\mathcal{P}_{v_g}(f)} = \\ &= |H_i(f)|^2 |H_q(f)|^2 \cdot \frac{R_g(f)}{R_u(f)} \end{aligned} \quad (15.6)$$

La relazione trovata mostra la dipendenza di  $G_d(f)$  dalle condizioni di chiusura in ingresso; se l'impedenza di ingresso  $Z_i(f)$  è tale da permettere il conseguimento del massimo trasferimento di potenza, ovvero  $Z_g(f) = Z_i^*(f)$ , la dipendenza decade ed  $|H_i(f)|^2 = \left| \frac{Z_i(f)}{Z_i(f) + Z_i^*(f)} \right|^2 = \frac{|Z_i(f)|^2}{4R_i^2(f)}$ ; considerando inoltre che  $R_g(f) = R_i(f)$ , la (15.6) diviene:

$$G_{d_{Max}}(f) = |H_q(f)|^2 \cdot \frac{|Z_i(f)|^2}{4R_u(f) R_i(f)} \quad (15.7)$$

<sup>5</sup>L'ultimo passaggio tiene conto che (omettendo la dipendenza da  $f$ ):

$$|H|^2 \cdot \left| \frac{Z_g + Z_i}{Z_c} \right|^2 = \left| \frac{Z_i}{Z_i + Z_g} H_q \frac{Z_c}{Z_c + Z_u} \right|^2 \left| \frac{Z_g + Z_i}{Z_c} \right|^2 = |H_q|^2 \cdot \left| \frac{Z_i}{Z_u + Z_c} \right|^2$$

Quest'ultima quantità è chiamata *guadagno disponibile DELLA RETE DUE PORTE* ed è quella che appunto dipende solo dai parametri della rete stessa. Confrontando (15.7) con (15.5) notiamo che  $G_{dMax}(f)$  coincide con  $G_{WMax}(f)$ . Confrontando (15.7) con (15.6), troviamo che  $G_d(f) = |H_i(f)|^2 G_{dMax}(f) \frac{4R_g(f)R_i(f)}{|Z_i(f)|^2}$ . Considerando ora che  $|H_i(f)|^2 \frac{1}{|Z_i(f)|^2} = \left| \frac{Z_i(f)}{Z_i(f)+Z_g(f)} \right|^2 \frac{1}{|Z_i(f)|^2} = \frac{1}{|Z_i(f)+Z_g(f)|^2}$ , otteniamo

$$G_d(f) = \frac{4R_g(f)R_i(f)}{|Z_g(f)+Z_i(f)|^2} \cdot G_{dMax}(f)$$

che ci consente di valutare  $G_d(f)$  nelle reali condizioni di chiusura in ingresso, a partire da  $G_{dMax}(f) = G_{WMax}(f)$  che dipende solo dalla rete.

### Collegamento generatore-carico mediante rete due porte

- Considerando generatore e porta di ingresso della rete adattati per il massimo trasferimento di potenza, la densità di potenza disponibile in uscita risulta

$$W_{du}(f) = G_{dMax}(f) W_{dg}(f)$$

e dunque l'uscita della rete due porte si comporta come un generatore equivalente, caratterizzato da una nuova  $W_{du}(f)$  ed una diversa impedenza interna  $Z_u(f)$ .

- Nel caso in cui in ingresso non si verifichi il massimo trasferimento di potenza,  $G_d(f)$  si riduce di un fattore  $\beta(f) = \frac{4R_g(f)R_i(f)}{|Z_g(f)+Z_i(f)|^2}$ , e dunque la nuova potenza disponibile di uscita risulta

$$W_{du}(f) = \beta(f) \cdot G_{dMax}(f) W_{dg}(f) = \frac{4R_g(f)R_i(f)}{|Z_g(f)+Z_i(f)|^2} \cdot G_{dMax}(f) W_{dg}(f)$$

- Nel caso infine in cui il carico  $Z_c(f)$  in uscita alla rete non sia adattato, quest'ultimo assorbe una potenza inferiore a  $W_{du}(f)$  e pari a (vedi Appendice 15.5.3)

$$W_c(f) = \alpha(f) \cdot W_{du}(f) = \frac{4R_u(f)R_c(f)}{|Z_u(f)+Z_c(f)|^2} \cdot W_{du}(f)$$

**Reti passive** Se una rete non contiene elementi attivi, allora  $G_{dMax}(f) \leq 1$  per qualunque  $f$ . In questo caso si parla più propriamente di *attenuazione disponibile*  $A_d(f) = \frac{1}{G_d(f)}$  ovvero  $A_d(f)$  [dB] =  $-G_d(f)$  [dB].

**Reti in cascata** Se più reti sono connesse tra loro l'una di seguito all'altra, e si verificano per ciascuna coppia le condizioni di massimo trasferimento di potenza tra lo stadio di uscita di una e quello di ingresso della successiva, il guadagno disponibile complessivo è il prodotto dei singoli guadagni disponibili:  $G_{dTot} = G_{d1} \cdot G_{d2} \cdot \dots \cdot G_{dn}$ .

**Esempio** Alla figura seguente è mostrato un generatore con potenza disponibile  $W_{dg}$  collegato ad una serie di tre reti due porte; l'effetto complessivo è quello di un nuovo generatore di uscita con potenza disponibile  $W_{du}$  pari al prodotto di quella del generatore originario, moltiplicata per i guadagni disponibili delle reti attraversate, tenendo anche eventualmente conto delle attenuazioni supplementari<sup>6</sup>:

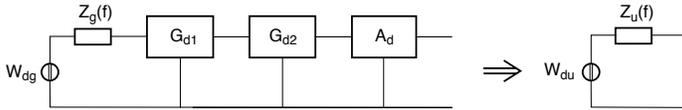
$$W_{du} = W_{dg} \cdot G_{d1} \cdot G_{d2} \cdot \frac{1}{A_d} \cdot \frac{1}{A_s}$$

<sup>6</sup>L'attenuazione supplementare (pag. 464) può esprimere il peggioramento dovuto al mancato verificarsi delle condizioni di massimo trasferimento tra le impedenze di uscita e di ingresso delle reti affiancate.

che può essere egualmente valutato operando in decibel, come

$$W_{du} [dBW] = W_{dg} [dBW] + G_{d1} [dB] + G_{d2} [dB] - A_d [dB] - A_s [dB]$$

in cui ovviamente, qualora  $W_{dg}$  fosse espresso in  $dBm$  anziché  $dBW$ , lo stesso accadrebbe per  $W_{du}$ .



**Collegamento radio** Con riferimento al circuito equivalente per una coppia di antenne di pag. 431, precisiamo che la potenza trasmessa è quella assorbita dall'impedenza di ingresso dell'antenna trasmittente, mentre quella ricevuta è quella ceduta dal generatore equivalente dell'antenna ricevente, all'impedenza di ingresso del ricevitore.

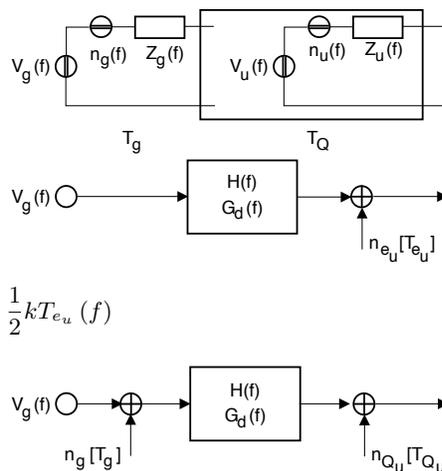
### 15.2 Rumore nelle reti due porte

Al § 7.4.2.1 abbiamo mostrato come per un bipolo attivo, una volta semplificato<sup>7</sup> nella sua forma canonica come un generatore di segnale (a vuoto)  $V_g(f)$  con in serie una impedenza interna  $Z_g(f)$  a temperatura  $T_g$ , quest'ultima contenga al suo interno anche un generatore di rumore termico, con densità di potenza di segnale  $\mathcal{P}_n(f) = 2kT_gR(f)$  Volt<sup>2</sup>, generato dalla sola parte reale  $R(f) = \mathcal{R}\{Z_g(f)\}$  dell'impedenza. Qualora tale generatore sia chiuso su di un carico  $Z_c(f) = Z_g^*(f)$  adattato per il massimo trasferimento di potenza, su  $Z_c(f)$  si dissipa sia la potenza disponibile di segnale  $\mathcal{W}_{dg}(f) = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{4R(f)}$ , sia quella (sempre disponibile) di rumore  $\mathcal{W}_{dn}(f) = \frac{\mathcal{P}_n(f)}{4R(f)} = \frac{1}{2}kT_g$  [Watt/Hz]: pertanto, il generatore nasce già di per se rumoroso, con un  $SNR_g(f) = \frac{\mathcal{W}_{dg}(f)}{\frac{1}{2}kT_g}$ . Qualora tra il generatore ed il carico siano invece interposte una (o più) reti due porte, occorre investigare su come tenere conto dell'ulteriore rumore introdotto da queste ultime.

**Temperatura equivalente di uscita** Collegando un generatore rumoroso a temperatura  $T_g$  all'ingresso di una rete due porte a temperatura  $T_Q$  (vedi fig. a lato), in uscita della rete troviamo un processo di rumore dipendente sia dal generatore che dalla rete, e la cui potenza disponibile  $\mathcal{W}_{dn_u}(f)$  può essere espressa in funzione di una temperatura equivalente di uscita  $T_{e_u}(f)$  (seconda figura), tale che

$$\mathcal{W}_{dn_u}(f) = \frac{1}{2}kT_{e_u}(f)$$

D'altra parte a  $T_{e_u}(f)$  concorrono sia la temperatura del generatore  $T_g(f)$ , che la rete con una propria  $T_{Q_u}(f)$  equivalente di uscita (fig. a lato); scriviamo dunque



<sup>7</sup>Applicando il teorema di Thévenin, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_di\\_Thévenin](https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Thévenin)

$$\mathcal{W}_{dn_u}(f) = \frac{1}{2}k \cdot [T_g(f) G_d(f) + T_{Q_u}(f)]$$

in cui la potenza disponibile in ingresso alla rete (che ha guadagno disponibile  $G_d(f)$ ) è riportata in uscita, moltiplicata per  $G_d(f)$ .

**Temperatura di sistema** Se ora riportiamo in ingresso alla rete il contributo di rumore dovuto a  $T_{Q_u}$ , otteniamo

$$\mathcal{W}_{dn_u}(f) = \frac{1}{2}kG_d(f) \cdot [T_g(f) + T_{Q_i}(f)]$$

(in cui  $T_{Q_i}(f) = \frac{T_{Q_u}(f)}{G_d(f)}$ ), ovvero

$$\mathcal{W}_{dn_u}(f) = \frac{1}{2}kG_d(f) T_{e_i}(f)$$

in cui

$$T_{e_i}(f) = T_g(f) + T_{Q_i}(f) = T_g(f) + \frac{T_{Q_u}(f)}{G_d(f)} \quad (15.8)$$

è detta anche *temperatura di sistema*  $T_s = T_{e_i}$ , poiché riporta in ingresso alla rete tutti i contributi al rumore di uscita, dovuti sia al generatore che alla rete. Siamo però rimasti con un problema irrisolto: che dire a riguardo di  $T_{Q_i}$  e  $T_{Q_u}$ ?

### 15.2.1 Reti passive

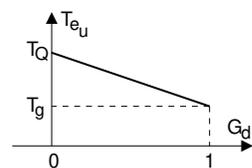
Nel caso in cui la rete due porte non contenga elementi attivi, e considerando tutti i componenti passivi della rete alla stessa temperatura  $T_Q$ , si può mostrare che risulta

$$\begin{cases} T_{Q_u}(f) &= [1 - G_d(f)] T_Q \\ T_{Q_i}(f) &= \frac{T_{Q_u}(f)}{G_d(f)} = [A_d(f) - 1] T_Q \end{cases}$$

in modo da poter scrivere:

$$\begin{cases} T_{e_u}(f) &= G_d(f) T_g(f) + T_{Q_u}(f) = G_d(f) T_g(f) + [1 - G_d(f)] T_Q \\ T_{e_i}(f) &= \frac{T_{e_u}(f)}{G_d(f)} = T_g(f) + [A_d(f) - 1] T_Q \end{cases}$$

Questo risultato evidenzia come per una rete passiva (con  $0 \leq G_d \leq 1$ ), la temperatura di rumore equivalente in uscita sia una media pesata delle temperature del generatore e della rete. Nei casi limite in cui  $G_d = 0$  oppure 1, la  $T_{e_u}(f)$  è pari rispettivamente a  $T_Q$  e  $T_g(f)$ ; infatti i due casi corrispondono ad una "assenza" della rete oppure ad una rete che non attenua.



#### 15.2.1.1 Rapporto SNR in uscita

Se si valuta il rapporto segnale rumore in uscita alla rete, otteniamo

$$SNR_u(f) = \frac{\mathcal{W}_{dg}(f) G_d(f)}{\frac{1}{2}k T_{e_i}(f) G_d(f)} = \frac{\mathcal{W}_{dg}(f)}{\frac{1}{2}k \cdot [T_g(f) + [A_d(f) - 1] T_Q]}$$

Ricordando che il generatore in ingresso presenta un  $SNR_i(f) = \frac{\mathcal{W}_{dg}(f)}{\frac{1}{2}kT_g(f)}$ , possiamo valutare il peggioramento prodotto dalla presenza della rete:

$$\begin{aligned} \frac{SNR_i(f)}{SNR_u(f)} &= \frac{\mathcal{W}_{dg}(f)}{\frac{1}{2}kT_g(f)} \cdot \frac{\frac{1}{2}k \cdot [T_g(f) + [A_d(f) - 1]T_Q]}{\mathcal{W}_{dg}(f)} = \\ &= 1 + \frac{T_Q}{T_g(f)} \cdot [A_d(f) - 1] \end{aligned} \quad (15.9)$$

### 15.2.1.2 Fattore di rumore per reti passive

Il rapporto (15.9)  $F(f) = 1 + \frac{T_Q}{T_g(f)} \cdot [A_d(f) - 1] \geq 1$  è chiamato *fattore di rumore*<sup>8</sup> della rete passiva, e rappresenta il peggioramento dell' $SNR$  dovuto alla sua presenza, potendo infatti scrivere

$$SNR_u(f) = \frac{SNR_i(f)}{F(f)} \leq SNR_i(f)$$

Notiamo subito che se  $T_g(f) = T_Q$ , allora  $F = A_d$ : pertanto una rete passiva che si trova alla stessa temperatura del generatore, esibisce un fattore di rumore pari all'attenuazione. Infatti, mentre la potenza disponibile di rumore è la stessa (essendo generatore e rete alla stessa temperatura), il segnale si attenua di un fattore  $A_d$ .

### 15.2.2 Reti attive

In questo caso il rumore introdotto dalla rete ha origine *non solo* dai resistori, e dunque *non è più vero* che  $T_{Q_u}(f) = [1 - G_d(f)]T_Q$ . Inoltre, il guadagno disponibile può assumere valori  $G_d > 1$ . In questo caso, si può esprimere l' $SNR$  in uscita dalla rete come

$$SNR_u(f) = \frac{\mathcal{W}_{dg}(f)G_d(f)}{\frac{1}{2}k[G_d(f)T_g(f) + T_{Q_u}(f)]} = \frac{\mathcal{W}_{dg}(f)}{\frac{1}{2}k \cdot [T_g(f) + T_{Q_i}(f)]}$$

ed il peggioramento individuato in (15.9) come

$$\frac{SNR_i(f)}{SNR_u(f)} = \frac{\mathcal{W}_{dg}(f)}{\frac{1}{2}kT_g(f)} \cdot \frac{\frac{1}{2}k \cdot [T_g(f) + T_{Q_i}(f)]}{\mathcal{W}_{dg}(f)} \quad (15.10)$$

$$= 1 + \frac{T_{Q_i}(f)}{T_g(f)} = F(f, T_g) \quad (15.11)$$

Quest'ultima espressione dipende ancora da  $T_g$ . Allo scopo di ottenere una grandezza che dipenda solamente dalla rete due porte, si definisce quindi il

#### 15.2.2.1 Fattore di rumore per reti attive

Viene posto pari a

$$F(f) = 1 + \frac{T_{Q_i}(f)}{T_0}$$

e rappresenta il peggioramento di  $SNR$  causato dalla rete quando il generatore è a temperatura ambiente  $T_0 = 300 \text{ }^\circ\text{K} = 27 \text{ }^\circ\text{C}$ . In realtà non ci è dato di conoscere  $T_{Q_i}(f)$ , mentre invece  $F(f)$  può essere misurato a partire dal *rapporto dei rapporti SNR*, ed è proprio ciò che fa

<sup>8</sup>A volte si incontra anche il termine *figura di rumore*, derivato dall'inglese NOISE FIGURE (che in realtà si traduce *cifra di rumore*), e che si riferisce alla misura di  $F$  in decibel.

il costruttore della rete due porte. Il valore di  $F(f)$  misurato ci permette dunque il calcolo di  $T_{Q_i}(f) = T_0 [F(f) - 1]$  che, sostituito nella (15.8), permette finalmente di valutare la temperatura di sistema come

$$T_{e_i}(f) = T_g(f) + T_0 [F(f) - 1] \quad (15.12)$$

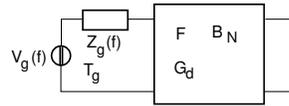
mentre dalla (15.11) si determina il peggioramento dell' $SNR$  come

$$\frac{SNR_i(f)}{SNR_u(f)} = 1 + \frac{T_0}{T_g(f)} [F(f) - 1]$$

### Riassunto

- il fattore di rumore è definito come il peggioramento di  $SNR$  dovuto alla presenza della rete tra generatore e carico, quando il generatore è a temperatura  $T_0 = 300 \text{ °K} = 27 \text{ °C}$ ;
- dal fattore di rumore si deriva la temperatura di sistema  $T_{e_i}(f) = T_g(f) + T_0 [F(f) - 1]$ ;
- Se  $T_g = T_0$  allora  $T_{e_i}(f) = F(f) T_0$ , e dunque la temperatura di sistema  $T_{e_i}$  è  $F(f)$  volte quella del generatore;
- Se la rete non è rumorosa si ottiene  $F = 1$  (pari a 0 dB);
- Se la rete è passiva allora  $F(f) = [A_d(f) - 1] \frac{T_Q}{T_0} + 1$ , e se è a temperatura  $T_Q = T_0$  allora  $F = A_d$ .

**Esempio** Sia data una rete due porte con assegnati guadagno disponibile  $G_d$ , banda di rumore  $B_N$  e fattore di rumore  $F$ . Valutare il rapporto segnale rumore disponibile in uscita nei due casi in cui il generatore si trovi ad una generica temperatura  $T_g$  oppure a  $T_0$ .



**Soluzione** Sappiamo che la densità di potenza disponibile di rumore in uscita vale

$$\mathcal{W}_{dn_u}(f) = \frac{1}{2} k T_{e_i} G_d = \frac{1}{2} k \cdot [T_g + T_{Q_i}] \cdot G_d$$

in generale  $F = 1 + \frac{T_{Q_i}}{T_0}$  e quindi  $T_{Q_i} = T_0 (F - 1)$ , dunque

$$\mathcal{W}_{dn_u}(f) = \frac{1}{2} k \cdot [T_g + T_0 (F - 1)] \cdot G_d$$

Pertanto, la potenza disponibile di rumore si ottiene integrando la densità sulla banda di rumore

$$\mathcal{W}_{dn_u} = k \cdot [T_g + T_0 (F - 1)] \cdot G_d B_N$$

che, nel caso in cui  $T_g = T_0$ , si riduce a  $\mathcal{W}_{dn_u} = k T_0 F G_d B_N$ . Per la potenza di segnale, si ha invece  $\mathcal{W}_{ds_u} = \mathcal{W}_{dg} G_d$ , e pertanto se  $T_g = T_0$ , risulta

$$SNR_u = \frac{SNR_i}{F} = \frac{\mathcal{W}_{dg}}{k T_0 F B_N} = \frac{\mathcal{W}_{dg}}{k T_{e_i} B_N}$$

ottenendo quindi lo stesso  $SNR$  in ingresso, ma con un rumore  $F$  volte più potente. Nel caso in cui  $T_g$  sia generico, considerando un fattore di rumore costante nella banda di rumore  $B_N$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} SNR_u &= \frac{SNR_i}{F(T_g)} = \frac{\mathcal{W}_{dg}}{k T_g B_N} \cdot \frac{1}{1 + \frac{T_{Q_i}}{T_g}} = \frac{\mathcal{W}_{dg}}{k T_g B_N} \cdot \frac{1}{1 + \frac{T_0(F-1)}{T_g}} = \\ &= \frac{\mathcal{W}_{dg}}{k [T_g + T_0 (F - 1)] B_N} = \frac{\mathcal{W}_{dg}}{k T_{e_i} B_N} \end{aligned}$$

**Esercizio** Un trasmettitore con potenza di 50 mW e portante 30 MHz, modula AM BLD PS un segnale con banda  $\pm B = \pm 10$  KHz, prodotto da un generatore a temperatura  $T_0$ . Qualora si desideri mantenere un  $SNR$  in ricezione di almeno 25 dB, determinare la distanza che è possibile coprire adottando antenne isotrope, ed un ricevitore caratterizzato da un fattore di rumore  $F = 10$  dB.

**Svolgimento** Assumendo che si verifichino le condizioni di massimo trasferimento di potenza, il valore desiderato  $SNR = SNR_0 = \frac{W_R}{W_N}$  può essere ottenuto se  $W_R = W_N \cdot SNR = 2B \cdot \mathcal{W}_{dN}(f) \cdot SNR = B \cdot kT_0 F \cdot SNR$ , e quindi occorre ricevere un potenza

$$W_{R_{min}} \text{ (dBm)} = 10\log_{10} 10^4 \text{ (Hz)} - 174 \text{ (dBm/Hz)} + F_{dB} + SNR_{dB} = \\ = 40 - 174 + 10 + 25 = -99 \text{ dBm.}$$

Il guadagno di sistema (pag. 464) risulta allora pari a

$$G_s \text{ (dB)} = W_T \text{ (dBm)} - W_{R_{min}} \text{ (dBm)} = 10\log_{10} 50 + 99 = 17 + 99 = 116 \text{ dB}$$

Non prevedendo nessun margine, l'attenuazione dovuta alla distanza può essere pari al guadagno di sistema, e pertanto applicando la (16.13) di pag. 475 scriviamo

$$A_d = 116 = 32.4 + 20\log_{10} f \text{ (MHz)} + 20\log_{10} d \text{ (Km)} = \\ = 32.4 + 29.5 + 20\log_{10} d \text{ (Km)}$$

e quindi  $2.7 = \log_{10} d \text{ (Km)}$ , da cui  $d = 10^{2.7} = 501$  Km. Svolgendo nuovamente i calcoli nel caso in cui il fattore di rumore del ricevitore sia pari a 20 dB e 100 dB, si ottiene che la nuova massima distanza risulta rispettivamente di 158 Km e di 15 metri.

### 15.2.3 Fattore di rumore per reti in cascata

Sappiamo che il guadagno disponibile dell'unica rete due porte equivalente alle  $N$  reti poste in cascata, è pari al prodotto dei singoli guadagni, ovvero  $G_d = \prod_{n=1}^N G_{d_n}$ . Come determinare invece il fattore di rumore equivalente complessivo ?

Con riferimento alla figura mostrata a lato, il singolo contributo di rumore dovuto a ciascuna rete può essere riportato all'ingresso della rete stessa, individuando così una temperatura

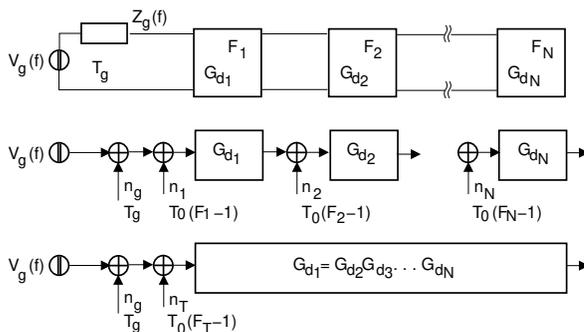
$$T_{Q_i}^{(n)} = T_0 (F^{(n)} - 1)$$

I singoli contributi possono quindi essere riportati a monte delle reti che li precedono, dividendo la potenza (ovvero la temperatura) per il guadagno disponibile delle reti *scavalcate*. Dato che i contributi di rumore sono indipendenti, le loro potenze si sommano, e dunque è lecito sommare le singole temperature  $T_{Q_i}^{(n)}$  riportate all'ingresso, in modo da ottenere un unico contributo complessivo di valore

$$T_{Q_i}^{(T)} = T_{Q_i}^{(1)} + T_{Q_i}^{(2)} \frac{1}{G_{d_1}} + T_{Q_i}^{(3)} \frac{1}{G_{d_1} G_{d_2}} + \dots + T_{Q_i}^{(N)} \frac{1}{\prod_{n=1}^{N-1} G_{d_n}}$$

in cui, sostituendo le espressioni per i  $T_{Q_i}^{(n)}$  si ottiene

$$T_{Q_i}^{(T)} = T_0 \cdot \left[ F_1 - 1 + \frac{F_2 - 1}{G_{d_1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{d_1} G_{d_2}} + \dots + \frac{F_N - 1}{\prod_{n=1}^{N-1} G_{d_n}} \right]$$



Applicando la definizione  $F^{(T)} = 1 + \frac{T_{Q_i}^{(T)}}{T_0}$ , si ottiene

$$F^{(T)} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{d1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{d1} G_{d2}} + \dots + \frac{F_N - 1}{\prod_{n=1}^{N-1} G_{dn}}$$

che costituisce proprio l'espressione cercata:

$$F^{(T)} = F_1 + \sum_{i=2}^N \frac{F_i - 1}{\prod_{j=1}^{i-1} G_{dj}}$$

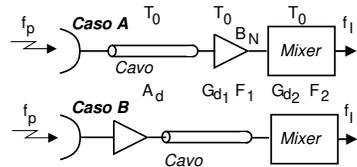
Il risultato, noto come *formula di Friis*<sup>9</sup>, si presta alle seguenti considerazioni:

- la *prima rete* due porte deve avere  $F$  *più piccolo possibile*, in quanto quest'ultimo non può essere ridotto in alcun modo e contribuisce per intero ad  $F^{(T)}$ ;
- la *prima rete* due porte deve avere  $G_d$  *più elevato possibile*, in quanto quest'ultimo divide tutti i contributi di rumore delle reti seguenti.

Pertanto l'elemento che determina in modo preponderante il rumore prodotto da una cascata di reti due porte è la *prima rete* della serie, ed il suo progetto deve essere eseguito con cura particolare, anche tenendo conto del fatto che le due esigenze sopra riportate sono spesso in contrasto tra loro. E' inoltre appena il caso di ricordare che l'espressione ottenuta *non è* in dB, mentre spesso  $F$  è fornito appunto in dB; pertanto per il calcolo di  $F^{(T)}$  occorre prima esprimere tutti gli  $F_i$  in unità lineari.

**Esercizio** Una trasmissione video modulata AM-BLU con portante  $f_p = 2$  GHz viene ricevuta secondo uno dei due schemi in figura, indicati come caso **A** e **B**.

E' presente una discesa in cavo coassiale con  $\phi = 1.2/4.4$  mm lunga 50 metri, un filtro-amplificatore con guadagno disponibile  $G_{d1} = 20$  dB, fattore di rumore  $F_1 = .4$  dB e banda di rumore  $B_N = 7$  MHz, ed un mixer che converte il segnale a frequenza intermedia  $f_I$ , e che esibisce  $G_{d2} = 0$  dB e  $F_2 = 10$  dB. Tutti i componenti a valle dell'antenna si trovano alla stessa temperatura  $T_0 = 290$  °K. Calcolare:



- 1) La minima potenza disponibile  $W_{dR}$  che occorre ricevere per ottenere  $SNR_0 = 50$  dB nei due casi. Ripetere il calcolo supponendo l'antenna ricevente a temperatura  $T_a = 10$  °K anziché  $T_0$ .
- 2) La minima potenza che è necessario trasmettere per superare un collegamento terrestre lungo 50 Km, con antenne di guadagno  $G_T = G_R = 30$  dB. Ripetere il calcolo per un down link satellitare in orbita geostazionaria, con  $G_T = G_R = 40$  dB.
- 3) Il valore efficace della tensione ai capi del generatore equivalente di uscita dell'amplificatore di potenza del trasmettitore, per il caso migliore (tra **A** e **B**) del collegamento terrestre, nel caso di massimo trasferimento di potenza con  $Z_u = Z_a = 50 \Omega$ , oppure con  $Z_u = 50 \Omega$  e  $Z_a = 50 - j 50 \Omega$ .

<sup>9</sup>Vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Formula\\_di\\_Friis](https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_Friis), ma da non confondere con la (16.13), anche se si tratta... della stessa persona!

**Svolgimento** Determiniamo innanzitutto l'attenuazione del cavo coassiale, che risulta  $A_d(f) = A_0 \sqrt{f \text{ (MHz)}}$  dB/Km. Per il diametro indicato risulta  $A_0 = 5.3$  dB/Km, ed alla frequenza di 2 GHz si ottiene  $A_d(f)_{dB} = 5.3 \sqrt{2 \cdot 10^3} = 237$  dB/Km; e quindi in 50 metri si hanno  $11.85 \simeq 12$  dB. Dato che il cavo è a temperatura  $T_0$ , risulta anche  $F_{cavo} = A_d = 12$  dB. Riassumendo:

	$A_d = F_{cavo}$	$F_1$	$G_{d_1}$	$F_2$	$G_{d_2}$
dB	11.85	.4	20	10	0
lineare	15.3	1.1	100	10	1

1) -

**A)** Il fattore di rumore complessivo risulta

$$F^A = F_{cavo} + A_d (F_1 - 1) + \frac{A_d}{G_{d_1}} (F_2 - 1) = 15.3 + 15.3 \cdot (.1) + \frac{15.3}{100} (9) = 18.2$$

ovvero pari a 12.6 dB. Dato che per la trasmissione televisiva AM-BLU si ha  $SNR = SNR_0$ , scriviamo

$$W_{d_R} = SNR \cdot W_{d_N} = SNR_0 \cdot F^A \cdot B_N \cdot kT_0 \text{ e quindi}$$

$$\begin{aligned} W_{d_R} \text{ (dBm)} &= SNR_0 \text{ (dB)} + F^A \text{ (dB)} + B_N \text{ (dBMHz)} + KT_0 \text{ (dBm/MHz)} = \\ &= 50 + 12.6 + 8.45 - 114 = -43 \text{ dBm} \end{aligned}$$

**B)** Il fattore di rumore complessivo risulta ora

$$F^B = F_1 + \frac{(F_{cavo}-1)}{G_{d_1}} + \frac{A_d}{G_{d_1}} (F_2 - 1) = 1.1 + \frac{14.3}{100} + \frac{15.3}{100} (9) = 2.26$$

ovvero pari a 3.5 dB. La differenza con il caso **A** è di 9.1 dB, e la potenza disponibile che occorre ricevere diminuisce pertanto della stessa quantità, e quindi ora risulta  $W_{d_R} = -52.1$  dBm.

Nel caso in cui  $T_a = 10^\circ\text{K} \neq T_0$ , non si ottiene più  $T_{e_i} = FT_0$ , ma occorre introdurre la  $T_{Q_i}$  della rete riportata al suo ingresso, e considerare la rete non rumorosa in modo da scrivere  $T_{e_i} = T_g + T_{Q_i} = T_a + T_0 (F - 1)$ . Ripetiamo i calcoli per i due casi **A** e **B**:

$$\mathbf{A)} \quad W_{d_{RW}} = SNR \cdot W_{d_N} = SNR \cdot B_N \cdot k \cdot (T_a + T_{Q_i}) =$$

$$= SNR \cdot B_N \cdot k \cdot (T_a + T_0 (F^A - 1)), \text{ che espresso in dB fornisce}$$

$$\begin{aligned} W_{d_{RdBW}} &= SNR_{dB} + 10 \log_{10} 7 \cdot 10^6 + 10 \log_{10} (1.38 \cdot 10^{-23} (10 + 290 \cdot 17.2)) \\ &= 50 + 68.5 - 191.61 = -73.11 \text{ dBW} = -43.11 \text{ dBm} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B)} \quad W_{d_R} \text{ (dBW)} = 50 + 68.5 + 10 \log_{10} (1.38 \cdot 10^{-23} (10 + 290 \cdot 1.26)) = -84.3 \text{ dBW} = -54.3 \text{ dBm}$$

Notiamo che se la  $T_a$  è ridotta, le prestazioni per la configurazione **A** migliorano di soli 0.11 dB, mentre nel caso **B** il miglioramento è di circa 2.2 dB. Questo risultato trova spiegazione con il fatto che in **A** predomina comunque il  $T_{Q_i}$  prodotto dal cavo.

2) In un collegamento radio terrestre si assume  $T_a = 290^\circ\text{K}$ . Inoltre, per il caso in esame si trova una attenuazione disponibile pari a

$$\begin{aligned} A_d &= 32.4 + 20 \log_{10} f \text{ (MHz)} + 20 \log_{10} d \text{ (Km)} - G_T - G_R = \\ &= 32.4 + 66 + 34 - 60 = 72.4 \text{ dB} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A)} \quad W_{d_T} = W_{d_R} + A_d = -43.11 + 72.4 = 29.29 \text{ dBm} = 850 \text{ mW}$$

$$\mathbf{B)} \quad W_{d_T} = W_{d_R} + A_d = -54.3 + 72.4 = 18.1 \text{ dBm} = 66 \text{ mWatt}$$

Per il downlink si ha  $d = 36.000$  Km, mentre  $T_a = 10$  °K. Pertanto:

$$\begin{aligned} A_d &= 32.4 + 20 \log_{10} f(\text{MHz}) + 20 \log_{10} d(\text{Km}) - G_T - G_R = \\ &= 32.4 + 66 + 91.12 - 80 = 109.5 \text{ dB} \end{aligned}$$

e quindi, utilizzando il valore  $W_{dR}$  ottenuto per il caso **B**, otteniamo

$$W_{dT} = W_{dR} + A_d = -54.3 + 109.5 = 55.2 \text{ dBm} = 25.2 \text{ dBW} \rightarrow 331 \text{ Watt}$$

**3)** Nel caso di adattamento, la potenza ceduta all'antenna  $T_x$  è proprio quella disponibile del generatore, e quindi si ha  $W_{dT} = \frac{\sigma_g^2}{4R}$ , da cui

$$\sigma_g = \sqrt{W_{dT} 4R} = \sqrt{66 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 50} = 3.63 \text{ Volt.}$$

In caso di disadattamento, desiderando che la potenza ceduta all'antenna trasmittente rimanga la stessa, e supponendo le impedenze indipendenti dalla frequenza, scriviamo (in accordo alla relazione (15.1))

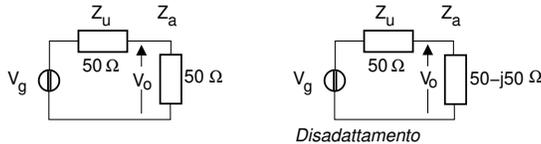
$$W_T = P_{v_o} \frac{R_a}{|Z_a|^2} = P_{v_o} \frac{50}{50^2 + 50^2} = P_{v_o} \cdot 10^{-2}$$

e quindi  $P_{v_o} \simeq 6.6$  (Volt<sup>2</sup>). Applicando ora la regola del partitore, si ottiene

$$P_{v_o} = P_{v_g} \left| \frac{Z_a}{Z_a + Z_u} \right|^2 = P_{v_g} \left| \frac{50 - j50}{50 + 50 - j50} \right|^2 = P_{v_g} \frac{50^2 + 50^2}{100^2 + 50^2} = P_{v_g} \cdot 0.4.$$

Dunque,  $P_{v_g} = \frac{P_{v_o}}{0.4} = \frac{6.6}{0.4} = 16.5$  Volt<sup>2</sup>, ovvero  $V_{g_{eff}} = \sqrt{16.5} \simeq 4$  Volt.

Evidentemente, il disadattamento produce un innalzamento del valore efficace, se si vuol mantenere la stessa potenza di uscita.



## 15.3 Rumore nei ripetitori

Come illustreremo al cap. 16, la propagazione del segnale attraverso un mezzo trasmissivo ne determina una *attenuazione* la cui entità aumenta con la distanza. La realizzazione di un collegamento molto lungo mediante un'unica *tratta* è pertanto praticamente impossibile, sia a causa del livello troppo ridotto del segnale che sarebbe ricevuto, sia (nel caso di un collegamento radio) per la mancanza di condizioni di visibilità. Pertanto, occorre suddividere il collegamento in più *tratte*, intervallate da stadi di amplificazione (o *ripetitori*) progettati in modo da compensare l'attenuazione della tratta appena attraversata.

### 15.3.1 Ripetitore trasparente

L'aggettivo *trasparente* si riferisce al fatto che, oltre al segnale, viene amplificato anche il rumore presente in ingresso, e nel caso delle trasmissioni analogiche, è l'unico modo di procedere, al contrario delle trasmissioni numeriche, che invece possono adottare di un ripetitore *rigenerativo* (§ 15.3.2), che cioè produce un *nuovo* segnale, privo di rumore<sup>10</sup>.

Analizziamo la questione con riferimento ad un collegamento radio, anche se la trattazione può essere estesa ad altre tecniche trasmissive, come il cavo o le fibre ottiche, e consideriamo una successione di  $M$  tratte come mostrato in fig. 15.1. Il ripetitore interposto tra ogni coppia

<sup>10</sup>Ma eventualmente, con qualche bit errato in più.

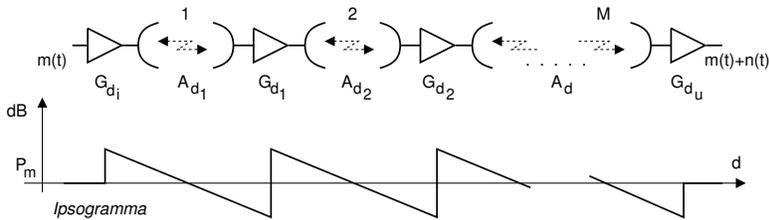


Figura 15.1: Suddivisione di un collegamento in  $M$  tratte, e relativo diagramma del livello di segnale o *ipsogramma*

di tratte amplifica il segnale (ed il rumore) di una quantità pari al proprio guadagno disponibile  $G_{d_i}$ , reso uguale all'inverso dell'attenuazione disponibile della tratta precedente, ovvero  $G_{d_i} = \frac{1}{A_{d_i}}$ . Il rumore termico accumulato alla fine del collegamento può calcolarsi con i metodi fin qui esposti, ma considerando che il livello di segnale di uscita è lo stesso per tutti i ripetitori, si ritrova il risultato ottenuto al § 7.4.1, come ora illustreremo. Al § 15.3.1.2 valuteremo poi come le distorsioni di non linearità (§ 7.3) degli amplificatori possano intervenire nel progetto.

### 15.3.1.1 Rumore termico accumulato

Osservando solamente il segnale in uscita dall'ultimo ripetitore, si può definire un  $SNR$  complessivo come  $SNR_T = \frac{P_m}{P_n}$ . D'altra parte, il rumore complessivo è dovuto ai contributi di rumore introdotti dai singoli ripetitori: essendo questi ultimi indipendenti tra loro, la potenza di rumore accumulata è la somma delle singole potenze di rumore:

$$P_n = \sigma_n^2 = E \{n^2(t)\} = E \left\{ \left( \sum_i n_i(t) \right)^2 \right\} = \sum_i E \{n_i^2(t)\} = \sum_{i=1}^M P_{n_i}$$

Osserviamo ora che per ogni singolo ripetitore può essere definito un proprio  $SNR_i = \frac{P_{m_i}}{P_{n_i}}$ , e quindi  $P_{n_i} = \frac{P_{m_i}}{SNR_i}$ ; pertanto, l' $SNR$  complessivo risulta:  $SNR_T = \frac{P_m}{\sum_i \frac{P_{m_i}}{SNR_i}}$ . Notiamo inoltre che, essendo il livello di segnale  $P_{m_i}$  in ingresso a ciascun ripetitore lo stesso, ovvero  $P_{m_i} = P_m$  per  $\forall i$ , i singoli contributi  $P_{n_i}$  al rumore complessivo possono essere espressi nei termini di uno stesso livello di segnale, ovvero  $P_{n_i} = \frac{P_m}{SNR_i}$ , e dunque per l' $SNR$  complessivo si ottiene

$$SNR_T = \frac{P_m}{P_m \sum_i \frac{1}{SNR_i}} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{SNR_i}}$$

Questo risultato può essere espresso con la frase

*l' $SNR$  prodotto da più cause indipendenti è il parallelo degli  $SNR$  dovuti alle diverse cause di rumore*

per via della analogia formale con l'espressione della resistenza equivalente di un parallelo di resistenze; l'analogia evidenzia, tra l'altro, che se una tratta è considerevolmente peggiore delle altre,  $SNR_T$  dipenderà essenzialmente da questa.

Il risultato a cui siamo giunti ha validità più generale del caso illustrato, e può essere invocato ogni volta che un sistema di comunicazione è affetto da più cause di disturbo additivo indipendenti tra loro, per ognuna delle quali si sia separatamente in grado di giungere ad una espressione di  $SNR$ , come illustrato anche al § 7.4.1.

Proseguiamo l'analisi ipotizzando ora che tutte le tratte siano *uguali tra loro*, ovvero con eguali  $A_d$  e  $G_d$ , uguali temperature di rumore, ed uguali  $SNR_i$ . In tal caso si ottiene

$$SNR_T = \frac{1}{\frac{M}{SNR_i}} = \frac{SNR_i}{M}$$

con  $SNR_i = \alpha SNR_0 = \alpha \frac{P_R}{P_n}$ , dove  $P_n = kT_{e_i}W$  è la potenza di rumore nella banda di messaggio  $W$ ,  $P_R$  è la potenza ricevuta da un ripetitore (uguale per tutti se le tratte sono uguali), e  $\alpha$  è un fattore che dipende dal tipo di modulazione. Sembra dunque che per migliorare l' $SNR$  complessivo sia sufficiente elevare il livello di trasmissione di tutti gli stadi, in modo da elevare la potenza ricevuta. In realtà la potenza trasmessa non può aumentare a piacere, in quanto intervengono fenomeni di non-linearità.

### 15.3.1.2 Compromesso tra rumore termico e di intermodulazione

Al § 7.3 si è osservato come per un segnale modulato la presenza di un elemento a comportamento non lineare (tipicamente l'amplificatore di potenza del trasmettitore) produce *interferenza in banda*, la cui potenza dipende con legge cubica dalla potenza del segnale trasmesso. Indicando quindi con  $SNR_I = \frac{P_m}{P_I}$  il rapporto  $SNR$  complessivo del collegamento dovuto a cause di non linearità, *indipendenti dal rumore termico*, osserviamo che questo *diminuisce* all'aumentare della potenza trasmessa da ogni ripetitore. Pertanto, l' $SNR$  complessivo deve tener conto sia del rumore termico che di quello di intermodulazione, e può essere espresso come "il parallelo" di entrambi, ossia

$$SNR = \frac{1}{\frac{1}{SNR_T} + \frac{1}{SNR_I}}$$

Dato che all'aumentare della potenza di trasmissione  $SNR_T$  diminuisce mentre  $SNR_I$  aumenta, l' $SNR$  complessivo presenta *un massimo* per un certo valore di potenza trasmessa, ovvero esiste un dimensionamento *ottimo* in grado di fornire il miglior  $SNR$  complessivo.

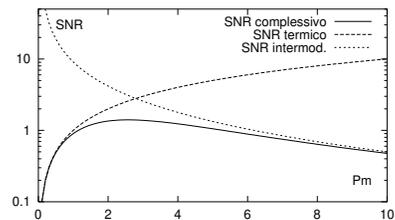
**Esempio** La figura a lato mostra l'andamento di

$$SNR = \frac{1}{\frac{1}{SNR_T} + \frac{1}{SNR_I}}$$

dovuto ai due termini

$$SNR_T = P_m \text{ e } SNR_I = \frac{P_m}{.1 \cdot P_m^2 + .01 \cdot P_m^3}$$

Come si vede,  $SNR$  presenta un massimo per  $P_m \simeq 2.5$ .



### 15.3.2 Ripetitore rigenerativo

Affrontiamo ora il caso in cui la trasmissione sia di natura numerica (§ 14): in tal caso i dispositivi intermedi di amplificazione anziché essere di tipo *trasparente*, vengono detti *rigenerativi*, ovvero mentre dal lato ricevente svolgono l'intero processo di decisione (§ 8.4) sui simboli del messaggio, dal lato di trasmissione generano un *nuovo* segnale in cui è *assente* il rumore presente in ricezione.



La valutazione delle prestazioni *complessive* nel caso si adottino  $M$  ripetitori rigenerativi posti in serie lungo un medesimo collegamento è piuttosto semplice, qualora siano equispaziati,

ed ognuno caratterizzato dalla stessa  $p = P_e^{bit}$ . In tale circostanza si ricade infatti nel caso delle *prove ripetute*, permettendo di esprimere la probabilità che lo stesso bit sia sbagliato da  $n$  ripetitori (su  $M$ ) mediante la distribuzione di Bernoulli (§ 17.1)  $p(n) = \binom{M}{n} p^n (1-p)^{M-n}$ . Ovviamente il bit risulterà sbagliato solo se avrà subito un numero *dispari* di errori, e dunque complessivamente possiamo scrivere

$$P_e^T = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ dispari}}}^M p(n) = Mp(1-p)^{M-1} + \frac{M(M-1)(M-2)}{3!} p^3 (1-p)^{M-3} + \dots$$

Nel caso, come spesso accade, che  $p \ll 1$ , l'espressione indicata è bene approssimata dal solo primo termine, e dunque si può affermare che  $P_e^T \simeq MP_e^{bit}$ , ovvero che la prob. di errore sul bit è proporzionale al numero di tratte.

**Ripetitore trasparente nelle trasmissioni numeriche** In questo caso, ogni ripetitore *trasparente* amplifica oltre al segnale anche il rumore già presente, e ne aggiunge di suo: come mostrato al § 15.3.1.1 nel caso di tratte identiche, all'estremo di destinazione del collegamento si osserva un  $SNR_T = \frac{SNR_i}{M}$ , pari cioè a quello di ogni singola tratta, diviso per il numero delle tratte. In tal caso l' $E_b/N_0$  del ricevitore a destinazione (l'unico ora che esegue il processo di decisione) risulta diminuito della stessa quantità (vedi eq. (8.16) pag. 217), producendo un peggioramento delle sue condizioni operative di  $10 \log_{10} M$  dB rispetto a quelle delle singole tratte.

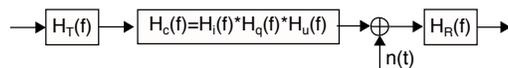
**Esercizio** Una trasmissione numerica 16-QAM (§ 14.3) è realizzata mediante un collegamento suddiviso in  $M = 16$  tratte uguali. Qualora si desideri una  $P_e^T$  complessiva pari a  $10^{-5}$ , valutare il valore di  $E_b/N_0$  necessario in ingresso a ciascuna tratta, nei due casi **a**) ripetitori rigenerativi oppure **b**) ripetitori trasparenti. Indicare quindi l'entità del rapporto tra le potenze di segnale in ingresso ai ripetitori nei due casi.

**Svolgimento** Nel caso **a**) risulta  $P_e^T \simeq MP_e$ , dunque per ogni tratta si deve ottenere una  $P_e = P_e^T/M = 10^{-5}/16 = 6.25 \cdot 10^{-7}$ , a cui (per un 16-QAM) corrisponde (fig. 14.14) un valore  $E_b/N_0 \simeq 14.5$  dB. Nel caso **b**) la decisione ha luogo solamente nell'ultima tratta, e per ottenere una  $P_e^T = 10^{-5}$ , la modulazione 16-QAM necessita di un valore  $E_b/N_0 \simeq 13.5$  dB. D'altra parte, per ottenere un tale  $E_b/N_0$  in ingresso al decisore, *ogni* tratta che lo precede deve presentare un  $E_b/N_0$  in ingresso allo stadio di amplificazione *maggiore* (rispetto a quello del decisore) di una quantità pari a  $\log_2 M = 4$  dB, ossia  $E_b/N_0 = 13.5 + 4 = 17.5$  dB, ovvero 3 dB *in più* rispetto al caso **a**).

Essendo le tratte identiche, per ognuna di esse il valore  $N_0 = 1/2kT_{ei}$  è lo stesso, in quanto (vedi eq. 15.12)  $T_{ei} = T_g + T_0(F-1)$ , e sia  $T_g$  che  $F$  sono gli stessi per tutte le tratte. Pertanto la differenza di 3 dB tra i valori di  $E_b/N_0$  nei casi **a**) e **b**) si riflette in un *raddoppio* della potenza in ingresso ad ogni ripetitore trasparente, in confronto a quello rigenerativo.

## 15.4 Equalizzazione

Passiamo ora ad occuparci di un argomento del tutto differente, ovvero delle operazioni necessaria qualora la risposta in frequenza complessiva del mezzo trasmissivo e delle sue chiusure  $H_c(f) = H_i(f) H_q(f) H_u(f)$  esibisca distorsione lineare (§ 7.2) e dunque non soddisfi la condizione di



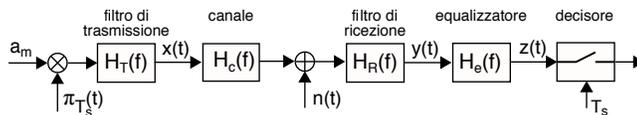


Figura 15.2: Equalizzazione di un canale con distorsione lineare

canale perfetto (pag. 183). L'equalizzazione può essere intrapresa inserendo elementi filtranti presso il trasmettitore ( $H_T(f)$ ) ed il ricevitore ( $H_R(f)$ ), realizzati in modo da ottenere

$$H_T(f) H_c(f) H_R(f) = ae^{-j2\pi f\tau}$$

annullando in tal modo la distorsione lineare introdotta da  $H_c(f)$ . I casi di segnale di banda base e di segnale modulato sono trattati nel seguito in modo unitario, facendo riferimento solo ai primi, ovvero alle c.a. di b.f. nel caso di segnale modulato.

Se non si utilizzano entrambi i filtri, ma uno solo di essi, si può delegare il compito dell'equalizzazione al solo  $H_T(f)$ , riservando ad  $H_R(f)$  il ruolo di filtrare il rumore esterno alla banda di segnale, come fatto ai cap. 11 e 16. Nel caso in cui la  $H_c(f)$  del canale sia *nota a priori*, la sua inversione<sup>11</sup> può essere approssimata sintetizzando  $H_T(f)$  mediante un metodo di progetto filtri analogici<sup>12</sup>.

D'altra parte, se l'equalizzazione è svolta solamente al lato ricevente, si possono applicare delle tecniche volte a *stimare* la  $H_c(f)$  non nota<sup>13</sup>, e quindi *sintetizzare* una realizzazione numerica di  $H_R(f)$  tale da invertire  $H_c(f)$ . Ma in questo caso si determina la *colorazione* del rumore in ingresso al ricevitore (vedi pag. 450), che viene esaltato anche di molto nelle bande per le quali  $|H_c(f)|$  è particolarmente piccolo, come ad es. per un canale con echi di ampiezza simile, vedi pag. 189.

### 15.4.1 Equalizzazione numerica

Da qui in avanti prendiamo in esame esclusivamente il caso delle trasmissioni numeriche, per le quali è già prevista la presenza di un filtro  $H_T(f)$  con la funzione di sagomatore di impulso (come componente del codificatore di linea, § 8.1.2), mentre la teoria del filtro adattato (§ 6.8) predice che realizzando<sup>14</sup>  $H_R(f) = H_T^*(f)$  si ottiene il massimo *SNR* all'istante di decisione. Lo schema di elaborazione complessivo è dunque quello rappresentato in fig. 15.2, che adottiamo come riferimento, ed in cui  $H_R(f) H_T^*(f) = G(f)$ , in modo che *assieme* realizzino un filtro di Nyquist<sup>15</sup>, e l'equalizzazione di  $H_c(f)$  sia demandata per intero al ricevitore, per mezzo di  $H_e(f)$ .

In ingresso ad  $H_e(f)$  si presenta dunque il segnale

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m h(t - mT_s) + \nu(t) \quad (15.13)$$

<sup>11</sup>Detta anche operazione di *deconvoluzione*, vedi <https://en.wikipedia.org/wiki/Deconvolution>.

<sup>12</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Analogue\\_filter](http://en.wikipedia.org/wiki/Analogue_filter)

<sup>13</sup>Operazione necessaria se il canale *cambia* da un collegamento all'altro, come nel transito in una rete commutata, o nel caso di una comunicazione radiomobile.

<sup>14</sup>Si veda l'eq. (6.34) a pag. 163, tralasciando il termine di fase lineare necessario a rendere  $h_R(t)$  causale.

<sup>15</sup>Sia che si abbia  $H_R(f) = H_T(f) = \sqrt{G(f)}$  come per il caso del ricevitore ottimo (§ 8.4.10), sia nel caso in cui  $H_T(f) = G(f)$ , e  $H_R(f)$  ha il solo scopo di filtrare il rumore.

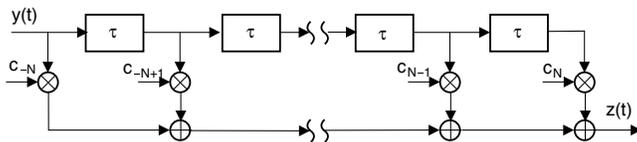


Figura 15.3: Filtro FIR di equalizzazione

che dipende oltre che dai simboli  $a_m$  della sequenza informativa, anche dalla risposta impulsiva complessiva  $h(t) = h_T(t) * h_c(t) * h_R(t) = \tilde{g}(t)$ <sup>16</sup>, mentre  $\nu(t)$  tiene conto dell'effetto di  $H_R(f)$  su  $n(t)$ . Decidiamo ora di voler realizzare  $H_e(f)$  nella forma di un filtro FIR (§ 6.6.1, vedi fig. 15.3) con  $2N + 1$  coefficienti  $c_n$ , in modo che alla sua uscita si trovi il segnale<sup>17</sup>

$$z(t) = \sum_{n=-N}^N c_n y(t - n\tau) \tag{15.14}$$

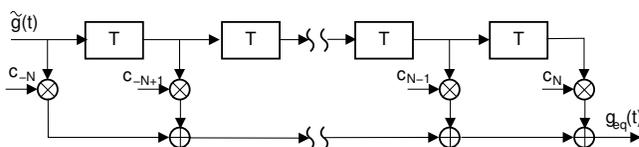
Osserviamo quindi che qualora  $H_e(f)$  riesca nel suo intento, l'ISI introdotta dal canale è completamente rimossa, e se la sua uscita  $z(t)$  viene campionata in corrispondenza degli istanti di simbolo, il suo valore  $z(mT_s)$  dipende da un solo  $a_m$ , oltre che dal rumore filtrato via  $H_R(f)$   $H_e(f)$ ; pertanto, i coefficienti  $c_n$  possono essere scelti direttamente con l'obiettivo di annullare l'ISI, anziché con quello di invertire  $H_c(f)$ .

Illustriamo per prima una tecnica che non tiene in particolare conto la presenza del rumore, che viene invece considerato al § 15.4.3 e seguenti.

### 15.4.2 Equalizzatore zero forcing

Questa tecnica prevede che gli impulsi ricevuti distorti  $\tilde{g}(t)$  attraversino un filtro trasversale, i cui coefficienti sono calcolati in modo da ripristinare in forma approssimata le condizioni di Nyquist (nel dominio del tempo) per l'impulso  $g_{eq}(t)$  in uscita dal filtro. Mostriamo come.

A lato è mostrato un filtro trasversale (vedi § 6.6) con  $2N + 1$  coefficienti ed un ritardo totale  $2NT$ . Il messaggio informativo è preceduto dalla trasmissione di un impulso isolato di apprendimento, la cui forma d'onda distorta ricevuta  $\tilde{g}(t)$  presenta un picco a  $t = 0$  ed ISI su entrambi i lati (Fig. 15.4a). Ponendo  $\tilde{g}(t)$  in ingresso al filtro  $h_{eq}(t)$ , e considerando il ritardo  $\tau$  tra gli ingressi pari a  $T$ , in uscita si ottiene l'impulso



$$g_{eq}(t) = \sum_{n=-N}^N c_n \tilde{g}(t - nT - NT) \tag{15.15}$$

<sup>16</sup>Che equivale all'impulso  $\tilde{g}(t)$  di eq. (8.1) a pag. 201

<sup>17</sup>La (15.14) rappresenta l'uscita di un filtro FIR *anti-causale*, dato che  $z(t)$  dipende da valori *futuri* di ingresso, fino a  $y(t + N\tau)$ , mentre l'espressione *causale* che rispecchia la notazione usata nella figura dovrebbe essere  $z(t) = \sum_{n=-N}^N c_n y(t - n\tau - N\tau)$ , che corrisponde ad un semplice ritardo dell'ingresso pari a  $N\tau$ , trascurato per semplicità di notazione nel seguito.

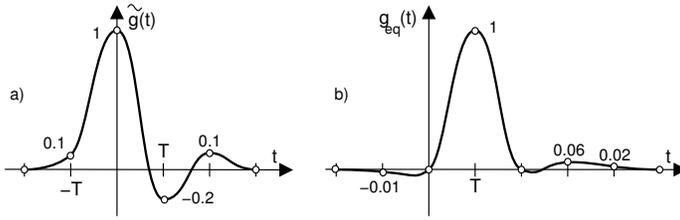


Figura 15.4: Impulso con ISI prima e dopo equalizzazione

che campionato agli istanti  $t_k = kT + NT$  fornisce

$$g_{eq}(t_k) = \sum_{n=-N}^N c_n \tilde{g}(kT - nT) = \sum_{n=-N}^N c_n \tilde{g}_{k-n} \quad (15.16)$$

avendo adottato l'abbreviazione  $\tilde{g}_{k-n} = \tilde{g}(kT - nT)$ ; il risultato prende quindi la forma di una *convoluzione discreta*. L'operazione di *equalizzazione Zero Forcing* consiste nel calcolare i coefficienti  $c_n$  in modo che  $g_{eq}(t)$  soddisfi le condizioni di Nyquist almeno sui  $2N + 1$  termini centrati sull'origine, ovvero

$$g_{eq}(t_k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{cases} \quad (15.17)$$

assicurando così l'assenza di ISI *almeno* nei confronti degli  $N$  simboli precedenti e successivi. Il valore dei coefficienti  $c_n$  in grado di soddisfare queste condizioni si ottengono risolvendo un sistema di  $2N + 1$  equazioni nelle  $2N + 1$  incognite  $c_n$ , impostate a partire dalle relazioni (15.16) e 15.17, e rappresentato in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_0 & \cdots & \tilde{g}_{-2N} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{N-1} & \cdots & \tilde{g}_{-N-1} \\ \tilde{g}_N & \cdots & \tilde{g}_{-N} \\ \tilde{g}_{N+1} & \cdots & \tilde{g}_{-N+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{2N} & \cdots & \tilde{g}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-N} \\ \vdots \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15.18)$$

in cui la matrice dei termini noti è costituita dai  $4N + 1$  campioni di  $\tilde{g}(t)$  prelevati agli istanti di simbolo  $-2N, \dots, 2N$  posti in modo simmetrico rispetto allo zero. Anche se il metodo non garantisce nulla per istanti esterni a  $(-NT, NT)$ , è *ottimo* nel senso che minimizza l'ISI di picco, ed è semplice da realizzare. L'operazione di combinazione di più campioni ricevuti, eseguita dal filtro di equalizzazione, può avere l'effetto di aumentare la potenza di rumore, ma se questa non è eccessiva tale peggioramento è più che compensato dal miglioramento dell'ISI.

**Esempio** Vogliamo realizzare un equalizzatore del terzo ordine, applicando il principio illustrato all'impulso con ISI mostrato alla fig. 15.4a. Inserendo quei valori di  $\tilde{g}_k$  nella matrice dei coefficienti (15.18), otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 & 0.0 \\ -0.2 & 1.0 & 0.1 \\ 0.1 & -0.2 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui è possibile calcolare  $c_{-1} = -0.096$   $c_0 = 0.96$   $c_1 = 0.2$ . Inserendo ora uno ad uno i campioni di  $\tilde{g}(t)$  in un filtro trasversale con questi coefficienti, si ottengono i valori di  $g_{eq}(t)$  mostrati in fig. 15.4b assieme ad una curva interpolata. Notiamo che sebbene sia stato ottenuto il risultato desiderato di azzerare  $g_{eq}(t)$  ai due istanti di simbolo ai lati del picco, risulta ancora essere  $g_{eq} \neq 0$  ad istanti più remoti.

**Effetto del rumore dopo equalizzazione** Come anticipato, l'approccio dello *zero forcing* trascura la presenza del rumore in ricezione. Poniamo che riesca nel suo intento di realizzare una  $H_e(f) = 1/H_c(f)$  come desiderato: il rumore in uscita presenterà allora una densità di potenza pari a  $\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 |H_e(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \frac{|H_R(f)|^2}{|H_c(f)|^2}$ , e dunque può subire una amplificazione notevole in corrispondenza delle frequenze per le quali  $|H_c(f)|^2$  è particolarmente ridotta. Illustriamo dunque nel seguito alcune tecniche che invece tengono conto della presenza del rumore.

### 15.4.3 Equalizzatore MMSE e filtro di Wiener

Innanzitutto, decidiamo di realizzare il filtro FIR  $H_e(f)$  in forma totalmente numerica (§ 4.5.1), scegliendo di campionare  $y(t)$  con periodo di campionamento  $\tau = T_s/2$ <sup>18</sup>, facendo dunque lavorare il filtro alla velocità di due campioni per simbolo.

In questo approccio i coefficienti  $\mathbf{c}$  del filtro FIR  $H_e(f)$  di fig. 15.3 sono individuati come quelli in grado di rendere *minimo*<sup>19</sup> l'errore quadratico medio  $\sigma_e^2 = E\{e_m^2\}$  in cui

$$e_m = z(mT_s) - a_m \quad (15.19)$$

è l'errore tra i campioni  $z(mT_s)$  della (15.14) in uscita da  $H_e(f)$ , ed i corrispondenti valori  $a_m$  della sequenza informativa<sup>20</sup> che è stata trasmessa. Tale criterio è noto come MMSE (MINIMUM MEAN SQUARE ERROR o *minimo errore quadratico medio*), e determina un risultato noto anche come *filtro di WIENER*<sup>21</sup>. In presenza di processi ergodici a media nulla l'errore quadratico medio  $\sigma_e^2$  corrisponde alla *potenza* dell'errore, che (applicando la (15.14) alla (15.19)) può essere espressa come

$$\sigma_e^2 = E\{(z(mT_s) - a_m)^2\} = E\left\{\left(\sum_{n=-N}^N c_n y(mT_s - n\tau) - a_m\right)^2\right\} \quad (15.20)$$

evidenziandone la dipendenza dai coefficienti  $c_n$ . La minimizzazione di  $\sigma_e^2$  si ottiene dunque calcolandone le derivate rispetto ai coefficienti  $c_n$ , ed eguagliando l'espressione delle stesse a

<sup>18</sup>Dato che per evitare aliasing (§ 4.1.1) la frequenza di campionamento  $f_c = \frac{1}{\tau}$  deve risultare maggiore del doppio della massima frequenza presente in  $y(t)$ , scegliamo  $f_c = 2f_s$ , ovvero  $\tau = T_s/2$ . Infatti, un segnale dati di banda base a coseno rialzato occupa una banda a frequenze positive pari a  $B = \frac{f_s}{2}(1 + \gamma)$ , e dunque scegliendo  $f_c = 2f_s$  ci cauteliamo anche nel caso di  $\gamma = 1$ . La scelta di porre  $\tau < T_s$  viene indicata anche con il termine di *fractionally spaced equalizer* o FSE.

<sup>19</sup>Piuttosto che l'azzeramento dell'errore, come nell'approccio *zero forcing*.

<sup>20</sup>Tale errore dipende sia dal rumore presente in ingresso che dall'ISI introdotta dal canale, le cui potenze sono quindi minimizzate in forma congiunta.

<sup>21</sup>Vedi [http://en.wikipedia.org/wiki/Wiener\\_filter](http://en.wikipedia.org/wiki/Wiener_filter).

zero<sup>22</sup>, ovvero

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_k} \sigma_e^2 &= 2E \left\{ \left( \sum_{n=-N}^N c_n y(mT_s - n\tau) - a_m \right) y(mT_s - k\tau) \right\} = \\ &= 2 \left( \sum_{n=-N}^N c_n E \{ y(mT_s - n\tau) y(mT_s - k\tau) \} - E \{ a_m y(mT_s - k\tau) \} \right) = 0 \end{aligned} \quad (15.21)$$

da cui si ottengono le condizioni

$$\sum_{n=-N}^N c_n \mathcal{R}_Y(n-k) = \mathcal{R}_{YA}(k) \quad k = -N, -N+1, \dots, 0, \dots, N-1, N \quad (15.22)$$

che rappresentano un sistema di  $2N+1$  equazioni nelle incognite  $c_n$ , note come equazioni di *Wiener-Hopf*, e la cui matrice dei coefficienti e vettore dei termini noti sono costituiti rispettivamente dai valori di *autocorrelazione* (§ 6.1.4)

$$\mathcal{R}_Y(n-k) = E \{ y(mT_s - n\tau) y(mT_s - k\tau) \} \quad (15.23)$$

tra coppie di campioni del segnale ricevuto, e dal vettore di *intercorrelazione*

$$\mathcal{R}_{YA}(k) = E \{ y(mT_s - k\tau) a_m \} \quad (15.24)$$

tra i campioni di  $y(t)$  e la sequenza dei simboli trasmessi, dove il valore atteso è calcolato rispetto alla variabilità della sequenza  $a_m$  e del rumore.

**Soluzione delle equazioni di Wiener-Hopf** Adottiamo innanzitutto per la (15.22) una notazione matriciale del tipo

$$\mathbf{B}\mathbf{c} = \mathbf{d} \quad (15.25)$$

dove  $\mathbf{B} = [b_{nk}] = [\mathcal{R}_Y(n-k)]$  è una matrice  $(2N+1) \times (2N+1)$ ,  $\mathbf{c} = [c_n]$  è un vettore colonna i cui elementi sono i coefficienti del filtro, e  $\mathbf{d}$  è il vettore dei termini noti  $\mathbf{d} = [d_k] = [\mathcal{R}_{YA}(k)]$ <sup>23</sup>. Con tale notazione, i coefficienti *ottimi*  $\tilde{\mathbf{c}}$  si ottengono come

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}$$

Inoltre, la *parità* di  $\mathcal{R}_Y(n)$  rispetto ad  $n$  (vedi schema a lato) rende  $\mathbf{B}$  una matrice di *Toeplitz*<sup>24</sup>, per la quale esistono metodi che semplificano in parte la soluzione diretta del sistema di equazioni, vedi anche la nota 14 a pag. 611.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_Y(0) & \mathcal{R}_Y(1) & \mathcal{R}_Y(2) & \dots & \mathcal{R}_Y(2N) \\ \mathcal{R}_Y(1) & \mathcal{R}_Y(0) & \mathcal{R}_Y(1) & \dots & \mathcal{R}_Y(2N-1) \\ \mathcal{R}_Y(2) & \mathcal{R}_Y(1) & \mathcal{R}_Y(0) & \dots & \mathcal{R}_Y(2N-2) \\ \mathcal{R}_Y(3) & \mathcal{R}_Y(2) & \mathcal{R}_Y(1) & \dots & \mathcal{R}_Y(2N-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{R}_Y(2N) & \mathcal{R}_Y(2N-1) & \dots & \dots & \mathcal{R}_Y(0) \end{bmatrix}$$

<sup>22</sup>In realtà la minimizzazione ha successo solamente se  $\sigma_e^2$  è una funzione *convessa* (vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione\\_convessa](https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_convessa)) dei  $c_n$ , ma più avanti (pag. 453) troveremo che questo è proprio il nostro caso.

<sup>23</sup>In effetti,  $\mathcal{R}_Y(n)$  e  $\mathcal{R}_{YA}(n)$  non sono note al ricevitore, ma nell'ipotesi di stazionarietà ed ergodicità per  $y(t)$  ed  $a_n$ , possono essere *stimate* a partire da una fase iniziale di *apprendimento* durante la quale viene trasmesso un segnale di test, per il quale il ricevitore calcola le medie temporali  $\hat{\mathcal{R}}_Y(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K y(kT_s - n\tau) y(kT_s)$  e  $\hat{\mathcal{R}}_{YA}(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K y(kT_s - n\tau) a_k$ , che quindi utilizza al posto delle medie di insieme nella (15.22).

<sup>24</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Toeplitz\\_matrix](http://en.wikipedia.org/wiki/Toeplitz_matrix)

**Risposta in frequenza del filtro di Wiener** Affrontiamo una prima digressione per derivare l'espressione assunta da  $H_e(f)$  nel caso ottimo, ovvero quando  $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}}$  e  $\sigma_e^2$  è minimo. Conviene procedere direttamente nel dominio delle sequenze, ed osservare che la risposta impulsiva campionata (con periodo  $\tau$ ) del filtro FIR  $H_e(f)$  di fig. 15.3 è esattamente pari ai coefficienti  $\mathbf{c}$ , ovvero  $h_e(n) = c_{n-N}$  con  $n = 0, 1, 2, \dots, 2N$ . Pertanto la (15.22) può essere letta come l'espressione della sequenza  $\mathcal{R}_{YA}(k)$ , con  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ , nei termini di una *convoluzione discreta* tra  $h_e(n)$  ed  $\mathcal{R}_Y(n)$  anticipata di  $N$ :

$$\mathcal{R}_{YA}(k) = \sum_{n=0}^{2N} h_e(n) \mathcal{R}_Y(k - n + N) \quad (15.26)$$

Effettuando la DTFT (§ 4.3) di entrambi i membri si ottiene<sup>25</sup>  $\mathcal{P}_{YA}(f) = H_e(f) \mathcal{P}_Y(f) e^{j2\pi f N \tau}$  in cui  $\mathcal{P}_Y(f)$  è la densità di potenza della sequenza  $y(n)$  in ingresso ad  $h_e(t)$ , e  $\mathcal{P}_{YA}(f)$  è la densità di potenza *mutua*<sup>26</sup> tra  $y(n)$  e la sequenza informativa  $a(n)$ . Otteniamo pertanto

$$H_e(f) = \frac{\mathcal{P}_{YA}(f)}{\mathcal{P}_Y(f)} e^{-j2\pi f N \tau} \quad (15.27)$$

dove il termine  $e^{-j2\pi f N \tau}$  esprime il ritardo necessario a realizzare un filtro causale, e viene trascurato nel seguito. Le densità di potenza  $\mathcal{P}_Y(f)$  e  $\mathcal{P}_{YA}(f)$  possono essere valutate eseguendo la DTFT delle corrispondenti correlazioni che figurano nella (15.26), che (per simboli  $a_m$  *incorrelati*) risultano<sup>27</sup>  $\mathcal{R}_Y(n) = \sigma_a^2 \mathcal{R}_H(n) + \mathcal{R}_\nu(n)$  e<sup>28</sup>  $\mathcal{R}_{YA}(n) = \sigma_a^2 h(-n)$ , in cui  $\mathcal{R}_H(n)$  è l'autocorrelazione della risposta impulsiva complessiva  $h(t) = h_T(t) * h_c(t) * h_R(t)$ ,  $\mathcal{R}_\nu(n)$  la correlazione tra campioni di  $\nu(t)$  a distanza  $n\tau$ , e  $\sigma_a^2 = E\{a_k^2\}$ . La (15.27) si riscrive quindi come

$$H_e(f) = \frac{\sigma_a^2 H^*(f)}{\sigma_a^2 |H(f)|^2 + \mathcal{P}_\nu(f)} \quad (15.28)$$

Possiamo osservare come nel caso in cui  $\mathcal{P}_\nu(f) = 0$  si ottenga  $H_e(f) = \frac{1}{H(f)}$  che pertanto assolve in pieno il compito di equalizzazione, come avviene per l'approccio *zero forcing* (§ 15.4.2). D'altra parte, dividendo numeratore e denominatore di  $H_e(f)$  per  $\sigma_a^2 |H(f)|^2$  si ottiene  $H_e(f) = \frac{1}{H(f)} \frac{1}{1 + 1/SNR(f)}$ , che evidenzia come l'effetto del rumore sia quello *attenuare*

<sup>25</sup>Viene applicata l'equivalenza tra convoluzione nel tempo e prodotto in frequenza, nonché quella tra trasformata della correlazione e densità di potenza.

<sup>26</sup>Analogamente all'energia mutua (§ 3.2),  $\mathcal{P}_{YA}(f)$  esprime una *similitudine* tra due segnali e/o processi, frequenza per frequenza. Laddove risulti  $\mathcal{P}_{YA}(f) = 0$ , i segnali sono *ortogonali* in tale regione di frequenze.

<sup>27</sup>Ricordando che  $y(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s) + \nu(t)$  in cui  $h(t)$  è la risposta impulsiva complessiva  $h(t) = h_T(t) * h_c(t) * h_R(t)$  (vedi fig. 15.2) e  $\nu(t)$  rappresenta l'effetto di  $H_R(f)$  su  $n(t)$ , dalla (15.23) scriviamo  $\mathcal{R}_Y(n) = E\{y(mT_s)y(mT_s + n\tau)\}$  e quindi esprimendo  $h(mT_s - kT_s)$  come  $h((m-k)T_s)$  si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_Y(n) = & E\left\{\left(\sum_k a_k h((m-k)T_s) + \nu(mT_s)\right)\left(\sum_i a_i h((m-i)T_s + n\tau) + \nu(mT_s + n\tau)\right)\right\} = \\ & E\left\{\sum_k \sum_i a_k a_i h((m-k)T_s) h((m-i)T_s + n\tau) + \nu(mT_s) \nu(mT_s + n\tau) + \right. \\ & \left. + \nu(mT_s + n\tau) \sum_k a_k h((m-k)T_s) + \nu(mT_s) \sum_i a_i h((m-i)T_s + n\tau)\right\} \end{aligned}$$

in cui termini dell'ultima riga risultano nulli se i simboli  $a_m$  sono statisticamente indipendenti dai campioni di rumore, ed almeno uno dei due processi è a media nulla. Essendo inoltre  $E\{a_k a_i\} = 0$  per  $i \neq k$ , il termine con la doppia sommatoria si riduce a  $E\{a_k^2\} \sum_k h((m-k)T_s) h((m-k)T_s + n\tau) = \mathcal{R}_A(0) \mathcal{R}_H(n) = \sigma_a^2 \mathcal{R}_H(n)$  avendo considerato gli  $a_k$  a media nulla. Infine, il termine  $E\{\nu(mT_s) \nu(mT_s + n\tau)\}$  risulta pari alla correlazione  $\mathcal{R}_{\nu\nu}(n)$  del processo di rumore.

<sup>28</sup>Dalla (15.24) scriviamo  $\mathcal{R}_{YA}(n) = E\{y(mT_s - n\tau) a_m\}$  e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{YA}(n) = & E\left\{\left(\sum_k a_k h((m-k)T_s - n\tau) + \nu(mT_s - n\tau)\right) a_m\right\} = \\ & \sum_k E\{a_k a_m\} h((m-k)T_s - n\tau) + E\{\nu(mT_s - n\tau) a_m\} \end{aligned}$$

e come prima troviamo  $E\{\nu(mT_s - n\tau) a_m\} = 0$ , mentre della sommatoria rimane il solo termine  $k = m$ .

la risposta in frequenza  $H_e(f)$  nelle regioni in cui  $SNR(f)$  (non in dB) è più piccolo, ossia dove c'è meno segnale, e/o più rumore. Infine, nel caso di rumore elevato la (15.28) diviene  $H_e(f) = H^*(f) \frac{\sigma_a^2}{\mathcal{P}_\nu(f)}$  (o, in caso di rumore *bianco*,  $H_e(f) = H^*(f) \frac{\sigma_a^2}{\sigma_v^2}$ ) come per un *filtro adattato* (§ 6.8); essendo il termine  $H^*(f)$  comunque presente, si può scegliere di realizzare  $H_R(f)$  (vedi fig. 15.2) con il solo scopo di limitare la potenza di rumore<sup>29</sup>.

Qualora i simboli informativi  $a_m$  siano tra loro *correlati*, la (15.28) diviene<sup>30</sup>

$$H_e(f) = \frac{\mathcal{P}_A(f) H^*(f)}{\mathcal{P}_A(f) |H(f)|^2 + \mathcal{P}_\nu(f)}$$

in cui  $\mathcal{P}_A(f)$  è la DTFT della correlazione dei simboli  $\mathcal{R}_A(n) = E\{a_m a_{m+n}\}$  o *spettro del codice* (pag. 173). La stessa espressione è valida per un filtro di Wiener di tipo più generale, che esegue ad esempio la *deriverberazione* di un segnale audio con densità di potenza  $\mathcal{P}_A(f)$ .

**Analisi della potenza di errore** Sviluppriamo ora una seconda digressione sul significato *geometrico* della minimizzazione di  $\sigma_e^2$ , che può essere considerato come una funzione dei coefficienti  $\mathbf{c}$ , e di cui si cerca il minimo (ovvero  $\tilde{\mathbf{c}} = \arg \min \{\sigma_e^2(\mathbf{c})\}$ ), che mostriamo essere unico. Infatti, l'espressione di  $\sigma_e^2(\mathbf{c}) = E\{e_m^2\}$  si ottiene dalla (15.20) come

$$\begin{aligned} \sigma_e^2(\mathbf{c}) &= E\left\{\left(\sum_{n=-N}^N c_n y(mT_s - n\tau) - a_m\right) \left(\sum_{k=-N}^N c_k y(mT_s - k\tau) - a_m\right)\right\} = \\ &= \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N c_n c_k \mathcal{R}_Y(n-k) - 2 \sum_{k=-N}^N c_k \mathcal{R}_{YA}(k) + E\{a_m^2\} \end{aligned} \quad (15.29)$$

che è un *polinomio completo* di secondo grado nelle  $2N + 1$  variabili  $c_n$ , ed essendo  $[\mathcal{R}_Y(n-k)]$  una matrice *definita positiva*,  $\sigma_e^2(\mathbf{c})$  presenta un *unico* minimo globale<sup>31</sup>, e la sua espressione può essere riscritta in forma matriciale come<sup>32</sup>

$$\sigma_e^2(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^t \mathbf{B} \mathbf{c} - 2\mathbf{c}^t \mathbf{d} + \sigma_a^2 \quad (15.30)$$

<sup>29</sup>In particolare, scegliendo  $H_R(f) = \text{rect}_{2f_s}(f)$  si ottiene che i campioni di rumore presi con intervallo  $\tau = 1/2T_s$  sono incorrelati e dunque statisticamente indipendenti perché gaussiani. Infatti  $\mathcal{P}_\nu(f) = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2$  e dunque  $\mathcal{R}_\nu(\tau) = \frac{N_0}{2} 2f_s \text{sinc}(2f_s\tau)$ , che quindi si azzerava per  $\tau = 1/2T_s$ , vedi § 6.2.4. In tal caso la (15.28) diviene

$$H_e(f) = \frac{\sigma_a^2 H^*(f)}{\sigma_a^2 |H(f)|^2 + \sigma_v^2}$$

<sup>30</sup>Per quanto il risultato sembra banale, la dimostrazione non è troppo diretta, e si basa sullo scomporre il termine  $E\left\{\sum_k \sum_i a_k a_i h((m-k)T_s) h((m-i)T_s + n\tau)\right\} = \sum_k \sum_i \mathcal{R}_A(i-k) h((m-k)T_s) h((m-i)T_s + n\tau)$ , tenendo conto della stazionarietà di  $a_m$ , e dunque di simmetria di  $\mathcal{R}_A(n)$ , in una somma di termini  $\sum_p \mathcal{R}_A(p) \sum_i h((m-i)T_s) h((m-i-p)T_s + n\tau) = \sum_p \mathcal{R}_A(p) \mathcal{R}_H(n+2p)$ , in cui si tiene conto che  $T_s = 2\tau$ , mentre gli  $a_m$  sono prodotti uno per sim-

bolo; introducendo  $\mathcal{R}'_A(n) = \begin{cases} \mathcal{R}_A(\frac{n}{2}) & n \text{ pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$  e con qualche cambio di variabile si ottiene infine

$\sum_q \mathcal{R}'_A(q) \mathcal{R}_H(n-q)$  che ha l'aspetto rassicurante della convoluzione, da cui scaturisce il risultato.

<sup>31</sup>Ciò deriva dal fatto che  $[\mathcal{R}_Y(n-k)] = \mathbf{B}$  è legata alla *matrice di covarianza*  $\Sigma_Y$  (§ 5.7.1) dalla relazione  $[\mathcal{R}_Y(n-k)] = \Sigma_Y + m_Y^2$  (vedi eq. (6.3) a pag. 137 in condizioni stazionarie), e dato che  $\Sigma_Y$  è una *matrice definita positiva* lo è anche  $[\mathcal{R}_Y(n-k)]$ , non decadendo la proprietà in seguito alla somma per una quantità positiva ( $m_Y^2$ ). Pertanto la *forma quadratica*  $\sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N c_n c_k \mathcal{R}_Y(n-k)$  è ovunque convessa (vedi § 5.7.1), e dotata di un unico minimo globale. Questa proprietà permane anche considerando gli altri due termini della (15.29) che concorrono al valore di  $\sigma_e^2(\mathbf{c})$ , essendo questi rispettivamente lineari in  $\mathbf{c}$  e costanti, e che dunque non ne modificano la convessità.

<sup>32</sup>Considerando la sequenza informativa  $a_m$  a media nulla, si ha  $E\{a_m^2\} = \sigma_a^2$ .

In corrispondenza della soluzione  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}$  della (15.25) si ottiene la *minima* varianza di errore, pari a<sup>33</sup>

$$\sigma_{e_{min}}^2 = \sigma_e^2(\tilde{\mathbf{c}}) = \sigma_a^2 - \mathbf{d}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} = \sigma_a^2 - \tilde{\mathbf{c}}^t \mathbf{B} \tilde{\mathbf{c}} = \sigma_a^2 - \sigma_z^2 \quad (15.31)$$

avendo notato che il termine  $\sigma_z^2 = \tilde{\mathbf{c}}^t \mathbf{B} \tilde{\mathbf{c}}$  corrisponde<sup>34</sup> alla potenza dell'uscita  $z = z_m$ , ovvero  $\sigma_z^2 = E\{z^2\}$ . Accade ora che la (15.30) può essere espressa anche come<sup>35</sup>  $\sigma_e^2(\mathbf{c}) = (\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{d})^t \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{d}) - \mathbf{d}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} + \sigma_a^2$ , e tenendo conto della prima delle (15.31) si ottiene

$$\sigma_e^2(\mathbf{c}) = \sigma_{e_{min}}^2 + (\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{d})^t \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{d}) \quad (15.32)$$

evidentemente pari a  $\sigma_{e_{min}}^2$  qualora  $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}}$  e dunque  $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{d}$ . Essendo  $\mathbf{B}$  una matrice definita positiva lo è anche la sua inversa  $\mathbf{B}^{-1}$ , ed esiste (vedi § 5.7.1) una matrice unitaria  $\mathbf{\Gamma}$  con colonne pari agli autovettori di  $\mathbf{B}^{-1}$  tale da poter scrivere  $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Gamma}^t$ , dove  $\mathbf{\Lambda}$  è una matrice diagonale con elementi pari all'inverso degli autovalori  $\lambda_i$  di  $\mathbf{B}$ ; indicando allora con  $\mathbf{c}_\delta$  il vettore  $\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{B}(\mathbf{c} - \tilde{\mathbf{c}})$  legato alla *differenza* tra i coefficienti generici e quelli ottimi, e con  $\mathbf{u} = \mathbf{\Gamma}^t \mathbf{c}_\delta$  la sua versione trasformata nella base individuata dagli autovettori, la (15.32) diviene

$$\sigma_e^2(\mathbf{u}) = \sigma_{e_{min}}^2 + \mathbf{u}^t \mathbf{\Lambda} \mathbf{u} = \sigma_{e_{min}}^2 + \sum_{i=0}^{2N} \frac{u_i^2}{\lambda_i}$$

che rappresenta l'equazione di un iperparaboloide ellittico, con assi principali pari agli autovettori di  $\mathbf{B}^{-1}$ .

**Metodo del gradiente** Dopo aver verificato l'unicità del minimo per  $\sigma_e^2(\mathbf{c})$ , illustriamo un modo per individuarlo mediante una tecnica *iterativa* che evita di risolvere la (15.25) in modo diretto. Come discusso, la (15.32) esprime  $\sigma_e^2$  in funzione del vettore di coefficienti  $\mathbf{c}$  di  $H_e(f)$ , e il metodo prende il nome di *discesa del gradiente*<sup>36</sup> in quanto sfrutta la conoscenza del *gradiente* di  $\sigma_e^2(\mathbf{c})$  indicato come  $\mathbf{g}(\mathbf{c})$ , ovvero del vettore i cui elementi  $g_n$  sono le derivate parziali di  $\sigma_e^2$  rispetto ai corrispondenti elementi di  $\mathbf{c}$ , e cioè  $g_n = \frac{\partial \sigma_e^2(\mathbf{c})}{\partial c_n}$ . Osserviamo che anche il gradiente è una funzione di  $\mathbf{c}$  il cui valore si ottiene dalla (15.30) come  $\mathbf{g}(\mathbf{c}) = 2\mathbf{B}\mathbf{c} - 2\mathbf{d}$ , che infatti si azzerava per  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{d}$ , ed il cui *orientamento* per ogni vettore  $\mathbf{c}^i \neq \tilde{\mathbf{c}}$  indica la *direzione* verso la quale  $\sigma_e^2(\mathbf{c})|_{\mathbf{c}=\mathbf{c}^i}$  cresce di più.

Scegliendo casualmente un vettore iniziale di coefficienti  $\mathbf{c}^0$  (eventualmente nullo), ad ogni iterazione sono calcolati i nuovi valori

$$\mathbf{c}^{i+1} = \mathbf{c}^i - \Delta \mathbf{g}(\mathbf{c}^i) \quad (15.33)$$

33

$$\begin{aligned} \sigma_e^2(\tilde{\mathbf{c}}) &= \tilde{\mathbf{c}}^t \mathbf{B} \tilde{\mathbf{c}} - 2\tilde{\mathbf{c}}^t \mathbf{d} + \sigma_a^2 = \tilde{\mathbf{c}}^t \mathbf{B} \tilde{\mathbf{c}} - 2\tilde{\mathbf{c}}^t \mathbf{B} \tilde{\mathbf{c}} + \sigma_a^2 = \\ &= \sigma_a^2 - \tilde{\mathbf{c}}^t \mathbf{B} \tilde{\mathbf{c}} = \sigma_a^2 - \tilde{\mathbf{c}}^t \mathbf{d} = \sigma_a^2 - \mathbf{d}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} \end{aligned}$$

avendo prima sostituito  $\mathbf{d} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{c}}$  e poi il contrario, e valutato  $\tilde{\mathbf{c}}^t = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{d})^t = \mathbf{d}^t (\mathbf{B}^{-1})^t = \mathbf{d}^t \mathbf{B}^{-1}$  in quanto  $\mathbf{B}$  è una matrice simmetrica, così come la sua inversa.

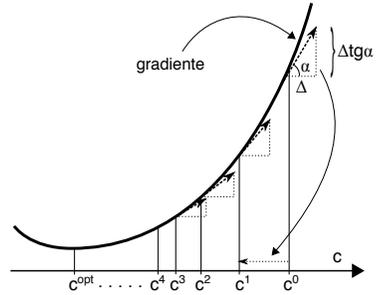
<sup>34</sup>Considerando  $z$  a media nulla, si ha  $\sigma_z^2 = E\{z^2\} = E\{\tilde{\mathbf{c}}^t \mathbf{y} \mathbf{y}^t \tilde{\mathbf{c}}\} = \tilde{\mathbf{c}}^t E\{\mathbf{y} \mathbf{y}^t\} \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{c}}^t \mathbf{B} \tilde{\mathbf{c}}$ .

<sup>35</sup>Infatti

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{d})^t \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathbf{d}) &= \mathbf{c}^t \mathbf{B}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{c} - \mathbf{c}^t \mathbf{B}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} - \mathbf{d}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{c} + \mathbf{d}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} = \\ &= \mathbf{c}^t \mathbf{B} \mathbf{c} - \mathbf{c}^t \mathbf{d} - \mathbf{d}^t \mathbf{c} + \mathbf{d}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} = \mathbf{c}^t \mathbf{B} \mathbf{c} - 2\mathbf{c}^t \mathbf{d} + \mathbf{d}^t \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} \end{aligned}$$

<sup>36</sup>Vedi [http://it.wikipedia.org/wiki/Discesa\\_del\\_gradiente](http://it.wikipedia.org/wiki/Discesa_del_gradiente)

ovvero spostando ogni coefficiente  $c_n$  in direzione opposta alla relativa componente del gradiente  $\mathbf{g}^i = \mathbf{g}(\mathbf{c}^i)$  calcolato in quel punto, di una quantità ad esso proporzionale mediante il parametro  $\Delta$ , un piccolo numero positivo che determina la velocità di convergenza dell'algoritmo<sup>37</sup>. Quindi, viene calcolato un nuovo valore  $\mathbf{g}^{i+1} = \mathbf{g}(\mathbf{c}^{i+1})$ , ed il procedimento iterato fino a quando non si verifica che  $|\mathbf{g}^i| < \varepsilon$ , nel cui caso si ritiene raggiunto l'ottimo  $\tilde{\mathbf{c}}$ . La figura a lato rappresenta un esempio unidimensionale di applicazione del metodo, in cui il gradiente è pari alla derivata  $dy/dx$ , ovvero alla tangente dell'angolo  $\alpha$  tra la funzione e l'asse orizzontale, e mostra i diversi valori  $c^i$  ottenuti nelle iterazioni.



**Equalizzazione adattiva LMS** Il metodo ora esposto si basa sul calcolo ripetuto di  $\mathbf{g}^i = 2(\mathbf{B}\mathbf{c}^i - \mathbf{d})$ , ma... se la  $H(f)$  del canale varia nel tempo, lo stesso avviene per  $\mathbf{B}$  e per  $\mathbf{d}$ , così come per il valore dei coefficienti  $\tilde{\mathbf{c}}$ ! Per fronteggiare tale evenienza, ed allo stesso tempo evitare di stimare a parte  $\mathcal{R}_Y(n)$  e  $\mathcal{R}_{YA}(n)$ , si può adottare un diverso metodo di discesa del gradiente, detto ora *stocastico* (o LMS<sup>38</sup>) perché opera a partire da una *stima* del gradiente, aggiornata ad ogni periodo di simbolo, così come ad ogni simbolo sono aggiornati i coefficienti, utilizzati *allo stesso tempo* per eseguire l'equalizzazione.

Tutto inizia considerando che in base alla (15.21) il gradiente può essere valutato (a meno di un fattore due) per i valori  $\mathbf{c}_m$  utilizzati all'istante  $t = mT_s$  anche come<sup>39</sup>

$$\mathbf{g}_m = E\{e_m \mathbf{y}_m\} \tag{15.34}$$

in cui  $e_m = z(mT_s) - a_m$  è l'errore commesso dall'equalizzatore rispetto al simbolo trasmesso (e, nella fase di *apprendimento*, noto in ricezione<sup>40</sup>) ed  $\mathbf{y}_m$  è il vettore dei  $2N + 1$  campioni  $y_m(n)$  memorizzati nello stato del filtro  $h_e(t)$  al momento di produrre l'uscita  $z(mT_s)$ . La (15.34) viene quindi *approssimata* tralasciando di effettuare la media di insieme, ossia valutando la stima del gradiente come<sup>41</sup>  $\hat{\mathbf{g}}_m = e_m \mathbf{y}_m$ , da usare poi nella formula di aggiornamento dei coefficienti  $c_n$  derivata dalla (15.33):

$$\mathbf{c}_{m+1} = \mathbf{c}_m - \Delta e_m \mathbf{y}_m \tag{15.35}$$

La (15.35) è improntata ad un principio di *correzione dai propri errori*, ovvero i coefficienti ricevono *un colpetto* in su o in giù, in modo da ridurre l'errore commesso<sup>42</sup>.

<sup>37</sup>Una regola pratica suggerisce di porre  $\Delta = \frac{1}{5(2N+1)\mathcal{P}_Y}$  in cui  $\mathcal{P}_Y$  è la potenza ricevuta di segnale più rumore. Valori maggiori possono accelerare la convergenza, ma anche dar luogo ad instabilità della soluzione, mentre valori più piccoli rallentano la convergenza, ma possono produrre errori finali minori.

<sup>38</sup>Ossia LEAST MEAN SQUARE, vedi anche [http://en.wikipedia.org/wiki/Least\\_mean\\_squares\\_filter](http://en.wikipedia.org/wiki/Least_mean_squares_filter)

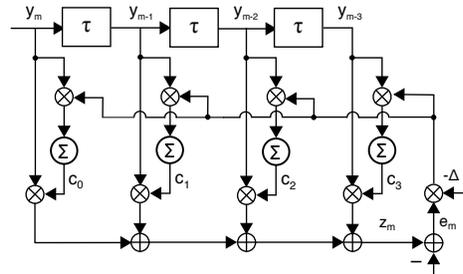
<sup>39</sup>Un interessante modo di interpretare la (15.34) si basa sull'osservare che la minimizzazione di (15.20) ovvero l'azzeramento del gradiente (15.21)  $\mathbf{g}_m = \mathbf{0}$ , comporta che ciascun valore di errore  $e_m$  deve essere *ortogonale* (in senso statistico, vedi § 6.9.1) a tutte le osservazioni  $y_{m-N}, \dots, y_{m+N}$  da cui dipende la stima  $z(mT)$ , ossia le  $2N + 1$  coppie di sequenze devono essere *incorrelate*, e cioè prive di legami di tipo lineare.

<sup>40</sup>La sequenza dei simboli trasmessi è nota all'inizio della trasmissione, e spesso generata nella forma di una sequenza *pseudo-noise*. Dopo questa fase iniziale di *apprendimento*, l'equalizzatore commuta su di una modalità *dipendente dalle decisioni*, in cui l'errore  $e_m$  è valutato rispetto ai valori  $\hat{a}_m$  emessi dal decisore: se la probabilità di errore per simbolo non è troppo elevata, la maggior parte delle volte la decisione è esatta, ed il metodo continua a funzionare correttamente.

<sup>41</sup>Poniamo di eseguire l'aggiornamento (15.35) dei coefficienti  $\mathbf{c}$  ogni  $K$  periodi di simbolo: otterremmo  $\mathbf{c}_{m+K} = \mathbf{c}_m - \Delta \sum_{k=0}^{K-1} e_{m+k} \mathbf{y}_{m+k}$ , in cui il termine sommatoria risulta in effetti proporzionale alla stima di  $E\{e_m \mathbf{y}_m\}$ , almeno più di quanto non appaia il termine  $e_m \mathbf{y}_m$  che compare isolato nella (15.35).

<sup>42</sup>Possiamo infatti notare che alla  $m$ -esima iterazione della (15.35) il coefficiente  $c_n$  viene *aumentato* se  $e_m$  e  $y_n$  sono

La figura a lato mostra uno schema di architettura per il filtro adattivo, che opera come equalizzatore con periodo di campionamento  $\tau = T_s/2$ , e ad ogni periodo di simbolo esegue l'aggiornamento dei propri coefficienti, in accordo alla (15.35), mediante l'operatore di accumulo simbolizzato dalla  $\Sigma$  cerchiata.



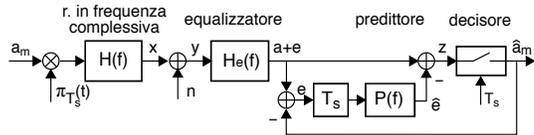
**15.4.4 Equalizzatore a reazione**

L'errore  $e_m = z(mT_s) - a_m$  tra l'uscita  $z_m$  di  $H_e(f)$  ed il simbolo trasmesso  $a_m$  è una sequenza aleatoria di valori correlati, dato che per le sue due componenti accade che

- il rumore bianco  $n(t)$  si è colorato attraversando  $h_R(t) * h_e(t)$ ;
- se  $|ISI|$  non è completamente rimossa significa che  $H_e(f) \neq 1/H(f)$  e quindi non si verificano le condizioni di Nyquist, ed i simboli sono tra loro dipendenti.

La tecnica del *decision feedback equalizer* o DFE sfrutta questa correlazione per *predire* i valori  $e_m$  a partire dagli errori agli istanti di simbolo precedenti, mediante un secondo filtro FIR che stima  $\hat{e}_m = \sum_{n=1}^N p_n e_{m-n}$ , e contribuisce ad una grandezza di decisione  $z_m = a_m + e_m - \hat{e}_m$  affetta da un errore ancora più piccolo.

Il filtro di predizione è indicato come  $P(f)$  nello schema di figura, nel quale si suppone assenza di errori di decisione, ovvero  $\hat{a}_m = a_m$ , ed i coefficienti  $p_n$  ottimizzati applicando



ad es. il criterio MMSE all'errore sull'errore, ossia  $E \{ (e_m - \hat{e}_m)^2 \} = \min$ . Ma lo stesso schema può essere *ricablato* come appare in fig. 15.5-a), in cui  $P(f)$  ed il sommatore in uscita sono *sdoppiati*: ciò consente di riunificare  $H_e(f)$  e  $P(f)$  in un unico *filtro in avanti* o di *smoothing*, la cui uscita viene ora fatta dipendere dal segnale ricevuto nei soli istanti di simbolo *passati*<sup>43</sup>.

Lo schema di equalizzazione diviene quindi quello di fig. 15.5-b), in cui il filtro all'indietro o di controrazione è indicato come *di feedback*, opera alla frequenza di simbolo  $f_s$ , e la sua uscita  $\hat{e}_m$  dipende solamente dalle decisioni precedenti  $\hat{a}_m$ <sup>44</sup>, una cui combinazione lineare è usata per *correggere* i valori emessi dal primo filtro: il valore in ingresso al decisore può quindi essere ora espresso come

$$z_m = \sum_{n=0}^{N_1} c_n y(mT_s - n\tau) - \sum_{n=1}^{N_2} d_n \hat{a}_{m-n} \tag{15.36}$$

di segno opposto, e *diminuito* se concorde. Ovvero: se l'uscita è *piccola* allora  $e_m = z(mT_s) - a_m < 0$ , e il contributo  $c_n$  dell' $n$ -esima memoria viene aumentato se  $y_m(n)$  è positivo, o diminuito se  $y_m(n)$  è negativo; viceversa, se  $e_m = z(mT_s) - a_m > 0$  (uscita *troppo grande*) il valore di  $c_n$  viene aumentato se  $y_m(n)$  è negativo, e diminuito nel caso opposto. Inoltre, se  $c_n$  e  $y_m(n)$  hanno lo stesso segno contribuiscono a  $z_m$  come un termine positivo, oppure come un termine negativo se di segno diverso. Infine, la colonna  $\delta$  esprime la variazione del contributo di  $c_n y_m(n)$  a  $z_m$ , frutto della variazione di  $c_n$  e dei segni di  $c_n$  e di  $y_m(n)$ . Come si può verificare,  $\delta$  è sempre tale da contribuire alla riduzione di  $e_m$ .

$e_m$	$y_m(n)$	$c_n$	$c_n$	$c_n y_m(n)$	$\delta$
+	+	↓	+	+	↓
+	+	↓	-	-	↓
+	-	↑	+	-	↓
+	-	↑	-	+	↓
-	+	↑	+	+	↑
-	+	↑	-	-	↑
-	-	↓	+	-	↑
-	-	↓	-	+	↑

<sup>43</sup> Ovvero, il filtro FIR ha solo i ritardi relativi ai coefficienti  $c_n$  con  $n \geq 0$ , così come la sommatoria (15.14).  
<sup>44</sup> Anche qui, nella fase di apprendimento sono usati i valori  $a_m$  noti a priori, mentre in quella successiva si usano quelli  $\hat{a}_m$  emessi dal decisore, supposti per la maggior parte esatti.

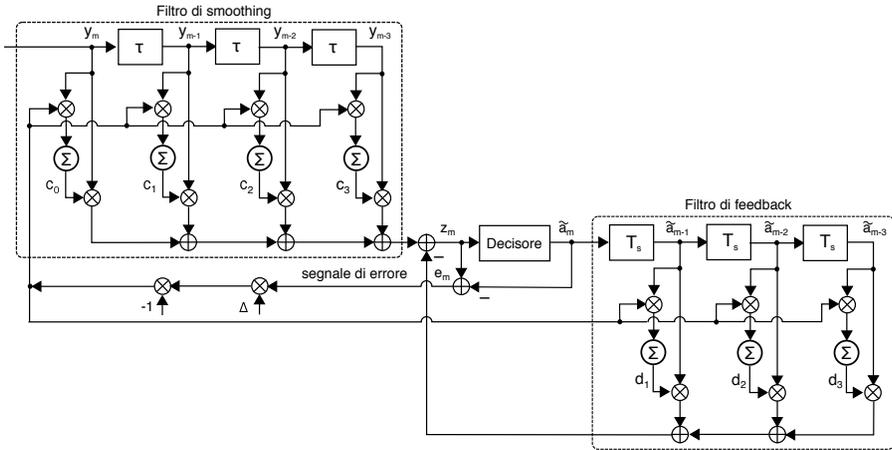


Figura 15.6: Architettura di un equalizzatore DFE basato sul gradiente stocastico

I coefficienti  $d_n$  del filtro di feedback possono essere anch'essi stimati in maniera adattiva mediante il metodo del gradiente stocastico, dando così luogo alla architettura computazionale di figura 15.6, in cui la grandezza che guida l'aggiornamento dei  $d_n$  è la stessa misura dell'errore  $e_m$  usata per l'aggiornamento dei  $c_n$  del filtro in avanti, e dunque la (15.35) si scrive ora come  $\mathbf{d}_{m+1} = \mathbf{d}_m - \Delta e_m \mathbf{a}_m$ , in cui  $\mathbf{a}_m$  è il vettore dei simboli precedentemente decisi  $a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_{m-N_2}$  e presenti nella memoria del filtro di feedback.

Dato che il filtro di feedback opera sui simboli già decisi e per questo privi di rumore, non introduce nuovo rumore, che anzi è in generale ridotto grazie alla minore lunghezza del filtro in avanti. D'altra parte la presenza del decisore nell'anello di reazione rende il metodo non lineare, e per questo l'effetto *moltiplicativo* di eventuali errori di decisione non può essere analizzato dal punto di vista teorico, ma solo essere studiato mediante simulazioni.

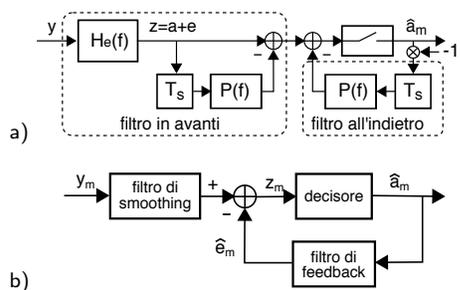


Figura 15.5: Schema simbolico di un decision feedback equalizer

### 15.4.5 Equalizzatore a massima verosimiglianza di sequenza

Le tecniche finora illustrate effettuano la decisione simbolo per simbolo, mentre il metodo che analizziamo ora produce una stima di quanto ricevuto, solo dopo aver preso in esame una *intera sequenza* di  $N$  simboli, operando una *maximum likelihood sequence detection* o MLSD. In questo caso non viene utilizzato nessun filtro aggiuntivo, e la funzione di equalizzazione è assorbita dal decisore, operando in base all'algoritmo di Viterbi (pag. 371) con costi dei percorsi calcolati in modo simile a quelli del *soft decision decoding* di pag. 367. Per illustrare il funzionamento di

MLSD, iniziamo con il *riconsiderare* i campioni  $y_m = y(mT_s)$  del segnale ricevuto (15.13) come

$$y_m = \sum_{n=0}^N a_n h(mT_s - nT_s) + \nu_m = h_0 a_m + \sum_{n=0, n \neq m}^N a_n h_{m-n} + \nu_m \quad (15.37)$$

in cui  $h(t) = h_T(t) * h_c(t) * h_R(t)$ , evidenziando così le componenti di errore dovuto all'ISI (la  $\sum_{n \neq m}$ ) ed al rumore  $\nu_m$ ; impostando ora il problema come quello di stimare la sequenza  $\mathbf{a} = \{a_m\}$  conoscendo solo quella di osservazione  $\mathbf{y} = \{y_m\}$ , la soluzione di *massima verosimiglianza* individua la sequenza  $\hat{\mathbf{a}}$  in modo che  $p(\mathbf{y}/\mathbf{a})|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}}$  sia massima.

La (15.37) evidenzia inoltre come la componente aleatoria di  $\mathbf{y}$  sia tutta riconducibile a quella della sequenza di rumore  $\nu$ , dato che l'effetto del canale si riduce ad una *convoluzione discreta* e dunque è deterministico; pertanto  $y_m$  è una v.a. con media  $\bar{y}_m(\mathbf{a}) = \sum_{n=0}^N a_n h_{m-n}$  e d.d.p. gaussiana  $p_\nu(y_m/\mathbf{a})$  condizionata ad  $\mathbf{a}$ , che ne determina la sequenza dei valori medi. Se le realizzazioni  $\nu_m$  sono staticamente indipendenti<sup>45</sup>, la  $p(\mathbf{y}/\mathbf{a})$  è il prodotto dei singoli contributi  $p_\nu(y_m/\mathbf{a})$ , da valutare per tutti gli  $m$  e per tutti i modi di scegliere  $\mathbf{a}$ , e quindi trovare  $\hat{\mathbf{a}} = \arg \max \prod_{m=0}^M p_\nu(y_m/\mathbf{a})$  o, equivalentemente

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min \sum_{m=0}^M -\ln(p_\nu(y_m/\mathbf{a})) \quad (15.38)$$

Quest'ultimo passaggio trova motivazione nella espressione della d.d.p. gaussiana  $p_\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\nu} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_\nu^2}}$  per cui  $\ln(p_\nu(y)) = -\ln(\sqrt{2\pi}\sigma_\nu) - \frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_\nu^2}$ , e dato che  $\sigma_\nu$  è la stessa per tutti gli istanti  $m$ , il suo valore non contribuisce alla minimizzazione (15.38), che diviene pertanto

$$\hat{\mathbf{a}} = \arg \min \sum_{m=0}^M (y_m - \bar{y}_m(\mathbf{a}))^2$$

La sequenza ottima  $\hat{\mathbf{a}}$  è quindi quella che minimizza la somma degli scarti quadratici tra le osservazioni  $y_m$  ed il corrispondente valore atteso, e viene trovata utilizzando l'algoritmo di *Viterbi* (pag. 371) riconducendo il problema a quello di individuare un *percorso di minimo costo* nell'ambito del *traliccio* che rappresenta tutte le possibili sequenze  $\mathbf{a}$ .

**Esempio** Ipotizziamo una  $h_n = \begin{cases} 1 & \text{con } n = 0 \\ 0.5 & \text{con } n = 1 \end{cases}$  ed una trasmissione

antipodale binaria con  $a = \{1, -1\}$ ; la (15.37) si scrive quindi come

$$y_m = a_m h_0 + a_{m-1} h_1 + \nu_m$$

che rappresenta un filtro FIR di primo ordine, la cui uscita in assenza di rumore assume uno dei 4 possibili valori mostrati in tabella in funzione di  $a_m a_{m-1}$ . Il traliccio di ricerca può quindi essere tracciato come appare in alto in fig. 15.7, identificando i valori di  $a_{m-1}$  con le righe +1 e -1, e quelli di  $a_m$  con il tratteggio (-1) o la linea continua (1) degli archi che uniscono le colonne, considerando  $a_{-1} = a_{-2} = 1$ ; sopra ogni arco, è quindi scritto il valore di  $\bar{y}_m$  corrispondente. Nella parte centrale di figura gli archi sono invece etichettati con i costi  $(y_m - \bar{y}_m(\mathbf{a}))^2$  associati all'osservazione della sequenza  $\mathbf{y} = 0.4, 1.3, 0.9$ , e sono evidenziati i costi *minimi* simbolo per simbolo, che porterebbero a decidere per -1, 1, 1. Al contrario, la figura in basso mostra il costo totale del *miglior percorso* che raggiunge le righe del traliccio per ogni istante di simbolo, assieme alle frecce che indicano il miglior predecessore. L'applicazione del criterio MLSD determina quindi la decisione per 1, 1, 1, con un bit di differenza.

<sup>45</sup>A questo proposito, è opportuno che  $H_R(f)$  sia realizzato come un passa basso e non come un filtro adattato, o nel caso di rumore colorato in ingresso, che si effettui una operazione di *sbiancamento*.

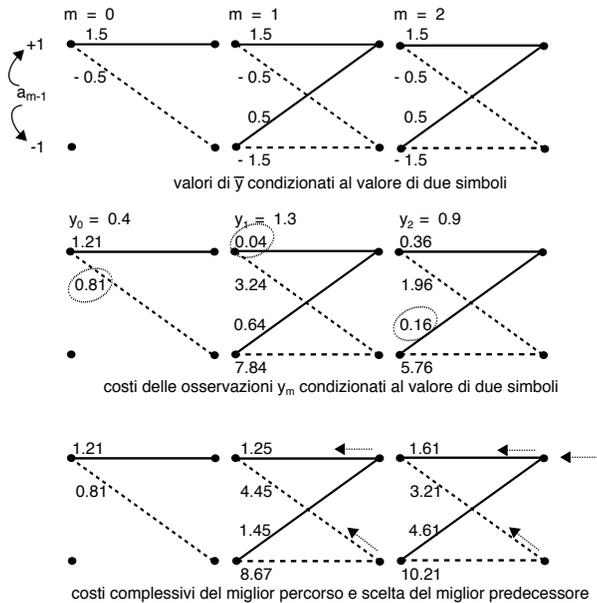


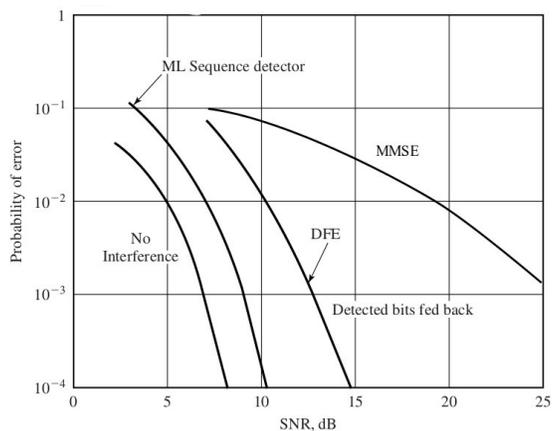
Figura 15.7: Costruzione del traliccio per un decodificatore MLSD

Il metodo con cui l'algoritmo di Viterbi esplora il traliccio per individuare il percorso di minimo costo, e l'associata sequenza  $\hat{a}$ , è illustrato a pag. 371 e non viene qui ripetuto.

### 15.4.6 Confronto delle prestazioni di equalizzazione

La figura che segue<sup>46</sup> confronta  $P_e$  vs.  $SNR$  per una modulazione binaria antipodale nei casi di assenza di ISI oppure di un canale con  $h_0 h_1 h_2 = 0.4, 0.8, 0.4$ , i cui effetti sono compensati mediante equalizzazione realizzata in base alle tecniche fin qui illustrate.

Come si vede, il MLSD si comporta meglio di tutti, e determina il valore delle prestazioni ottime. Al contrario, le prestazioni di MMSE appaiono come le peggiori, essenzialmente a causa della amplificazione del rumore nelle bande in cui il canale ha guadagno nullo<sup>47</sup>; d'altro canto, il DFE ne migliora sensibilmente le prestazioni, pur non



<sup>46</sup>Tratta da J.G. Proakis, M. Salehi, *Communication systems engineering*, 2<sup>nd</sup> Ed., 2002 Prentice-Hall

<sup>47</sup>Nonostante MMSE tenti di minimizzare  $\sigma_e^2$  tenendo conto sia dell'ISI che del rumore, le sue prestazioni degradano in presenza di canali che presentano profonde attenuazioni per alcune frequenze. D'altra parte per canali meno problematici, le sue prestazioni possono avvicinarsi a quelle dell'MLSD.

raggiungendo quelle di MLSD. Ciò che rende poco diffuso l'MLSD però è l'elevata complessità computazionale, oltre al ritardo da attendere per una decisione su intere sequenze, nonché le difficoltà a rendere adattativo l'algoritmo nel caso di condizioni non stazionarie.

## 15.5 Appendici

### 15.5.1 Potenza assorbita da un bipolo

La dimostrazione inizia definendo una potenza *istantanea* assorbita dal bipolo come  $w(t) = v(t) i(t) = v(t) \cdot (v(t) * y(t))$ . La potenza *media* (nel tempo) allora risulta

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_z &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} w(t) dt = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} v(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v(t-\tau) y(\tau) d\tau \right] dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} v(t) v(t-\tau) dt \right] d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \mathcal{R}_v(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) \mathcal{P}_v(f) df = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [\Re\{Y(f)\} + j\Im\{Y(f)\}] \mathcal{P}_v(f) df = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f) \frac{R(f)}{|Z(f)|^2} df
 \end{aligned}$$

Nel terzultimo passaggio si è fatto uso del teorema di Parseval, e del fatto che  $\mathcal{R}_v(\tau)$  è pari; nell'ultimo, si è tenuto conto che  $\mathcal{P}_v(f)$ ,  $R(f)$  e  $|Z(f)|^2 = R^2(f) + X^2(f)$  sono funzioni pari di  $f$ , mentre  $X(f)$  è dispari: pertanto il termine  $\int_{-\infty}^{\infty} \Im\{Y(f)\} \mathcal{P}_v(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f) \frac{X(f)}{|Z(f)|^2} df$  è nullo. Notiamo che quest'ultimo termine rappresenta la *potenza reattiva*, che non è trasformata in altre forme di energia, e viene accumulata e restituita dalla componente reattiva del carico. Al contrario, il termine relativo a  $\Re\{Y(f)\}$  rappresenta la potenza assorbita dalla componente resistiva, nota come *potenza attiva*, che viene completamente dissipata.

Avendo espresso la potenza assorbita  $\mathcal{W}_z$  nella forma di un integrale in  $f$ , la funzione integranda è intuitivamente associabile allo spettro di densità di potenza:  $\mathcal{W}_z(f) = \mathcal{P}_v(f) \frac{R(f)}{|Z(f)|^2}$ . Lo stesso risultato può essere confermato svolgendo il seguente calcolo più diretto, pensando al bipolo come ad un filtro la cui grandezza di ingresso è  $v(t)$  e quella di uscita  $i(t)$ .

La definizione di potenza media  $\mathcal{W}_z = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} w(t) dt$ , in cui  $w(t) = v(t) i(t)$ , mostra come questa sia equivalente alla funzione di intercorrelazione tra  $i$  e  $v$  calcolata in  $\tau = 0$ :  $\mathcal{W}_z = \mathcal{R}_{vi}(0)$ . Allora, è ragionevole assumere che  $\mathcal{W}_z(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{vi}(\tau)\}$ . Indicando infatti con  $\otimes$  l'integrale di intercorrelazione, e ricordando che gli operatori di convoluzione e correlazione godono della proprietà commutativa, possiamo scrivere

$$\mathcal{R}_{vi}(\tau) = v(t) \otimes i(t) = v(t) \otimes (v(t) * y(t)) = (v(t) \otimes v(t)) * y(t) = \mathcal{R}_v(\tau) * y(t)$$

quindi, risulta che

$$\mathcal{W}_z(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{vi}(\tau)\} = \mathcal{P}_v(f) Y(f) = \mathcal{P}_v(f) \frac{R(f) - jX(f)}{|Z(f)|^2}$$

In base alle stesse considerazioni già svolte, si verifica come il termine immaginario non contribuisce alla potenza media assorbita, e quindi può essere omesso dalla definizione di *potenza attiva*  $\mathcal{W}_z(f)$ .

### 15.5.2 Condizioni per il massimo trasferimento di potenza

Svolgiamo per intero la dimostrazione delle (15.3). Verifichiamo subito che, mantenendo  $Z_g(f)$  fisso e per qualunque valore di  $R_c(f)$ , la potenza ceduta ad un carico espressa dalla (15.2):  $\mathcal{W}_{z_c}(f) = \mathcal{P}_{v_g}(f) \frac{R_c(f)}{|Z_c(f) + Z_g(f)|^2}$  risulta massima se il suo denominatore è il più piccolo possibile, e ciò si verifica quando  $X_c(f) = -X_g(f)$ , ed in tal caso risulta

$$\mathcal{W}_{z_c}(f) = \mathcal{P}_{v_g}(f) \frac{R_c(f)}{(R_c(f) + R_g(f))^2} = \frac{\mathcal{P}_{v_g}(f)}{R_c(f) + 2R_g(f) + \frac{(R_g(f))^2}{R_c(f)}} \quad (15.39)$$

Per individuare ora la condizione su  $R_c(f)$  che rende minimo il denominatore (e dunque  $\mathcal{W}_{z_c}(f)$  massima), eseguiamone la derivata rispetto ad  $R_c$  (omettendo per brevità la dipendenza da  $f$ ) ed eguagliamola a zero:

$$\frac{d}{dR_c} \left( R_c + 2R_g + \frac{R_g^2}{R_c} \right) = 1 - \left( \frac{R_g}{R_c} \right)^2 = 0 \quad (15.40)$$

che fornisce la condizione  $R_c(f) = \pm R_g(f)$  in cui il valore negativo viene scartato mentre quello positivo, assieme alla condizione  $X_c(f) = -X_g(f)$  determina la condizione  $Z_c(f) = Z_g^*(f)$  espressa alla (15.3). Volendo verificare che la (15.40) individui effettivamente un minimo e non un massimo del denominatore di (15.39), se ne può eseguire la derivata seconda, ottenendo

$$\frac{d^2}{dR_c^2} \left( R_c + 2R_g + \frac{R_g^2}{R_c} \right) = \frac{d}{dR_c} \left[ 1 - \left( \frac{R_g}{R_c} \right)^2 \right] = 2 \frac{R_g^2}{R_c^3}$$

che verifichiamo immediatamente essere sempre positiva.

### 15.5.3 Potenza ceduta ad un carico $Z_c(f) \neq Z_g^*(f)$

Avendo a disposizione un generatore di segnale di potenza disponibile  $\mathcal{W}_d(f)$  ed impedenza interna  $Z_g(f)$  assegnate, la tensione a vuoto ai suoi capi ha densità di potenza (di segnale) pari a  $\mathcal{P}_v(f) = \mathcal{W}_d(f) 4R_g(f)$ . Collegando al generatore un carico generico  $Z_c(f)$ , la potenza dissipata da quest'ultimo risulta pari a  $\mathcal{W}_{z_c}(f) = \mathcal{P}_v(f) \frac{R_c(f)}{|Z_g(f) + Z_c(f)|^2}$ . Il rapporto tra la densità di potenza effettivamente ceduta a  $Z_c(f)$ , e quella che le sarebbe ceduta se questa fosse adattata per il massimo trasferimento di potenza, fornisce la perdita di potenza subita:

$$\frac{\mathcal{W}_{z_c}(f)}{\mathcal{W}_d(f)} = \mathcal{W}_d(f) 4R_g \frac{R_c(f)}{|Z_g(f) + Z_c(f)|^2} \cdot \frac{1}{\mathcal{W}_d(f)} = \frac{4R_g(f) R_c(f)}{|Z_g(f) + Z_c(f)|^2} = \alpha(f)$$

Pertanto, se  $Z_c(f) \neq Z_g^*(f)$ , su  $Z_c(f)$  si dissipa una potenza pari a  $\mathcal{W}_{z_c}(f) = \alpha(f) \mathcal{W}_d(f)$ . Il medesimo risultato è valido anche per l'analisi dell'accoppiamento tra il generatore equivalente di uscita di una rete due porte ed un carico.

**Esempio** Consideriamo un generatore con  $Z_g(f)$  resistiva e pari a  $50 \Omega$ , e con densità di potenza disponibile (a frequenze positive)

$$\mathcal{W}_d^+(f) = \frac{\mathcal{W}_d}{4W} \text{rect}_{2W}(f - f_0)$$

in cui  $\mathcal{W}_d = 1$  Watt è la potenza disponibile totale, distribuita uniformemente in una banda  $2W = 10$  KHz centrata a frequenza  $f_0 = 1$  MHz. Il generatore è collegato ad un carico

$$Z_c(f) = R_c(f) + jX_c(f)$$

con  $R_c(f) = 50 \Omega$  ed  $X_c(f) = 2\pi fL = 50 \Omega$  per  $f = f_0$  (da cui  $L = \frac{50}{2\pi 10^6} = 7.96 \mu H$ ).

Essendo la banda di segnale  $2W \ll f_0$ , approssimiamo la dipendenza da  $f$  di  $X_c(f)$  come una costante. In queste ipotesi, la potenza effettivamente ceduta al carico risulta  $\mathcal{W}_{z_c} = \alpha \mathcal{W}_d$ , con

$$\alpha = \frac{4R_g R_c}{|Z_g + Z_c|^2} = \frac{4 \cdot 50 \cdot 50}{|50 + 50 + j50|^2} = \frac{10000}{12500} = 0.8$$

e quindi  $\mathcal{W}_{z_c} = 0,8$  Watt ovvero, in dBm:  $10 \log_{10} 0.8 = -0.97 \text{ dBW} = 29.03 \text{ dBm}$ .

Il valore  $\alpha_{dB} = 10 \log_{10} \alpha = 0,97 \text{ dB}$  rappresenta il valore della perdita di potenza causata dal mancato verificarsi delle condizioni di massimo trasferimento di potenza, e può essere tenuto in conto come una attenuazione supplementare al collegamento, in fase di valutazione del *link budget* (vedi capitolo seguente).

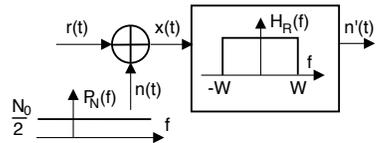
## Collegamenti e mezzi trasmissivi

**S**ONO analizzati i mezzi trasmissivi cavo, radio e fibra ottica, e derivate le relazioni tra i parametri fisici che li caratterizzano, i fenomeni che possono manifestarsi, e la descrizione dei mezzi nei termini della rappresentazione tempo-frequenza di un canale di comunicazione. Le particolarità dei diversi mezzi intervengono quindi nella analisi del *bilancio di collegamento*, che mira a quantificare la distanza che è possibile raggiungere (o *portata*), e la potenza che è necessario trasmettere.

### 16.1 Bilancio di collegamento

Introduciamo subito alcune definizioni e concetti, che aiutano a inquadrare meglio il problema. I parametri fondamentali *del collegamento* sono espressi dalla potenza disponibile del trasmettitore  $W_{dT}$ , dalla minima potenza che occorre ricevere  $W_{RMin}$  (spesso indicata come *sensibilità* del ricevitore) e dall'attenuazione disponibile  $A_d$  *del mezzo di trasmissione* che si intende utilizzare.

D'altra parte, il parametro che più caratterizza *il segnale trasmesso* ai fini del bilancio di collegamento è la *banda occupata*  $W$ , in quanto determina la potenza di rumore in ingresso al ricevitore, come illustrato ai § 8.4.1 e 11.1.



**Determinazione della sensibilità** Si ottiene in base alla conoscenza del livello di rumore  $\frac{N_0}{2}$  in ingresso al ricevitore (vedi cap. 7.4.2.1) e dell' $SNR$  (cap. 11) o della  $P_e$  (vedi § 8.21) a pag. 221 e cap. 14) che si intende conseguire. Nel caso di trasmissioni analogiche, se si desidera ottenere un valore  $SNR = \alpha SNR_0 = \alpha \frac{W_R}{N_0 W}$ , si ottiene<sup>1</sup>

$$W_{RMin} = N_0 W \cdot \frac{SNR}{\alpha}$$

mentre per trasmissioni numeriche, il vincolo ad ottenere un valore di  $P_e^{bit}$  prefissato consente di determinare il valore minimo di  $\frac{E_b}{N_0} = \frac{W_R}{N_0 f_b}$ , e quindi

$$W_{RMin} = N_0 f_b \cdot \frac{E_b}{N_0}$$

<sup>1</sup>Come definito al § 11.1.5,  $SNR_0$  dipende solo dalle caratteristiche del collegamento, mentre il coefficiente  $\alpha$  rappresenta la dipendenza dal tipo di modulazione adottata, e differisce da uno nei casi di modulazione FM, AM-PI e AM-PPS.

Benché la valutazione delle prestazioni svolta ai precedenti capitoli consideri potenze *di segnale*, lo stesso valore  $SNR$  esprime anche un rapporto tra potenze *disponibili*, dato che sia segnale che rumore hanno origine da generatori che condividono la stessa impedenza interna (vedi eq. (7.12) a pag. 197). Infatti

$$\frac{W_{dR}}{W_{dN}} = \frac{P_R}{4R_g} \frac{4R_g}{P_N} = \frac{P_R}{P_N}$$

così come l' $SNR$  non varia se, anziché le potenze *disponibili*, si considerano quelle assorbite da un carico (lo stadio di ingresso del ricevitore), dato che segnale e rumore subiscono il medesimo rapporto di partizione (vedi § 15.1.1.2).

**Guadagno di sistema** Il rapporto

$$G_s = \frac{W_{dT}}{W_{R_{Min}}}$$

è detto *guadagno di sistema*<sup>2</sup> e rappresenta il massimo valore di attenuazione *disponibile*  $A_d$  che è possibile superare. La differenza in decibel  $G_{s_{dB}} = W_{dT} [dBW] - W_{R_{Min}} [dBW]$  rappresenta la stessa quantità, in una forma che rende più intuitivo il suo utilizzo nel determinare un limite alla massima attenuazione disponibile: deve infatti risultare

$$A_{d_{dB}} \leq G_{s_{dB}}$$

**Margine di sistema** La differenza tra  $G_{s_{dB}}$  ed  $A_{d_{dB}}$ , che per quanto appena detto deve risultare  $\geq 0$ , prende il nome di *margin* di sistema, e rappresenta l'eccesso di potenza (in dB) che viene trasmessa, rispetto alla minima indispensabile:

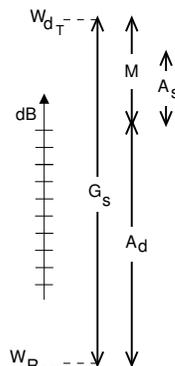
$$M_{dB} = G_{s_{dB}} - A_{d_{dB}}$$

**Attenuazione supplementare** L'eccesso di potenza  $M_{dB}$  deve comunque risultare maggiore della somma (in dB) di tutte le possibili ulteriori cause di attenuazione del segnale, indicate collettivamente come *attenuazioni supplementari*:

$$\sum A_{s_{dB}} \leq M_{dB}$$

In questa categoria rientrano tutte le cause di attenuazione non previste nella situazione ideale e che possono, ad esempio, avere origine dal fallimento delle condizioni per il massimo trasferimento di potenza, oppure essere causate da un fenomeno piovoso in un collegamento radio, o dipendere dalla perdita di segnale dovuta alla giunzione tra tratte in fibra ottica....

**Grado di servizio** Nel capitolo 17 il concetto di grado di servizio è stato associato al valore di probabilità con cui può verificarsi un fenomeno di blocco in un elemento di commutazione. Un concetto del tutto analogo sussiste, qualora le attenuazioni supplementari siano grandezze aleatorie, e la loro somma possa superare il valore del margine a disposizione: in tal caso, la potenza ricevuta si riduce sotto la minima  $W_{R_{Min}}$ , ed il collegamento "va fuori specifiche". Pertanto, in sede di analisi del bilancio di collegamento, indichiamo come *grado di servizio* la



<sup>2</sup>Notiamo che  $G_s$  è definito come ingresso/uscita, contrariamente agli altri guadagni. Infatti, non è una *grandezza* del collegamento, bensì una *potenzialità* dello stesso.

percentuale di tempo per la quale si mantiene  $W_R > W_{R_{Min}}$ , ovvero la probabilità che le attenuazioni supplementari non superino il margine, ossia

$$\text{Grado di Servizio} = Pr \left\{ \sum A_{s_{dB}} < M_{dB} \right\}$$

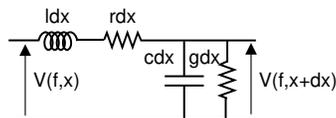
**Esempio** Un grado di servizio del 99.99 % equivale a poco meno di 1 ora l'anno di fuori servizio, e corrisponde a richiedere che  $Pr \left\{ \sum A_{s_{dB}} > M_{dB} \right\} = 10^{-4}$ .

## 16.2 Collegamenti in cavo

Iniziamo l'analisi dei mezzi trasmissivi con la descrizione delle caratteristiche e delle prestazioni dei cavi in rame, utilizzati fin dall'inizio allo scopo di recapitare a distanza i segnali in forma elettrica. Il risultato più rilevante è senz'altro il manifestarsi dell'*effetto pelle*, che determina (per  $f > 100$  KHz) una attenuazione in dB proporzionale a  $\sqrt{f}$ . La sezione è completata da una breve catalogazione dei cavi usati per telecomunicazioni.

### 16.2.1 Costanti distribuite, grandezze derivate, e condizioni generali

Un conduttore elettrico uniforme e di lunghezza infinita, è descritto in base ad un modello a costanti distribuite, espresso in termini delle *costanti primarie* costituite dalla resistenza  $r$ , la conduttanza  $g$ , la capacità  $c$  e l'induttanza  $l$  per unità di lunghezza. La teoria delle linee uniformi definisce quindi due grandezze derivate dalle costanti primarie: l'*impedenza caratteristica*  $Z_0(f)$  e la *costante di propagazione*  $\gamma(f)$ .



La teoria delle linee uniformi definisce quindi due grandezze derivate dalle costanti primarie: l'*impedenza caratteristica*  $Z_0(f)$  e la *costante di propagazione*  $\gamma(f)$ .

**Impedenza caratteristica** E' definita come

$$Z_0(f) = R_0(f) + jX_0(f) = \sqrt{\frac{r + j2\pi fl}{g + j2\pi fc}} \quad (16.1)$$

e rappresenta il rapporto tra  $V(f)$  ed  $I(f)$  in un generico punto del cavo, permettendo di scrivere

$$I(f) = \frac{V(f)}{Z_0(f)}$$

**Costante di propagazione** E' definita come

$$\gamma(f) = \alpha(f) + j\beta(f) = \sqrt{(r + j2\pi fl)(g + j2\pi fc)} \quad (16.2)$$

mentre la grandezza  $e^{-\gamma(f)d}$  rappresenta il rapporto dei valori di tensione presenti tra due punti di un cavo di lunghezza infinita, distanti  $d$ , permettendo di scrivere

$$V(f, x + d) = e^{-\gamma(f)d} V(f, x)$$

**Condizioni di chiusura** Qualora il cavo di lunghezza  $d$  sia chiuso ai suoi estremi su di un generatore con impedenza  $Z_g(f)$  e su di un carico  $Z_c(f)$ , risultano definiti i *coefficienti di riflessione* del generatore e del carico:

$$r_g(f) = \frac{Z_g(f) - Z_0(f)}{Z_g(f) + Z_0(f)} \quad \text{e} \quad r_c(f) = \frac{Z_c(f) - Z_0(f)}{Z_c(f) + Z_0(f)} \quad (16.3)$$

Osserviamo subito che nel caso in cui  $Z_g(f) = Z_c(f) = Z_0(f)$ , risulta  $r_g(f) = r_c(f) = 0$ .

**Quadripolo equivalente** L'impedenza vista dai morsetti di *ingresso* e di *uscita* di un cavo, interposto tra generatore e carico, vale rispettivamente

$$Z_i(f) = Z_0(f) \frac{1 + r_c(f) \cdot e^{-2d\gamma(f)}}{1 - r_c(f) \cdot e^{-2d\gamma(f)}} \quad e \quad Z_u(f) = Z_0(f) \frac{1 + r_g(f) \cdot e^{-2d\gamma(f)}}{1 - r_g(f) \cdot e^{-2d\gamma(f)}} \quad (16.4)$$

Allo stesso tempo, la funzione di trasferimento *intrinseca* risulta

$$H_q(f) = 2 \frac{e^{-d\gamma(f)}}{1 - r_g(f) \cdot r_c(f) \cdot e^{-2d\gamma(f)}} \quad (16.5)$$

**Condizioni di adattamento** Nel caso in cui  $Z_g(f) = Z_c(f) = Z_0(f)$ , come verificabile, non si manifesta distorsione lineare (§ 7.2). Infatti, risultando in tal caso  $r_g(f) = r_c(f) = 0$ , si ottiene che  $Z_i(f) = Z_u(f) = Z_0(f)$  e  $H_q(f) = \frac{V_q(f)}{V_i(f)} = 2e^{-d\gamma(f)}$ : il cavo si comporta allora come se avesse lunghezza infinita. Pertanto, risulta che  $H_i(f) = \frac{1}{2}$  ed  $R_g(f) = R_u(f)$  e dunque il guadagno disponibile (eq. (15.6) pag. 434) si ottiene

$$G_d(f) = |H_i(f)|^2 |H_q(f)|^2 \frac{R_g(f)}{R_u(f)} = \frac{1}{4} \left| 2e^{-d[\alpha(f) + j\beta(f)]} \right|^2 = e^{-2d\alpha(f)} \quad (16.6)$$

**Condizione di Heaviside** Nel caso in cui i valori delle costanti primarie siano tali da risultare  $r \cdot c = l \cdot g$ , relazione nota come *condizione di Heaviside*<sup>3</sup>, le (16.1) e (16.2) si semplificano, e si ottiene

$$\gamma(f) = \sqrt{rg} + j2\pi f\sqrt{lc} \quad e \quad Z_0(f) = \sqrt{\frac{r}{g}} = \sqrt{\frac{l}{c}} = R_0$$

e pertanto, risultando  $\alpha(f)$  costante e  $\beta(f)$  linearmente crescente con la frequenza, si realizzano le condizioni di un canale perfetto; dato inoltre che l'impedenza caratteristica  $Z_0(f) = R_0$  è solo resistiva ed indipendente dalla frequenza, diviene semplice realizzare la condizione di adattamento  $Z_g(f) = Z_c(f) = R_0$ , il che determina al contempo anche il massimo trasferimento di potenza, e implica che  $r_g(f) = r_c(f) = 0$ , e quindi

$$H_q(f) = 2e^{-d\alpha(f)} e^{-jd\beta(f)} = 2e^{-d\sqrt{rg}} e^{-jd2\pi f\sqrt{lc}}$$

In definitiva, la risposta in frequenza complessiva in questo caso vale

$$H(f) = H_i(f) H_q(f) H_u(f) = \frac{1}{2} 2e^{-d\sqrt{rg}} e^{-jd2\pi f\sqrt{lc}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e^{-d\sqrt{rg}} e^{-jd2\pi f\sqrt{lc}}$$

equivalente quindi ad un canale perfetto con guadagno  $G = \frac{1}{2} e^{-d\sqrt{rg}}$  e ritardo  $t_R = d\sqrt{lc}$ ; al contempo, l'attenuazione disponibile risulta indipendente da  $f$ , e pari a<sup>4</sup>

$$A_d(f) = 1/G_d(f) = e^{2d\sqrt{rg}}$$

### 16.2.2 Trasmissione in cavo

In generale, le costanti primarie del cavo non soddisfano le condizioni di Heaviside, e le impedenze di chiusura non sono adattate. In tal caso si ha  $r_g(f) \neq 0$  e/o  $r_c(f) \neq 0$ , e devono essere applicate le (16.4) e (16.5).

<sup>3</sup>Pe una breve biografia ed il link agli scritti, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Oliver\\_Heaviside](https://it.wikipedia.org/wiki/Oliver_Heaviside)

<sup>4</sup>Vedi l'eq. (16.6) con  $R_g(f) = R_u(f) = R_0$ .

**Cavo molto lungo** Se il cavo è sufficientemente lungo da poter porre  $e^{-2d\gamma(f)} \ll 1$ , ossia  $|e^{-2d\gamma(f)}| = e^{-2d\alpha(f)} \ll 1$ , le (16.4) divengono  $Z_i(f) = Z_u(f) \simeq Z_0(f)$ , mentre la (16.5) si semplifica in  $H_q(f) = 2e^{-d\gamma(f)}$ ; nel caso generale risulta pertanto

$$G_d(f) = |H_q(f)|^2 \cdot |H_i(f)|^2 \cdot \frac{R_g(f)}{R_u(f)} = 4 \cdot e^{-2d\alpha(f)} \cdot |H_i(f)|^2 \cdot \frac{R_g(f)}{R_u(f)}$$

che evidenzia due cause di distorsione lineare, di cui la prima dipende dal disadattamento di impedenze in ingresso ed uscita: qualora invece si realizzi la condizione  $Z_g(f) = Z_c(f) = Z_0(f)$ , si ottiene

$$A_d(f) = \frac{1}{G_d(f)} = e^{2d\alpha(f)}$$

che determina la seconda causa di distorsione lineare, dipendente dal comportamento non perfetto di  $H_q(f) = 2e^{-d\gamma(f)}$ , e che secondo la teoria può essere *neutralizzato*, solo nel caso in cui le costanti primarie soddisfino le condizioni di Heaviside. In pratica, però, il risultato è diverso, perché... le “costanti primarie” *non sono costanti !!!*

**Effetto pelle** Si tratta di un fenomeno<sup>5</sup> legato all’addensamento del moto degli elettroni verso la superficie del cavo, al crescere della frequenza. Per questo motivo, si riduce la superficie del conduttore realmente attraversata da corrente elettrica, a cui corrisponde un aumento della resistenza per unità di lunghezza  $r$ . Si può mostrare che, per frequenze maggiori di 50-100 KHz, la resistenza per unità di lunghezza  $r$  aumenta proporzionalmente a  $\sqrt{f}$ , e quindi si può scrivere  $\alpha(f) = \alpha_0\sqrt{f}$ , in cui la costante  $\alpha_0$  dipende dal tipo di cavo.

In tali condizioni, l’attenuazione disponibile risulta  $A_d(f) = e^{2d\alpha(f)} = e^{2d\alpha_0\sqrt{f}}$ , a cui corrisponde un valore in dB pari a

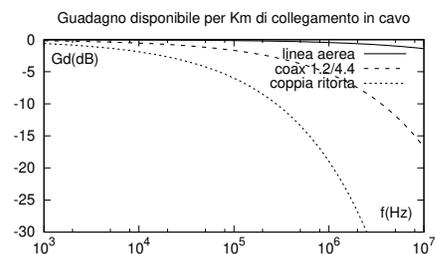
$$A_d(f)|_{dB} = 10 \log_{10} e^{2d\alpha_0\sqrt{f}} = d\alpha_0\sqrt{f} \cdot 10 \log_{10} e^2 = A_0 \cdot d \cdot \sqrt{f}$$

Il valore  $A_0$  riassume in se tutte le costanti coinvolte, prende il nome di *attenuazione chilometrica*, ed è espresso in dB/Km; il suo valore dipende dal tipo di cavo, ed è fornito con riferimento ad una determinata frequenza  $f_R$  (ad es. 1 MHz), permettendo di scrivere

$$A_d(f)|_{dB} = A_0(f_R) \cdot d_{Km} \cdot \sqrt{\frac{f}{f_R}} \quad (16.7)$$

in cui  $f_R$  rappresenta appunto la frequenza per la quale è disponibile il valore di  $A_0$ , ed il valore della  $f$  per cui si calcola  $A_d$  va espresso nella stessa unità di misura di  $f_R$ . Questo risultato può essere usato come formula di progetto, e mette in evidenza come l’attenuazione in dB dei cavi sia linearmente proporzionale alla lunghezza<sup>6</sup>.

La figura a lato mostra l’andamento di  $G_d(f)|_{dB} = -A_d(f)|_{dB}$  che si ottiene adottando i valori di  $A_0$  e  $f_R$  riportati al § 16.2.3 per alcune tipologie di cavo.



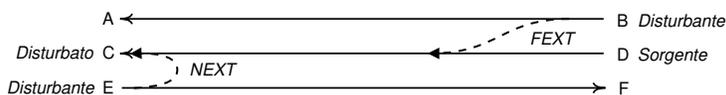
<sup>5</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Skin\\_effect](https://en.wikipedia.org/wiki/Skin_effect)

<sup>6</sup>Questa circostanza è comune con le trasmissioni in fibra ottica (vedi fig. 16.12 a pag. 501), ed è legato alla presenza nel mezzo di una componente *dissipativa*, in questo caso la resistenza.

**Equalizzazione** In presenza di effetto pelle, la funzione di trasferimento intrinseca  $H_q(f) = 2e^{-d\gamma(f)}$  presenta una dipendenza da  $f$  tutt'altro che perfetta, causando distorsione lineare sui segnali in transito, nel caso occupino frequenze oltre la banda audio. Un problema analogo insorge anche in assenza di effetto pelle, qualora si manifesti un disadattamento di impedenze ed il cavo non sia sufficientemente lungo (vedi pag. 469).

Se la banda di segnale è sufficientemente estesa da causare una distorsione lineare non trascurabile, o se la particolare natura del segnale (ad es. numerico) richiede la presenza di un ritardo strettamente costante con  $f$ , è necessario prevedere uno stadio di equalizzazione. D'altra parte, una volta stimata la  $H(f)$  da equalizzare, la natura *statica* del collegamento permette di evitare tecniche di equalizzazione marcatamente adattative.

**Diafonia** La diafonia, indicata in inglese con il termine di *crosstalk*, consiste nei fenomeni di interferenza tra i messaggi trasportati su cavi disposti in prossimità reciproca, e dovuti a fenomeni di induzione elettromagnetica ed accoppiamenti elettrostatici. Il fenomeno è particolarmente rilevante in tutti i casi in cui molti cavi giacciono *affasciati* in una medesima canalizzazione, condividendo un lunghezza significativa di percorso. Nel caso di telefonia analogica, la diafonia può causare l'ascolto indesiderato di altre comunicazioni<sup>7</sup>; nel caso di trasmissioni numeriche o di segnali modulati, la diafonia produce un disturbo additivo supplementare, che peggiora le prestazioni espresse in termini di probabilità di errore o di SNR.



Con riferimento allo schema della figura soprastante, consideriamo un collegamento D-C su cui gravano due cause di interferenza di diafonia: il collegamento da E ad F produce il fenomeno di *paradiafonia* (in inglese *NEXT*, *near end crosstalk*), mentre il collegamento da B ad A produce il fenomeno di *telediafonia* (*FEXT*, *far end crosstalk*). Nel primo caso, il segnale disturbante ha origine in prossimità del punto di prelievo del segnale disturbato, mentre nel secondo ha origine in prossimità del punto di immissione.

L'entità del disturbo è quantificata mediante un valore di attenuazione di diafonia tra le sorgenti disturbanti e l'estremo disturbato. La circostanza che, nei rispettivi punti di immissione, i segnali disturbanti hanno la stessa potenza della sorgente che emette il segnale disturbato, permette di definire lo *scarto di paradiafonia*

$$\Delta A_{EC}|_{dB} = A_{EC}|_{dB} - A_{DC}|_{dB}$$

come la differenza in dB tra l'*attenuazione di paradiafonia*  $A_{EC}|_{dB}$  e l'*attenuazione del collegamento*  $A_{DC}|_{dB}$ . Il livello di potenza del segnale disturbante proveniente da E ed osservato al punto C risulta quindi pari a<sup>8</sup>  $W_E^{next} = W_E - A_{EC} = W_D - A_{EC} = W_C + A_{DC} - A_{EC} = W_C - \Delta A_{EC}$ , ossia di  $\Delta A_{EC}$  dB inferiore al segnale utile. Una definizione del tutto analoga risulta per la *telediafonia* (*FEXT*), per la quale il livello di potenza del segnale disturbante proveniente da B ed osservato al punto C risulta  $W_B^{fext} = W_C - \Delta A_{BC}$  in cui lo *scarto di telediafonia* ha il valore

$$\Delta A_{BC}|_{dB} = A_{BC}|_{dB} - A_{DC}|_{dB}$$

<sup>7</sup>... le famose *interferenze telefoniche*, praticamente scomparse con l'avvento della telefonia numerica (PCM), da non confondere con ... *le intercettazioni*.

<sup>8</sup>Omettiamo di indicare di operare in dB per compattezza di notazione.

## 16.2.2.1 Casi limite

**Cavo a basse perdite** E' un modello applicabile per tutte quelle frequenze per cui risulti  $r \ll 2\pi fl$  e  $g \ll 2\pi fc$ . In tal caso le (16.1) e (16.2) forniscono

$$Z_0(f) = R_0 = \sqrt{\frac{l}{c}} \text{ reale} \quad e \quad \gamma(f) = j2\pi f\sqrt{lc}$$

Di conseguenza, è facile realizzare  $Z_g = Z_c = R_0$ , che determina

$$H_q(f) = 2e^{-jd2\pi f\sqrt{lc}}$$

quindi il cavo non presenta distorsione di ampiezza, ha una attenuazione trascurabile, e manifesta una distorsione di fase lineare in  $f$ , realizzando quindi le condizioni di canale perfetto.

**Cavo corto** E' il caso di collegamenti interni agli apparati, o tra un trasmettitore-ricevitore e la relativa antenna. La ridotta lunghezza del cavo permette di scrivere

$$e^{-d\gamma(f)} = e^{-d\alpha(f)} e^{-jd\beta(f)} \simeq e^{-jd\beta(f)}$$

in quanto  $e^{-d\alpha(f)} \simeq 1$ .

Qualora si verifichi un disadattamento di impedenze, i coefficienti di riflessione  $r_g(f)$  e  $r_c(f)$  risultano diversi da zero, rendendo

$$H_q(f) = 2 \frac{e^{-jd\beta(f)}}{1 - r_g(f) \cdot r_c(f) \cdot e^{-j2d\beta(f)}}$$

periodica con  $d$  e con  $f$  (quest'ultimo in assenza di effetto pelle). In particolare, se il carico viene sconnesso, o l'uscita del cavo posta in corto circuito, l'eq. (16.3) mostra come risulti  $r_c(f) = \pm 1$  rispettivamente, e la prima delle (16.4) diviene

$$Z_i(f) = Z_0(f) \frac{1 \pm e^{-j2d\beta(f)}}{1 \mp e^{-j2d\beta(f)}}$$

e si vede che per quei valori (ricorrenti) di frequenza  $f$  (o di distanza  $d$ ) che rendono  $e^{-j2d\beta(f)} = \pm 1$  (<sup>9</sup>), l'impedenza di ingresso del cavo può risultare infinita o nulla.

Evidentemente, la distorsione lineare prodotta in questo caso ha un andamento del tutto dipendente dalle particolari condizioni operative, e dunque la sua equalizzazione deve prevedere componenti in grado di adattarsi alla  $H_q(f)$  del caso<sup>10</sup>. D'altra parte, una volta equalizzato il cavo, non sono necessari ulteriori aggiustamenti, a parte problemi di deriva termica. Diverso è il caso dal punto di vista di un terminale di rete, per il quale il cavo effettivamente utilizzato può essere diverso da collegamento a collegamento, e pertanto i dispositivi modem a velocità più elevate devono disporre di un componente di equalizzazione adattiva, da regolare ogni volta ad inizio del collegamento<sup>11</sup>.

<sup>9</sup>Ovvero, tali che  $2d\beta(f) = k\pi$  con  $k = 0, 1, 2, \dots$

<sup>10</sup>Può ad esempio rendersi necessario "tarare" un trasmettitore radio, la prima volta che lo si collega all'antenna.

<sup>11</sup>E' questa la fase in cui il modem *anni 90* che si usava per collegarsi al provider Internet emetteva una serie di orribili suoni... corrispondenti alla ricezione della sequenza di *apprendimento*, vedi anche la nota 23 di pag. 451.

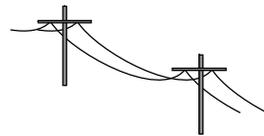
### 16.2.3 Tipologie di cavi per le telecomunicazioni

Descriviamo i principali tipi di cavo utilizzati, per i quali forniamo in tabella i valori tipici delle grandezze essenziali, nelle condizioni illustrate nel testo che segue.

Tipo di cavo	$A_0$ [dB/Km]	$Z_0$ [ $\Omega$ ]	$r, g, l, c$ per 1 Km
Linee aeree	0.036 ad 1 KHz 0.14 a 100 KHz	600	$5, 10^{-6}, 2 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-9}$
Coppie ritorte	1.2 ad 1 KHz 6 a 100 KHz 20 a 1 MHz	$600e^{-j\frac{\pi}{4}}$	$100, 5 \cdot 10^{-5}, 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-8}$
Coax 1.2/4.4 mm	5.3 ad 1 MHz	75, polietilene	$89, 1.88 \cdot 10^{-7}, .26 \cdot 10^{-6}, 10^{-10}$
“ 2.6/9.5 mm	2.3 ad 1 MHz	50, aria	41, “, “, “
“ 8.4/38 mm	.88 ad 1 MHz	$\frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \log_{10} \frac{D}{d}$	1.45, “, “, “

#### 16.2.3.1 Coppie simmetriche

**Linea aerea** E' costituita da una coppia di conduttori nudi, di bronzo od acciaio rivestito in rame, con diametro  $\phi$  da 2 a 4 mm, sostenuti da una palificazione che li mantiene a distanza di 15 - 30 cm. L'uso delle linee aeree è andato estinguendosi con il tempo, ma rimane largamente diffuso nei paesi meno sviluppati.



I valori riportati in tabella sono riferiti a conduttori con  $\phi = 3$  mm<sup>12</sup>, a frequenza di 1 KHz; la  $r$  già a 100 KHz cresce al valore di 20  $\Omega$ /Km, mentre la conduttanza  $g$  a 100 KHz e con tempo molto umido, può crescere fino a decine di volte il suo valore nominale ad 1 KHz. I valori riportati mostrano come le condizioni di Heaviside non siano rispettate, in quanto  $rc \gg lg$ , anche se lo scarto è inferiore rispetto al caso delle coppie ritorte.

L'impedenza caratteristica riportata in tabella, di circa 600  $\Omega$ , è ottenuta applicando il modello a basse perdite, con le costanti primarie indicate.

**Coppia ritorta** E' costituita da una coppia di conduttori in rame, con  $\phi$  da 0.4 ad 1.3 mm, rivestiti di



materiale isolante, ed avvolti tra loro secondo eliche con passo grande rispetto al diametro. Un numero variabile di tali coppie (tra qualche decina e qualche centinaio) sono poi raggruppate assieme, e rivestite con guaine protettive isolanti o metalliche; il risultato dell'operazione è interrato o sospeso mediante una fune in acciaio. L'uso delle coppie ritorte, nato allo scopo di realizzare il collegamento tra utente e centrale telefonica, si è esteso al cablaggio di reti locali (LAN) con topologia a stella (IEEE 802.3); in tale contesto, i cavi sono indicati come UTP (*unshielded twisted pair*).

I valori riportati in tabella sono riferiti a conduttori con  $\phi = .7$  mm, a frequenza di 1 KHz; la  $r$  a 100 KHz è circa doppia. La  $g$  dipende sostanzialmente dall'isolante utilizzato, mentre l'aumento di  $c$  è evidentemente legato alla vicinanza dei conduttori. Anche in questo caso, risulta  $rc \gg lg$ , e dunque le condizioni di Heaviside non sono verificate. Nel passato, si è fatto largo uso dell'espedito di innalzare artificialmente  $l$ , collocando ad intervalli regolari una induttanza "concentrata" (le cosiddette bobine *Pupin*<sup>13</sup>), realizzando così nella banda del canale telefonico un comportamento approssimativamente perfetto. Ma al crescere della frequenza le bobine

<sup>12</sup>Ovvero, una sezione capace di reggere il peso del cavo lungo una campata.

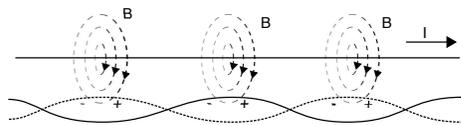
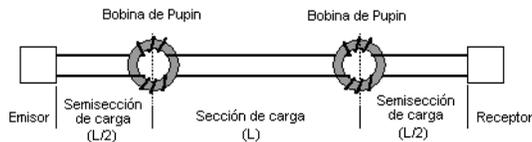
<sup>13</sup>Vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Pupinizzazione>

Pupin producono un effetto passa basso, aumentando di molto il valore di attenuazione. In tempi successivi, quando le stesse coppie ritorte sono state utilizzate per la trasmissione di segnali numerici PCM, le bobine Pupin sono state rimosse,

ed al loro posto inseriti ripetitori rigenerativi (§ 15.3.2). L'impedenza caratteristica di circa  $600 \Omega$  riportata nella tabella di pag. 470 è quella valida a frequenze audio, con cavi di diametro  $\phi = .7$  mm. Prevalendo l'aspetto capacitivo, al crescere della frequenza  $Z_0$  si riduce a  $100\text{-}200 \Omega$ , con fase di  $-10$  gradi. L'attenuazione chilometrica riportata è sempre relativa al caso  $\phi = .7$  mm; per diametri di  $1.3$  mm si ottengono valori circa dimezzati, mentre con  $\phi = .4$  mm il valore di  $A_0$  risulta maggiore.

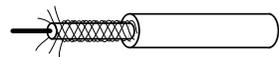
Infine, mostriamo come l'avvolgimento della coppia su se stessa abbia lo scopo di ridurre i disturbi di diafonia. Infatti, se il passo dell'elica è diverso tra le coppie affasciate in unico cavo, le tensioni e correnti indotte da

una coppia su di un'altra non interessano sempre lo stesso conduttore, ma entrambi in modo alternato. L'avvolgimento della coppia disturbante, inoltre, produce una alternanza dei conduttori in vicinanza della coppia disturbata, aggiungendo una ulteriore alternanza del verso del fenomeno di disturbo. Con questi accorgimenti, si trovano attenuazioni di diafonia a frequenze vocali, dell'ordine di  $80\text{-}90$  dB su  $6$  Km. All'aumentare della frequenza, e della lunghezza del percorso comune, l'attenuazione di diafonia diminuisce (e quindi l'interferenza aumenta), fino a mostrare valori di  $60\text{-}70$  dB a  $750$  KHz su  $1.6$  Km.



### 16.2.3.2 Cavo coassiale

In questo caso è presente un conduttore centrale ricoperto di dielettrico, su cui è avvolto il secondo conduttore, intrecciato a formare una sorta di *calza*, connesso a massa ad entrambe le estremità, e racchiuso a sua volta in una guaina isolante. La particolare conformazione del cavo lo rende molto più resistente ai fenomeni di interferenza, svolgendo una funzione di *gabbia di FARADAY*<sup>14</sup>.



Indicando con  $\phi$  il diametro del conduttore interno e con  $D$  quello esterno, la teoria mostra che si determina un minimo di attenuazione se  $D/\phi = 3.6$ ; per questo sono stati normalizzati i diametri mostrati nella tabella a pag. 470. Il tipo con  $\phi/D = 8.4/38$  mm è sottomarino, e presenta la minima attenuazione chilometrica;  $A_0$  aumenta al diminuire della sezione del cavo. Finché  $D/\phi = 3.6$ , l'impedenza caratteristica dipende solo dal dielettrico, con l'espressione generale fornita in tabella, ottenendo i valori di  $50$  e  $75 \Omega$  con dielettrico aria e polietilene rispettivamente. I valori delle costanti primarie riportati in tabella sono ottenuti facendo uso delle seguenti relazioni:  $r = 8.4 \cdot 10^{-8} \sqrt{f} \left( \frac{1}{D} + \frac{1}{\phi} \right) \Omega/m$ ;  $l = 0.46 \log_{10} \frac{D}{\phi} \mu H/m$ ;  $g = 152 \cdot 10^{-12} \frac{f \varepsilon_r \tan \delta}{\log_{10} \frac{D}{\phi}} S/m$ ;  $c = \frac{24.2 \cdot \varepsilon_r}{\log_{10} \frac{D}{\phi}} pF/m$ ; in cui si è posto  $f$  (in Hz nelle formule) pari a  $1$  MHz,  $D$  e  $d$  sono espressi in metri,  $\varepsilon_r$  è la costante dielettrica, e  $\tan \delta$  è l'angolo di perdita del dielettrico; nel caso del polietilene, risulta  $\varepsilon_r = 2.3$ ,  $\tan \delta = 3 \cdot 10^{-4}$ .

**Esercizio** Si desidera effettuare una trasmissione FDM di  $120$  canali telefonici, ognuno modulato AM-BLU, su di un cavo coassiale, nella banda di frequenze  $1 \div 1.48$  MHz. Desiderando

<sup>14</sup>Vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Gabbia\\_di\\_Faraday](https://it.wikipedia.org/wiki/Gabbia_di_Faraday)

una potenza ricevuta per ogni canale di almeno 1 mW, e disponendo di un trasmettitore in grado di erogare 10 W, determinare la massima lunghezza del collegamento, supponendo verificate le condizioni di adattamento agli estremi del cavo, con impedenza caratteristica resistiva, ed attenuazione chilometrica  $A_0 = 5.3$  dB/Km ad 1MHz. Di quanto dovrebbe aumentare la potenza trasmessa  $W_{dT}$  per raddoppiare la lunghezza?

**Soluzione** Supponendo tutti i canali contemporaneamente attivi, la potenza trasmessa per ciascuno di essi risulta pari a

$$W_{dT}^{(n)} = \frac{10}{120} = 83.3 \text{ mW, con } n = 1, 2, \dots, 120.$$

Tra tutti i canali, quello che subisce la massima attenuazione chilometrica è quello con portante più elevata, per il quale

$$A_d^{(120)} \text{ (dB/Km)} = A_0 \sqrt{1.48} = 5.3 \cdot 1.22 = 6.46 \text{ dB/Km.}$$

Per questo canale, il *guadagno di sistema* risulta pari a

$$G_s^{(120)} \Big|_{dB} = 10 \log_{10} \frac{W_{dT}^{(120)}}{W_{RMin}^{(120)}} = 10 \log_{10} \frac{83.3}{1} = 19.2 \text{ dB,}$$

essendo  $W_{RMin} = 1$  mW come indicato nel testo. Come noto,  $G_s$  corrisponde alla massima attenuazione  $A_{dTot}$  che può essere accettata, e pertanto

$$A_{dTot}^{(120)} \Big|_{dB} = A_d^{(120)} \text{ (dB/Km)} \cdot L_{Km} = 19.2 \text{ dB,}$$

da cui si ricava per la massima lunghezza

$$L_{Km} = \frac{A_{dTot}^{(120)} \Big|_{dB}}{A_d^{(120)} \text{ (dB/Km)}} = \frac{19.2}{6.46} = 2.97 \text{ Km,}$$

che come vediamo è imposta dal canale più attenuato.

Per il primo canale, invece, si ha  $A_d^{(1)} \text{ (dB/Km)} = A_0$ , e dunque

$$A_{dTot}^{(1)} \Big|_{dB} = A_0 \text{ (dB/Km)} \cdot L_{Km} = 5.3 \cdot 2.97 = 15.74 \text{ dB.}$$

La differenza tra  $G_s \Big|_{dB}$  (uguale per tutti i canali) e  $A_{dTot}^{(1)} \Big|_{dB}$  rappresenta il margine di sistema per il primo canale, pari a

$$M = G_s - A_d = 19.2 - 15.74 = 3.46 \text{ dB.}$$

La stessa quantità, è anche uguale alla *distorsione lineare di ampiezza* del cavo nella banda del segnale.

Nel caso in cui si voglia superare una lunghezza doppia, anche  $A_{dTot}^{(120)} \Big|_{dB}$  raddoppia, e per mantenere  $W_{RMin} = 1$  mW, deve raddoppiare anche  $G_s^{(120)} \Big|_{dB}$ . Pertanto la nuova potenza/canale risulta

$$W'_{dT} \text{ (dBm)} = W_{Rmin} \text{ (dBm)} + G'_s \text{ (dB)} = 0 + 2G_s \text{ (dB)}; \text{ quindi}$$

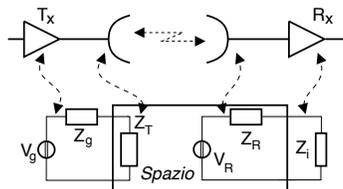
$$W'_{dT} \text{ (mW)} = 10^{\frac{W'_{dT} \text{ (dBm)}}{10}} = 10^{\frac{2G_s \text{ (dB)}}{10}} = 10^{\frac{2 \cdot 19.2}{10}} = 10^{3.84} = 6918.3$$

milliWatt, cioè 6.91 Watt/canale, e quindi  $6.91 \cdot 120 = 830$  Watt complessivi !

### 16.3 Collegamenti radio

La trasmissione via onda radio si differenzia da quella via cavo o fibra ottica sotto diversi aspetti, tra cui la condivisione di uno stesso mezzo tra più comunicazioni, e la possibilità di comunicare in movimento. E' resa possibile dalla conversione di un segnale elettrico in

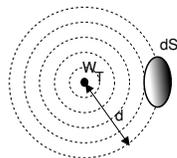
radiazione elettromagnetica<sup>15</sup> ad opera dei *dispositivi di antenna*, che fungono da carico dal lato trasmissione, e da generatore dal lato ricezione. La descrizione circuitale delle antenne viene poi semplificata dalla circostanza che per il segnale modulato è praticamente sempre vera la condizione di occupare una banda *stretta* attorno alla portante  $f_0$ , in modo da poterlo assimilare ad una singola sinusoidale. In tal caso, le condizioni di massimo trasferimento di potenza (§ 15.1.1.3) tra amplificatore finale e antenna trasmittente ( $Z_g = Z_T^*$ ) e tra antenna ricevente e stadio di ingresso al ricevitore ( $Z_R = Z_i^*$ ) danno luogo, nella banda di segnale, ad una risposta in frequenza  $H(f)$  che non dipende dalla frequenza (modulo e fase costanti), e questo corrisponde (a parte una rotazione di fase) all'assenza di distorsione lineare, vedi § 12.1.2.4. Tutta la potenza disponibile fornita dall'amplificatore finale  $W_{dT} = \frac{V_{Teff}^2}{4R_g}$  viene ceduta all'antenna, e da questa allo spazio. In effetti  $Z_T$  dipende dalla frequenza portante ed in parte dalla geometria dello spazio circostante, mentre  $Z_g$  è in genere fissata a 50  $\Omega$ ; perciò tra stadio di uscita del trasmettitore Tx e cavo di antenna può essere interposto un *adattatore di impedenza*<sup>16</sup>.



### 16.3.1 Trasduzione elettromagnetica

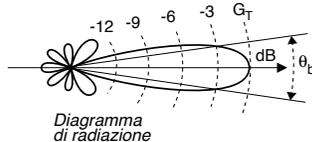
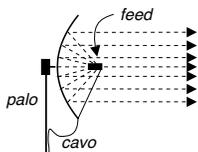
**Antenna isotropa** Se l'antenna trasmittente irradia allo stesso modo in tutte le direzioni,  $W_{dT}$  si distribuisce su di una sfera; dunque una superficie  $dS$ , posta a distanza  $d$ , è attraversata da una potenza pari a

$$dW = W_{dT} \frac{dS}{4\pi d^2} \quad [\text{Watt}] \quad (16.8)$$



Si noti che il denominatore rappresenta la superficie di una sfera di raggio  $d$ .

**Antenna direttiva** Sono antenne che hanno direzioni *privilegiate* di emissione. Ad esempio, le antenne paraboliche dispongono di un *illuminatore* o *FEED*<sup>17</sup> posto in corrispondenza del *fuoco* della parabola stessa, la cui superficie riflette le onde elettromagnetiche in modo che si propagano in forma pressoché parallela<sup>18</sup>.



La potenza  $W_{dT}$  si distribuisce quindi *non sfericamente*, e la direzione di propagazione massima esibisce un guadagno  $G_T$  rispetto all'antenna isotropa, mentre l'intensità di campo irradiato spazialmente è descritta da un *diagramma di radiazione*. Il valore di  $G_T$  dipende dal rapporto tra le dimensioni dell'antenna e quelle della lunghezza d'onda  $\lambda$  secondo la relazione

$$G_T = 4\pi \frac{A}{\lambda^2} \quad (16.9)$$

<sup>15</sup>Dato che tale conversione avviene unicamente a seguito delle *variazioni* del segnale, è esclusa la presenza di una componente continua, e per questo (ma non solo) il segnale può unicamente essere di natura *modulata*.

<sup>16</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Antenna\\_tuner](https://en.wikipedia.org/wiki/Antenna_tuner)

<sup>17</sup>Dall'inglese *to feed* = alimentare.

<sup>18</sup>Il processo di focalizzazione parabolica, comunemente usato ad esempio nei *fanali* degli autoveicoli, era ben noto ad ARCHIMEDE da Siracusa, che lo impiegò negli *specchi ustori*...

avendo indicato con  $A$  l'area dell'antenna; il guadagno  $G_T$  viene spesso espresso in  $dBi$ , ovvero  $dB$  riferiti all'antenna isotropa.

Può essere definita una *larghezza del fascio* (BEAM WIDTH), che misura l'angolo  $\theta_b$  entro cui la potenza irradiata è superiore alla metà della massima potenza presente nella direzione privilegiata<sup>19</sup>. Ovviamente minore è  $\theta_b$ , e maggiore è  $G_T$ .

**Antenna ricevente** Se una antenna identica a quella trasmittente viene usata (dall'altro lato del collegamento) per ricevere, questa mantiene lo stesso guadagno  $G_R = G_T$  e lo stesso  $\theta_b$ . Si definisce allora la sua *area efficace* come il valore

$$A_e = G_R \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (16.10)$$

legato alla forma e dimensione dell'antenna, a meno di un fattore di efficienza  $\rho$  (<sup>20</sup>). Perciò una stessa antenna ( $A_e$  fisso) aumenta il suo guadagno (e stringe il *beam*) all'aumentare della frequenza, ovvero al diminuire di  $\lambda = \frac{c}{f}$  (<sup>21</sup>).

### 16.3.2 Bilancio di collegamento per spazio libero

**Potenza ricevuta** Usando l'area efficace dell'antenna ricevente (16.10) per intercettare parte della potenza irradiata (16.8), si ottiene

$$W_R = W_{dT} G_T \frac{A_e}{4\pi d^2} = W_{dT} G_T G_R \left( \frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \text{ [Watt]}$$

Ovviamente, anche il ricevitore ha la propria  $Z_i = Z_R^*$  accordata per il massimo trasferimento di potenza, e la banda di segnale è sempre stretta a sufficienza da garantire l'assenza di distorsioni lineari. Quindi la  $W_R = W_{dR}$  è proprio la potenza ricevuta.

**Attenuazione di spazio libero** Il termine

$$A_{sl} = \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 = \left( \frac{4\pi df}{c} \right)^2 \quad (16.11)$$

è chiamato *attenuazione di spazio libero*, e dipende da  $f^2$  oltreché da  $d^2$ . In realtà ai fini del bilancio di collegamento, la dipendenza dalla frequenza si elide con quella relativa al guadagno delle antenne:  $G_T = A_e \frac{4\pi}{\lambda^2} = A_e \frac{4\pi f^2}{c^2}$  (<sup>22</sup>).

<sup>19</sup>Si tratta di un concetto del tutto analogo alla "frequenza di taglio a 3 dB", ma applicata ad un dominio spaziale con geometria radiale.

<sup>20</sup>Indicando con  $A_r$  l'area *reale* (fisica) dell'antenna, risulta  $A_e = \rho A_r$ , con  $\rho < 1$ . La disegualianza tiene conto delle perdite dell'antenna, come ad esempio le irregolarità nella superficie della parabola, o l'ombra prodotta dalle strutture di sostegno. Ovviamente, anche l'antenna trasmittente presenta perdite, ed il valore  $G_T$  *misurato* è inferiore a quello fornito dalla (16.9), a meno di non usare appunto il valore di area efficace.

<sup>21</sup>La costante  $c = 3 \cdot 10^8$  metri/secondo rappresenta la velocità della luce nel vuoto, ossia la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica nello spazio.

<sup>22</sup>Mantenendo fissa la dimensione delle antenne, si ottiene il risultato che trasmissioni operanti a frequenze più elevate permettono di risparmiare potenza. Purtroppo però, guadagni di antenna superiori a 30-40 dB (corrispondenti a piccoli valori di  $\theta_b$ ) sono controproducenti, per i motivi esposti al §16.3.3.1.

**Attenuazione disponibile** Il rapporto

$$A_d = \frac{W_{dT}}{W_{dR}} = \left( \frac{4\pi df}{c} \right)^2 \frac{1}{G_T G_R} \quad (16.12)$$

è chiamato *attenuazione disponibile*, ed indica di quanto si riduce la potenza trasmessa. Il suo valore espresso in decibel, tenendo conto delle costanti che vi compaiono, ed usando le unità di misura più idonee, risulta essere

$$A_d \text{ (dB)} = 32.4 + 20 \log_{10} f \text{ (MHz)} + 20 \log_{10} d \text{ (Km)} - G_T \text{ (dB)} - G_R \text{ (dB)} \quad (16.13)$$

nota come *equazione di Friis*. Osserviamo che, a differenza della trasmissione in cavo, l'attenuazione cresce con il quadrato della distanza, e quindi con il suo logaritmo quando espressa in decibel. Infatti ora l'attenuazione è dovuta esclusivamente all'aumentare della superficie su cui si distribuisce la potenza irradiata, e non a fenomeni dissipativi, come accade invece per cavo (eq. (16.7)) e fibra ottica. Per un esempio di applicazione della (16.13), si veda l'esercizio a pag. 440.

Il sistema di telecomunicazione che meglio rappresenta le condizioni di spazio libero è quello tra terra e satellite (§ 20.3), per il semplice fatto che non vi sono frapposti ostacoli, e che approfondiamo brevemente alla appendice 20.3. D'altra parte, i collegamenti radio terrestri, sia fissi che mobili, sono affetti da una serie di ulteriori fenomeni, mentre la (16.13) si limita a considerare un solo aspetto del problema; di seguito ne citiamo un altro paio, ed ai prossimi § approfondiamo il tema:

- *perdite di accoppiamento*: sono dovute al mancato verificarsi delle condizioni di massimo trasferimento di potenza, ed ammontano a qualche dB;
- *assorbimento terrestre*: quando l'antenna è distante dal suolo meno di qualche lunghezza d'onda, l'energia si propaga anche per *onda superficiale*<sup>23</sup>, ovvero la crosta terrestre fa da conduttore. Ciò permette la ricezione anche in assenza di visibilità tra antenne, subendo però una attenuazione che *aumenta con la frequenza*, tanto che già a 3 MHz raggiunge i 25 dB<sup>24</sup> ogni 10 Km. Le *onde medie* (0,3-3 MHz) sono meno attenuate, ed ancora meno le *onde lunghe* (10-300 KHz) che viaggiano appunto via terra.

### 16.3.3 Condizioni di propagazione e attenuazioni supplementari

Sono ora descritti i fenomeni legati alla geometria del territorio ed alle condizioni atmosferiche, che determinano l'insorgenza di attenuazioni *supplementari*  $A_s$  ovvero *in più*, da sommare al valore  $A_d$  (dB) fornito dalla (16.13) per ricavare la potenza realmente ricevuta.

#### 16.3.3.1 Condizioni di visibilità

Come ricavabile anche dall'espressione dell'area efficace (16.10), all'aumentare della frequenza si possono ottenere antenne di dimensioni ridotte e contemporaneamente di elevato guadagno. Allo stesso tempo, per evitare l'assorbimento terrestre, occorre posizionare l'antenna in alto (in cima ad una torre), e trasmettere per *onda diretta*, condizione nota anche come LOS o *line of sight*.

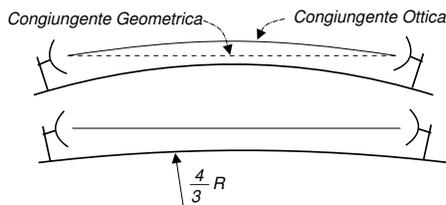
A causa della curvatura terrestre, esiste una altezza minima da rispettare: ad esempio con torri da 60 metri si raggiungono distanze (in visibilità) di 50 Km. Ovviamente, il problema si presenta in pianura. Tratte più lunghe richiedono torri più alte, ma anche guadagni di antenna

<sup>23</sup>[http://it.wikipedia.org/wiki/Onda\\_superficiale](http://it.wikipedia.org/wiki/Onda_superficiale)

<sup>24</sup>equivalente ad una riduzione di potenza di  $10^{2.5} = 316$  volte

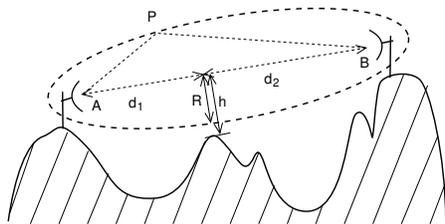
maggiori (e quindi antenne più grandi e più direttive). Questa non è però una soluzione molto praticabile, in quanto in presenza di vento forte le antenne “grandi” possono spostarsi e perdere il puntamento; inoltre, il costo delle torri aumenta esponenzialmente con l’altezza.

**Orizzonte radio** Nel calcolare l’altezza delle torri (ed il puntamento delle antenne) si deve considerare anche il fenomeno legato al fatto che l’onda elettromagnetica, propagandosi, *si piega* verso gli strati dell’atmosfera con indici di rifrazione maggiori (ossia verso terra). Pertanto, i calcoli vengono effettuati supponendo che il raggio terrestre sia per  $4/3$  maggiore di quello reale. Inoltre, l’indice di rifrazione (che aumenta verso il basso) può variare con l’ora e con le condizioni climatiche: pertanto, anche in questo caso, le antenne con guadagni elevati (e molto direttive) possono andare fuori puntamento.



**Ellissoidi di Fresnel** Anche se le antenne si trovano in condizioni di visibilità, occorre tenere conto dei fenomeni di *diffrazione*<sup>25</sup>, che *deviano* nella zona *in ombra* le onde radio che transitano in prossimità di ostacoli<sup>26</sup>. Pertanto, la determinazione dell’orizzonte radio deve prevedere una *marginale di distanza h* tra la congiungente delle antenne ed il suolo, od un eventuale ostacolo.

La distanza  $h$  deve essere almeno pari al raggio del primo ellissoide di Fresnel, che è un solido di rotazione definito come il luogo dei punti  $P$  per i quali la somma delle distanze  $d(A, P) + d(P, B)$  è pari a  $d(A, B) + \frac{\lambda}{2}$ , in cui  $\lambda = \frac{c}{f}$  è la lunghezza d’onda della trasmissione a frequenza  $f$ . Suddividendo



la distanza  $d(A, B)$  tra i due fuochi  $A$  e  $B$  in due segmenti  $d_1$  e  $d_2$ , individuati dalla posizione dell’ostacolo, si trova che il raggio dell’ellissoide è pari a

$$R = \sqrt{\frac{\lambda}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}}}$$

che, nel caso  $d_1 = d_2 = \frac{d(A,B)}{2}$ , assume il valore massimo  $R_M = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda d}$ . Qualora si determini la condizione  $h < R$ , il collegamento subisce una attenuazione supplementare che aumenta al diminuire di  $\frac{h}{R}$ , ed è maggiore per gli *spigoli vivi*, fino ad arrivare ad una decina di dB.

### 16.3.3.2 Diffusione e riflessione atmosferica

Tra 0,1 e 10 GHz si può verificare il fenomeno della *diffusione troposferica*<sup>27</sup> (lo strato dell’atmosfera fino a 20 Km di altezza), causata da turbolenze e particelle sospese, e che comportano un numero *infinito* di cammini multipli.

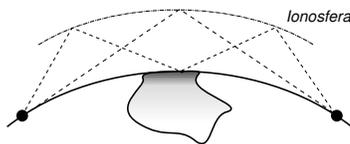


<sup>25</sup><http://it.wikipedia.org/wiki/Diffrazione>

<sup>26</sup>Lo stesso fenomeno di diffrazione è egualmente valido per l’energia luminosa, e può essere sperimentato illuminando una fessura, ed osservando le variazioni di luminosità dall’altro lato.

<sup>27</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Tropospheric\\_scatter](http://en.wikipedia.org/wiki/Tropospheric_scatter)

Tra qualche MHz e 30 MHz, intervengono fenomeni di radiodiffusione *ionosferica*<sup>28</sup> (la fascia oltre gli 80 Km), dove strati ionizzati causano *riflessioni* del segnale, e consentono la trasmissione anche tra luoghi non in visibilità<sup>29</sup>, ma con il rischio di cammini multipli. E' questo il caso tipico delle *onde corte*.



Per frequenze sotto il MHz la propagazione è per *onda di terra*, e l'assorbimento terrestre impedisce di coprire grandi distanze (tranne che per le *onde lunghe*, meno attenuate). Anche in questo caso può verificarsi la diffusione troposferica, specie *di notte*.

### 16.3.3.3 Assorbimento atmosferico

Per lunghezze d'onda di dimensione comparabile a quella delle molecole di ossigeno, si produce un fenomeno dissipativo di *assorbimento*; le frequenze interessate sono quelle superiori a 30 GHz, con un massimo di 20 dB/Km a 60 GHz<sup>(30)</sup>. Inoltre, il vapor d'acqua (con molecole di dimensioni maggiori) produce una attenuazione supplementare di 1-2 dB/Km (al massimo) a 22 GHz<sup>31</sup>. Sotto i 10 GHz non si verifica assorbimento né da ossigeno, né da vapore.

### 16.3.3.4 Dimensionamento di un collegamento soggetto a pioggia

In caso di pioggia, si manifesta una ulteriore causa di assorbimento atmosferico, detto appunto *da pioggia*, che costituisce la principale fonte di attenuazione supplementare per frequenze superiori a 10 GHz. L'attenuazione supplementare da pioggia aumenta con la frequenza portante, con l'intensità di precipitazione e con l'estensione della zona piovosa lungo il tragitto radio; questi ultimi due fattori sono evidentemente elementi aleatori, e per questo il dimensionamento mira a stabilire quale sia il margine necessario a garantire un grado di servizio prefissato. Il margine necessario, è pertanto pari al valore di attenuazione supplementare che viene superato con una probabilità minore o uguale al grado di servizio.

Una formula sperimentale che consente di determinare il valore in dB dell'attenuazione supplementare che viene superato con probabilità  $p$  è:

$$A_s(r_0, d, p) = K \cdot r_0^\alpha \cdot d \cdot \beta(d) \cdot \gamma(p) \quad [\text{dB}]$$

in cui  $r_0$  è l'intensità di precipitazione (in mm/h) che viene superata per lo 0.01 % del tempo,  $d$  è la lunghezza del collegamento, e  $K$  ed  $\alpha$  sono costanti che caratterizzano l'entità dell'interazione dell'onda radio con la pioggia, in funzione della frequenza portante e di altre condizioni climatiche ed ambientali, i cui valori medi sono riportati nella tabella che segue.

$f_0$ (GHz)	10	15	20	25	30	35
$\alpha$	1.27	1.14	1.08	1.05	1.01	.97
$K$	.01	.036	.072	.12	.177	.248

Il valore di  $r_0$  per l'Italia è compreso tra 20 e 60 mm/h, mentre il termine  $\gamma(p) = 6.534 \cdot 10^{-3} \cdot p^{-(.718+.043 \cdot \log_{10} p)}$ , che vale 1 per  $p = 10^{-4}$ , permette di tener conto del grado di servizio che si vuole ottenere. Infine,  $\beta(d) = 1 / (1 + .0286 \cdot d)$  è un fattore correttivo che tiene conto del fatto che *non piove lungo tutto* il collegamento. I grafici in fig. 16.1 mostrano l'andamento

<sup>28</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/Skywave>

<sup>29</sup>Anche, ma non solo, in concorso con la riflessione operata da masse d'acqua, come mostrato in figura.

<sup>30</sup>L'elevata attenuazione chilometrica presente a 60 GHz può essere sfruttata nei sistemi di comunicazione cellulare, allo scopo di riusare una stessa banda di frequenze anche a breve distanza.

<sup>31</sup>L'assorbimento di potenza da parte delle molecole d'acqua per onde elettromagnetiche a 22 GHz è il principio su cui si basa il forno a microonde.

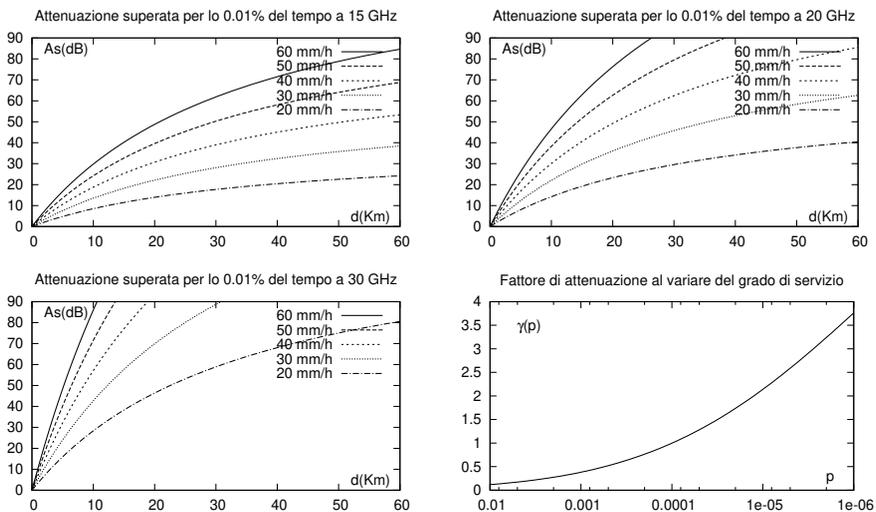


Figura 16.1: Curve di attenuazione supplementare per pioggia

del termine  $K \cdot r_0^\alpha \cdot d \cdot \beta(d)$  per diversi valori di  $f_0$  ed  $r_0$ , in funzione dell'estensione del collegamento; infine, è riportato il grafico della funzione  $\gamma(p)$  per diversi valori di  $p$ .

Dimensionare un collegamento imponendo un margine elevato può dar luogo a problemi dal lato del ricevitore, che potrebbe trovarsi ad operare in regione non lineare a causa dell'eccesso di potenza ricevuta, qualora non siano presenti le attenuazioni supplementari: può essere allora utilizzato un canale di ritorno nell'altra direzione, in modo da regolare la potenza del trasmettitore.

**Esempio** Un ponte radio numerico opera tra due località distanti 50 Km con una portante  $f_0 = 15$  GHz. Valutare l'attenuazione supplementare superata per lo 0.1% del tempo, nell'ipotesi che l'intensità di precipitazione superata per lo 0.01% del tempo sia pari a 40 mm/h.

Dal primo grafico di fig. 16.1 si ricava un valore di  $A_s^{10^{-4}} \geq 50$  dB per lo 0.01% del tempo; considerando invece un grado di servizio 10 volte peggiore, occorre considerare il fattore  $\gamma(10^{-3}) \simeq 0.45$ , e dunque  $A_s^{10^{-3}} \geq 50 \cdot 0.45 = 22.5$  dB.

### 16.3.3.5 Cammini multipli

Oltre i 30 MHz, nonostante la direttività delle antenne, alcuni raggi obliqui possono incontrare superfici riflettenti come laghi o masse d'acqua, essere riflessi dagli strati atmosferici, o percorrere notevoli distanze nei condotti atmosferici<sup>32</sup> per poi tornare al suolo, e causare la ricezione di una (o più) eco ripetuta dello stesso segnale. In questi casi il collegamento si dice affetto da *multipath*, e può essere caratterizzato mediante una risposta impulsiva del tipo

$$h(t) = \sum_{n=1}^N a_n \delta(t - \tau_n) \quad (16.14)$$

<sup>32</sup>Nel caso in cui una massa d'aria calda ne sovrasti una più fredda, si verifica una *inversione* dell'indice di rifrazione, e l'onda elettromagnetica si propaga come in una guida d'onda, vedi anche [http://en.wikipedia.org/wiki/Tropospheric\\_propagation](http://en.wikipedia.org/wiki/Tropospheric_propagation).

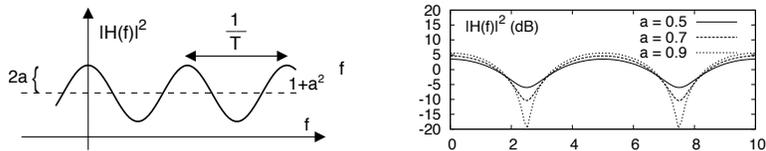


Figura 16.2: Modulo quadro della risposta in frequenza per un collegamento affetto da eco singola

in cui i valori  $\tau_n$  sono i ritardi con cui si presentano le diverse eco, ognuna caratterizzata da una ampiezza  $a_n$ , in accordo allo schema di filtro trasversale presentato al § 6.6.

La corrispondente risposta in frequenza

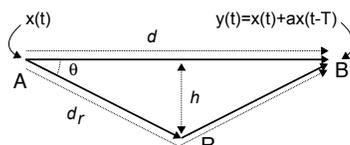
$$H(f) = \sum_{n=1}^N a_n e^{-j2\pi f \tau_n}$$

può produrre distorsione lineare; come esempio, consideriamo il caso di una *eco singola* con ritardo  $T$ , per il quale (vedi § 6.6.3) il modulo quadro della risposta in frequenza risulta

$$|H(f)|^2 = 1 + a^2 + 2a \cos 2\pi f T$$

periodico in frequenza con periodo  $f = \frac{1}{T}$ , mostrato in fig. 16.2, per valori lineari ed in dB, e per diverse scelte di  $a$ . Osserviamo che per valori di  $a$  prossimi ad 1, la risposta in frequenza presenta una notevole attenuazione nell'intorno di  $f = \frac{2k+1}{2T}$ , di fatto impedendo la trasmissione su tali frequenze; inoltre, all'aumentare di  $T$  le oscillazioni di  $|H(f)|^2$  si infittiscono<sup>33</sup>, e dunque aumenta la possibilità che  $|H(f)|^2$  vari di molto nella banda del segnale, causando una distorsione lineare che sarà necessario equalizzare.

**Esempio** Consideriamo la geometria descritta in figura, in cui un collegamento di portata  $d$  tra  $A$  e  $B$  subisce un fenomeno di riflessione a metà della sua lunghezza, da parte di una superficie riflettente  $R$  che dista  $h$  dalla congiungente, e ricaviamo l'espressione del ritardo  $T$ . Ricordando che  $\text{tempo} = \frac{\text{spazio}}{\text{velocità}}$  e indicando con  $d$  la distanza  $d_{AB}$  e con  $d_r$  quella percorsa dall'onda riflessa,

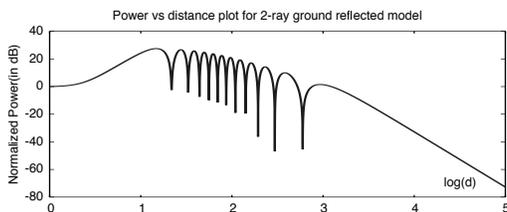


otteniamo che la differenza tra i tempi di arrivo dell'onda diretta e riflessa vale  $T = \frac{1}{c} (d_r - d)$ ; inoltre, dalla trigonometria risulta che  $\frac{d}{2} = \frac{d_r}{2} \cos \theta$ . Combinando le due relazioni, otteniamo che  $T = \frac{d}{c} \left( \frac{1}{\cos \theta} - 1 \right)$ , in cui  $\theta = \arctan \frac{h}{d/2} = \arctan 2 \frac{h}{d}$ . Attualizzando il risultato ad uno scenario in cui  $d = 1$  Km ed  $h = 100$  metri, si ottiene  $\theta = 11^\circ 31'$ ,  $\cos \theta = 0.98$ , e  $T = 0,066 \mu\text{secondi}$ . Pertanto  $|H(f)|^2$  presenta un periodo (in frequenza) di  $\frac{1}{T} = 15,15 \cdot 10^6 = 15,15$  MHz.

**Modello two-ray ground-reflected** E' il nome attribuito allo schema descritto dall'esempio precedente, esteso ad un caso generale in cui vengono prese in considerazione possibili altezze differenti per le antenne, il cui guadagno viene considerato variabile in funzione dell'angolo di emissione, e sono prese in considerazione le caratteristiche del coefficiente di riflessione al suolo. L'approfondita analisi<sup>34</sup> di tali particolarità porta al risultato che, per distanze

<sup>33</sup>Ad esempio, desiderando  $\frac{1}{T} > 1$  MHz, si ottiene  $T_{Max} = 1 \mu\text{sec}$ ; se l'onda radio si propaga alla velocità  $c = 3 \cdot 10^8$  m/sec, la massima differenza di percorso vale  $\Delta_{max} = c \cdot T_{Max} = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} = 300$  metri.

<sup>34</sup>Vedi ad esempio [https://en.wikipedia.org/wiki/Two-ray\\_ground-reflection\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Two-ray_ground-reflection_model), da cui è tratta l'immagine mostrata. Molto interessante, anche l'applet java disponibile presso



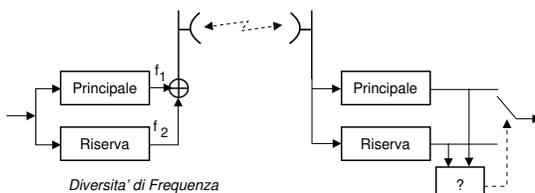
brevi tra le antenne le onde diretta e riflessa si sommano costruttivamente, producendo ad un guadagno anziché ad una attenuazione; aumentando la distanza si assiste ad una attenuazione che cresce con  $d^2$ , come per il caso di spazio libero, ma con sovrapposta l'oscillazione su illustrata, e che dipende dalla geometria del problema. Oltre un distanza detta *critica*,  $e$  che corrisponde alla prima zona di Fresnel, l'attenuazione aumenta con  $d^4$ .

**Il fading piatto** Qualora la banda del segnale sia sufficientemente piccola rispetto a  $\frac{1}{T}$ , e si possa considerare  $|H(f)|^2$  costante in tale banda (§ 12.1.2.4), l'attenuazione dovuta alla presenza di cammini multipli prende il nome di *flat fading* (vedi § 16.3.4.5). Il termine *fading* si traduce come *affievolimento* o *evanescenza*, ma è spesso usato in inglese, cosicché l'assenza di distorsione lineare per segnali a banda stretta è anche detta condizione di *fading piatto*, sottintendendo *in frequenza*. Nel seguito ci si continua a riferire alle attenuazioni supplementari con il termine più generale di fading.

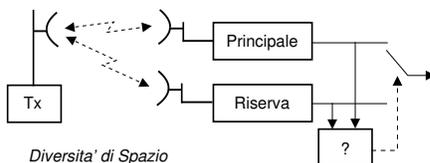
### 16.3.3.6 Collegamento in diversità

Il *fading* prodotto da cammini multipli viene detto *selettivo in frequenza* quando  $|H(f)|^2$  varia in modo rilevante, e ciò accade specialmente quando due repliche del segnale giungono al ricevitore con ampiezze molto simili. Il problema può essere affrontato prevedendo una *ridondanza* degli apparati.

**Diversità di frequenza** La stessa trasmissione è effettuata mediante *due* diverse portanti: nel caso in cui una delle due subisca attenuazione, la trasmissione che utilizza l'altra portante ne è probabilmente esente (o viceversa). Se il collegamento è condiviso tra diverse trasmissioni, una unica *via di riserva* può essere impiegata per fornire una ridondanza  $N : 1$ . Ad esempio, in una trasmissione multiplata FDM (§ 9.1.1.2), la portante di riserva viene assegnata al canale del banco FDM che presenta la maggiore attenuazione.



**Diversità di spazio** Adottando due diverse antenne riceventi in posizioni differenti, la differenza di percorso  $T$  tra cammini multipli è differente per le due antenne, e dunque la risposta in frequenza  $|H(f)|^2 = 1 + a^2 + 2a \cos 2\pi fT$  ha una diversa periodicità nei due casi. Pertanto, anche se un ricevitore subisce una attenuazione selettiva, l'altro ricevitore ne è esente.



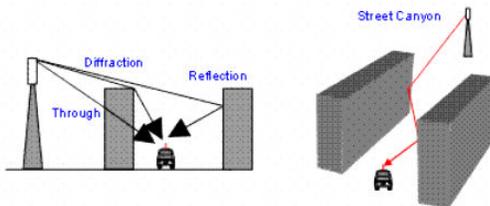
[http://www.cdt21.com/resources/siryo1\\_02.asp](http://www.cdt21.com/resources/siryo1_02.asp), che grafica l'andamento della attenuazione del modello, al variare di alcuni dei parametri prima illustrati.

**Esempio** Utilizzando gli stessi dati del precedente esempio, valutiamo cosa accade se la riserva viene posta *dieci metri più indietro* dell'antenna principale. In tal caso il nuovo ritardo tra il raggio diretto e quello riflesso diviene pari a  $T' = 65.3$  nanosecondi contro  $T = 66.0$  nsec ottenuti per la via principale, e dunque  $|H(f)|^2$  per la riserva ha un periodo pari a  $1/T' = 15.29$  MHz, una differenza di 140 KHz. Per ottenere che i minimi della  $|H(f)|^2$  nei due casi siano distanziati di almeno 3 Mhz, ovvero il 20% del periodo in frequenza, occorre operare con portanti oltre i 300 MHz.

### 16.3.4 Collegamenti radiomobili

Le condizioni di propagazione per comunicazioni radiomobili, come nel caso della telefonia cellulare, presentano diversi aspetti particolari che influenzano il fading.

*Innanzitutto*, l'antenna del terminale mobile è molto vicina al suolo, e ciò comporta la presenza di una eco fissa da terra, quasi sempre il mancato rispetto delle condizioni di Fresnel<sup>35</sup>, ed una attenuazione supplementare da assorbimento terrestre. *Inoltre*, specialmente in ambito urbano, si verifica un elevato numero di cammini multipli e diffrazioni, che per di più variano nel tempo in conseguenza dello spostamento del terminale.



*Infine*, l'uso condiviso di una stessa banda di frequenze radio da parte di una moltitudine di terminali, determina la necessità di riusare le stesse frequenze in regioni differenti<sup>36</sup>, e l'attuazione di meccanismi di codifica di canale (§ 13.3) per ridurre gli effetti delle interferenze e del fading variabile<sup>37</sup>. Analizziamo nel seguito i fenomeni legati alla *posizione* ed all'*ambiente*, fornendo modelli che descrivono le *attenuazioni supplementari* ed i fenomeni di *multipath variabile*, rimandando la discussione sulle *tecniche di accesso multiplo* ad una prossima edizione.

#### 16.3.4.1 Le componenti del fading

Il bilancio di collegamento descritto dalla figura di pag. 464 può essere impostato come illustrato in fig. 16.3, considerando una componente di attenuazione *nominale* indicata come *path loss* (o attenuazione di percorso), e due componenti aleatorie di attenuazione supplementare legate a posizione e movimento, indicate rispettivamente come *fading su larga scala* o *shadowing* (ombreggiatura) e su *piccola scala*.

Il valore del *path loss*  $A_{pl}$  risulta maggiore di quello di  $A_{sl}$  (eq. 16.11) a causa delle condizioni di propagazione non ideali, causando una  $A_d$  più elevata, come analizzato al § 16.3.4.2.

L'attenuazione supplementare *su larga scala*  $a_s^{ls}$  tiene conto dei fenomeni lentamente variabili nel tempo, come la frapposizione di rilievi, edifici, ed alberi: essa non varia di molto con il movimento del ricevitore, ed al § 16.3.4.3 si mostra come il suo valore possa considerarsi quello di una v.a. gaussiana *in dB* a media nulla e varianza  $\sigma_{ls}^2$ , consentendo di determinare il *margin* *su larga scala*  $M_{dB}^{ls}$  come quel valore di  $a_{s,dB}^{ls}$  che viene superato con probabilità sufficientemente bassa.

<sup>35</sup>Alla frequenza di 1 GHz si ha  $\lambda = 30$  cm e per una distanza di 100 metri dal trasmettitore si ottiene un raggio massimo dell'ellissoide pari a  $\frac{1}{2}\sqrt{.3 \cdot 100} = \frac{1}{2}\sqrt{30} \simeq 2.7$  metri.

<sup>36</sup>Vedi ad es. il § 9.1.1.3.

<sup>37</sup>Mentre il fading produce una attenuazione variabile sul segnale, la stessa variabilità delle condizioni di propagazione può portare a livelli di interferenza variabili, causati da altre trasmissioni nella stessa banda. La variabilità temporale della qualità del segnale ricevuto, in particolare quella *veloce* (vedi § 16.3.4.6), produce errori a *burst*, che possono essere corretti mediante codifica di canale ed interleaving (vedi § 8.5.2.3).

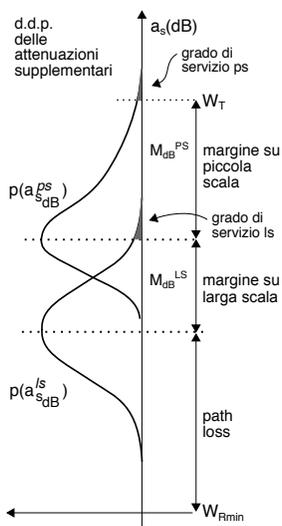


Figura 16.3: Determinazione del margine radiomobile

La variabilità *su piccola scala* è quella che maggiormente caratterizza il *fading*, e tiene conto degli innumerevoli cammini multipli presenti in ambito urbano ed *indoor*, che possono produrre una attenuazione supplementare  $a_{s,dB}^{ps}$  maggiore del caso precedente, una  $H(f)$  selettiva in frequenza, e se è presente movimento del ricevitore e/o delle superfici riflettenti, la variabilità temporale di  $a_{s,dB}^{ps}$ ; a seconda se la rapidità di variazione sia maggiore o minore del periodo di simbolo, si distingue ulteriormente in *fast* e *slow fading*. Questi effetti sono analizzati al § 16.3.4.4, dove si determina il margine  $M_{dB}^{ps}$  tale da rendere trascurabile la probabilità che  $a_{s,dB}^{ps} > M_{dB}^{ps}$ ; mentre ai § 16.3.4.5 e 16.3.4.6 si illustrano gli effetti dei fenomeni di variabilità in frequenza e nel tempo.

La fig. 16.3 mostra come queste tre componenti di attenuazione si sommano<sup>38</sup> al fine di determinare la potenza che occorre trasmettere

$$W_T = W_{Rmin} + A_d + M_{dB}^{ls} + M_{dB}^{ps}$$

mentre quella sotto tenta di rappresentare come varia la somma dei tre contributi di attenuazione con la posizione del ricevitore.

### 16.3.4.2 Path loss

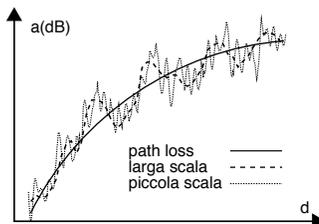
La dipendenza della attenuazione dal quadrato della distanza espressa dalla (16.11) si riferisce al caso ideale di spazio libero; misurazioni *reali* mostrano che invece l'esponente di  $d$  aumenta fino alla quarta potenza, a seconda del tipo di ambiente (urbano, rurale) e dell'altezza dell'antenna ricevente<sup>39</sup>. Pertanto, il termine  $20 \log_{10} d (Km)$  che compare in (16.13) viene sostituito con  $A_{pl} = n \cdot 10 \log_{10} d (Km) + \alpha$ , e quindi in questo caso anziché la (16.13), l'espressione da usare per l'attenuazione disponibile è

$$A_d (dB) = 32.4 + 20 \log_{10} f (MHz) + n \cdot 10 \log_{10} d (Km) + \alpha - G_T (dB) - G_R (dB) \quad (16.15)$$

in cui  $n$  ed  $\alpha$  sono determinati in base a *campagne di misura*, e tengono conto delle condizioni operative. Il valore di  $n$  varia da 4 a 3 con  $d < 100$  metri, all'aumentare dell'altezza dell'antenna fissa, mentre il termine  $\alpha$  può variare da 7 a 15 dB con antenna fissa alta 30 e 10 metri rispettivamente, e subire un incremento di quasi 30 dB passando da un ambiente aperto ad un ambito urbano.

**Esempio** Valutare il path loss per un collegamento a 2 GHz lungo un chilometro, considerando le antenne omnidirezionali, in un ambiente per il quale sono stati stimati i parametri  $n = 4$  e  $\alpha = 32$ .

E' sufficiente applicare la (16.15) utilizzando i valori forniti per i parametri:



<sup>38</sup> Considerando le v.a. statisticamente indipendenti.

<sup>39</sup> Inoltre, la condizione di NLOS introduce una attenuazione supplementare *costante*. Per una rassegna dei diversi modelli di propagazione, si veda ad es. <http://www.slideshare.net/deepakecrbs/propagation-model>.

$$A_d \text{ (dB)} = 32.4 + 20 \log_{10} 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10 \log_{10} 1 + 32 = 130.4 \text{ dB.}$$

### 16.3.4.3 Fading su larga scala e shadowing

La stima delle grandezze  $n$  ed  $\alpha$  ora introdotte è svolta *mediando* i risultati di diverse misure condotte nel territorio che si intende caratterizzare, che in realtà variano con il movimento tra territori diversi, in cui si riscontrano valori di fading diversi, anche per uguali valori di  $d$ . Questo fenomeno è indicato come *slow fading* oltre che *su larga scala*, poiché non si presenta muovendosi di poco in una stessa zona, dipendendo dalla orografia del territorio e dalla natura degli oggetti limitrofi. Ma anche stando fermi, non conoscendo a priori in che zona ci si trovi, l'effetto del *fading su larga scala* (LS) si manifesta come una attenuazione supplementare  $a_s$  aleatoria, che risulta avere un andamento gaussiano in dB<sup>40</sup> (per questo detto *lognormale*) ed a media nulla, cioè del tipo

$$p_{A_s}(a_s(\text{dB})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(a_s(\text{dB}))^2}{2\sigma_{l_s}^2}}$$

dove  $\sigma_{l_s}$  varia tra 6 ed 8 dB per una altezza dell'antenna tra 5 e 15 metri<sup>41</sup>. Per velocità del mobile non superiori ai 15 Km/h, si può assumere  $a_s$  costante in frequenza per qualche MHz, e nel tempo per poche centinaia di millisecondi.

**Esempio** Una trasmissione LOS per la quale occorre ricevere una potenza di almeno  $W_R = -50$  dBm è realizzata mediante un collegamento radio tra antenne omnidirezionali poste a  $d = 20$  Km e con portante  $f_0 = 27$  MHz. Determinare la potenza  $W_T^{slib}$  che occorre trasmettere in condizioni di *spazio libero*, e la nuova potenza  $W_T^{sfad}$  necessaria a garantire una probabilità di fuori servizio pari al 5%, in presenza di un fading *su larga scala* caratterizzato da  $\sigma_{l_s} = 3$  dB. Utilizziamo la (16.13) per calcolare

$$\begin{aligned} A_d \text{ (dB)} &= 32.4 + 20 \log_{10} f \text{ (MHz)} + 20 \log_{10} d \text{ (Km)} - G_T \text{ (dB)} - G_R \text{ (dB)} = \\ &= 32.4 + 20 \log_{10} 27 + 20 \log_{10} 20 = 32.4 + 28.6 + 26 = 87 \text{ dB} \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$W_T^{slib} \text{ (dBm)} = W_R \text{ (dBm)} + A_d \text{ (dB)} = -50 + 87 = 37 \text{ dBm}$$

pari a 7 dBW ovvero  $10^{0.7} = 5$  Watt. Il fading su larga scala produce una attenuazione supplementare aleatoria con d.d.p. gaussiana in dB, e la probabilità di fuori servizio del 5% corrisponde al punto della curva di pag. 109 per cui  $0.05 = \frac{1}{2} \text{erfc} \left( \frac{M_{dB}^{ls}}{\sqrt{2}\sigma_{l_s}} \right)$ , e quindi

graficamente si ottiene  $\frac{M_{dB}^{ls}}{\sqrt{2}\sigma_{l_s}} = 1.5$ , da cui  $M_{dB}^{ls} = 1.5 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 = 1.5 \cdot 1.41 \cdot 3 = 6.3$  dB, che ci consente di calcolare la nuova  $W_T^{sfad}$  come  $W_T^{sfad} \text{ (dBW)} = W_T^{slib} \text{ (dBW)} + M_{dB}^{ls} = 7 + 6.3 = 13.3$  dBW, ovvero  $10^{1.33} = 21.4$  Watt.

<sup>40</sup>La d.d.p. gaussiana discende dall'ipotesi che uno dei cammini multipli pervenga al ricevitore con una potenza nettamente predominante rispetto agli altri. In questo caso l'involuppo complesso  $\underline{x}$  del segnale ricevuto è adeguatamente rappresentato da una v.a. di Rice (vedi pag. 309)  $\underline{x} = a + \underline{r}$ , in cui  $|\underline{r}|$  ha d.d.p. di Rayleigh e rappresenta l'effetto di molte cause indipendenti, relative ai cammini multipli, ed  $a$  è l'ampiezza della eco di segnale ricevuta con la maggiore ampiezza. Se  $a \gg |\underline{r}|$  possiamo scrivere

$$\begin{aligned} a_s \text{ (dB)} &= 10 \log_{10} \frac{1}{|a+\underline{r}|^2} = -10 \log_{10} ((a+r_c)^2 + r_s^2) = \\ &= -10 \log_{10} \frac{a^2}{a^2} (a^2 + 2ar_c + r_c^2 + r_s^2) = 10 \left( \log_{10} a^2 + \log_{10} \left( 1 + \frac{2r_c}{a} + \frac{|\underline{r}|^2}{a^2} \right) \right) = \\ &\simeq 10 \left( \log_{10} a^2 + \frac{2r_c}{a} \right) = 10 \log_{10} a^2 + 20 \frac{r_c}{a} \end{aligned}$$

in quanto  $\log(1+\alpha) \simeq \alpha$  con  $\alpha \ll 1$ , e quindi  $a_s \text{ (dB)}$  ha media  $10 \log_{10} a^2$  (compresa nel *path loss*) ed esibisce una d.d.p. gaussiana, la stessa di  $r_c$ .

<sup>41</sup>All'aumentare dell'altezza dell'antenna, si estende l'area di copertura della stessa, ma in ambito urbano questo corrisponde ad una maggiore variabilità delle effettive condizioni operative.

### 16.3.4.4 Fading su piccola scala

Consiste nelle fluttuazioni di livello del segnale radio osservate durante *il movimento*, causate dalla variazione dei ritardi con cui i cammini multipli giungono al ricevitore: spostandosi infatti di  $\frac{\lambda}{2}$  si può passare<sup>42</sup> da una situazione di somma coerente ad una completa opposizione di fase. Analizziamo ora la situazione nel dettaglio, distinguendo tra diversi casi-tipo.

**Fading piatto** L'involuppo complesso del segnale ricevuto  $\underline{y}(t)$  in presenza di cammini multipli può essere espresso in funzione di quello trasmesso  $\underline{x}(t)$  considerando che la (16.14) consente di scrivere il segnale ricevuto come  $y(t) = \sum_{n=1}^N a_n x(t - \tau_n)$  da cui si ottiene<sup>43</sup>

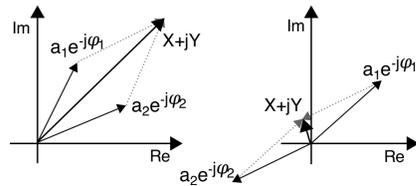
$$\underline{y}(t) = \sum_{n=1}^N a_n \underline{x}(t - \tau_n) e^{-j2\pi f_0 \tau_n} \quad (16.16)$$

in cui  $\tau_n$  è il ritardo dell' $n$ -esimo cammino, ed  $a_n$  il rispettivo guadagno. Se durante il tempo che intercorre tra l'arrivo della prima replica (ritardata di  $\tau_{min}$ ) e l'arrivo dell'ultima (ritardata di  $\tau_{max}$ ) il segnale  $\underline{x}(t)$  non varia di molto (e cioè  $\underline{x}(t - \tau_{min}) \simeq \underline{x}(t - \tau_n) \simeq \underline{x}(t - \tau_{max})$ )<sup>44</sup>, l'effetto complessivo equivale alla moltiplicazione di  $\underline{x}(t)$  per un numero complesso, senza quindi produrre distorsione lineare (vedi § 12.1.2.4). Infatti, in tal caso la (16.16) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &\simeq \underline{x}(t) \sum_{n=1}^N a_n e^{-j2\pi f_0 \tau_n} = \underline{x}(t) \sum_{n=1}^N a_n (\cos \varphi_n - j \sin \varphi_n) \\ &= \underline{x}(t) \cdot (X + jY) = \underline{x}(t) \cdot \rho e^{j\varphi} \end{aligned} \quad (16.17)$$

in cui il valore complesso  $X + jY = \rho e^{j\varphi} = \sum_{n=1}^N a_n \cos \varphi_n - j \sum_{n=1}^N a_n \sin \varphi_n$  riassume l'effetto delle diverse repliche, e rappresenta un v.a. gaussiana complessa, in quanto a partire da valori della portante  $f_0$  dell'ordine dell'inverso di  $\frac{1}{\tau_n}$ , e tanto più per  $f_0$  più elevate<sup>45</sup>, bastano piccole variazioni di ritardo  $\tau_n$  per produrre una fase

$\varphi_n = 2\pi f_0 \tau_n$  (nota 43) uniformemente distribuita tra 0 e  $2\pi$  e del tutto indipendente per le diverse repliche. Pertanto, se anche i valori  $a_n$  sono realizzazioni di v.a. indipendenti ed equidistribuite, e se i cammini multipli sono in numero elevato, si applica il teorema centrale del



<sup>42</sup>A frequenza di 1 GHz, si ha  $\lambda \simeq 30$  cm. Questo fenomeno può essere facilmente sperimentato quando, durante una sosta al semaforo, si perde la sintonia di una radio FM, riacquistandola per piccoli spostamenti dell'auto; un altro esempio può essere la *ricerca del campo* per poter telefonare.

<sup>43</sup>La (16.16) discende dal considerare un generico segnale modulato  $x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$  ed il suo involuppo complesso  $\underline{x}(t) = a(t) e^{j\varphi(t)}$ : per ogni sua replica ritardata  $x_n(t) = x(t - \tau_n)$  possiamo scrivere

$$x_n(t) = a(t - \tau_n) \cos[2\pi f_0(t - \tau_n) + \varphi(t - \tau_n)] = a(t - \tau_n) \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau_n + \varphi(t - \tau_n))$$

ed il suo involuppo complesso rispetto ad  $f_0$  può essere quindi scritto come

$$\underline{x}_n(t) = \underbrace{a(t - \tau_n) e^{j\varphi(t - \tau_n)}}_{\underline{x}(t - \tau_n)} e^{-j2\pi f_0 \tau_n} = \underline{x}(t - \tau_n) e^{-j2\pi f_0 \tau_n}$$

<sup>44</sup>Si consideri che il risultato dell'esempio di pag. 479 valuta i ritardi in gioco dell'ordine di grandezza delle decine di nanosecondi, mentre (ad esempio) ad un segnale  $\underline{x}(t)$  limitato in banda a 10 KHz corrisponde un periodo di campionamento  $T_c = 50 \mu\text{sec}$ .

<sup>45</sup>Se ad esempio i ritardi  $\tau_n$  sono dell'ordine di  $10^{-8}$ , l'ipotesi è valida per  $f_0 > 100$  MHz, quasi  $1/10$  delle frequenze a cui operano i radiomobili.

limite (§ 5.2.4), e quindi i valori di  $X$  ed  $Y$  nella (16.17) possono considerarsi realizzazioni di v.a. indipendenti, gaussiane, a media nulla ed uguale varianza  $\sigma^2$ .

**Fading di Rayleigh** Per ciò che riguarda l'ampiezza del segnale ricevuto, risulta  $|y(t)| = \rho \cdot |x(t)|$ , e nelle condizioni descritte  $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$  è una v.a. di RAYLEIGH (pag. 308), la cui d.d.p. ha espressione

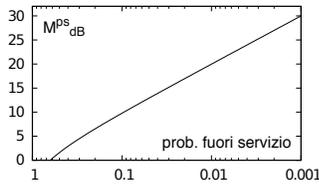
$$p_P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \quad (16.18)$$

con  $\rho \geq 0$ ; pertanto il valore della *potenza istantanea* ricevuta, legata<sup>46</sup> a  $|y(t)|^2 = \rho^2 |x(t)|^2$ , risulta variato di una quantità pari a  $\rho^2$ , che è una v.a. *esponenziale negativa*<sup>47</sup>, descritta dalla d.d.p. (vedi § 17.2.1)

$$p_E(\rho^2) = \lambda e^{-\lambda\rho^2} = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \quad (16.19)$$

in cui si è posto in evidenza il valor medio  $m_{\rho^2} = E\{\rho^2\} = 1/\lambda = 2\sigma^2$ . In base alla (16.19) è possibile determinare<sup>48</sup> il margine  $M_{dB}^{ps}$  necessario a contrastare un fading di Rayleigh, qualora si desideri una *probabilità di fuori servizio* pari a  $p$ :

$$M_{dB}^{ps} = -10 \log_{10}(-\ln(1-p)) \quad (16.20)$$



il cui andamento è mostrato a lato.

Nel caso in cui trasmettitore, ricevitore ed ambiente siano *statici*,  $\rho$  assume una determinata realizzazione, distribuita come indicato dalla (16.18). Al contrario se (ad es.) il ricevitore è in movimento, i cammini multipli si modificano, e la figura 16.4 mostra come varia la potenza in dB del segnale ricevuto, relativamente alle condizioni di ricezione *medie* (ovvero su larga scala, rappresentate dalla condizione di zero dB), per posizioni via via più distanti: si nota chiaramente come la potenza possa diminuire anche di molto, condizione indicata come *deep fade*.

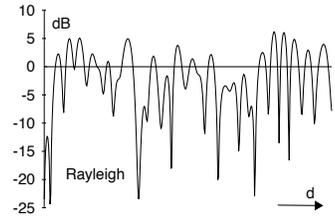


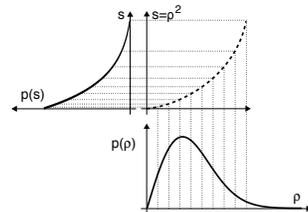
Figura 16.4: Intensità del segnale in presenza di fading di Rayleigh

<sup>46</sup>Per semplicità nel seguito consideriamo  $x(t)$  a potenza unitaria, in modo che  $\rho^2$  sia proprio la potenza istantanea ricevuta.

<sup>47</sup>Impostando il cambiamento di variabile  $s = \rho^2$ , si possono applicare le regole viste al § 5.4, individuando la funzione inversa come  $\rho = \sqrt{s}$ , la cui  $\frac{d}{ds} \rho(s)$  fornisce  $\frac{1}{2\sqrt{s}}$ . Pertanto, la d.d.p. della nuova v.a.  $s$  vale:

$$p_S(s) = p_P(\sqrt{s}) \cdot \frac{d}{ds} \rho(s) = \frac{\sqrt{s}}{\sigma^2} e^{-\frac{(\sqrt{s})^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{s}} = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{s}{2\sigma^2}}$$

Nella figura a lato si mostra il processo di costruzione grafica che produce una d.d.p. esponenziale negativa a partire dal quadrato di una d.d.p. di Rayleigh.



<sup>48</sup>A tal fine osserviamo che il collegamento va fuori servizio quando la potenza ricevuta è inferiore alla sensibilità del

ricevitore  $W_{R_{min}}$ , e la probabilità di questo evento si esprime come  $p = Pr(\rho^2 < W_{R_{min}}) = 1 - e^{-\frac{W_{R_{min}}}{m_{\rho^2}}}$ , essendo appunto  $\rho^2$  una v.a. a d.d.p. esponenziale con media  $m_{\rho^2} = 2\sigma^2$ , e tenendo conto dell'eq. (17.3) a pag. 523. Al tempo stesso,  $m_{\rho^2} = E\{\rho^2\}$  rappresenta la potenza *media* ricevuta, ovvero lo *zero dB* di fig. 16.4: esprimendo dunque il margine  $M$  (non in dB) come il rapporto tra la potenza media ricevuta e la sensibilità del ricevitore  $M = \frac{m_{\rho^2}}{W_{R_{min}}}$ , si ottiene  $p = 1 - e^{-\frac{1}{M}}$ , e quindi  $-\frac{1}{M} = \ln(1-p)$  e, passando ai decibel,  $-10 \log_{10} M = 10 \log_{10}(-\ln(1-p))$ , da cui la (16.20).

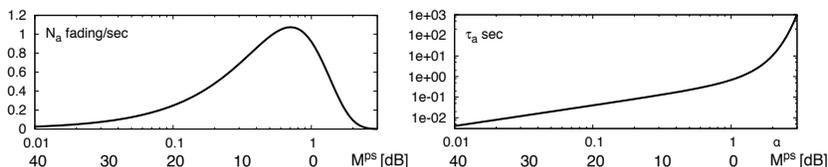


Figura 16.5: Frequenza e durata media del fading di Rayleigh per  $f_D=1$  Hz in funzione di  $\alpha$  ovvero di  $M_{dB}^{ps}$

**Frequenza e durata media del fading** Se è presente movimento a velocità costante, la fig. 16.4 rappresenta l'andamento di  $\rho^2/m_{\rho^2}$  (dB) in funzione del tempo. In tal caso, è interessante valutare *per quanto tempo* la potenza istantanea  $\rho^2$  del segnale ricevuto *scende sotto* la soglia  $W_{Rmin}$ , e dunque valutare quanti bit, ricadendo in tale intervallo temporale, saranno soggetti ad una  $P_e$  peggiore di quella desiderata. Come osservato alla nota 48, la probabilità che  $\rho^2$  sia minore di  $W_{Rmin}$  vale

$$p = Pr(\rho^2 < W_{Rmin}) = 1 - e^{-\frac{W_{Rmin}}{m_{\rho^2}}} \quad (16.21)$$

e la durata media  $\bar{\tau}_a$  di questo evento si ottiene dividendo  $p$  per il *numero medio*  $N_a$  di affievolimenti per secondo<sup>49</sup>, ovvero  $\bar{\tau}_a = \frac{p}{N_a}$ . D'altra parte, si può mostrare che risulta

$$N_a = \sqrt{2\pi} f_D \alpha e^{-\alpha^2} \quad (16.22)$$

in cui si è posto  $\alpha^2 = \frac{W_{Rmin}}{m_{\rho^2}} = \frac{1}{M_{ps}}$ , mentre  $f_D$  è la massima *deviazione doppler* (pag. 491) che come vedremo è direttamente legata alla velocità di movimento: infatti, per velocità maggiori aumenta la frequenza dei fenomeni di fading. Combinando le (16.21) e (16.22) si ottiene pertanto

$$\bar{\tau}_a = \frac{p}{N_a} = \frac{1 - e^{-\alpha^2}}{\sqrt{2\pi} f_D \alpha e^{-\alpha^2}} = \frac{e^{\alpha^2} - 1}{\sqrt{2\pi} f_D \alpha} \quad (16.23)$$

il cui andamento *normalizzato* è rappresentato nella figura 16.5 assieme a quello di  $N_a$ , al variare di  $\alpha$  ovvero di  $M_{dB}^{ps} = 10 \log_{10} \frac{1}{\alpha^2} = -20 \log_{10} \alpha$ .

**Esercizio** Valutare la durata media del fading di Rayleigh in presenza di doppler  $f_D = 20$  Hz e di un margine  $M_{dB}^{ps} = 20$  dB. Consideriamo quindi errato un bit, se durante il suo periodo  $T_b$  si verifica un affievolimento che rende la potenza istantanea ricevuta minore di quella media per più di  $M_{dB}^{ps}$ . In presenza di una modulazione BPSK a velocità  $f_b = 50$  bit/sec, quanti sono in media i bit errati per secondo, e la corrispondente  $P_e^{bit}$ ?

Ad un  $M_{dB}^{ps} = 20$  dB corrisponde  $\alpha = 0.1$ , ed in base alla (16.23) si ottiene  $\bar{\tau}_a = 2$  msec, minore di  $T_b = 1/50 = 20$  msec, e quindi l'intervallo temporale per cui il fading è maggiore del margine, interessa un solo bit. Mediante la (16.22) (con  $\alpha = 0.1$  e  $f_D = 20$  Hz) si ottiene che  $N_a = 4.96$  fading/sec, e dunque in un secondo risultano errati quasi 5 bit su 50, ovvero  $P_e^{bit} = 5/50 = 0.1$ .

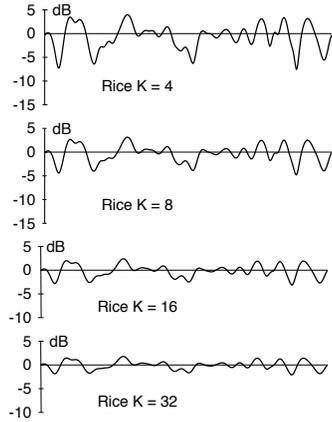
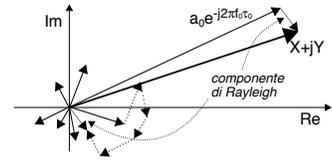
<sup>49</sup>Infatti in tal modo la percentuale di tempo  $p$  viene *spalmata* su di un secondo, e suddivisa per il numero (medio) di volte (in un secondo) per cui avviene che  $\rho^2 < W_{Rmin}$ .

**Esempio** Se  $p = 0.1$ , ed  $N_a = 5$  fading/sec, allora  $\bar{\tau}_a = 0.1/5 = 0.02$  ossia 20 msec, ripartendo i 100 msec (10% di 1 secondo) sui 5 affievolimenti medi.

**Fading di Rice** Si verifica nel caso in cui le ampiezze  $a_n$  dei diversi percorsi che compaiono nella (16.16) non sono identicamente distribuite, ma ne esiste una ( $a_0$  in figura) che *prevale* su tutte le altre, come quando l'antenna trasmittente si trova in *visibilità* (anche parziale) del ricevitore.

In questo caso il canale produce un guadagno aleatorio  $\rho$  caratterizzato da una d.d.p. di Rice, espressa dalla eq. (11.12) a pag. 309, essendo la risultante  $X + jY$  tipicamente ora vicina al cammino prevalente  $a_0 e^{-j2\pi f_0 \tau_0}$ . In particolare, il rapporto  $K = \frac{a_0^2}{2\sigma^2}$  tra la potenza  $\frac{a_0^2}{2}$  dell'onda diretta e quella  $\sigma^2$  della componente dovuta al multipath prende il nome di *fattore di Rice*, ed nella figura a lato si mostra come, in presenza di una forte componente diretta, la profondità del fading si riduce sensibilmente. In corrispondenza di un  $K$  elevato, il fading di Rice può infine essere descritto nei termini di un fading su larga scala (§ 16.3.4.3), come discusso alla nota 40.

Viceversa, qualora la ricezione avvenga principalmente in *assenza di visibilità*, i valori del modulo dell'involuppo complesso del segnale  $\rho(t) = |\underline{y}(t)|$  sono soggetti al fading di Rayleigh precedentemente esposto.



**16.3.4.5 Fading selettivo in frequenza**

Rimuoviamo ora l'ipotesi fatta a pag. 484 e assumiamo dunque che nell'intervallo temporale  $\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{min}$  tra l'arrivo della prima e dell'ultima replica, detto anche *dispersione temporale*, il segnale possa modificare il suo valore. Per analizzare cosa succede, partiamo dalla (16.16) per scrivere l'espressione dell'involuppo complesso della risposta impulsiva del canale come<sup>50</sup>

$$\underline{h}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \delta(t - \tau_n) e^{-j2\pi f_0 \tau_n} = \sum_{n=0}^{N-1} Z_n \delta(t - \tau_n) \tag{16.24}$$

in cui si è posto  $Z_n = a_n e^{-j2\pi f_0 \tau_n}$ . Facciamo quindi l'ipotesi semplificatrice che i ritardi  $\tau_n$  siano multipli di un comune intervallo  $T$ , cioè  $\tau_n = nT$ , considerando eventualmente nullo qualche valore  $a_n$ : in tal modo la (16.24) può essere assimilata all'espressione di un segnale campionato (§ 4.1)  $\underline{h}^\bullet(t) = \sum_{n=0}^{N-1} Z_n \delta(t - nT)$ , interpretando dunque i coefficienti complessi  $Z_n$  come campioni di un processo  $Z(t)$ <sup>51</sup>, ovvero  $Z_n = Z(nT) = a_n e^{-j2\pi f_0 nT}$ . Ciò consente di esprimere la risposta in frequenza equivalente di b.f. del canale come la DTFT (vedi § 4.3) della sequenza  $Z_n$ , ovvero

$$\underline{H}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} Z_n e^{-j2\pi f nT} \tag{16.25}$$

Notiamo ora che i valori di  $\underline{H}(f)$  in funzione di  $f$  sono variabili aleatorie, in quanto dipendono dalle caratteristiche statistiche dei termini  $Z_n$ , che per i motivi illustrati a pag. 484 sono

<sup>50</sup>Il cambiamento negli indici della sommatoria è legato a considerare l'origine dei tempi in corrispondenza al primo arrivato dei cammini multipli.

<sup>51</sup>Si sottintende che  $T$  sia minore dell'inverso del doppio della banda di  $Z(t)$ , ovvero  $T < 1/2W$ .

v.a. complesse, indipendenti ed a valor medio nullo, e quindi (vedi § 6.5.3)

$$E \{ Z_n^* Z_{n+m} \} = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq 0 \\ \sigma_{a_n}^2 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (16.26)$$

in cui la sequenza di valori  $\sigma_{a_n}^2 = E \{ a_n^2 \}$  è indicata nel seguito come...

**Dispersione potenza-ritardo**<sup>52</sup> È costituita dalla sequenza  $\mathcal{P}_n = E \{ a_n^2 \}$  e rappresenta la distribuzione temporale (media) della potenza (o energia) delle repliche del segnale. Infatti, trasmettendo un impulso di energia unitaria  $\delta(t)$  si ricevono  $N$  impulsi di energia  $\mathcal{E}_n = a_n^2$ , ovvero viene ricevuto l'involuppo complesso  $\underline{h}(t)$  espresso dalla (16.24), la cui energia vale  $\mathcal{E}_{\underline{h}} = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{h}^*(t) \underline{h}(t) dt = \sum a_n^2 = \sum \mathcal{E}_n$ , ed il cui valore atteso rispetto all'aleatorietà degli  $a_n$  risulta  $E \{ \mathcal{E}_{\underline{h}} \} = \sum E \{ a_n^2 \} = \sum \mathcal{E}_n$ .

**Misura della dispersione potenza-ritardo** Può essere attuata con tre diverse tecniche, di cui ci si limita ad accennare i principi operativi.

Nella *prima* tecnica si trasmette una portante modulata in ampiezza da impulsi molto brevi, ottenendo dopo demodulazione la convoluzione tra l'impulso usato in trasmissione e  $l'h(t)$  del canale: benché questa soluzione sia molto semplice, è affetta sia dal rumore a larga banda che *entra* nel passa-banda di ricezione, che dalle interferenze presenti.

La *seconda* tecnica fa invece uso di una segnale DSSS, il cui despreading in ricezione avviene variando di volta in volta la fase della PN: quando questa risulta allineata temporalmente con una delle repliche dovute al multipath, a valle del filtro passabasso si rivela *un massimo* con ampiezza legata ad  $a_n$ . In tal modo la sensibilità al rumore viene ridotta dal guadagno di processo, ma la misura richiede il tempo necessario a *provare* tutte le fasi della PN.

L'*ultimo* metodo opera nel dominio della frequenza, e si basa su diverse frequenze trasmesse una alla volta, le cui ampiezze e fasi sono confrontate con quelle ricevute, come illustrato a pag. 65; i campioni della  $H(f)$  così ottenuti sono quindi antitrasformati mediante IDFT, per ottenere i campioni di  $h(t)$ . Ma per effettuare il confronto, occorre che trasmettitore e ricevitore siano fisicamente vicini, e dunque il metodo è applicabile solo per ambiti *indoor*.

Una volta pervenuti alla misura della sequenza delle ampiezze  $a_n^2$ ; l'operazione è ripetuta più volte spostandosi di poco<sup>53</sup> alla volta, ed alla fine i risultati sono mediati tra loro, in modo da ottenere una stima di  $\mathcal{P}_n = \sigma_{a_n}^2 = E \{ a_n^2 \}$ , da cui si possono definire dei parametri statistici come il *ritardo medio*

$$\bar{\tau} = \sum_n \mathcal{P}_n \tau_n / \sum_n \mathcal{P}_n$$

e la *deviazione standard* dei ritardi

$$\sigma_\tau = \sqrt{\bar{\tau}^2 - \bar{\tau}^2}$$

in cui  $\bar{\tau}^2 = \sum_n \mathcal{P}_n \tau_n^2 / \sum_n \mathcal{P}_n$ , mentre la *dispersione temporale*

$$\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_{min}$$

è definita con riferimento ad una soglia che permette di distinguere le repliche dal rumore.

La figura 16.6 mostra la curva di *dispersione potenza-ritardo* misurata per un ambiente al coperto, per il quale sono calcolate  $\bar{\tau}$ ,  $\sigma_\tau$  e  $\Delta\tau$  per una soglia di -10 dB. In appendice 16.5.2

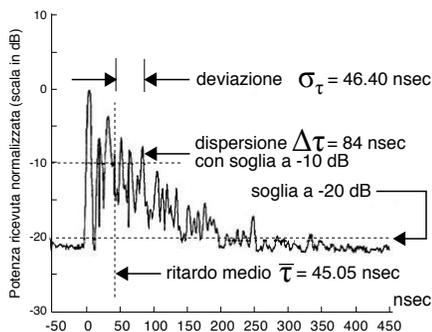


Figura 16.6: Profilo di dispersione potenza-ritardo per ambito indoor

<sup>52</sup>Libera traduzione del termine POWER DELAY SPREAD.

<sup>53</sup>Tipicamente di 1/4 della lunghezza d'onda relativa alla portante adottata.

sono riportati alcuni valori tipici di questi parametri per diversi contesti ambientali. L'andamento tendenziale rilevato per le  $\mathcal{P}_n$  misurate suggerisce l'approssimazione della dispersione potenza-ritardo mediante una densità esponenziale:

$$\mathcal{P}(\tau) = \frac{1}{\sigma_\tau} e^{-\frac{\tau}{\sigma_\tau}} \quad \text{ovvero} \quad \mathcal{P}_n = \frac{1}{\sigma_\tau} e^{-\frac{nT}{\sigma_\tau}} \quad (16.27)$$

**Banda di coerenza** Proseguiamo l'analisi con lo scopo di capire per quale intervallo  $\Delta f$  si ottengano coppie di valori della risposta in frequenza ( $\underline{H}(f)$ ,  $\underline{H}(f + \Delta f)$ ) che iniziano a divenire *incorrelati*, dato che in tal caso un segnale che occupa una banda comparabile a  $\Delta f$  è affetto da distorsione lineare. A tal fine, partendo dalla (16.25) interpretiamo  $\underline{H}(f)$  come un processo ad *aleatorietà parametrica* (§ 5.3.7) in frequenza, e dunque ne calcoliamo la funzione di autocorrelazione (appunto, in frequenza):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\underline{H}}(\Delta f) &= E \{ \underline{H}^*(f) \underline{H}(f + \Delta f) \} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E \{ Z_n^* Z_m \} e^{j2\pi f n T} e^{-j2\pi(f + \Delta f) m T} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{P}_n e^{-j2\pi \Delta f n T} \end{aligned} \quad (16.28)$$

in cui all'ultimo passaggio si è applicata la (16.26) considerando  $m = n$ :  $\mathcal{R}_{\underline{H}}(\Delta f)$  è dunque pari alla trasformata di Fourier di sequenze (§ 4.3) della dispersione potenza-ritardo  $\mathcal{P}_n = \sigma_{a_n}^2 = E \{ a_n^2 \}$ .

La *banda di coerenza*  $B_c$  è quindi definita come l'intervallo di frequenze  $\Delta f$  entro cui  $\underline{H}(f)$  si mantiene *correlata*, e può essere fatto corrispondere alla *larghezza di banda* di  $\mathcal{R}_{\underline{H}}(\Delta f)$ . Pertanto, quanto più la dispersione temporale  $\Delta\tau$  (o, più in generale, la deviazione  $\sigma_\tau$ ) risulta elevata, tanto minore sarà il valore di  $B_c$ . Convenzionalmente, una sua valutazione approssimata ricade nell'intervallo

$$\frac{1}{50\sigma_\tau} \leq B_c \leq \frac{1}{5\sigma_\tau} \quad (16.29)$$

**Esempio** Consideriamo un canale radio in un contesto urbano, caratterizzato da una deviazione standard dei ritardi  $\sigma_\tau = 5 \mu\text{sec}$ , e per il quale si assume valida l'approssimazione del profilo di dispersione potenza-ritardo esponenziale (16.27), ovvero  $\mathcal{P}(\tau) = \frac{1}{\sigma_\tau} e^{-\tau/\sigma_\tau}$ . L'applicazione della (16.29) porta ad una stima di  $B_c$  compresa tra 4 e 40 KHz.

Dato che<sup>54</sup>  $\mathcal{R}_{\underline{H}}(\Delta f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{P}(\tau) \} = \frac{1}{1 + j2\pi\sigma_\tau\Delta f}$ , osserviamo che questa ha il massimo nell'origine (vedi fig. 4.9 a pag. 92), ed il suo modulo si dimezza<sup>55</sup> per  $\Delta f = \frac{1}{3.63\sigma_\tau}$ : pertanto la scelta  $B_c = 1/50\sigma_\tau = 40 \text{ KHz}$  corrisponde ad una correlazione in frequenza maggiore di 0.5. Lo stesso calcolo mostra che scegliere invece la stima più restrittiva  $B_c = 1/50\sigma_\tau = 4 \text{ KHz}$  corrisponde ad una correlazione  $|\mathcal{R}_{\underline{H}}(\Delta f)| > 0.9$  (per l'esattezza, si ottiene  $|\mathcal{R}_{\underline{H}}(\Delta f = 1/50\sigma_\tau)| = 0.94$ ).

54

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ \mathcal{P}(\tau) \} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \frac{1}{\sigma_\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\sigma_\tau}} e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \frac{1}{\sigma_\tau} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{\sigma_\tau} + j2\pi f\right)\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{\sigma_\tau} \frac{-1}{\frac{1}{\sigma_\tau} + j2\pi f} e^{-\left(\frac{1}{\sigma_\tau} + j2\pi f\right)\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sigma_\tau} \frac{1}{\frac{1}{\sigma_\tau} + j2\pi f} = \frac{1}{1 + j2\pi\sigma_\tau f} \end{aligned}$$

<sup>55</sup>  $|\mathcal{R}_{\underline{H}}(\Delta f)| = \frac{1}{2} \text{ se } \sqrt{1 + (2\pi\sigma_\tau\Delta f)^2} = 2$ , e dunque  $2\pi\sigma_\tau\Delta f = \sqrt{3}$  ovvero  $\Delta f = \frac{1.73}{6.28\sigma_\tau} = \frac{1}{3.63\sigma_\tau}$

**Dimensione di cella e velocità trasmissiva** Ricapitolando, se la banda  $W$  del segnale modulato non eccede  $B_c$  ci si trova nelle condizioni di fading *piatto*, mentre se  $W > B_c$  le componenti spettrali di  $x(t)$  subiscono alterazioni statisticamente indipendenti, i cammini multipli causano un effetto filtrante, si manifesta ISI, ed il canale corrispondente viene detto *selettivo in frequenza*. Approssimando l'occupazione di banda di un segnale numerico modulato come il reciproco del periodo di simbolo  $W \simeq \frac{1}{T_s}$ , osserviamo che la condizione di fading piatto  $W < B_c$  implica che  $T_s \simeq \frac{1}{W} > \frac{1}{B_c} > \sigma_\tau$ , ovvero la deviazione standard dei ritardi è inferiore al periodo di simbolo, limitando gli effetti dell'ISI.

Dato che la correzione degli effetti di distorsione lineare e ISI richiede al ricevitore complesse operazioni di equalizzazione (§ 15.4), si tenta di operare per quanto possibile in condizioni di fading piatto, occupare una banda  $W < B_c$ , e limitare di conseguenza la velocità di segnalazione  $f_s$ . Un possibile *escamotage* può essere l'adozione di una trasmissione OFDM, che suddivide  $W$  in tante sotto-bande più piccole, e adotta un  $T_s > \sigma_\tau$ . Mentre nel caso di trasmissione DSSS, anche se viene occupata una banda  $W > B_c$ , al § 16.3.4.10 si mostra come non sia necessaria equalizzazione.

Per celle molto grandi la differenza di percorso tra cammini multipli può essere notevole (vedi § 16.5.2), determinando una  $B_c$  ridotta, e quindi una bassa velocità di trasmissione. Riducendo la dimensione di cella è possibile aumentare la velocità, dato che le differenze di ritardo si riducono. Pertanto, se celle con raggio di chilometri e  $\Delta\tau > 10 \mu\text{sec}$  possono richiedere equalizzazione anche per trasmissioni a 64 kbps, al contrario comunicazioni *indoor* con  $\Delta\tau < 1 \mu\text{sec}$  possono presentare *flat fading* per velocità dell'ordine del Mbps. Celle di dimensione minima, dette anche *picocelle*, presentano una dispersione temporale di solo qualche decina di picosecondi, permettendo di operare a molti Mbps anche senza equalizzazione.

### 16.3.4.6 Dispersione spettrale e variabilità temporale

Finché il ricevitore e gli oggetti riflettenti sono fermi, la distribuzione dei ritardi  $\tau_n$  non varia nel tempo, e la componente di attenuazione supplementare su piccola scala mantiene uno stesso (casuale) valore, sia esso di Rayleigh o di Rice; in tal caso il fading non è né lento né veloce, ma *costante*. Viceversa, nel caso in cui ci sia movimento<sup>56</sup> l'involuppo complesso ricevuto (16.16) si riscrive come

$$\underline{y}(t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) \underline{x}(t - \tau_n(t)) e^{-j2\pi f_0 \tau_n(t)}$$

evidenziando come ora sia le ampiezze  $a_n$  che i ritardi  $\tau_n$  dipendono dal tempo.

Allo scopo di analizzare le conseguenze di questa *non stazionarietà*, consideriamo una portante non modulata  $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ , con involuppo complesso  $\underline{x}(t) = 1^{57}$ , che produce la ricezione di

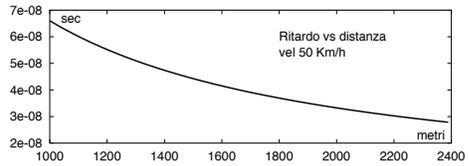
$$\underline{y}(t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) e^{-j2\pi f_0 \tau_n(t)} = \sum_{n=1}^N a_n(t) e^{-j\alpha_n(t)} \quad (16.30)$$

Si ottengono quindi  $N$  diversi segnali *modulati* sia in ampiezza che angolarmente, anche se è stata trasmessa una sola frequenza. In generale le ampiezze  $a_n(t)$  non variano di molto con il movimento, mentre come già osservato, sono sufficienti piccole variazioni di  $\tau_n(t)$  per causarne di grandi per  $\alpha_n(t) = 2\pi f_0 \tau_n(t)$ : ad esempio, con una  $f_0 = 1 \text{ GHz}$ , basta una variazione di  $\tau$  pari ad 1 nsec per produrre una rotazione di  $2\pi$ .

<sup>56</sup>Del ricevitore, del trasmettitore, o degli oggetti riflettenti.

<sup>57</sup>Come evidente dalla eq. (9.3) a pag. 253

**Esempio** Riprendiamo i dati ed il modello usati a pag. 479 per ottenere il risultato in figura, relativo ad un mobile che viaggia a 50 Km/h, e che in 100 sec percorre 1.4 Km a partire da una distanza di 1 Km dal trasmettitore, in presenza di una superficie riflettente posta a 100 metri da metà percorso. Il ritardo del cammino riflesso varia da 66 a 27 nsec, con la legge mostrata in figura, dovuta al variare nel tempo dell'angolo di riflessione.



**Effetto Doppler** La figura a lato rappresenta un mobile che viaggia a velocità costante  $v$ , ed impiega  $\Delta t = d/v$  secondi per spostarsi tra i punti  $X$  ed  $Y$  distanti  $d$ , mentre riceve una portante a frequenza  $f_0 = c/\lambda$  dalla sorgente  $S$ . La differenza di distanza  $\Delta l$  dalla sorgente nei due punti risulta<sup>58</sup>

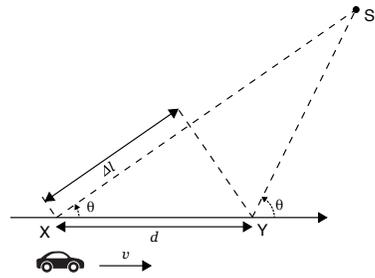
$$\Delta l = d \cos \theta = v \Delta t \cos \theta$$

e quindi la differenza di fase nel segnale ricevuto in  $X$  e  $Y$  vale<sup>59</sup>

$$\Delta \alpha = \frac{2\pi \Delta l}{\lambda} = \frac{2\pi v \Delta t}{\lambda} \cos \theta$$

Pertanto, durante il tragitto la frequenza ricevuta differisce da  $f_0$  per una quantità<sup>60</sup>

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{v}{\lambda} \cos \theta = \frac{c}{c} \frac{v}{\lambda} \cos \theta = f_0 \frac{v}{c} \cos \theta$$



denominata *scostamento Doppler*<sup>61</sup>. Considerando ora al posto della singola sorgente  $S$  tutti gli  $N$  riflettori che danno origine al multipath, l'effetto Doppler si verifica per ciascuno di essi, producendo la ricezione di frequenze  $f_n = f_0 \pm f_d^n$ , aumentate (o diminuite) rispetto alla portante  $f_0$  della *frequenza Doppler*

$$f_d^n = f_0 \frac{v}{c} \cos \theta_n \tag{16.31}$$

in cui  $\theta_n$  è l'angolo tra la direzione del moto e la congiungente con il riflettore<sup>62</sup>. Con i dati dell'esempio precedente (relativo ad un moto con  $v = 50$  Km/h ovvero 13.8 m/sec), ponendo  $f_0 = 1$  GHz si ottiene una  $f_d^n$  massima di 46.3 Hz, relativa al caso di  $\theta_n = 0$ <sup>63</sup>; indichiamo con  $f_D = \max_n \{f_d^n\} = f_0 \frac{v}{c}$  tale valore.

**Dispersione Doppler** Dato che ogni diverso percorso è caratterizzato da una  $f_d^n$  compresa tra zero e  $f_D$ , il segnale ricevuto contiene frequenze che si discostano da  $f_0$  in più o in meno, entro una deviazione massima pari ad  $f_D$ , per questo indicata come *dispersione* (o *spread*) Doppler, ed il canale è detto *dispersivo in frequenza*.

<sup>58</sup>Approssimiamo  $\theta$  come uguale in  $X$  e  $Y$ , nell'ipotesi che  $S$  sia molto lontana rispetto a  $d$ .

<sup>59</sup>Il rapporto  $n = \Delta l/\lambda$  indica quanti periodi di portante entrano in  $\Delta l$ , che moltiplicato per  $2\pi$  fornisce appunto la differenza tra le fasi di arrivo, nulla se  $n$  è intero.

<sup>60</sup>Vedi eq. (10.11) a pag. 285.

<sup>61</sup>Si tratta dello stesso effetto che produce la variazione del suono della sirena di un mezzo di soccorso, vedi [http://it.wikipedia.org/wiki/Effetto\\_Doppler](http://it.wikipedia.org/wiki/Effetto_Doppler)

<sup>62</sup>La stessa analisi è valida anche nel caso di un ricevitore *fermo* ma con i riflettori in movimento, come per la *riflessione ionosferica*: in tal caso l'espressione si scrive come  $f_d^n = f_0 \frac{v_n}{c} \cos \theta_n$ , considerando cioè la possibilità che i riflettori abbiano velocità diverse tra loro.

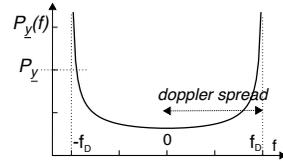
<sup>63</sup>Notiamo che se  $\theta_n = 0$  ci stiamo riferendo al caso in cui il moto si realizza lungo la congiungente tra ricevitore e sorgente (o riflettore).

Considerando il mobile raggiunto da infiniti percorsi con direzione di arrivo distribuita uniformemente (condizione di *scattering isotropo*), si può arrivare a mostrare<sup>64</sup> che la densità spettrale ricevuta assume una espressione del tipo

$$\mathcal{P}_{\underline{y}}(f) = \begin{cases} \frac{\mathcal{P}_{\underline{y}}}{\pi f_D \sqrt{1-(f/f_D)^2}} & \text{con } |f| \leq f_D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (16.32)$$

mostrata sotto, e del tutto simile a quella di pag. 116. La dispersione Doppler  $f_D$  costituisce nella pratica una misura della *velocità di variazione* del canale<sup>65</sup>, come già evidenziato in relazione alla frequenza degli affievolimenti di cui all'eq. (16.22).

Consideriamo infatti che l'involuppo complesso ricevuto  $\underline{y}(t)$  descritto dalla (16.30) è il risultato della somma vettoriale nel piano complesso dei termini  $a_n(t) e^{-j2\pi f_0 \tau_n(t)}$ , che in virtù dei diversi scostamenti Doppler sono ognuno in rotazione<sup>66</sup> ad una diversa velocità angolare  $2\pi f_d^n$ , tanto maggiore quanto più è grande  $f_D$ , che quindi determina la rapidità con cui il risultato  $\underline{y}(t)$  varia nel tempo.



**Tempo di coerenza** L'antitrasformata di  $\mathcal{P}_{\underline{y}}(f)$  è per definizione l'autocorrelazione di  $\underline{y}(t)$ , e per la (16.32) si ottiene  $\mathcal{R}_{\underline{y}\underline{y}}(\tau) = J_0(2\pi f_D \tau)$  in cui  $J_0$  è la funzione di Bessel del primo tipo di ordine zero graficata a pag. 290, ed il cui primo passaggio per zero avviene con  $\tau \simeq \frac{0.4}{f_D}$ , che corrisponde al minimo intervallo di tempo necessario ad osservare valori di  $\underline{y}(t)$  *incorrelati*; viceversa, un intervallo sufficientemente più piccolo trova il canale in condizioni pressoché immutate. Definendo allora

$$T_c = \frac{0.1}{f_D}$$

come *tempo di coerenza*, osserviamo che una trasmissione con periodo di simbolo  $T_s \geq T_c$  subisce condizioni del canale differenti nell'arco di tempo di un simbolo, ostacolandone la sincronizzazione<sup>67</sup>, ed in tal caso il fading viene detto *veloce*. Se invece  $T_s \ll T_c$  il canale si mantiene in condizioni pressoché stazionarie per tutto il periodo di simbolo, il fading è *lento*, ed il movimento non produce conseguenze sensibili. Utilizzando di nuovo i dati dell'ultimo esempio, ad un doppler spread  $f_D = 46.3$  Hz corrisponde un tempo di coerenza  $T_c = 21.6$  msec.

#### 16.3.4.7 Tipologia di canale radiomobile

Notiamo che il verificarsi contemporaneo della assenza di distorsione lineare in quanto  $W < B_c$ , e della stazionarietà del canale in quanto  $T_s < T_c$ , ovvero di *fading lento e piatto*, equivale in pratica al verificarsi delle condizioni di *canale perfetto* (pag. 183). Perché ciò possa accadere è

<sup>64</sup>Notiamo che il risultato è diretta conseguenza della condizione di scattering isotropo: infatti la (16.31) rappresenta un processo armonico (pag. 116) quando  $-\pi < \theta_n < \pi$  con d.d.p. uniforme, ed al tempo stesso rappresenta la deviazione della frequenza istantanea  $f_i$  rispetto ad  $f_0$  (§ 9.2.2), e dunque si verifica l'effetto di conversione AM-FM descritto al § 10.3.3.3. Se viceversa ad es. esistono due soli cammini, il primo diretto (S), e l'altro riflesso (R) con  il mobile nel mezzo,  $\mathcal{P}_{\underline{y}}(f)$  corrisponde a due impulsi in  $\pm f_D$ .

<sup>65</sup>In questo modo si ottiene una trattazione unificata sia per il caso di un ricevitore mobile in un contesto statico, sia per quello di un ricevitore fermo con riflettori in movimento. In entrambi i casi il *doppler spread*  $f_D$  può essere effettivamente *misurato* al ricevitore, in presenza di una portante non modulata.

<sup>66</sup>Si veda l'interessante animazione java presso

<http://www.wirelesscommunication.nl/reference/chaptr03/rayjava/rayjava.htm>.

<sup>67</sup>Ciò avviene perché in pratica è come se due simboli consecutivi pervenissero attraverso due differenti canali, e dunque non è possibile eseguire operazioni di media.

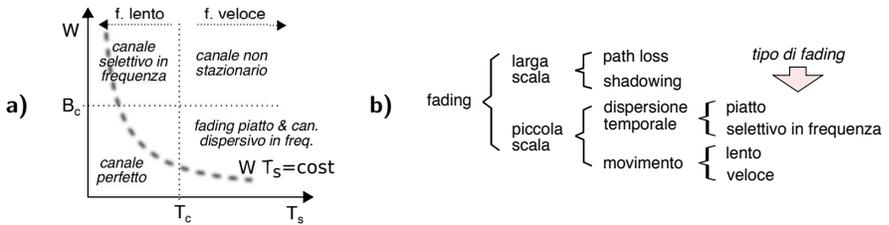


Figura 16.7: a) - Tipo di fading in relazione al canale ed al segnale; b) - caratterizzazione gerarchica del tipo di fading

necessario che si verifichi<sup>68</sup>

$$f_D \cdot \sigma_\tau \ll 1 \quad \text{ovvero} \quad T_c \cdot B_c \gg 1 \quad (16.33) \quad \begin{cases} W < B_c = \frac{0.1}{\sigma_\tau} & \text{no dist lin} \\ T_s < T_c = \frac{0.1}{f_D} & \text{stazionario} \end{cases}$$

Condizioni di slow flat fading

detta condizione di *sottodispersione (underspread)*. Nella pratica, i valori di  $f_D$  e  $\sigma_\tau$  per i canali in uso nelle telecomunicazioni soddisfano tale condizione. La figura 16.7-a) suddivide<sup>69</sup> il piano  $T_s, W$  nelle regioni per le quali si verificano i diversi tipi di fading, in funzione dai valori  $B_c$  e  $T_c$ , mentre la figura 16.7-b) rappresenta in forma gerarchica i fenomeni di attenuazione supplementare fin qui discussi.

**Esempio** Dato un canale con assegnati  $T_c$  e  $B_c$ , determinare la massima velocità per una trasmissione QPSK con impulso a coseno rialzato e  $\gamma = 1$ , in modo da evitare l'uso di un equalizzatore. Affrontiamo l'analisi fissando la banda occupata  $B = f_s (1 + \gamma)$  pari a  $B_c$ , da cui si ottiene una  $f_b = f_s \cdot 2 = B_c/2 \cdot 2 = B_c$ . In tal caso  $T_s = 1/f_s = 2/B_c$ , e se il canale verifica la condizione di sottodispersione (16.33), si ottiene anche  $T_s < T_c$ , ovvero il canale può essere ritenuto stazionario per la durata di un simbolo.

**Ricezione di trasmissioni radiomobili** Come discusso, il fading su piccola scala, pur se lento, può determinare una attenuazione selettiva in frequenza, vincolando il segnale trasmesso ad occupare una banda minore della banda di coerenza, oppure ad adottare tecniche di equalizzazione (§ 15.4.1) da parte del ricevitore. D'altra parte, anche in presenza di fading piatto, con il movimento l'ampiezza del segnale ricevuto subisce fluttuazioni *alla Rayleigh* (fig. 16.4), penalizzando le prestazioni ottenibili, ed imponendo l'adozione di un margine  $M^{ps}$  (eq. (16.20)) che aumenta di molto la potenza che occorre trasmettere. Sviluppiamo di seguito una discussione su come modificare le formule di calcolo della probabilità di errore in modo da valutare l'aumento della potenza necessaria *senza* dover determinare  $M^{ps}$ , mentre ai § 16.3.4.9 e 16.3.4.10 illustriamo come trasformare il fenomeno dei cammini multipli in una *opportunità* per ridurre la potenza necessaria.

**16.3.4.8 Probabilità di errore in presenza di fading di Rayleigh**

La variabilità temporale della potenza istantanea ricevuta  $\rho^2$  può essere tenuta direttamente in conto se l'espressione della  $P_e^{bit} (E_b/N_0)$  ottenuta al § 14 per un canale gaussiano viene considerata come quella di una probabilità *condizionata*  $Pr \left( err / \frac{E_b}{N_0} \right)$  rispetto ad un determinato

<sup>68</sup>Infatti le due condizioni  $W < B_c$  e  $T_s < T_c$  possono essere riscritte come  $W \sigma_\tau \ll 1$  e  $f_D T_s \ll 1$ ; moltiplicandole tra loro si ottiene  $W \sigma_\tau f_D T_s \ll 1$ . Ponendo quindi  $W \simeq \frac{1}{T_s}$  si ottiene la condizione indicata.

<sup>69</sup>Il ramo di iperbole che individua il luogo dei punti  $W \cdot T_s = \text{cost}$  è tracciato in base all'osservazione della nota precedente, ossia  $W \simeq \frac{1}{T_s}$ , da cui  $W \cdot T_s \simeq 1$ .

valore di  $E_b/N_0$ , di cui valutare il *valore atteso* rispetto alla variabilità statistica dei valori *ricevuti* di  $E'_b = \rho^2 E_b$ , ovvero

$$P_e^{bit} = E_\rho \left\{ Pr \left( err / \frac{\rho^2 E_b}{N_0} \right) \right\} = \int_0^\infty Pr \left( err / \frac{\rho^2 E_b}{N_0} \right) p(\rho) d\rho$$

Prendendo come esemplare il caso della modulazione BPSK<sup>70</sup>, partendo dall'eq. (14.7) possiamo scrivere  $Pr \left( err / \frac{\rho^2 E_b}{N_0} \right) = P_e^{bit} \left( \frac{\rho^2 E_b}{N_0} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \rho \sqrt{E_b/N_0} \right\}$ , mentre in presenza di fading di Rayleigh la v.a.  $\rho$  ha come noto d.d.p.  $p_\rho(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$  con  $\rho > 0$ ; ricordando (§ 5.2.4) l'espressione di  $\operatorname{erfc} \{ \alpha \} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\infty e^{-y^2} dy$  possiamo quindi scrivere

$$P_e^{bit} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{\rho \sqrt{E_b/N_0}}^\infty e^{-y^2} dy \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho$$

ed invertendo l'ordine di integrazione otteniamo<sup>71</sup>

$$P_e^{bit} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2} \int_0^{y \sqrt{N_0/E_b}} \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2} \left[ 1 - e^{-\frac{N_0}{E_b} \frac{y^2}{2\sigma^2}} \right] dy \quad (16.34)$$

Notando ora che  $E \{ \rho^2 E_b \} = \bar{E}'_b = 2\sigma^2 E_b$ , indichiamo con  $\Gamma = \frac{2\sigma^2 E_b}{N_0} = \frac{\bar{E}'_b}{N_0}$  l'SNR per bit *medio* che viene ricevuto, e dopo alcuni passaggi<sup>72</sup>, si ottiene il risultato *in forma chiusa*

$$P_e^{Rayleigh}(bit) = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\Gamma}{1+\Gamma}} \right)$$

che confrontato con l'espressione di  $P_e^{BPSK}(bit)$  per un canale AWGN evidenzia come in presenza di fading di Rayleigh la  $P_e$  è sensibilmente peggiore, e diminuisce molto più lentamente all'aumentare di  $E_b/N_0$ , come può essere apprezzato dalla figura 16.8.

Procedendo in modo simile si possono valutare le prestazioni per le altre forme di modulazione riportate nella tabella di fig. 16.8, assieme al rispettivo valore approssimato di  $P_e^{bit}$  per grandi valori di  $\Gamma$ .

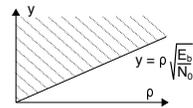
**Esempio** Determinare l'incremento di potenza necessario a conseguire una  $P_e^{bit} = 10^{-4}$  nel caso di una modulazione BPSK affetta da fading di Rayleigh, rispetto alla potenza necessaria su di un canale AWGN.

Dal grafico di fig. 16.8 osserviamo che nel caso AWGN è necessario un  $E_b/N_0$  circa pari a 8 dB, mentre in presenza di fading ne occorrono circa 34, dunque l'incremento di potenza assomma a 26 dB.

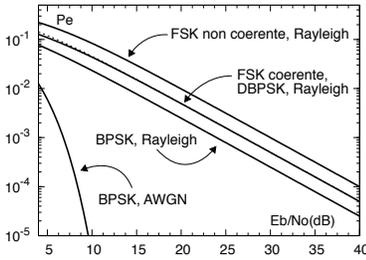
<sup>70</sup>A causa delle fluttuazioni di ampiezza legate al fading, non è possibile ricorrere a modulazioni di tipo QAM, e nel seguito sono prese in considerazione unicamente modulazioni di fase e di frequenza.

<sup>71</sup>Il dominio di integrazione è rappresentato in figura, e anziché muoversi prima lungo  $y$  dalla retta  $y = \rho \sqrt{E_b/N_0}$  ad infinito ottenendo una funzione di  $\rho$ , e quindi integrare con  $0 < \rho < \infty$ , ci si muove in orizzontale tra  $\rho = 0$  e  $\rho = y \sqrt{N_0/E_b}$  ottenendo una funzione di  $y$ , quindi integrata con  $0 < y < \infty$ . Verifichiamo quindi che

$$\int_0^{y \sqrt{N_0/E_b}} \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho = -e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^{y \sqrt{N_0/E_b}} = -e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2} \frac{N_0}{E_b}} + 1.$$



<sup>72</sup>Con l'ultima posizione la (16.34) si riscrive come  $P_e^{bit} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-y^2 - \frac{y^2}{\Gamma}} dy$ . Tenendo conto che  $\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$  (vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Integrale\\_di\\_Gauss](https://it.wikipedia.org/wiki/Integrale_di_Gauss)) il primo termine risulta pari ad  $\frac{1}{2}$ , mentre dato che  $-y^2 - \frac{y^2}{\Gamma} = -\frac{\Gamma+1}{\Gamma} y^2$  e che risulta anche  $\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha y^2} dy = \sqrt{\pi/\alpha}$ , il secondo termine si riscrive come  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\Gamma+1}{\Gamma} y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{1+\Gamma}}$ , da cui il risultato.



modulazione	$P_e^{Rayleigh}(bit)$	$P_e _{\Gamma \rightarrow \infty}$
BPSK antip. coe.	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{1+\Gamma}}$	$\frac{1}{4\Gamma}$
DBPSK	$\frac{1}{2(1+\Gamma)}$	$\frac{1}{2\Gamma}$
BFSK ortog. coe.	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{2+\Gamma}}$	$\frac{1}{2\Gamma}$
BFSK ortog. inc.	$\frac{1}{2+\Gamma}$	$\frac{1}{\Gamma}$

Figura 16.8: Probabilità di errore in presenza di fading di Rayleigh per i tipi di modulazione possibili

**16.3.4.9 Ricevitore multi-antenna**

Continuando a trattare il caso di fading di Rayleigh *piatto*, una soluzione semplice e vantaggiosa è quella di dotare il ricevitore di più di una antenna, in modo da attuare una tecnica di *diversità di spazio*, introdotta al § 16.3.3.6. Se la separazione tra le antenne è sufficiente<sup>73</sup>, ad ognuna di esse corrisponde un canale radio *staticamente indipendente* da quello dell'altra, e quindi se per uno di essi si riceve un segnale affetto da *deep fade*, l'altro probabilmente ne è esente.

**Selezione di diversità** Consideriamo un ricevitore per cui siano disponibili  $M$  canali indipendenti affetti da fading di Rayleigh, che indichiamo come *rami di diversità*. Su ognuno di essi viene ricevuto un segnale con inviluppo complesso (vedi eq. (16.17))

$$r_i(t) = \rho_i \underline{x}(t) e^{j\theta_i} + \nu_i(t) \tag{16.35}$$

con  $i = 1, 2, \dots, M$ , in cui  $\underline{x}(t)$  è l'inviluppo complesso del segnale modulato con potenza  $E_b f_b$ ,  $\rho_i$  è una v.a. con d.d.p.  $p(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$  uguale per tutti i rami e  $E\{\rho_i \rho_j\} = 0$  con  $i \neq j$ , e  $\nu_i(t)$  è un processo gaussiano complesso con c.a. di b.f. indipendenti, a media nulla e spettro di densità di potenza  $N_0$ . A ciò corrisponde un  $E_b/N_0$  medio che indichiamo come  $\Gamma = \frac{E_b}{N_0} E\{\rho^2\} = \frac{E_b}{N_0} 2\sigma^2$  (vedi pag. 485), mentre indichiamo con  $\gamma_i$  l' $E_b/N_0$  istantaneo del ramo  $i$ , a cui compete una d.d.p. esponenziale  $p(\gamma_i) = \frac{1}{\Gamma} e^{-\gamma_i/\Gamma}$  con  $\gamma_i \geq 0$  (vedi eq. (16.19)). Pertanto, la probabilità che *un singolo* ramo abbia un  $\gamma_i$  inferiore ad una soglia  $\delta$  risulta (vedi eq. (17.3) pag. 523)

$$Pr\{\gamma_i \leq \delta\} = \int_0^\delta p(\gamma_i) d\gamma_i = 1 - \int_\delta^\infty \frac{1}{\Gamma} e^{-\gamma_i/\Gamma} d\gamma_i = 1 - e^{-\delta/\Gamma}$$

mentre la probabilità che tutti gli  $M$  rami indipendenti presentino *contemporaneamente*  $E_b/N_0 < \delta$  vale  $Pr\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M \leq \delta\} = (1 - e^{-\delta/\Gamma})^M$  che indichiamo come  $P_M(\delta)$ , e quindi la probabilità che *almeno uno* dei rami consegua  $E_b/N_{0i} = \gamma_i \geq \delta$  risulta

$$Pr\{\gamma_i \geq \delta\} = 1 - P_M(\delta) = 1 - (1 - e^{-\delta/\Gamma})^M$$

<sup>73</sup>Nel caso di un telefono *cellulare* sono presenti numerosi riflettori nelle vicinanze del ricevitore, producendo fading incorrelati per distanze di circa mezza lunghezza d'onda. Viceversa nel caso della *base station* fissa con cui il cellulare comunica, i cammini multipli hanno tutti origine nei pressi del mobile, riducendo la gamma di angoli di incidenza dei raggi ricevuti, che iniziano ad essere indipendenti per distanze di decine di lunghezze d'onda, e quindi in tal caso sono necessarie antenne molto più lontane tra loro.

**Esempio** Consideriamo un ricevitore con quattro rami di diversità, ognuno affetto da fading di Rayleigh, e con un  $E_b/N_0$  medio  $\Gamma = 20$  dB. Determinare la probabilità che l' $E_b/N_0$  istantaneo  $\gamma_i$  di tutti i rami sia contemporaneamente inferiore ad un valore  $\delta$  tale che  $\frac{\delta}{\Gamma} \Big|_{dB} = -10$  dB, e confrontare il risultato con il caso di un ricevitore senza diversità.

Risulta che  $Pr\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \leq \delta\} = P_4(\delta) = (1 - e^{-0.1})^4 = 8.2 \cdot 10^{-5}$ , mentre  $Pr\{\gamma_i \geq \delta\} = P_1(\delta) = 1 - e^{-0.1} = 9.5 \cdot 10^{-2}$ : pertanto l'uso di quattro rami di diversità corrisponde ad un miglioramento di più di mille volte!

L'approccio della *selezione di diversità* è facilmente realizzabile in quanto coinvolge solamente il ricevitore, dove viene comparata la potenza del segnale in arrivo sulle diverse antenne, e quindi il più forte è inviato al ricevitore. Dato che il livello di potenza si basa su stime che richiedono una media temporale, la decisione non avviene in modo prettamente istantaneo; d'altra parte, è sufficiente che avvenga con tempi inferiori dell'inverso della frequenza di fading.

Ma si può fare di meglio, se vengono utilizzati *tutti* i rami in contemporanea, anziché uno solamente.

**Combinazione di massimo rapporto** Nell'ipotesi più generale che il segnale ricevuto (16.35) sui diversi rami sia soggetto a fading di diversa intensità, e dunque con  $E_b/N_0$  medio

$$\Gamma_i = \frac{E_b}{N_0} E\{\rho_i^2\} = \frac{E_b}{N_0} R_i^2$$

in condizioni di *slow fading* il ricevitore può essere in grado di *stimare* sia le fasi  $\theta_i$  con cui il segnale si presenta sui diversi rami, sia i valori  $R_i$  del corrispondente guadagno medio di ampiezza. Pertanto, il ricevitore può *annullare* i termini di fase mediante il prodotto di  $r_i(t)$  per  $e^{-j\theta_i}$ , e procedere ad una operazione di somma (pesata) *coerente*, dando luogo ad una grandezza di decisione in corrispondenza degli istanti di simbolo pari a

$$r_k = \sum_{i=1}^M G_i \Gamma_i(kT_s) e^{-j\theta_i} = \sum_{i=1}^M G_i \rho_i \underline{x}_i(kT_s) + \sum_{i=1}^M G_i \nu_i(t) \quad (16.36)$$

dove i coefficienti  $G_i$  rappresentano il diverso peso da attribuire ai rami, da scegliere in modo da massimizzare  $E_b/N_0$ . Alla componente di segnale corrisponde dunque una energia media  $E_b \left( \sum_{i=1}^M G_i R_i \right)^2$ , mentre per quella di rumore si ottiene  $N_0 \sum_{i=1}^M G_i^2$ , dato che i campioni di rumore sono statisticamente indipendenti: pertanto l' $E_b/N_0$  medio della somma (16.36) risulta pari a

$$\Gamma = \frac{E_b}{N_0} \frac{\left( \sum_{i=1}^M G_i R_i \right)^2}{\sum_{i=1}^M G_i^2} \quad (16.37)$$

Indicando ora con  $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_M)$  il vettore dei coefficienti della combinazione e con  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_M)$  quello dei guadagni di ampiezza medi dei rami, osserviamo che scegliendo un vettore  $c\mathbf{G}$  il risultato non cambia, e dunque limitiamoci a cercare vettori con modulo unitario ovvero  $|\mathbf{G}|^2 = \sum_{i=1}^M G_i^2 = 1$ , in modo da esprimere la (16.37) come  $\Gamma = \frac{E_b}{N_0} |\mathbf{G} \cdot \mathbf{R}|^2$ . Dato che il prodotto scalare è massimo quando i vettori sono paralleli, si ottiene che  $\Gamma$  è massimizzato scegliendo  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{MR} = \mathbf{R}/|\mathbf{R}|$  in modo che risulti a modulo unitario, e che il segnale dei diversi rami sia pesato proporzionalmente al corrispondente guadagno medio  $R_i$ . Tale strategia

è indicata come *maximum ratio combining*, e corrisponde ad un  $E_b/N_0$  medio della (16.36) pari a<sup>74</sup>

$$\Gamma_{MR} = \frac{E_b}{N_0} |\mathbf{R}|^2 = \frac{E_b}{N_0} \sum_{i=1}^M R_i^2 = \sum_{i=1}^M \Gamma_i$$

ovvero pari alla *somma* degli  $E_b/N_0$  medi dei singoli rami, che quindi può conseguire valori *accettabili* anche se nessuno dei rami lo ottiene individualmente.

**Combinazione equal gain** Nell'ipotesi in cui i diversi rami siano soggetti ad un fading di intensità comparabile e dunque  $R_i = R$ , i pesi  $G_i$  della combinazione possono essere posti *uguali tra loro* e pari a  $G_i = 1/\sqrt{M}$ , permettendo una notevole semplificazione del ricevitore<sup>75</sup>, e conseguendo un  $E_b/N_0$  medio

$$\Gamma_{EG} = M \frac{E_b}{N_0} R^2$$

ovvero  $M$  volte quello di ogni singolo ramo. D'altra parte, anche nel caso di guadagni differenti  $R_i \neq R_j$ , il metodo *equal gain* offre comunque risultati solo di poco inferiori a quelli di *massimo rapporto*, e comunque migliori del metodo *a selezione*.

#### 16.3.4.10 Ricevitore Rake

Questo particolare ricevitore trae vantaggio da una modulazione DSSS (§ 14.9.2) che occupa una banda maggiore della banda di coerenza  $W_p > B_c$ , in modo che il canale presenti una attenuazione *selettiva in frequenza*, legata alla ricezione di più repliche del segnale trasmesso a causa del fenomeno dei cammini multipli. In tal caso un metodo di modulazione tradizionale richiederebbe un equalizzatore per rimuovere l'ISI prodotta, mentre se le repliche prodotte dai multipath arrivano con intervalli temporali maggiori del periodo di chip  $T_p$ , le proprietà di *bassa autocorrelazione* delle sequenze PN utilizzate nel DSSS rendono tali repliche equivalenti ad una qualsiasi altra interferenza a larga banda, permettendo di fare a meno di una procedura di equalizzazione<sup>76</sup>.

<sup>74</sup>Infatti  $|\mathbf{R}|^2 = \sum R_i^2$ , e con  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{MR}$  la (16.37) diviene  $\Gamma = \frac{E_b}{N_0} \cdot \frac{(\sum R_i^2)^2}{\sum R_i^2} = \frac{E_b}{N_0} \sum R_i^2$

<sup>75</sup>Fermo restando la necessità di *rifasare* i rami per ottenere una somma *coerente*.

<sup>76</sup>Indicando con  $\{b_i\}$  la sequenza informativa e con  $\tilde{x}(t) = \sum_i b_i pn(t - iT_b)$  l'involuppo complesso del segnale DSSS trasmesso, ricordando la (16.24) e trascurando il fattore  $1/2$  della convoluzione tra involuppi complessi (eq. (12.3)), il segnale ricevuto in presenza di multipath ha espressione

$$\tilde{r}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} Z_n \tilde{x}(t - \tau_n) = \sum_{n=0}^{N-1} Z_n \sum_i b_i pn(t - iT_b - \tau_n)$$

dove i coefficienti  $Z_n$  sono i guadagni *complessi* dovuti ai cammini multipli. La decodifica del simbolo  $j$ -esimo avviene moltiplicando  $\tilde{r}(t)$  per  $pn(t - jT_s - \tau_0)$  (allineata al primo ritardo  $\tau_0$ ) ed integrando il risultato su di un periodo di bit, realizzando così un filtro adattato alla sequenza PN, ovvero

$$\begin{aligned} \hat{b}_j &= \frac{1}{T_s} \int_{jT_s + \tau_0}^{(j+1)T_s + \tau_0} \tilde{r}(t) pn(t - jT_s - \tau_0) dt = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \sum_{n=0}^{N-1} Z_n b_j pn(\alpha - \tau'_n) pn(\alpha) d\alpha = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} Z_n b_j \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} pn(\alpha - \tau'_n) pn(\alpha) d\alpha = Z_0 b_j + \sum_{n=1}^{N-1} Z_n b_j R_{PN}(\tau'_n) \end{aligned}$$

in cui al secondo passaggio sopravvive solo il termine  $j$ -esimo della  $\sum_i$  in quanto è l'unico entro gli estremi di integrazione, dopodiché si pone  $\alpha = t - jT_s - \tau_0$ , e  $\tau'_n = \tau_n - \tau_0$ . Il primo termine del risultato è pari (a meno del coeff. complesso  $Z_0$ ) al simbolo cercato, mentre il secondo rappresenta il termine di interferenza intersimbolica legato ai ritardi  $\tau'_n$ , e che risulta ridotto rispetto al primo termine del rapporto  $R_{PN}(\tau'_n)/R_{PN}(0)$ .

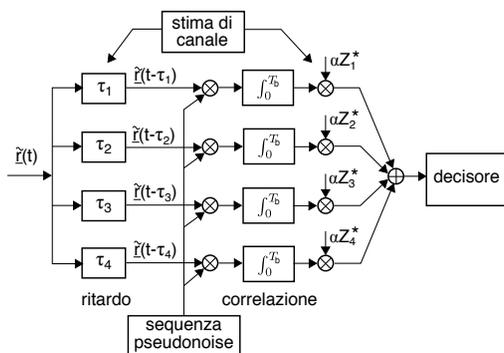


Figura 16.9: Schema di principio del ricevitore Rake

Come mostrato in fig. 16.9, ciò avviene moltiplicando l'uscita del correlatore  $n$ -esimo per  $Z_n^*$ , e dato che l'uscita stessa (vedi nota 76) contiene il fattore  $Z_n$ , tale operazione elimina il contributo di fase, e *pesa* il contributo del ramo con  $Z_n^2$ , ovvero con l'energia associata al ritardo  $\tau_n$ <sup>78</sup>. Tali pesi sono infine scalati di una quantità  $\alpha = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} Z_n^2}$  in modo da mantenere la dinamica del risultato entro valori noti.

## 16.4 Collegamenti in fibra ottica

Una fibra ottica è realizzata in vetro o silicio fuso, ovvero qualunque materiale dielettrico trasparente alla luce, tanto che può essere realizzata anche in plastica. Il suo utilizzo è quello di trasportare energia luminosa in modo guidato. Una caratteristica che deriva direttamente dalla sua natura è l'immunità della fibra ottica ai disturbi di natura elettromagnetica; tale proprietà impedisce fenomeni di interferenza (diafonia), così come non permette di prelevare segnale dall'esterno (intercettazione).

**Il segnale luminoso** Le lunghezze d'onda delle radiazioni elettromagnetiche nel campo del visibile sono comprese tra circa 100  $\mu\text{m}$  dell'infrarosso e 50 nm dell'ultravioletto (1 nm =  $10^{-9}$  metri), che corrispondono a frequenze (ricordando ancora che  $f = \frac{c}{\lambda}$ ) che vanno da  $3 \cdot 10^{12}$  fino a  $6 \cdot 10^{15}$  Hz. Questi valori individuano una banda passante veramente notevole se comparata ad altri mezzi trasmissivi: supponiamo infatti di effettuare una modulazione

Infrarosso	→	Ultravioletto	
$10^{-4}$	→	$50 \cdot 10^{-9}$	$\lambda$ [metri]
$3 \cdot 10^{12}$	→	$6 \cdot 10^{15}$	$f$ [Hz]

che occupi una banda pari allo 0.1% della frequenza portante. Se  $f_0 = 1$  GHz, si ha 1 MHz di banda; ma se  $f_0 = 10^{13}$ , si ha una banda di 10 GHz!

### 16.4.1 Trasmissione ottica

Anche se sono teoricamente possibili schemi di *modulazione analogica*, le fibre ottiche sono usate per trasportare informazione di natura *binaria* secondo lo schema di fig. 16.10, in cui la

<sup>77</sup>Detti *fingers*, ovvero dita (del rastrello).

<sup>78</sup>Ciò riduce il peso dei contributi relativi a rami su cui perviene un segnale di ampiezza ridotta, la cui uscita dipende in misura maggiore dal rumore.

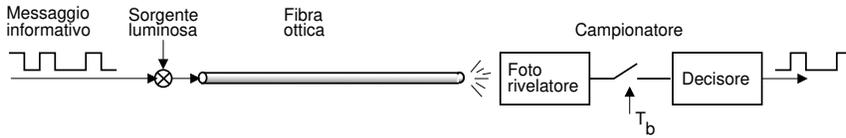
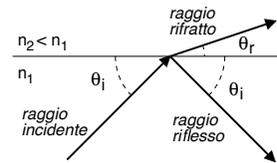


Figura 16.10: Schema di trasmissione in fibra ottica

luce emessa da una sorgente è accesa o spenta, ovvero modulata in ampiezza, con uno schema detto *on-off keying* o *OOK*<sup>79</sup>. All'altro estremo della fibra, un fotorelevatore effettua una rivelazione *incoerente* dell'energia luminosa, che viene nuovamente convertita in un segnale elettrico. Le prime fibre ottiche risalgono al 1970, e fornivano attenuazioni dell'ordine di 20 dB/Km. Attualmente si sono raggiunti valori di attenuazione di 0.2 dB/Km, pari ad un quarto di quella dei migliori cavi coassiali. D'altra parte, a differenza del rame, il materiale utilizzato per le fibre (vetro o silicio) è largamente disponibile in natura. Inoltre, a parità di diametro, una fibra ottica trasporta un numero anche 1000 volte maggiore di comunicazioni rispetto ad un cavo coassiale, fornendo quindi anche un risparmio di spazio.

**Propagazione luminosa e indice di rifrazione** Lo spazio libero è il mezzo di propagazione in cui la luce viaggia più velocemente. Il rapporto tra  $c = 3 \cdot 10^8$  m/sec, e la velocità di propagazione  $v$  in un mezzo trasparente, è l'*indice di rifrazione*<sup>80</sup>  $n$  del mezzo stesso:  $n = c/v$ , risultando  $n \geq 1$ . **Esempio** Se  $n = 2$  allora la velocità di propagazione della luce nel nuovo mezzo è la metà di quella che avrebbe nello spazio.

Quando un raggio luminoso incontra una superficie di separazione tra mezzi con diverso indice  $n$  (ad esempio, da  $n_1$  ad  $n_2 < n_1$ ) una parte di energia si riflette con angolo  $\theta_i$  uguale a quello *incidente*, e la restante parte continua nell'altro mezzo, ma con diverso angolo  $\theta_r < \theta_i$ . La relazione tra gli angoli è nota come *legge di Snell*



$$\cos \theta_r = \frac{n_1}{n_2} \cos \theta_i \quad (16.38)$$

e dunque il raggio *refratto* è più inclinato nel mezzo con  $n$  inferiore (dove viaggia più veloce). Quando  $\theta_r$  si azzera, la (16.38) è pari ad uno, ed a ciò corrisponde un valore *critico*  $\theta_c$  di  $\theta_i$  per il quale  $\cos \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$ , mentre per  $\theta_i < \theta_c = \arccos \frac{n_2}{n_1}$  non si verifica rifrazione, ma *tutto il raggio viene riflesso*. La capacità della fibra ottica di trasportare energia luminosa si fonda proprio su questo fenomeno<sup>81</sup>, che a sua volta ne determina la struttura, costituita da un nucleo (*core*) centrale con indice di rifrazione  $n_1$ , circondato da un rivestimento (*cladding*) con indice  $n_2 < n_1$ <sup>82</sup>; entrambi racchiusi in una guaina (*jacket*) di materiale opaco, raffigurati in fig. 16.11a.

<sup>79</sup>Indicata anche come *intensity modulation and direct detection* (IMDD). In realtà è anche possibile adottare tecniche di modulazione numerica come PSK e QAM, che richiedono una detezione *coerente* (vedi ad es. <https://doi.org/10.1364/OE.16.000753>), ma tali sistemi sono tuttora in fase sperimentale, e l'esposizione prosegue per il caso universalmente adottato.

<sup>80</sup>Vedi [http://it.wikipedia.org/wiki/Indice\\_di\\_rifrazione](http://it.wikipedia.org/wiki/Indice_di_rifrazione), ma anche il video <https://www.youtube.com/watch?v=k7ohfaMmTKg>.

<sup>81</sup>Qui descritto in termini di ottica geometrica, approssimazione valida per un diametro del *core* ben maggiore di quello della  $\lambda$  incidente. Per dimensioni comparabili, occorre invece ricorrere alla *teoria di propagazione delle onde*, su cui non ci avventuriamo.

<sup>82</sup>I diversi valori di  $n$  sono ottenuti drogando differentemente la sezione della fibra.

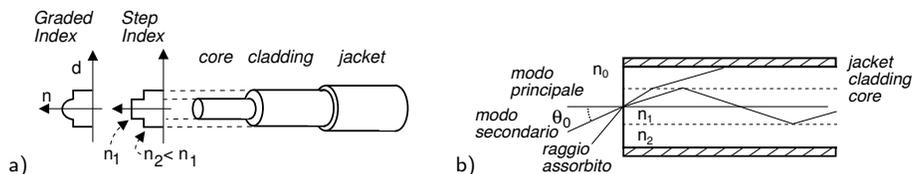


Figura 16.11: Struttura della fibra ottica (a) e modi di propagazione (b)

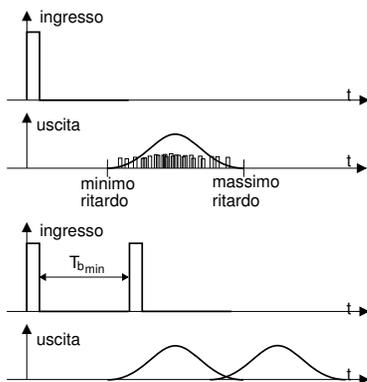
Applicando la (16.38) anche all'interfaccia tra sorgente luminosa (con indice di rifrazione  $n_0 < n_1$ ) e fibra, si definisce *apertura numerica*<sup>83</sup> il valore  $\Delta = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_0 \sin \theta_0^{Max}$ , dove  $\theta_0^{Max}$  è il massimo angolo  $\theta_0$  (vedi fig. 16.11b) con cui può entrare energia nella fibra, e quindi continuare a propagarsi mediante riflessione totale. Pertanto si ottiene  $\theta_0^{Max} = \arcsin \frac{\Delta}{n_0}$ , e notiamo che quanto più  $\Delta$  è piccola, ovvero  $n_1$  ed  $n_2$  sono simili, tanto più  $\theta_0^{Max}$  si riduce, e dunque si riduce la potenza luminosa che viene immessa nella fibra ottica, ma... si ottiene il beneficio illustrato di seguito.

Quando un raggio luminoso attraversa la fibra, l'energia si propaga mediante diversi *modi di propagazione*, uno per ogni angolo  $\theta_0 < \theta_{0c}$  con cui entra la luce incidente<sup>84</sup>. Il *modo principale* è quello che si propaga lungo l'asse rettilineo, mentre i *modi secondari* sono quelli con angolo  $\theta_i < \theta_c$  che si riflettono completamente al confine tra core e cladding. I modi associati ad angoli più elevati di  $\theta_c$  vengono progressivamente assorbiti dalla guaina, e dunque non si propagano.

**Dispersione modale** Questo fenomeno è dovuto al fatto che i modi di propagazione relativi agli angoli di incidenza più elevati percorrono di fatto *più strada*, e dunque impiegano più tempo per giungere a destinazione: pertanto, ogni singolo impulso luminoso presente in ingresso produce in uscita più impulsi distanziati nel tempo, uno per ogni modo di propagazione. Dato che inoltre avviene un continuo scambio di energia tra i diversi modi, si ottiene che l'uscita sarà un segnale con una maggiore estensione temporale, come esemplificato in figura.

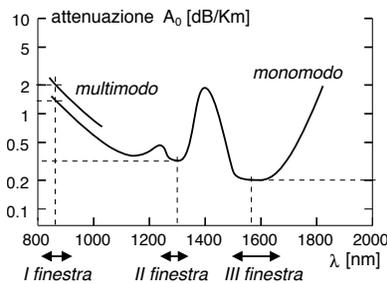
L'entità della *dispersione temporale* (differenza tra ritardo max e min) è tanto maggiore quanto più il collegamento è lungo, e quanti più modi partecipano alla propagazione: un suo valore tipico è dell'ordine di 10 nsec/Km. La conseguenza di questo fenomeno è la limitazione della *massima frequenza* con cui gli impulsi luminosi possono essere posti in ingresso alla fibra; impulsi troppo vicini causano infatti interferenza intersimbolica (ISI) in uscita, rendendo gli impulsi praticamente indistinguibili. Pertanto la massima frequenza di segnalazione in una fibra ottica, dipende dalla sua *lunghezza*.

Si indicano come *multimodo* le fibre ottiche in cui sono presenti più modi di propagazione. Queste sono del tipo *STEP INDEX* se  $n$  cambia in modo brusco, o *GRADED INDEX* se il core ha un indice graduato. Nel secondo caso la dispersione temporale è ridotta; infatti quando i modi secondari attraversano la sezione periferica del core, incontrano un indice di rifrazione



<sup>83</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical\\_aperture](https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_aperture)

<sup>84</sup>In realtà questa interpretazione data in chiave di ottica geometrica è una semplificazione, ed in effetti i *modi di propagazione* sono quelli che risultano dalla applicazione delle equazioni di Maxwell alla propagazione in fibra.



Finestra	$\lambda$ [ $\mu\text{m}$ ]	$A_d$ [dB/Km]
I	0.8÷0.9	1.2 (monomodo) 2 (multimodo)
II	1.2÷1.3	0.35
III	1.5÷1.7	0.2

Figura 16.12: Dipendenza della attenuazione chilometrica dalla lunghezza d'onda

$n$  ridotto, e quindi viaggiano più veloci. Una diversa (e drastica) soluzione al problema della dispersione temporale, è fornita dalle fibre ottiche *monomodo*: queste sono realizzate con un core di diametro così piccolo<sup>85</sup>, da consentire alla sorgente luminosa di immettere luce nella fibra solo con angolo di incidenza nullo, e quindi permettere la propagazione del solo modo principale.

Ovviamente le ultime due soluzioni (graded index e fibra monomodo) sono state rese possibili grazie ai progressi nei processi di fabbricazione.

**Attenuazione** In modo simile ai cavi elettrici, anche le fibre ottiche sono mezzi dissipativi, in quanto parte dell'energia in transito viene assorbita dalla fibra stessa e trasformata in calore. I fenomeni di assorbimento che si manifestano sono quelli di natura *intrinseca* del materiale silicio, quelli legati allo *scattering* per disomogeneità della densità e del diametro della fibra, e quelli legati alla presenza di *impurità chimiche*<sup>86</sup>, che possono ridurre la trasparenza oppure avere dimensioni (a livello molecolare) comparabili con le lunghezze d'onda in gioco.

La caratteristica comune ai fenomeni di assorbimento è una marcata dipendenza da  $\lambda$ , cosicché la loro combinazione determina la caratteristica di attenuazione *chilometrica*  $A_0$  mostrata in fig. 16.12, dove possono essere individuati 3 intervalli di lunghezze d'onda (detti *finestre*) per i quali l'assorbimento è ridotto, ed in cui sono effettuate le trasmissioni ottiche. La prima finestra (con attenuazione maggiore) è stata l'unica disponibile agli inizi, a causa dell'assenza di trasduttori affidabili a frequenze inferiori, ed è tuttora usata per collegamenti economici e scarsamente critici. La seconda finestra ha iniziato ad essere usata assieme alle fibre monomodo, grazie all'evoluzione tecnologica dei trasduttori, mentre l'uso della III finestra si è reso possibile dopo essere riusciti a limitare la *dispersione cromatica* delle fibre (vedi appresso).

Tra le fonti di attenuazione *supplementare* troviamo quella causata dalle *giunzioni* tra tratte in fibra ottica: l'uso di connettori produce una perdita di  $0.4 \div 1$  dB, ed i giunti meccanici  $\simeq 0.2$  dB oppure anche 0,05 dB se ottimizzati per via strumentale. Inoltre, le fibre si possono *fondere* tra loro, con perdite tra 0,01 e 0,1 dB. Una ulteriore fonte di perdite localizzate può essere costituita *dalle curve* che devono avere un raggio non troppo stretto, altrimenti parte dell'energia non subisce riflessione totale, e viene assorbita dal *jacket*.

<sup>85</sup>Si passa dai 50  $\mu\text{m}$  per le fibre multimodo, a circa 8  $\mu\text{m}$  nel caso monomodo.

<sup>86</sup>Ovvero molecole e ioni di altri elementi. Ad esempio, lo ione OH- è quello che determina il picco di assorbimento a 1.39  $\mu\text{m}$ .

**Dispersione cromatica** Dopo aver ridotto od eliminato il fenomeno di dispersione modale, è emersa una ulteriore causa di dispersione temporale dell'energia immessa nella fibra ottica: il problema si verifica se il segnale di ingresso non è perfettamente monocromatico, ovvero se in esso sono presenti diverse lunghezze d'onda. Dato che il valore dell'indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda,  $\lambda$  diverse si propagano con velocità differenti e raggiungono l'altro estremo della fibra in tempi successivi<sup>87</sup>. La dispersione cromatica *nominale*  $D_0$  della fibra si misura in  $[\frac{psec}{Km \cdot nm}]$ , e dà luogo ad una effettiva dispersione temporale  $D = D_0 \cdot L \cdot \Delta\lambda$ , che è direttamente proporzionale alla lunghezza  $L$  della fibra ed alla estensione della *gamma cromatica*  $\Delta\lambda$  della sorgente<sup>88</sup>. Per ridurre il fenomeno è possibile:

- utilizzare una lunghezza d'onda  $\lambda$  per la quale la dispersione cromatica è ridotta. Ad esempio, una fibra di silicio *normale* produce una dispersione nominale 15 volte inferiore a  $1.3 \mu m$  ( $\sim 1 [\frac{psec}{Km \cdot nm}]$ ) che non a  $1.5 \mu m$ <sup>89</sup>;
- scegliere una sorgente con la *minima* estensione cromatica  $\Delta\lambda$ ;
- adottare una tecnica di *controllo* della dispersione, vedi § 16.4.3.3.

**Dispersione del modo di polarizzazione** Indicata come PMD, è una conseguenza della non perfetta simmetria cilindrica del *core*, che causa il fenomeno della *birifrangenza*<sup>90</sup>; dato che queste variazioni geometriche sono causali e disperse su tutta la fibra, ciò determina un continuo scambio di energia tra le componenti a polarizzazione verticale ed orizzontale del segnale in transito, a cui si associa una *dispersione temporale* che dipende dalla radice della lunghezza della fibra, in una proporzione compresa tra 0.1 e 0.01  $ps/\sqrt{Km}$ . Normalmente questo fenomeno ha conseguenze trascurabili, ma può incidere sulle prestazioni di collegamenti lunghi ed a velocità elevata.

**Effetti non lineari** Nascono dall'interazione tra la luce ed il materiale in cui si propaga, e dipendono dalla intensità del fascio ottico, ovvero da quanto questo è *concentrato spazialmente*. Causano perdite di intensità del segnale, rumore, interferenza intercanale nel WDM, e dispersione temporale, ma è anche possibile trarne vantaggio, come nel caso dell'amplificazione ottica, della conversione di lunghezze d'onda e della compensazione di dispersione. Possiamo distinguere due categorie di effetti non lineari:

- diffusione stimolata (o *scattering*) legata alla interazione tra fotoni ed atomi della fibra, come lo *stimulated Brillouin scattering* (SBS) e lo *stimulated Raman scattering* (SRS);
- fenomeni legati all'*effetto Kerr*<sup>91</sup> ed alla dipendenza dell'indice di rifrazione dalla potenza ottica, come la *self phase modulation* (SPM), la *cross phase modulation* (XPM) ed il *four wave mixing* (FWM).

Sono in genere fenomeni di lieve entità, ma il loro effetto si accumula durante la propagazione, e dunque come per la dispersione, dipende dalla lunghezza del tratto percorso. Ne rimandiamo la descrizione a quando saranno citati nel seguito.

<sup>87</sup>Il fenomeno descritto viene detto dispersione *da materiale* o  $D_M$ , oltre al quale ne interviene anche un altro detto dispersione di *guida d'onda* o  $D_W$ , che dipende da fattori geometrici come la dimensione del *core* e l'apertura numerica.

<sup>88</sup>Il fenomeno della dispersione cromatica è l'equivalente ottico della distorsione di fase (o distorsione di ritardo) introdotta al § 7.2 per i segnali elettrici.

<sup>89</sup>D'altra parte, dato che i termini  $D_M$  e  $D_W$  descritti alla nota 87 hanno una diversa dipendenza da  $\lambda$ , variando i loro contributi a  $D_0$  si è riusciti a realizzare un tipo di fibra detto *dispersion-shifted* (o DS) che presenta il minimo di dispersione in terza finestra, vedi fig. 16.13.

<sup>90</sup><https://it.wikipedia.org/wiki/Birifrangenza>

<sup>91</sup>[https://it.wikipedia.org/wiki/Effetto\\_Kerr](https://it.wikipedia.org/wiki/Effetto_Kerr)

## 16.4.2 Bilancio di collegamento

**Trasduttori elettro-ottici** I primi ad essere usati sono stati gli economici LED (*Light Emitting Diode*), che richiedono una circuiteria di interfaccia semplice, sono poco sensibili alle condizioni ambientali, e risultano affidabili. D'altra parte, i LED raggiungono frequenze di segnalazione limitate al centinaio di Mbps, immettono nella fibra una potenza ridotta, ed emettono luce su di una gamma cromatica  $\Delta\lambda > 50$  nm.

Per ridurre la dispersione cromatica (e quindi raggiungere frequenze di segnalazione più elevate) occorre ricorrere ai *Diodi Laser* (LD)<sup>92</sup>, che forniscono anche una maggiore potenza, e dunque divengono indispensabili per coprire distanze maggiori<sup>93</sup>; d'altra parte i LD sono più costosi, hanno vita media ridotta rispetto ai LED, e richiedono condizioni di lavoro più controllate. Notiamo inoltre come una fibra ottica posta inizialmente in opera mediante sorgenti LED, possa essere potenziata (in termini di banda) semplicemente sostituendo il LED con il LASER.

L'uso di sorgenti che operano in III finestra, che (presentando una attenuazione ridotta) permette di operare con tratte più lunghe, obbligherebbe però a ridurre la frequenza di segnalazione, a causa della maggiore dispersione cromatica. Ma questa limitazione è stata superata da un particolare tipo di fibra, detta *dispersion shifted* (vedi fig. 16.13), che presenta il minimo<sup>94</sup> della dispersione cromatica nominale in III finestra anziché in II, e che raggiunge valori migliori di 3.5 psec/Km·nm.

**Prodotto banda-lunghezza** Come anticipato, la dispersione cromatica  $D$  risulta proporzionale alla lunghezza del collegamento  $L$  ed all'estensione cromatica  $\Delta\lambda$  della sorgente. Se pensiamo di effettuare una trasmissione con codici NRZ e periodo  $T_b = 1/f_b$ , ed imponiamo che la dispersione temporale sia non maggiore di  $\frac{1}{4}T_b$ , deve risultare

$$D = D_0 \cdot L \cdot \Delta\lambda \leq 0.25 \cdot T_b \quad (16.39)$$

in cui  $D_0$  è la dispersione cromatica *nominale* [psec/Km·nm],  $L$  è la lunghezza [Km],  $\Delta\lambda$  è l'estensione cromatica della sorgente [nm], e  $T_b$  è la durata di un bit [psec]. Associando ora il concetto di *banda B* alla frequenza di segnalazione  $f_b = \frac{1}{T_b}$ , la relazione (16.39) può essere riscritta in modo da evidenziare il *prodotto della banda per la lunghezza PBL*, che è pari al

Sorgente	$\lambda$ (nm)	$W_{dT}$ (dBm)	$\Delta\lambda$ (nm)
Si LED	850	-16	50
Ge LED	1300	-19	70
InGaAsP LED	1300	-10	120
DFB LASER	1300	-5	1
DFB LASER	1550	-5	0.4
IL/DFB LASER	1550	+2	0.8

Tabella 16.1: Caratteristiche delle sorgenti luminose

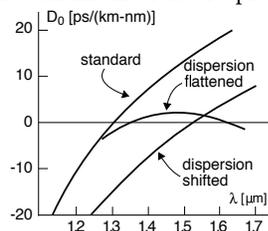
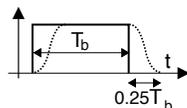


Figura 16.13: Dispersione nominale per alcuni tipi di fibra



<sup>92</sup>In particolare, con laser detti *distributed feedback* (DFB) si riesce ad eccitare un solo modo di emissione, producendo una luce di fatto monocromatica, la cui effettiva  $\lambda$  può anche essere variata in tutta la gamma che va dalla II alla III finestra.

<sup>93</sup>La potenza emessa da un LASER non può aumentare a piacimento: oltre un certo valore intervengono infatti fenomeni non lineari, e la luce non è più monocromatica, causando pertanto un aumento della dispersione cromatica.

<sup>94</sup>La presenza di valori di dispersione *negativi* in fig. 16.13 può destare una legittima curiosità. Ma non si tratta di un fenomeno *anticausale*! Come indicato dall'unità di misura  $\frac{ps}{Km \cdot nm}$  di  $D_0$ , la dispersione cromatica rappresenta la derivata di un ritardo rispetto a  $\lambda$ , derivata che dipende essa stessa da  $\lambda$ . Dunque, come i suoi valori positivi indicano che il ritardo *aumenta* con  $\lambda$ , e quindi le frequenze *più basse* (con  $\lambda$  maggiore) arrivano *dopo* di quelle più alte, i valori negativi di  $D_0$  individuano il fenomeno inverso, ovvero che il ritardo *aumenta* con il *diminuire* di  $\lambda$ , ovvero le frequenze *più alte* arrivano dopo (di quelle basse).

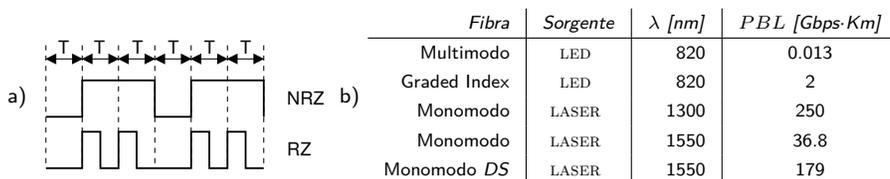


Figura 16.14: a) codice di linea; b) prodotto banda-lunghezza per tipiche coppie sorgente-fibra

valore

$$PBL_{NRZ} = f_b \cdot L = \frac{.25}{D_0 \cdot \Delta\lambda} \quad [Tbps \cdot Km] \quad (16.40)$$

che è una grandezza dipendente dalla coppia fibra-sorgente<sup>95</sup>, e che rappresenta la relazione tra  $f_b$  ed  $L$  necessaria ad ottenere  $D = \frac{1}{4}T_b$ . Inserendo dunque i valori di  $\Delta\lambda$  (della sorgente) e  $D_0$  (della fibra) nella (16.40), si ottiene *una costante* da usare per calcolare la banda (frequenza) massima trasmissibile per una data lunghezza (o viceversa). *Qualora si usi un codice RZ*, i cui simboli hanno durata metà del periodo di bit  $T_b$ , la dispersione temporale tollerabile può essere elevata al 50% di  $T_b$ , e quindi in questo caso il prodotto banda-lunghezza risulta doppio<sup>96</sup> rispetto al caso precedente:

$$PBL_{RZ} = \frac{.5}{D_0 \cdot \Delta\lambda} = 2 \cdot PBL_{NRZ}$$

In fig. 16.14-b) sono mostrati i valori di  $PBL$  (per il caso  $NRZ$ ) associati alle accoppiate fibra-sorgente indicate.

**Esercizio** Determinare la lunghezza massima di un collegamento in fibra ottica monomodo, operante con  $\lambda=1.3 \mu\text{m}$ , e che garantisca una velocità  $f_b=417$  Mbps, assumendo un guadagno di sistema di 42 dB (ovvero disponendo di una potenza di trasmissione 42 dB maggiore della minima potenza necessaria in ricezione).

**Soluzione** Dal grafico di fig. 16.12 si trova che per  $\lambda=1300$  nm, l'attenuazione chilometrica è di 0,35 dB/Km, che determina una  $A_d = 0,35 \cdot L_{Km}$  [dB]. Imponendo ora  $A_d = G_s = 42$  dB, si ottiene una lunghezza pari a  $L = \frac{A_d}{0,35} = \frac{42}{0,35} = 120$  Km, che identifica il *Limite di Attenuazione* del collegamento. Verifichiamo quindi che non intervenga un limite più stringente a causa della dispersione cromatica. Supponendo di utilizzare la sorgente laser in grado di conseguire un  $PBL$  di 250 Gbps·Km, si ottiene una lunghezza massima pari a  $L = \frac{PBL}{f_b} = \frac{250.000}{417} = 600$  Km, che costituisce il *Limite di Dispersione*.

**Massima lunghezza di tratta** L'esercizio svolto ha lo scopo di mostrare la metodologia di progetto per un collegamento in fibra ottica, in cui vengono calcolati entrambi i limiti di *Attenuazione* e di *Dispersione*, e la massima lunghezza del collegamento è determinata dal vincolo più stringente. Nel caso dell'esercizio, la lunghezza è determinata dal limite di attenuazione, ed il progetto può essere rivisto utilizzando una sorgente *più potente* per aumentare il guadagno di sistema, e di conseguenza migliorare il limite di attenuazione. In questo caso può essere opportuno prestare attenzione al fatto che, aumentando la potenza di emissione, la purezza cromatica della sorgente può degradare (in quanto si verifica un aumento di  $\Delta\lambda$  dovuto a fenomeni

<sup>95</sup>In questo senso, il prodotto *banda-lunghezza* costituisce un parametro di sistema che tiene conto di un concorso di cause. Un po' come il concetto di *tenuta di strada* di una autovettura, che dipende da svariati fattori, come il peso, i pneumatici, la trazione, il fondo stradale...

<sup>96</sup>Tuttavia, il dimezzamento della durata di un bit causa una perdita di potenza di 3 dB, in base alle considerazioni riportate a pag. 505.

non lineari) con un conseguente peggioramento del limite di dispersione; è pertanto possibile ricercare la soluzione di migliore compromesso tra potenza di emissione e purezza spettrale. Qualora non si riesca a rientrare nelle specifiche di progetto con una unica tratta, occorrerà suddividere il collegamento in più segmenti, collegati da *ripetitori rigenerativi* (§ 15.3.2), oppure ripartire la banda su più fibre poste in parallelo; d'altra parte l'affermazione delle tecniche discusse al § 16.4.3 come WDM, *amplificazione ottica e controllo della dispersione*, consentono di attuare soluzioni ancora diverse.

**Trasduttori ottico-elettrici** Sono i dispositivi che effettuano la conversione del segnale luminoso uscente dalla fibra ottica in uno elettrico, e per i quali, come per le sorgenti, non entriamo nei dettagli tecnologici. Il trasduttore utilizzato fin dall'inizio, economico ed affidabile, è il diodo P-I-N<sup>97</sup>. Un secondo tipo di trasduttore molto usato è il diodo APD<sup>98</sup> (*Avalanche Photo Detector*), caratterizzato da un *effetto valanga* che lo rende più sensibile di 10-15 dB rispetto ai P-I-N; d'altra parte gli APD sono più delicati, e più sensibili alla temperatura. La tabella 16.2 riporta i valori di sensibilità  $W_R$  (ossia la minima potenza che è necessario ricevere) di diversi fotorivelatori, necessaria a conseguire<sup>99</sup> una probabilità di errore per bit  $P_e = 10^{-11}$ .

Fotorivelatore	$\lambda$ [nm]	$W_R$ [dBm]	$f_b$ [Mbps]
Si P-I-N	850	-48	50
Si APD	850	-58	50
InGaAs P-I-N	1310	-35	420
InGaAs APD	1310	-43	420
InGaAs P-I-N	1550	-37	1200
InGaAs APD	1550	-37.5	678

Tabella 16.2: Valori di sensibilità dei fotorivelatori

**Sensibilità e frequenza di segnalazione** Nella tabella 16.2 è riportato anche il valore della frequenza di segnalazione  $f_b$  a cui si riferisce la sensibilità, ma occorre tenere presente che quest'ultima peggiora all'aumentare di  $f_b$ . Infatti, le prestazioni conseguite dal decisore che si trova a valle del trasduttore dipendono (pag. 463) da  $\frac{E_b}{N_0}$ , in cui  $E_b$  è l'energia per bit che vale  $E_b = W_R \cdot T_b = \frac{W_R}{f_b}$ . Pertanto, i trasduttori dimezzano la sensibilità (che aumenta di 3 dB) se la velocità  $f_b$  raddoppia, in quanto si dimezza l'energia per bit  $E_b$ . La sensibilità a frequenze diverse da quelle in tabella può quindi essere calcolata come<sup>100</sup>

$$W_R(f'_b) \text{ [dBm]} = W_R(f_b) \text{ [dBm]} + 10 \log \frac{f'_b}{f_b} \quad (16.41)$$

### 16.4.3 Seconda generazione

Quanto finora esposto può considerarsi una prima generazione<sup>101</sup> di sistemi in fibra ottica (anni '90), e per la quale assumendo un valore  $PBL = 200$  (fig. 16.14), si ottiene una lunghezza di tratta di 80 Km a 2,5 Gbps e di soli 20 Km a 10 Gbps. Da allora, si sono rese possibili nuove tecniche che consentono di aumentare di molto il  $PBL$ , che ora sono brevemente illustrate.

<sup>97</sup>Che sta per *p-intrinseco-n* riferito al tipo di drogaggio del semiconduttore - vedi [http://it.wikipedia.org/wiki/Diodo\\_PIN](http://it.wikipedia.org/wiki/Diodo_PIN)

<sup>98</sup>[http://it.wikipedia.org/wiki/Fotodiodo\\_a\\_valanga](http://it.wikipedia.org/wiki/Fotodiodo_a_valanga)

<sup>99</sup>La consuetudine del dimensionamento dei collegamenti in fibra ottica porta a considerare ogni bit in transito *nella sua purezza*, senza cioè confidare (o meno) nella presenza di elaborazioni terminali come la codifica di canale, e/o il numero di bit/simbolo. In tale prospettiva, si ritiene che un valore di  $P_e = 10^{-11}$  sia più che sufficiente a qualunque tipo di trasmissione: un errore ogni 100.000 miliardi di bit!

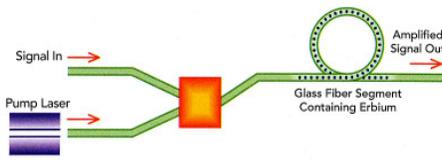
<sup>100</sup>Questo metodo di calcolo è approssimato, in quanto nei trasduttori avvengono fenomeni non-lineari che legano il livello di potenza del rumore, alla potenza di segnale ricevuta. Trascurando questo effetto, si può applicare l'espressione (16.41).

<sup>101</sup>Anche se, relativamente a queste prime fasi, si è soliti distinguere tre generazioni, corrispondenti all'uso delle corrispettive *finestre*, vedi fig. 16.12.

### 16.4.3.1 Amplificazione ottica

Consiste nell'aumento della dinamica (e quindi della potenza) del segnale ottico in transito, senza effettuare la conversione in segnale elettrico e viceversa, come invece accade con un ripetitore rigenerativo (§ 15.3.2), la cui realizzazione nel caso dei sistemi WDM (che si stavano affermando nello stesso periodo) è particolarmente complessa. In tal modo si riescono a realizzare collegamenti con i rigeneratori intervallati da circa 500 km ed amplificatori ottici ogni circa 100 Km. Il funzionamento di questi ultimi si basa sulla *emissione stimolata* di fotoni legata alla  $\lambda$  in transito, causata da un *segnale di pompa* elettrico o luminoso, che ne determina il guadagno.

**Amplificatore in fibra drogata all'erbio** In questo caso il *mezzo attivo* corrisponde ad un tratto di qualche decina o centinaio di metri di fibra (appunto, drogata) in cui vengono miscelati il segnale in transito e quello di pompa. Il drogaggio a base di *erbio* è il tipo più diffuso in terza finestra, in quanto presenta un guadagno massimo in corrispondenza della *banda c* (1525 - 1565 nm) e della *banda l* (1570 - 1610 nm). Il guadagno può raggiungere i 30 dB con un segnale di pompa di 15 mW, e dipende (in modo inverso) anche dalla potenza del segnale in transito, presentando un effetto di  *saturazione*; inoltre il guadagno può essere *non uniforme* su tutta la banda (in termini di  $\lambda$ ), ma questo fenomeno può essere compensato mediante filtri ottici. L'amplificatore EDFA<sup>102</sup> presenta inoltre un fattore di rumore<sup>103</sup> di 4 - 8 dB, che pone un limite al massimo numero di tratte amplificate otticamente, dopodiché occorre intercalare un ripetitore rigenerativo.

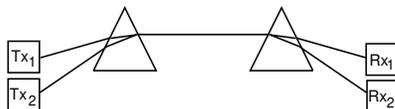


**Amplificazione a semiconduttore e Raman** L'amplificatore ottico *a semiconduttore* (SOA) è di piccole dimensioni, viene pilotato da un segnale di pompa elettrico, è più economico dell'EDFA, ed opera su un ampio intervallo di  $\lambda$ . Di contro, il SOA è più rumoroso, presenta un guadagno inferiore a quello dell'EDFA, ed è affetto da fenomeni non lineari. Viene anche utilizzato come *interruttore ottico* nei dispositivi di moltiplicazione e conversione di  $\lambda$ .

Anche l'*amplificazione Raman* utilizza un segmento di fibra per mescolare il segnale in transito con quello (ottico) di pompaggio, ma a differenza dell'EDFA, il guadagno non dipende dal drogaggio, ma dal verificarsi dello *scattering di Raman*<sup>104</sup> che richiede un pompaggio maggiore, anche di 0.5 - 1 W, ed una lunghezza maggiore, anche alcuni km. Dato che non è necessario drogare la fibra, il metodo è applicabile ad impianti già in esercizio, ed il guadagno può essere reso uniforme su ampi intervalli di  $\lambda$ .

### 16.4.3.2 Moltiplicazione a divisione di lunghezza d'onda - WDM

Il successivo passo verso l'incremento della capacità di trasporto della fibra viene compiuto applicando alle trasmissioni ottiche il principio della moltiplicazione a divisione di frequenza, ovvero immettendo sulla stessa fibra più di un segnale



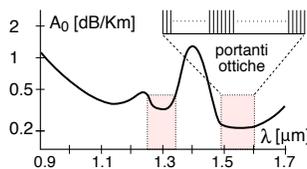
<sup>102</sup> Erbium doped fiber amplifier.

<sup>103</sup> La natura del rumore è ottica anziché elettrica, ed è indicato come *emissione spontanea amplificata* (ASE) in quanto ha origine dai fotoni che si producono in modo *spontaneo* (anziché *stimolato* come nei laser), e che poi interagiscono con gli ioni di drogante producendone l'amplificazione.

<sup>104</sup> [https://it.wikipedia.org/wiki/Scattering\\_Raman](https://it.wikipedia.org/wiki/Scattering_Raman)

ottico, ognuno con la sua propria  $\lambda$ . In questo caso si parla di WDM (*Wavelength Division Multiplex*), che viene realizzata mediante lo schema di principio<sup>105</sup> dei *rifrattori prismatici*, realizzando un circuito ottico del tipo illustrato alla figura precedente<sup>106</sup>. I dispositivi di moltiplicazione WDM sono *passivi e reversibili*, dato che non necessitano di alimentazione, ed lo stesso apparato può indifferentemente svolgere una funzione e la sua inversa. Nondimeno, spesso al moltiplicatore è fatto seguire uno stadio di amplificazione ottica.

Nella figura a lato si illustra come le diverse portanti ottiche vengano disposte nelle regioni a bassa attenuazione<sup>107</sup>. In funzione di quante portanti vengano utilizzate, si distingue tra il caso di *coarse WDM* o CWDM, con al massimo 16  $\lambda$ , e quello di *dense WDM* o DWDM. Nel DWDM sono previste 40 portanti spaziate di 100 GHz nella BANDA C<sup>108</sup>, oppure 80 portanti spaziate di 50 GHz, su ognuna delle quali inviare un segnale con velocità 10 Gbps, per una capacità complessiva da 400 ad 800 Gbps; capacità che può ulteriormente raddoppiare, qualora venga utilizzata allo stesso tempo anche la BANDA L.



I sistemi DWDM necessitano di dispositivi dotati di notevole stabilità in frequenza, dotati di controllo della temperatura, e dato che il loro uso è in pratica *relegato* alle dorsali ad alta velocità, soffrono di un prezzo elevato a causa del mercato ristretto. L'amplificazione dei collegamenti DWDM viene tipicamente svolta mediante EDFA, che a differenza dei SOA non produce effetti di intermodulazione tra canali; d'altra parte, devono essere prese contromisure rispetto alle irregolarità del guadagno tra le diverse portanti<sup>109</sup>, e tener presente che l'amplificazione della BANDA L necessita di una lunghezza di fibra maggiore rispetto alla BANDA C, svolta pertanto su due tratte consecutive. Inoltre, livelli eccessivi di potenza (che per il DWDM è moltiplicata per il numero di  $\lambda$  attive) intensificano i fenomeni non lineari (pag. 502) che possono portare ad interferenza tra canali.

Un importante risultato della trasmissione DWDM è che, ospitando differenti tributari ad alta velocità su diverse  $\lambda$ , decadono quelle esigenze di sincronizzazione tipiche dei sistemi TDM, e si realizza una sorta di *trasparenza* in quanto scompaiono i dispositivi strettamente legati al tipo di segnale trasportato.

### 16.4.3.3 Controllo della dispersione

Con l'avvento degli amplificatori ottici, la massima lunghezza di un collegamento in fibra non è più limitata dalla sua attenuazione, ma solo dai fenomeni di dispersione temporale, e da quelli non lineari. In realtà l'amplificazione ottica *peggiora* i fenomeni di dispersione, dato che in assenza di uno stadio di rigenerazione, queste degradazioni *si accumulano* di amplificatore in amplificatore; per questo motivo, sono state sviluppate le tecniche di gestione della dispersione. Alcune di queste agiscono al trasmettitore od al ricevitore, rispettivamente in modo da *predistorcere* il segnale, oppure di *equalizzarlo*, facendo ricorso a tecniche di demodulazione

<sup>105</sup>I dispositivi reali basano il loro funzionamento su fenomeni di *diffrazione e interferenza*.

<sup>106</sup>Si sfrutta il principio "dell'arcobaleno" (ma che a me ricorda *The dark side of the moon...*), in quanto uno stesso materiale (il prisma) presenta indici di rifrazione differenti per lunghezze d'onda diverse, e quindi è in grado di focalizzare più sorgenti di diverso colore in un unico raggio.

<sup>107</sup>Sono anche prodotte delle fibre prive dello ione OH responsabile del picco di assorbimento a  $1.4 \mu\text{m}$ , dette *dry fibre*, per le quali è possibile allocare portanti in una regione veramente estesa!

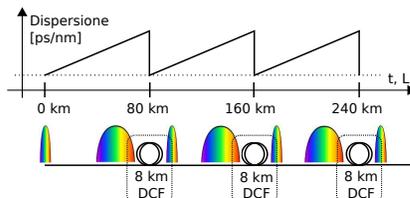
<sup>108</sup>Le portanti sono centrate attorno  $f_0 = 193 \text{ THz}$ . Ricordando che  $\lambda = v/f_0$  e ponendo  $v \simeq c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$ , otteniamo che alla  $f_0$  corrisponde  $\lambda = 3 \cdot 10^8 / 193 \cdot 10^{12} = 1554 \text{ nm}$ , mentre una spaziatura tre le  $f_0$  di 100 GHz equivale ad un  $\Delta\lambda = c(1/f_2 - 1/f_1) \simeq 0.8 \text{ nm}$ ; pertanto, 40 portanti occupano un intervallo di 32 nm, e dunque entrano perfettamente nei 1565 - 1525 = 40 nm della BANDA C.

<sup>109</sup>Ancor più grave se l'irregolarità si ripete uguale su diverse sezioni consecutive di amplificazione, e che può essere affrontata interponendo filtri ottici progettati in modo da *compensare* le differenze di guadagno.

coerente, od a tecniche non lineari. In tal modo però non si riesce ad andare oltre un semplice raddoppio del *PBL*.

**Fibre compensatrici** Il fenomeno della dispersione *cromatica* può essere tenuto sotto controllo anche per collegamenti di migliaia di chilometri inserendo lungo gli stessi alcune tratte di fibra con un coefficiente di dispersione  $D_0$  *negativo*, e quindi in grado di *invertire* l'effetto prodotto sulle diverse componenti cromatiche<sup>110</sup>.

Tipicamente occorre inserire qualche km di fibra compensatrice (detta DCF) ogni cinquanta km di collegamento, applicando la relazione  $D_0 L_0 + D_{DCF} L_{DCF} = 0$  in cui il pedice  $D_{DCF}$  individua dispersione e lunghezza della fibra compensatrice. E' una soluzione sempre più diffusa, anche in virtù della progressiva riduzione della perdita di potenza che ne caratterizza le prime realizzazioni.



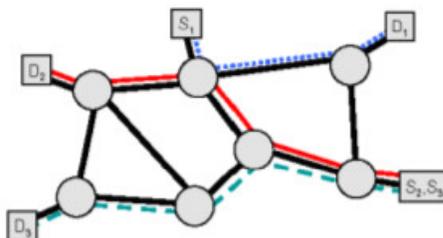
**Filtri ottici** E' una soluzione che evita di *allungare* il collegamento con le DCF, ed opera inserendo filtri interferometrici, o basati su *reticolo*<sup>111</sup>, subito dopo gli amplificatori ottici, sia per motivi logistici, che per compensare le perdite introdotte dai filtri; questi possono inoltre svolgere anche una funzione di controllo del rumore e di normalizzazione del guadagno dell'amplificatore ottico.

#### 16.4.4 Sistemi in fibra ottica

Fin qui le fibre ottiche sono state descritte come mezzo trasmissivo per un collegamento punto-punto ad alta velocità, mentre il loro utilizzo si è esteso alla rete di accesso e distribuzione, e sono stati sviluppati dispositivi in grado di interconnettere i nodi di rete e svolgere le operazioni di instradamento operando direttamente a livello ottico, senza dunque dover passare dal dominio elettrico, con evidenti vantaggi e semplificazioni da un punto di vista realizzativo.

##### 16.4.4.1 Dalle fibre ottiche alle reti ottiche

La trasmissione WDM permette di realizzare lo schema di *rete ottica* mostrato in figura e detta *wavelength routed optical network*, in cui ad ogni tributario è assegnata una  $\lambda$  che lo identifica da estremo ad estremo; in realtà ciò che viene realizzato è uno schema di instradamento del tipo a *circuito virtuale* (pag. 535), e l'effettiva  $\lambda$  associata ad un circuito *cambia* di nodo in nodo. A tal fine, sono stati sviluppati i seguenti dispositivi, che permettono di realizzare in forma completamente ottica le funzioni svolte da quelli descritti al § 19.6.1.



<sup>110</sup>Facendo riferimento alla fig. 16.13, notiamo come per una fibra *normale*  $D_0$  in terza finestra sia positivo, ed *aumenti* con  $\lambda$ . Per invertire questo fenomeno, la fibra compensatrice oltre ad avere un  $D_0$  negativo, deve anche variarne il valore con un andamento complementare a quello della fibra da compensare, in particolar modo nel caso di trasmissione DWDM.

<sup>111</sup>Traduzione di *grating*, con cui si descrive una alterazione periodica di un parametro fisico, vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Fiber\\_Bragg\\_grating](https://en.wikipedia.org/wiki/Fiber_Bragg_grating).

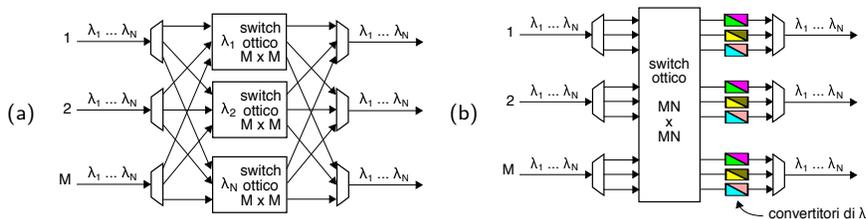
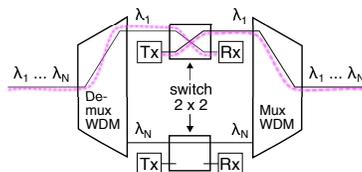


Figura 16.15: (a) commutatore di lunghezza d'onda; (b) wavelength router;

**Multiplatori e demultiplatori** passivi che rispettivamente convogliano più  $\lambda$  in unica fibra, oppure le estraggono, oppure ancora che combinati assieme ad un commutatore a due vie permettono la funzionalità *optical add and drop* (vedi § 19.3.4.2) o OADM, come mostrato nella figura a fianco.



**Accoppiatori a stella** (o *star copplers*) che assemblano le  $\lambda$  provenienti da sorgenti diverse in un unico flusso WDM, che viene quindi inoltrato a molteplici ricevitori mediante altrettante fibre di uscita<sup>112</sup>.

**Convertitori di lunghezza d'onda** basati su effetti non lineari<sup>113</sup>, che pur se più costosi di altri componenti, permettono (come discutiamo sotto) di realizzare instradamenti *non bloccanti*.

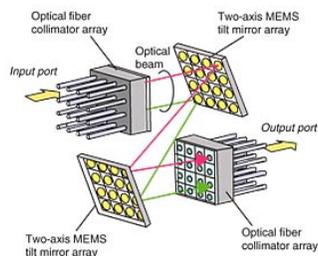
**Optical cross-connects** (oxc) che svolgono la funzione di commutazione ed instradamento dei segnali ottici, di cui è possibile distinguere, in ordine di complessità e di costo, tra:

- *matrici di commutazione spaziale* che permettono l'interconnessione tra  $M$  fibre in ingresso ed altrettante in uscita, e possono essere realizzate mediante dei *micro-specchi* a controllo elettromeccanico, una tecnologia nota come *micro electro-mechanical systems* o MEMS<sup>114</sup>.

<sup>112</sup>In questo modo si realizza una rete di tipo *broadcast* (ovvero non *switchata*) qualora ogni nodo terminale emetta su di una sua propria  $\lambda$ , e riceva quelle emesse dagli altri nodi.

<sup>113</sup>Come la *cross gain modulation* che si manifesta nei SOA, il cui il guadagno satura con la potenza in transito. Quando al segnale in arrivo con  $\lambda_1$  è mescolato quello (debole e continuo) di pompa con  $\lambda_2$ , il guadagno satura nei periodi di bit di  $\lambda_1$ , mentre invece quando  $\lambda_1$  è spenta,  $\lambda_2$  viene amplificato. Un filtro ottico rimuove  $\lambda_1$ , e la sua informazione è stata trasferita su  $\lambda_2$ , con segno invertito; altri schemi risolvono anche questo aspetto. Altri dispositivi fanno uso dell'effetto FWM, in cui la presenza di  $\lambda_1$  e  $\lambda_p = 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$  (di pompa) produce la comparsa di  $\lambda_2$  in uscita.

<sup>114</sup>Vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/MEMS>. Ogni specchio ha dimensioni inferiori al  $\text{mm}^2$ , e riflette o meno la luce a seconda della sua disposizione controllata da micro-attuatori, il tutto realizzato direttamente su dei chip in silicio o polisilicio. Adottando una architettura di commutazione a due stadi è possibile realizzare strutture tridimensionali come quella mostrata in figura, che consente di adottare un numero di specchi pari a  $2N$  (dato che un MEMS altera l'indice di riga, e l'altro di colonna) contro gli  $N^2$  relativi al caso di una matrice bidimensionale (i cui flussi entranti ed uscenti sono disposti rispettivamente sui due lati di un MEMS quadrato), e di mantenere le differenze di percorso ottico entro limiti ridotti.



- *commutatori di lunghezza d'onda* che permettono di commutare le singole  $\lambda$  di  $M$  flussi WDM verso altrettanti (diversi) flussi. Sono realizzati combinando elementi di commutazione spaziale con moduli di multi-demultiplazione delle  $\lambda$ , come mostrato in fig. 16.15-(a).
- *wavelength selective switch* o wss, in grado anch'essi di combinare la funzione di demultiplazione spaziale delle  $\lambda$  con il loro direzionamento verso una diversa fibra di uscita per mezzo di celle a cristalli liquidi, eventualmente realizzate su silicio<sup>115</sup>, offrendo anche il vantaggio della programmabilità. Ma nel caso in cui flussi entranti differenti ma con  $\lambda$  uguali debbano uscire sulla medesima fibra, si verifica un *fenomeno di blocco* (§ 19.8.2), evitato dal dispositivo che segue;
- *wavelength router* (WR), con la capacità di instradare il segnale trasportato dalle  $\lambda$  sulle porte di ingresso verso una diversa  $\lambda$  in uscita, sulla base di una matrice di routing. In fig. 16.15-(b) ne viene mostrato uno schema realizzativo, in cui sono evidenziati i convertitori di  $\lambda$  necessari a realizzare un comportamento *non bloccante*.

#### 16.4.4.2 Rete ottica di trasporto

Al § 19.4 viene descritta la rete SDH, che offre un servizio di trasporto a divisione di tempo per tributari di diverso tipo: ma l'architettura descritta al § 19.6 prevede la fibra *solo* come mezzo trasmissivo tra dispositivi, che invece operano in modalità elettronica, e necessitano di una conversione elettro-ottica ad ogni porta di I/O. Una rete ottica (OTN) come quella sopra descritta, al contrario, svolge tutte le funzioni direttamente nel dominio ottico, ed a questo fine sono stati definiti gli standard necessari a permettere l'interconnessione dei dispositivi ed il loro controllo. D'altra parte, non si è ancora in grado di evitare del tutto le forme di degradazione legate al rumore introdotto dagli amplificatori ottici e dai fenomeni non lineari; pertanto, convivono *isole di trasparenza ottica*, interconnesse tra loro mediante stadi di completa rigenerazione.

L'approfondimento necessario a descrivere l'architettura di una OTN, e le modalità atte ad ospitare traffico eterogeneo (SDH, Ethernet, ATM, IP) travalica i limiti di questo testo, per cui si rimanda ad alcune risorse Internet<sup>116</sup>.

#### 16.4.4.3 Rete passiva di distribuzione

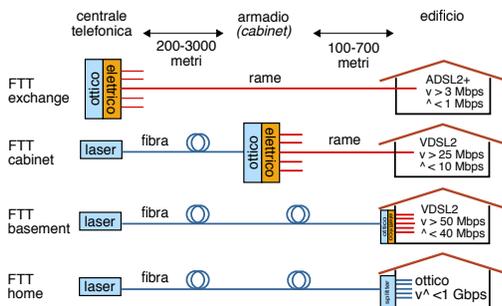
Nella maggior parte dei casi il collegamento in fibra termina presso la propria centrale telefonica, dove sono alloggiati i DSLAM (§ 19.9.4) che inviano il segnale ADSL all'utente finale mediante un collegamento in rame, con la velocità consentita da questa tecnologia. Ma attualmente il collegamento in fibra ottica si avvicina sempre più alla residenza dell'utente finale, e viene classificato con una sigla del tipo FTTx, che sta per *fiber to the "x"*, in cui la  $x$  indica appunto fin dove arriva la fibra. In tal senso, possiamo distinguere tra

- *FTT exchange*: la situazione di base, in cui la fibra si ferma in centrale;
- *FTT cabinet*, o *curb*: viene raggiunto l'armadio tra la centrale e l'utente finale, dove vengono spostati i DSLAM;
- *FTT basement*: sono raggiunte le fondamenta del palazzo;
- *FTT home*: la fibra raggiunge direttamente l'utente finale.

<sup>115</sup>Vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Liquid\\_crystal\\_on\\_silicon](https://en.wikipedia.org/wiki/Liquid_crystal_on_silicon)

<sup>116</sup>[https://it.wikipedia.org/wiki/Optical\\_Transport\\_Network](https://it.wikipedia.org/wiki/Optical_Transport_Network)  
[http://www.claudiocancelli.it/tutorial/verso\\_una\\_rete\\_tutta\\_ottica.pdf](http://www.claudiocancelli.it/tutorial/verso_una_rete_tutta_ottica.pdf)  
<https://www.itu.int/ITU-T/studygroups/com15/otn/OTNtutorial.pdf>

Nell'ultimo caso la fibra ottica entra direttamente in casa; per ridurre complessità e costi, quest'ultima tratta è priva di apparati attivi<sup>117</sup>, e si basa sullo *splitting* del segnale ottico, che raggiunge in *broadcast* tutti gli utenti serviti dalla stessa fibra, i quali si avvalgono poi di meccanismi di indirizzamento e crittografici per recuperare solo ciò che è effettivamente indirizzato loro.



### 16.4.5 Ridondanza e pericoli naturali

Le fibre vengono normalmente interrate, e per questo sono esposte ai pericoli di essere attaccate da roditori, o di essere interrotte a causa di lavori stradali od agricoli. Quelle sottomarine sono a rischio per via di squali e reti a strascico. E' più che opportuno prevedere una adeguata ridondanza (vedi § 19.6.3), in modo che in caso di interruzione di un collegamento sia possibile deviarne il traffico su di un altro.

## 16.5 Appendici

### 16.5.1 Allocazione delle frequenze radio

L'assegnazione generale dello spettro radio ai diversi utilizzi è riportata in tabella 16.3, che non pretende di essere completa né tanto meno esatta, così come per le tabelle che seguono.

#### Canali televisivi

**VHF:** Numerati da 1 a 6 a partire da 55.25 MHz, spaziate di 6 MHz, fino a 83.25 MHz; numerati da 7 a 13 a partire da 175.25 MHz, fino a 211.25 MHz, ancora spaziate di 6 Mhz. Nell'intervallo 88-108 Mhz è presente il broadcast FM.

**UHF:** Numerati da 14 a 69 a partire dalla portante video di 471.25 MHz, fino a 801.25 MHz, spaziate di 6 MHz.

Per le stesse frequenze, sono state attivate le trasmissioni televisive in *digitale terrestre.*, ad eccezione dei canali da 61 a 69, che sono stati assegnati agli operatori di telefonia mobile di 4<sup>a</sup> generazione, detta LTE/4G.

**Bande di frequenza Radar** Oltre alle bande HF, VHF ed UHF, le trasmissioni radar che operano in SHF ed EHF distinguono tra i seguenti intervalli di frequenze:

GHz	1-2	2-4	4-8	8-12	12-18	18-27	27-40	40-75	75-110	110-300
Banda	L	S	C	X	K <sub>u</sub>	K	K <sub>a</sub>	V	W	millimetriche

<sup>117</sup>Che per questo motivo prende il nome di *passive optical network* o PON, vedi anche <https://it.wikipedia.org/wiki/FTTx> e <http://www.fub.it/sites/default/files/attachments/2012/03/PON.pdf>.

Intervallo	$\lambda$	Sigla	Denominazione	Uso
30 - 300 Hz	$10^4 - 10^3$ Km	<b>ELF</b>	<i>Extremely Low</i>	Radionavigazione a largo raggio. Attività nucleare.
.3 - 3 KHz	$10^3 - 10^2$ Km	<b>VF</b>	<i>Voice Frequency</i>	
3 - 30 KHz	100 - 10 Km	<b>VLF</b>	<i>Very Low</i>	
30 - 300 KHz	10 - 1 Km	<b>LF</b>	<i>Low Frequency</i>	Radiolocalizzazione marittima ed aeronautica
.3 - 3 MHz	.1 - 1 Km	<b>MF</b>	<i>Medium Frequency</i>	Comunicazioni aeree e marittime. Radionavigazione. Broadcast AM
3 - 30 MHz	10 - 100 metri	<b>HF</b>	<i>High Frequency</i>	Collegamenti a lunga distanza fissi e mobili. Radioamatori.
30 - 300 MHz	1 - 10 metri	<b>VHF</b>	<i>Very High</i>	Broadcast FM e TV. Collegamenti in visibilità. Radiomobili civili e militari.
.3 - 3 GHz	.1 - 1 metro	<b>UHF</b>	<i>Ultra High</i>	Ponti radio e radiomobili terrestri. Broadcast TV. Satelliti meteo e TV.
3 - 30 GHz	10 - 100 mm	<b>SHF</b>	<i>Super High</i>	Ponti radio terrestri. Satelliti. Radar.
30 - 300 GHz	1 - 10 mm	<b>EHF</b>	<i>Extremely High</i>	Radar

Tabella 16.3: Allocazione delle frequenze radio

**Banda ISM** ISM sta per *Industrial, Scientific and Medical*, per i cui usi sono state riservate le seguenti frequenze per le quali non occorre il rilascio di licenza. Gli intervalli più usati sono:

Intervallo	utilizzo
26.957–27.283 MHz	Banda cittadina dei radioamatori CB, ma anche dei camionisti
2.4–2.5 GHz	Forni a microonde, Bluetooth, WiFi 802.11b e g
5.725–5.875 GHz	WiFi 802.11a

### Telefonia mobile

Intervallo Uplink (MHz)	Intervallo Downlink(MHz)	utilizzo
890,0 - 915,0	935,0 - 960,0	GSM 900
880,0 - 890,0	925,0 - 935,0	GSM 900 esteso
1710,0 - 1785,0	1805,0 - 1880,0	GSM 1800
1920 - 1980	2110 - 2170	UMTS

## 16.5.2 Caratterizzazione della dispersione temporale

### Valori tipici per la dispersione temporale da radio cammini multipli

ambiente	$f_0$ (MHz)	$\sigma_\tau$	Note
urbano	910	600 ns	New York City, $\bar{\tau} = 1.3 \mu s$ , $\Delta\tau = 3.5 \mu s$
urbano	892	10 - 25 $\mu s$	San Francisco, caso peggiore
rurale	910	200 - 310 ns	caso tipico medio
rurale	910	1.9 - 2.1 $\mu s$	caso estremo medio
indoor	1500	10 - 50 ns	ufficio, $\bar{\tau} = 25$ ns
indoor	850	-	ufficio, $\Delta\tau = 270$ ns
indoor	1900	-	grattacieli, $\bar{\tau} = 70 - 94$ ns, $\Delta\tau = 1.47 \mu s$

### Dispersione potenza-ritardo ETSI-GSM (900 MHz)

cammino n.	ambito collinare		area urbana	
	$\tau_n$ [ $\mu sec$ ]	$a_n^2$ [dB]	$\tau_n$ [ $\mu sec$ ]	$a_n^2$ [dB]
1	0	-10	0	-4.0
2	0.1	-8	0.1	-3.0
3	0.3	-6	0.3	0.0
4	0.5	-4	0.5	-2.6
5	0.7	0	0.8	-3.0
6	1.0	0	1.1	-5.0
7	1.3	-4	1.3	-7.0
8	15.0	-8	1.7	-5.0
9	15.2	-9	2.3	-6.5
10	15.7	-10	3.1	-8.6
11	17.2	-12	3.2	-11.0
12	20.0	-14	5.0	-10.0

## **Parte III**

# **Sistemi di telecomunicazione**



## Prefazione alla terza parte

**T**UTTO ciò che è *avanzato* dal raggruppamento degli argomenti realizzato a partire dall'edizione 1.5 è stato riorganizzato in questa terza parte del testo, dove nelle prossime edizioni saranno anche sviluppati gli argomenti più ambiziosi e attuali, come il WiFi, la telefonia mobile, il digitale terrestre, i sistemi di accesso e di comunicazione personale.

Il capitolo 17 affronta il tema della teoria del traffico e dei sistemi di servizio, che costituiscono il modello probabilistico per le reti a commutazione di circuito, intese come un sistema di servizio *orientato alla perdita*, e per quelle a commutazione di pacchetto che invece, essendo basate *sull'immagazzinamento ed il rilancio* tipico dei sistemi a coda, rappresentano una implementazione di sistema di servizio orientato *al ritardo*. Dopo aver caratterizzato le tipologie di pacchetto dati, viene quindi sviluppata una *tassonomia* che permette di inquadrare le diverse architetture di rete in un contesto unitario, che ne mette in luce le differenti peculiarità.

Forti delle nuove basi teoriche acquisite, il capitolo 18 affronta il funzionamento della rete Internet, articolandone la descrizione nei termini degli strati di cui si compone, corrispondenti a diversi livelli di indirizzamento, da quello mnemonico del DNS, a quelli di trasporto del TCP/UDP e di rete dell'IP, giù fino agli indirizzi fisici o *Ethernet*. Quindi, sono descritte le modalità di funzionamento di una rete a pacchetto del tutto differente, l'ATM, che anche se non più molto diffusa se non nella sezione di accesso, rappresenta un classico esempio di rete a *circuito virtuale*.

Le reti a *commutazione di circuito*, dove le risorse sono assegnate agli utenti in modalità permanente e garantita, sono discusse al capitolo 19. Dopo aver richiamato i concetti fin qui esposti, al fine di individuare gli elementi costitutivi della rete telefonica, la sua evoluzione storica viene ripercorsa in un sorta di cammino a tappe forzate, coinvolgendo la descrizione della trama PCM, della relativa gerarchia plesiocrona PDH, e di quella sincrona o SDH. Sono quindi forniti dei cenni relativi alla topologia della rete italiana (sicuramente obsoleti, ma solo gli operatori ne conoscono il reale sviluppo attuale), a cui seguono alcune fondamentali definizioni relative ai principi di commutazione.

Il capitolo 20 ospita una breve descrizione di tre sistemi di trasmissione diffusiva che nelle edizioni precedenti erano adottati come esempi di applicazione delle teorie esposte, e precisamente: la televisione analogica, le trasmissioni radio FM, e la televisione satellitare. In qualche futura edizione, in questa sede verrà sviluppata la trattazione del *digitale terrestre* e del DAB.

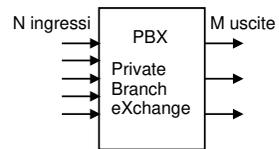
Infine, al capitolo 21 sono illustrati i principi della codifica di sorgente continua, introdotti al § 13.1.3, per come siano stati applicati alla rappresentazione numerica dei segnali audio, video e di immagine, che permeano la nostra vita quotidiana.

# Sistema di servizio, teoria del traffico e delle reti

QUI trovano spazio argomenti di *ingegneria delle reti*, a carattere prevalentemente teorico, mentre le realizzazioni pratiche sono sviluppate nei capitoli che seguono. Tali aspetti si basano sui concetti di probabilità affrontati al capitolo 5, e dopo aver caratterizzato in tal senso il *traffico* informativo, sono fornite le metodologie di dimensionamento per collegamenti condivisi da più flussi, ai fini del conseguimento di prestazioni individuate come la probabilità di blocco nei sistemi di servizio orientati alla perdita, nei casi di popolazione finita ed infinita, ed il tempo medio di servizio per i sistemi orientati al ritardo, come nel caso di coda infinita e servente unico. Nell'ultima sezione poi, dopo aver discusso brevemente dei compromessi da affrontare nella progettazione di un sistema di comunicazione a pacchetto, viene sviluppata una tassonomia che permette di inquadrare le diverse architetture di rete in un contesto unitario, che ne mette in luce le differenti peculiarità.

## 17.1 Distribuzione binomiale per popolazione finita

Iniziamo con il chiederci quante linee uscenti  $M$  siano necessarie ad un centralino con  $N$  interni, in modo che la probabilità di trovare tutte le linee occupate sia inferiore ad un valore massimo, chiamato *grado di servizio*<sup>1</sup>. Per trovare il risultato, calcoliamo prima la probabilità che tutte le linee uscenti siano occupate, assumendo noti  $N$  ed  $M$ .



Affrontiamo il problema in termini ancor più generali, chiedendoci quale sia la probabilità  $p_B(k)$  che un numero  $k$  di persone (su  $N$ ) sia contemporaneamente al telefono. Assumiamo che ognuno degli  $N$  interni abbia una probabilità  $p$  di telefonare, ossia passi il  $p \cdot 100\%$  del suo tempo al telefono, e che le telefonate siano statisticamente indipendenti. Allora, ci saranno in media  $Np$  telefoni occupati, e la probabilità che un ben preciso gruppo di  $k$  individui telefoni (e  $N - k$  no), è pari a  $p^k q^{N-k}$  (in cui  $q = 1 - p$ ).

Dato che il numero di differenti modi di scegliere  $k$  oggetti tra  $N$  è pari a  $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} = \frac{N(N-1)\dots(N-k+1)}{k!}$ , allora la probabilità di avere  $k$  (qualsiasi) persone al

<sup>1</sup>Il termine grado di servizio esprime un concetto di *qualità*, ed è usato in contesti diversi per indicare differenti grandezze associate appunto alla qualità dei servizi di telecomunicazione. Nel caso presente, una buona qualità corrisponde a una bassa probabilità di occupato.

telefono è pari a

$$p_B(k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad (17.1)$$

Risultando che  $\sum_{k=0}^N p_B(k) = 1$ , la funzione  $p_B(k)$  rappresenta una densità di probabilità di v.a. discreta, detta anche variabile aleatoria di *Bernoulli*<sup>2</sup>.

Al variare di  $k$ , si ottengono tutte le probabilità cercate, rappresentate nella figura a lato nel caso in cui  $p = 0.15$  e  $N = 25$ , oppure  $N = 125$ . Nel secondo caso, si utilizza anche il valore  $p = 0.07$ , che produce una concentrazione di  $p_B(k)$  attorno a valori  $k$  inferiori; valori di  $p$  ancora più piccoli producono una d.d.p. che decresce monotonamente per  $k > 0$ . Infine, osserviamo che non si possono avere più di  $N$  utenti al telefono.

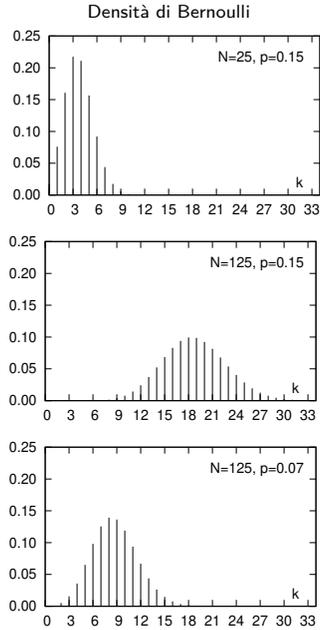
Per conoscere il numero di linee occorrenti a garantire una probabilità di *congestione* (o di blocco)  $P_B$  inferiore ad un massimo, si sommano (partendo *da destra*) i valori di probabilità  $p_B(k)$ , finché non si supera la probabilità prefissata: allora  $M$  sarà pari all'ultimo indice  $k$ . Infatti in tal modo la probabilità che ci siano più di  $M$  interni a voler telefonare è pari a

$$Pr(k > M) = \sum_{k=M+1}^N p_B(k) = \sum_{k=M+1}^N \binom{N}{k} p^k q^{N-k} < P_B$$

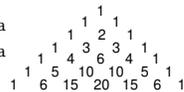
La distribuzione binomiale è detta anche *delle prove ripetute* poiché può essere usata per calcolare la probabilità di un certo numero di eventi favorevoli, a seguito della ripetizione dello stesso fenomeno aleatorio<sup>3</sup>.

Il valore medio della distribuzione Binomiale è  $m_B = Np$ , e la varianza  $\sigma_B^2 = Npq$ . Tornando al caso del centralino, il numero medio di linee occupate è  $Np$ : tale quantità rappresenta il *traffico offerto medio*, che si misura in ERLANG: ad esempio, un traffico medio di 3 Erlang corrisponde ad osservare in media 3 linee occupate.

Il rapporto  $\frac{\sigma_B^2}{m_B} = \frac{Npq}{Np} = q < 1$  è un indice di come la variabile aleatoria si distribuisce attorno alla media. Il caso di Bernoulli in cui  $\frac{\sigma_B^2}{m_B} < 1$  è rappresentativo di un traffico *dolce*, che deriva dall'ipotesi di popolazione finita, e che si sostanzia nel fatto che all'aumentare delle linee occupate, diminuisce la probabilità di una nuova chiamata, in quanto diminuiscono le persone *non* al telefono.



<sup>2</sup>La  $p_B(k)$  è detta anche *binomiale*, in quanto i fattori  $\binom{N}{k}$  sono pari ai coefficienti della potenza di un binomio  $(p + q)^N$ , calcolabili anche facendo uso del triangolo di *Pascal* (ma definito prima da *Tartaglia*, e prima ancora da *Hayyām*), mostrato per riferimento a lato.



<sup>3</sup>Infatti si applica ad un qualunque fenomeno aleatorio rappresentato dalla ripetizione di un secondo fenomeno aleatorio *soggiacente*, come ad esempio il lancio ripetuto di monete o di dadi: in questi casi, ha senso chiedersi con che probabilità una funzione della v.a. soggiacente acquisisce un certo valore, per un certo numero di volte. *Esempio*: si voglia calcolare la probabilità di osservare 3 volte testa, su 10 lanci di una moneta. Applicando la (17.1), si ottiene  $p_B(3) = \binom{10}{3} p^3 q^7 = 120 \cdot .5^3 \cdot .5^7 = 0.117$ , ovvero una probabilità dell'11,7%. Come ulteriore esempio, citiamo l'uso della distribuzione binomiale per calcolare la probabilità di errore complessiva in una trasmissione numerica realizzata mediante un collegamento costituito da  $N$  tratte collegate da ripetitori rigenerativi, come illustrato al § 15.3.2.

**Esercizio** Una linea telefonica risulta occupata per l'80 % del tempo, e le telefonate non durano mai più di 5 minuti. Provando a chiamarla con una cadenza fissa di un tentativo ogni 10 minuti, determinare

1. la probabilità di trovare libero *entro* 3 tentativi
2. la probabilità di trovare libero *almeno* una volta in due ore
3. la probabilità di trovare libero *esattamente* tre volte in due ore

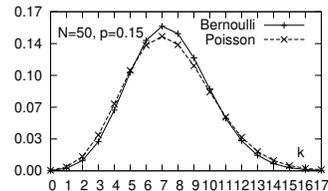
Indichiamo con  $p = 0.2$  la probabilità di successo di un singolo tentativo, e con  $q = 1 - p = 0.8$  quella di fallimento, identificando così il problema nel contesto delle *prove ripetute*.

1. Assumendo gli eventi indipendenti, la prob. di trovare libero entro tre tentativi è la somma delle prob. degli eventi favorevoli, ossia subito libero, oppure al secondo, od al terzo tentativo, ovvero  $p + p \cdot q + p \cdot q \cdot q = .2 + .2 \cdot .8 + .2 \cdot .8 \cdot .8 = 0.488 = 48.8$  %.
2. In due ore si effettuano  $\frac{120}{10} = 12$  tentativi. Conviene in questo caso valutare la probabilità dell'evento complementare  $p_0$ , quello di fallire tutti i tentativi, pari a  $p_B(k)|_{k=0}$ , ovvero  $p_0 = \binom{12}{0} p^0 q^{12} = \frac{12!}{12!} \cdot 8^{12} = 0.0687195$ , e quindi la prob.  $p_1$  di libero almeno una volta vale  $p_1 = 1 - p_0 = 93.12$  %.
3. Trovare libero esattamente tre volte infine ha probabilità  $\binom{12}{3} p^3 q^9 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} \cdot .2^3 \cdot .8^9 = 0.23$ .

## 17.2 Distribuzione di Poisson

Al crescere del numero  $N$  di utenti, l'utilizzo della distribuzione Binomiale può risultare disagiata, per via dei fattoriali, e si preferisce trattare il numero di conversazioni attive  $k$  come una variabile aleatoria di POISSON, la cui densità di probabilità ha espressione

$$p_P(k) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \quad (17.2)$$



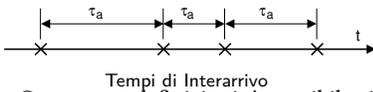
ed è caratterizzata da valor medio e varianza  $m_P = \sigma_P^2 = \alpha$ . La *Poissoniana* costituisce una buona approssimazione della ddp di Bernoulli, adottando per la prima lo stesso valor medio della seconda  $m_P = m_B$ , ossia  $\alpha = Np$ , come mostrato in figura.

Più in generale, questa densità è impiegata per descrivere la probabilità che si verifichino un numero di eventi *indipendenti e completamente casuali* di cui è noto solo il numero medio  $\alpha$ <sup>(4)</sup>. D'altra parte, al tendere di  $N$  ad  $\infty$  il modello Bernoulliano adottato finora perde di validità. Infatti, nel caso di una popolazione infinita, il numero di nuove chiamate *non diminuisce* all'aumentare del numero dei collegamenti in corso. In questo caso, gli eventi corrispondenti all'inizio di una nuova chiamata sono invece considerati *indipendenti e completamente casuali*, e descritti unicamente in base ad una *frequenza media di interarrivo*  $\lambda$  che rappresenta la velocità<sup>5</sup> con cui si presentano le nuove chiamate<sup>6</sup>. L'inverso di  $\lambda$  rappresenta un tempo,

<sup>4</sup>Usando il modello Poissoniano pertanto, la probabilità che (ad esempio) si stiano svolgendo *meno* di 4 conversazioni contemporanee è pari a  $p_P(0) + p_P(1) + p_P(2) + p_P(3) = e^{-\alpha} \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{6}\right)$ .

<sup>5</sup> $\lambda$  viene espresso in *richieste per unità di tempo*.

<sup>6</sup>La trattazione può facilmente applicarsi a svariate circostanze: dalla frequenza con cui si presentano richieste di collegamento ad una rete di comunicazioni, alla frequenza con cui transitano automobili sotto un cavalcavia, alla frequenza con cui particelle subatomiche transitano in un determinato volume, alla frequenza con cui gli studenti si presentano a lezione...



ed esattamente  $\bar{\tau}_a = 1/\lambda$  è il *valor medio* della variabile aleatoria  $\tau_a$  costituita dall'intervallo di tempo tra l'arrivo di due chiamate.

Con queste definizioni, è possibile riferire la v.a. di Poisson ad un intervallo temporale di osservazione  $T$ , durante il quale si presentano un numero medio  $\alpha$  di chiamate<sup>7</sup> pari a  $\alpha = \lambda T$ . Pertanto, possiamo scrivere la ddp della v.a. Poissoniana come

$$p_P(k)|_T = e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^k}{k!}$$

che indica la probabilità che in un tempo  $T$  si verifichino  $k$  eventi (indipendenti e completamente casuali) la cui frequenza media è  $\lambda$ <sup>(8)</sup>.

### 17.2.1 Variabile aleatoria esponenziale negativa

La descrizione statistica che la ddp di Poisson fornisce per il *numero* di eventi che si verificano in un (generico) tempo  $t$ , è strettamente legata al considerare questi come *indipendenti, identicamente distribuiti*, e per i quali l'*intervallo di tempo* tra l'occorrenza degli stessi è una determinazione di variabile aleatoria *completamente casuale*<sup>9</sup>, descritta da una densità di probabilità *esponenziale negativa*<sup>10</sup>, espressa analiticamente come

$$p_E(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

valida per  $t \geq 0$ , e mostrata in figura; tale v.a. è caratterizzata dai momenti<sup>11</sup>  $m_E = \frac{1}{\lambda}$  e

<sup>7</sup>Esempio: se da un cavalcavia osserviamo (mediamente)  $\lambda = 3$  auto/minuto, nell'arco di  $T = 2$  minuti, transiteranno (in media)  $3 \cdot 2 = 6$  autovetture.

<sup>8</sup>Esempio: sapendo che l'autobus (completamente casuale!) che stiamo aspettando ha una frequenza di passaggio (media) di 8 minuti, calcolare: **A**) la probabilità di non vederne nessuno per 15 minuti e **B**) la probabilità che ne passino 2 in 10 minuti.

Soluzione: si ha  $\lambda = 1/8$  passaggi/minuto e quindi: **A**)  $p_P(0)|_{15} = e^{-\frac{15}{8}} = 0.15$  pari al 15%; **B**)  $p_P(2)|_{10} = e^{-\frac{10}{8}} \frac{(\frac{10}{8})^2}{2} = 0.224$  pari al 22.4%

<sup>9</sup>Da un punto di vista formale, per eventi *completamente casuali* si intende che gli eventi stessi *non hanno memoria* di quando siano accaduti l'ultima volta, permettendo quindi di scrivere

$$Pr(t > t_0 + \theta / t > t_0) = Pr(t > \theta)$$

ossia che la probabilità di attendere altri  $\theta$  istanti, avendone già attesi  $t_0$ , non dipende da  $t_0$ . Per verificare che la ddp esponenziale consente di soddisfare questa condizione, svolgiamo i passaggi, applicando al terzultimo la (17.3):

$$\begin{aligned} Pr(t > t_0 + \theta / t > t_0) &= \frac{Pr(t > t_0 + \theta; t > t_0)}{Pr(t > t_0)} = \frac{Pr(t > t_0 + \theta)}{Pr(t > t_0)} = \\ &= \frac{e^{-\lambda(t_0 + \theta)}}{e^{-\lambda t_0}} = e^{-\lambda \theta} = Pr(t > \theta) \end{aligned}$$

<sup>10</sup>La ddp esponenziale è spesso adottata come un modello approssimato ma di facile applicazione per rappresentare un tempo di attesa, ed applicato ad esempio alla durata di una conversazione telefonica, oppure all'intervallo tra due malfunzionamenti di un apparato.

<sup>11</sup>Per quanto riguarda il valor medio  $m_E = \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} dt$  possiamo procedere *per parti*, ossia applicando la regola  $\int_a^b f'(t) g(t) dt = f(t) g(t)|_a^b - \int_a^b f(t) g'(t) dt$ , avendo posto  $f'(t) = e^{-\lambda t}$  e  $g(t) = \lambda t$ : si ottiene allora

$$m_E = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \cdot \lambda dt = -0 + 0 - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

essendo  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} \cdot \lambda t = 0$ . Per  $\sigma_E^2 = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - (m_E)^2$ , il primo integrale (sempre procedendo per parti) fornisce  $\int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2}$ , e dunque  $\sigma_E^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$ .

$\sigma_E^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ . La probabilità che il tempo di attesa di una v.a. esponenziale superi un determinato valore  $t_0$ , è allora calcolabile come

$$Pr(t > t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_{t_0}^{\infty} = e^{-\lambda t_0} \tag{17.3}$$

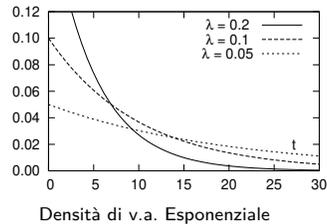
e questo risultato ci permette di verificare il legame con la Poissoniana<sup>12</sup>.

**Esempio** Se la durata media di una telefonata è di 5 minuti, e la durata complessiva è completamente casuale, quale è la probabilità che la stessa duri più di 20 minuti?

Risposta: ci viene fornito un tempo di attesa medio  $\tau_a$ , a cui corrisponde una frequenza di servizio  $\lambda = \frac{1}{\tau_a}$ , e quindi la soluzione risulta  $Pr(t > 20) = \int_{20}^{\infty} \frac{1}{\tau_a} e^{-t/\tau_a} dt = e^{-20/5} = 0.0183 = 1.83\%$ .

Un corollario<sup>13</sup> della (17.3) è che, se  $t_0 \rightarrow 0$ , allora la probabilità che si verifichi un evento entro un tempo  $t_0$ , è *direttamente proporzionale* (a meno di un infinitesimo di ordine superiore di  $t_0$ ) al valore di  $t_0$ , ossia

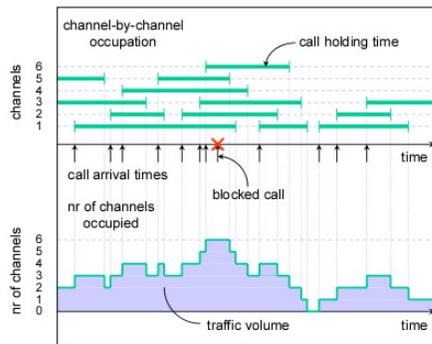
$$Pr(t \leq t_0) \Big|_{t_0 \rightarrow 0} = \lambda t_0 + o(t_0) \tag{17.4}$$



### 17.3 Sistema di servizio orientato alla perdita

Un *sistema di servizio* è una entità in grado di accogliere delle *richieste di servizio*, ovvero eventi che definiscono il cosiddetto *processo di ingresso* al sistema, fino al raggiungimento della capacità limite, determinata dal numero  $M$  di *serventi* di cui il sistema dispone<sup>14</sup>.

Una volta occupati tutti i serventi, e finché non se ne libera qualcuno, le successive richieste possono essere poste in coda, individuando così un sistema *orientato al ritardo* (che affrontiamo al § 17.4), oppure rifiutate (vedi la figura a fianco), come avviene per i sistemi *orientati alla perdita*.



Richieste di servizio e occupazione serventi

<sup>12</sup>Consideriamo un ospedale in cui nascono in *media* 6 bimbebbi al giorno (o 0.25 nascite l'ora), e consideriamo l'intervallo tra questi eventi come una v.a. completamente casuale. Se assumiamo che la probabilità di  $k$  nascite in un tempo  $T$  sia descritta da una v.a. di Poisson, ossia a cui compete una probabilità  $p_P(k) = e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^k}{k!}$ , allora la probabilità che durante un tempo  $T$  non avvenga nessuna nascita, dovrebbe corrispondere a calcolare  $p_P(0)$ , ovvero  $e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^0}{0!} = e^{-\lambda T}$ , che è esattamente il risultato che fornisce la v.a. esponenziale per la probabilità  $Pr(t > T)$  che non vi siano nascite per un tempo  $T$ .

<sup>13</sup>La dimostrazione della (17.4) si basa sulla considerazione che  $Pr(t \leq t_0) = 1 - Pr(t > t_0)$ , e sulla espansione in serie di potenze  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$  che si riduce a  $e^x = 1 + x + o(t_0)$  se  $x \rightarrow 0$ . Pertanto, la (17.3) diviene  $Pr(t > t_0) \Big|_{t_0 \rightarrow 0} = 1 - \lambda t_0 + o(t_0)$ , e quindi  $Pr(t \leq t_0) = 1 - 1 + \lambda t_0 + o(t_0) = \lambda t_0 + o(t_0)$ .

<sup>14</sup>Gli esempi dalla vita reale sono molteplici, dal casello autostradale presso cui arrivano auto richiedenti il servizio del casellante ( $M$ =numero di caselli aperti), al distributore automatico di bevande (servente unico), all'aereo che per atterrare richiede l'uso della pista (servente unico)... nel contesto delle telecomunicazioni, il modello si applica ogni qualvolta vi siano un numero limitato di risorse a disposizione, come ad esempio (ma non solo!) il numero di linee telefoniche uscenti da un organo di commutazione, od il numero di *time-slot* presente in una trama PCM, od il numero di operatori di un *call-center*...

Scopo della presente sezione sarà pertanto quello di determinare il numero di serventi necessario a garantire una *probabilità di rifiuto* della richiesta di servizio pari ad un valore che descrive il *grado di servizio* che si intende fornire.

### 17.3.1 Frequenza di arrivo e di servizio

Mentre il processo di ingresso è descritto in termini della *frequenza media* di arrivo  $\lambda$ , il tempo medio di occupazione dei serventi (indicato come *processo di servizio*) è descritto nei termini del *tempo medio di servizio*  $\tau_S$ , ovvero dal suo inverso  $\mu = 1/\tau_S$ , pari alla *frequenza media* di servizio. Nella trattazione seguente si fa l'ipotesi che entrambi i processi (di ingresso e di servizio) siano descrivibili in termini di v.a. a distribuzione esponenziale<sup>15</sup>, ovvero che le durate degli eventi "nuova richiesta" e "servente occupato" siano *completamente casuali*<sup>16</sup>.

### 17.3.2 Intensità media di traffico

Il rapporto  $A_o = \frac{\lambda}{\mu}$  è indicato come *intensità media* del traffico *offerto*<sup>17</sup> e descrive quanti serventi (in media) *sarebbero* occupati ad espletare le richieste arrivate e non ancora servite, nel caso in cui  $M$  fosse infinito. L'aggettivo *offerto* indica la circostanza che, essendo invece  $M$  finito, alcune richieste non sono accolte, ed  $A_o$  risulta diverso dal traffico  $A_s$  che può essere effettivamente *smaltito*. L'unità di misura dell'intensità di traffico è l'ERLANG, il cui valore indica appunto il numero medio di serventi occupati.

**Esempio** Ad un centralino giungono una media di  $\lambda = 3$  chiamate al minuto, e la durata media di una conversazione è  $1/\mu = 3$  minuti. In tal caso l'intensità media di traffico risulta  $A_o = 3 \cdot 3 = 9$  Erlang, corrispondenti al potenziale impegno di una *media* di 9 centralinisti (e nove linee telefoniche).

### 17.3.3 Probabilità di rifiuto

La teoria che porta a determinare la probabilità che una nuova richiesta di servizio non possa essere accolta a causa dell'esaurimento dei serventi, si basa sull'analisi di un cosiddetto *processo di nascita e morte*, che descrive da un punto di vista statistico l'evoluzione di una popolazione, nei termini di una frequenza di nascita (nuova conversazione) e di morte (termine della conversazione). Istante per istante, il numero esatto di individui della popolazione può variare, ma in un istante a caso, possiamo pensare alla numerosità della popolazione come ad una variabile aleatoria discreta, descritta in base ai valori di probabilità  $p_k$  che la popolazione assumi esattamente a  $k$  individui. La determinazione di questi valori  $p_k$  dipende dalla caratterizzazione dei processi di ingresso e di servizio, e nel caso in cui questi siano descritti da v.a. esponenziali (o poissoniane, a seconda se ci riferiamo ai tempi medi di interarrivo/partenza, od al loro numero medio per unità di tempo) si può procedere nel modo che segue.

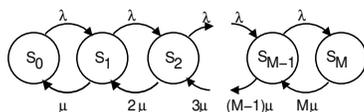
Descriviamo innanzitutto l'evoluzione dello stato del sistema, in cui il numero di *serventi occupati* evolve aumentando o diminuendo di una unità alla volta (come per i processi di nascita

<sup>15</sup>L'ipotesi permette di valutare la probabilità che l'intervallo temporale tra due eventi di ingresso sia superiore a  $\theta$ , in base alla (17.3), come  $e^{-\lambda\theta}$  (ad esempio, la prob. che tra due richieste di connessione in ingresso ad una centrale telefonica passi un tempo almeno pari a  $\theta$ ); allo stesso modo, la probabilità che il servizio abbia una durata maggiore di  $\theta$  è pari a  $e^{-\mu\theta}$  (ad esempio, la prob. che una telefonata duri più di  $\theta$ ).

<sup>16</sup>Le ipotesi poste fanno sì che i risultati a cui giungeremo siano conservativi, ovvero il numero di serventi risulterà maggiore od uguale a quello realmente necessario; l'altro caso limite (di attese deterministiche) corrisponde a quello in cui il tempo di servizio non varia, ma è costante, come ad esempio il caso del tempo necessario alla trasmissione di una cella ATM di dimensioni fisse. In questi casi, la stessa intensità media di traffico  $A_o = \frac{\lambda}{\mu}$  può essere gestita con un numero molto ridotto di serventi; nella realtà, ci si troverà in situazioni intermedie.

<sup>17</sup>Si noti che il pedice  $o$  è una "o" e non uno "0", ed identifica appunto l'aggettivo *offerto*.

e morte), con l'ausilio della figura a lato, dove il generico stato  $S_k$  rappresenta la circostanza che  $k$  serventi siano occupati, circostanza a cui compete una probabilità  $p_k = Pr(S_k)$ .



Gli stati del grafo sono collegati da archi etichettati

con la frequenza  $\lambda$  delle transizioni tra gli stati, ovvero dal ritmo con cui si passa da  $S_k$  a  $S_{k+1}$  a causa di una nuova richiesta, indipendente (per ipotesi) dal numero di serventi già occupati, e dal ritmo  $(k + 1) \cdot \mu$  con cui si torna da  $S_{k+1}$  ad  $S_k$ , a causa del termine del servizio espletato da uno tra i  $k + 1$  serventi occupati, e proporzionale quindi a questo numero<sup>18</sup>. Se  $\lambda$  e  $\mu$  non variano nel tempo, esaurito un transitorio iniziale, il sistema di servizio si troverà in *condizioni stazionarie*, permettendoci di scrivere le *equazioni di equilibrio statistico*

$$\lambda p_k = \mu (k + 1) p_{k+1} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, M - 1 \tag{17.5}$$

che eguagliano la frequenza media con cui il sistema evolve dallo stato  $k$  verso  $k + 1$ , alla frequenza media con cui avviene la transizione inversa<sup>19</sup>. La (17.5) può essere riscritta come  $p_{k+1} = \frac{\lambda}{\mu(k+1)} p_k = \frac{A_o}{(k+1)} p_k$ , che applicata ricorsivamente, porta a scrivere

$$p_k = \frac{A_o^k}{k!} p_0 \tag{17.6}$$

Non resta ora che trovare il modo per dare un valore a  $p_0$ , e questo è oltremodo semplice, ricordando che deve risultare<sup>20</sup>  $1 = \sum_{m=0}^M p_m = p_0 \sum_{m=0}^M \frac{A_o^m}{m!}$ , e quindi

$$p_0 = \left( \sum_{m=0}^M \frac{A_o^m}{m!} \right)^{-1} \tag{17.7}$$

Nei due casi distinti in cui i serventi siano in numero finito (e pari ad  $M$ ) od infinito ( $M = \infty$ ) otteniamo rispettivamente il caso cercato, ed un caso limite. Se poniamo  $M = \infty$ , tenendo conto dell'espansione in serie  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_o^m}{m!} = e^{A_o}$ , si ottiene che la (17.7) fornisce appunto  $p_0 = e^{-A_o}$ , e la (17.6) diviene  $p_k = e^{-A_o} \frac{A_o^k}{k!}$ , che come riconosciamo immediatamente è proprio la ddp di Poisson (17.2) con valore medio  $A_o$ <sup>21</sup>. Se invece poniamo  $M$  finito, la sommatoria che compare in (17.7) non corrisponde ad una serie nota, e dunque rimane come è, fornendo il risultato

$$p_k = Pr(S_k) = \frac{\frac{A_o^k}{k!}}{\sum_{m=0}^M \frac{A_o^m}{m!}}$$

Notiamo ora che  $p_M$  è la probabilità che tutti i serventi siano occupati, pari dunque alla probabilità che una nuova richiesta di servizio sia rifiutata. Chiamiamo allora questo valore *Probabilità*

<sup>18</sup>Pensiamo ad un ufficio postale visto dall'esterno: la frequenza media  $\lambda$  con cui entrano nuove persone non dipende da quanti siano già all'interno, mentre invece la frequenza con la quale escono dipende sia dal tempo medio  $1/\mu$  di permanenza allo sportello, che dal numero di sportelli (serventi)  $M$  in funzione. La differenza con il caso che stiamo trattando, scaturisce dal fatto che l'ufficio postale è un sistema a coda, e dato che la coda  $c$  è *praticamente sempre* (ossia i serventi sono generalmente tutti occupati) possiamo dire che la frequenza media di uscita è proprio  $M\mu$ .

<sup>19</sup>E' un po' come se il numero medio di nuove richieste per unità di tempo  $\lambda$  si distribuisse, in accordo alle probabilità  $p_k$ , tra tutti gli stati possibili del sistema: come dire che del totale di  $\lambda$ , una parte  $\lambda p_0$  trovano il sistema vuoto, una parte  $\lambda p_1$  con un solo occupante, eccetera. Per quanto riguarda le richieste servite per unità di tempo, la frequenza di uscita dal sistema è quella che si otterrebbe con un unico servente, moltiplicata per il numero di serventi occupati. Dato che questa ultima quantità è una grandezza probabilistica, la reale frequenza di uscita  $\mu_r$  può essere valutata come valore atteso, ossia  $\mu_r = \sum_{k=1}^M \mu \cdot k \cdot p_k$

<sup>20</sup>Usiamo il pedice  $m$  anziché  $k$  per non creare confusione nella (17.8)

<sup>21</sup>Questo risultato è in perfetto accordo con le (17.2), quando abbiamo sostituito alla ddp di Bernoulli quella di Poisson, mantenendo inalterato il numero medio di serventi occupati, che ora indichiamo con  $A_o$ , come definito al § 17.3.2.

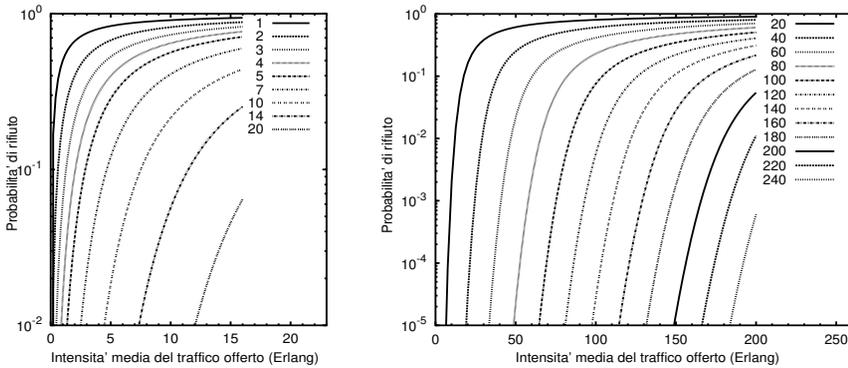


Figura 17.1: Andamento della probabilità di blocco  $P_B$  in un sistema orientato alla perdita, al variare di  $A_o$ , per il numero di serventi indicato sulle curve

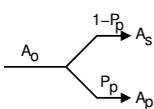
di Blocco, di Rifiuto o di Perdita, la cui espressione prende il nome di FORMULA B DI ERLANG, del primo tipo, di ordine  $M$  ed argomento  $A_o$ :

$$P_B = Pr(S_M) = p_M = \frac{\frac{A_o^M}{M!}}{\sum_{m=0}^M \frac{A_o^m}{m!}} = E_{1,M}(A_o) \quad (17.8)$$

L'andamento di  $P_B$  in funzione di  $M$  e di  $A_o$  è graficato in Fig. 17.1, e mostra come (ad esempio) per una intensità di traffico offerto pari a 40 Erlang, siano necessari più di 50 serventi per mantenere una  $P_B$  minore dell'1%, che salgono a più di 60 per una  $P_B = 10^{-3}$ .

### 17.3.4 Efficienza di giunzione

In presenza di una intensità media di traffico offerto  $A_o$ , ed una probabilità di perdita  $P_p = P_B$ , solamente il  $(1 - P_p) \cdot 100$  % delle richieste è smaltito, e quindi



$A_o$  si ripartisce tra l'intensità media di *traffico smaltito*  $A_s = A_o(1 - P_p)$ , e l'intensità media di *traffico perso*  $A_p = A_o P_p$ . Possiamo definire un coefficiente di utilizzazione, o efficienza

$$\rho = \frac{A_s}{M} = \frac{A_o}{M} (1 - P_p)$$

che rappresenta la percentuale di impegno dei serventi, e di cui la figura 17.2 mostra l'andamento al variare di  $A_o$ , per una  $P_B$  assegnata e pari a  $2 \cdot 10^{-3}$ , assieme al numero di serventi necessario a garantire tale probabilità di blocco.

Come si può osservare, una volta fissato il grado di servizio, all'aumentare del numero di serventi il traffico smaltito cresce più in fretta di quanto non crescano i serventi<sup>22</sup>, cosicché (a parità di  $P_p$ ) l'efficienza aumenta con l'intensità di traffico offerto, e per questo i collegamenti (*giunzioni*) in grado di smaltire un numero più elevato di connessioni, garantiscono anche una maggiore economicità di esercizio.

<sup>22</sup>ovvero, all'aumentare del traffico offerto,  $M$  aumenta più lentamente di  $A_o$ . Ad esempio, dalla figura si può verificare che se per  $A_o = 10$  occorrono circa 21 serventi, per una intensità doppia  $A_o = 20$  il numero di serventi necessario a mantenere la stessa  $P_B$  risulta poco più di 32.

### 17.3.5 Validità del modello

Le considerazioni esposte si riferiscono ad una ipotesi di traffico completamente casuale con tempi di interarrivo e di servizio esponenziali<sup>23</sup>, ossia con un processo di traffico incidente di Poisson. In queste ipotesi, il rapporto  $\frac{\sigma_P^2}{m_P} = 1$  tra la varianza e la media delle distribuzioni di Poisson, è rappresentativo appunto di un traffico *completamente casuale*.

Del tutto diversa può risultare l'analisi, nel caso di una giunzione usata solo nel caso di trabocco del traffico da una giunzione piena. In questo caso  $\lambda$  non è più costante, anzi aumenta con l'aumentare delle connessioni già avvenute, tipico di *traffico a valanga*<sup>24</sup>.

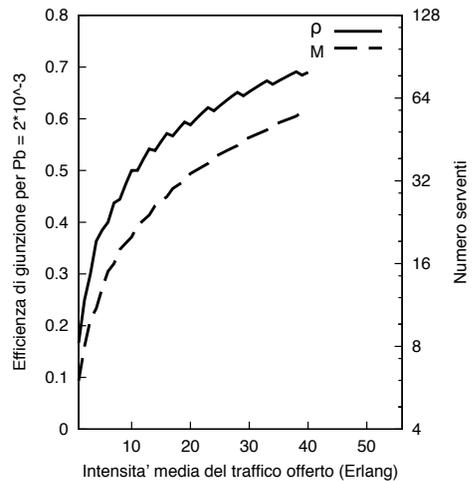


Figura 17.2: Efficienza di giunzione

**Esempio** Un numero molto elevato di sorgenti

analogiche condivide uno stesso mezzo trasmissivo, caratterizzato da una capacità complessiva netta di 25.6 Mbps. Le sorgenti sono campionate a frequenza  $f_c = 21.33$  KHz e con una risoluzione di 12 bit/campione; ogni sorgente trasmette ad istanti casuali per un tempo casuale, quindi gli intervalli di interarrivo e di servizio sono entrambi v.a. a distribuzione esponenziale negativa, di valor medio rispettivamente  $\lambda = 20$  richieste/minuto e  $\frac{1}{\mu} = 4.25$  minuti.

1. Determinare la  $f_b$  di una sorgente nelle fasi di attività;
2. determinare il numero massimo di sorgenti contemporaneamente attive;
3. determinare il grado di servizio (Probabilità di rifiuto) ottenibile con il mezzo trasmissivo indicato;
4. indicare la capacità da aggiungere al collegamento per garantire un grado di servizio cento volte migliore.

- Risposte**
1.  $f_b = \frac{\text{bit}}{\text{campione}} \cdot \frac{\text{campioni}}{\text{secondo}} = 12 \cdot 21.33 \cdot 10^3 = 256$  Kbps;
  2. Il numero massimo di sorgenti contemporaneamente attive coincide con il numero di serveri  $M$  del collegamento, e quindi  $M = \frac{25.6 \cdot 10^6}{256 \cdot 10^3} = 100$  serveri;
  3. L'intensità media di traffico offerto risulta pari a  $A_o = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{1/4.25} = 85$  Erlang, e pertanto dalle curve di Fig. 17.1 si trova una probabilità di rifiuto pari a circa  $10^{-2}$ ;
  4. Si richiede quindi una probabilità di rifiuto 100 volte inferiore, e cioè pari a  $10^{-4}$ ; si ottiene che la banda deve essere aumentata del 20%. Infatti, dalle curve di Fig. 17.1 si osserva che ciò richiede (a parità di  $A_o$ ) almeno 120 (circa) serveri, 20 in più, pari ad una capacità aggiuntiva di  $20 \cdot 256 \cdot 10^3 = 5.12$  Mbps.

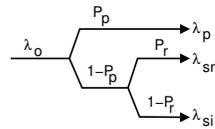
<sup>23</sup>In effetti, è stato dimostrato che i risultati ottenuti per i sistemi di servizio orientati alla perdita possono essere considerati validi anche nel caso di tempi di servizio a distribuzione qualsiasi, non necessariamente esponenziale.

<sup>24</sup>Un esempio di tale tipo di traffico potrebbe essere... l'uscita da uno stadio (o da un cinema, una metropolitana,...) in cui il flusso di individui non è casuale, ma aumenta fino a saturare le vie di uscita.

### 17.4 Sistemi di servizio orientati al ritardo

Mentre i sistemi orientati alla perdita rappresentano il modo di operare delle reti di telecomunicazione a *commutazione di circuito*, in cui ogni connessione impegna in modo esclusivo alcune risorse di rete, che una volta esaurite producono un *rifiuto* della richiesta di connessione, i sistemi *orientati al ritardo* sono rappresentativi di reti a *commutazione di pacchetto*, in cui i messaggi sono suddivisi in unità elementari (detti pacchetti, appunto) la cui ricezione non deve più avvenire in tempo reale, e che condividono le stesse risorse fisiche (degli organi di commutazione e di trasmissione) con i pacchetti di altre comunicazioni. Pertanto, l'invio di un pacchetto può essere *ritardato* se il sistema di servizio è in grado di gestire delle *code di attesa*, in cui accumulare le richieste che eccedono il numero di serventi a disposizione, e da cui prelevare (con ritardo) i pacchetti stessi non appena si rendano disponibili le risorse trasmissive necessarie.

In questo caso il grafico che mostra la ripartizione dei flussi di richieste si modifica come in figura, dove è evidenziato come la frequenza di richieste  $\lambda_o$  si suddivide tra la frequenza delle richieste perse  $\lambda_p$ , quelle servite con ritardo  $\lambda_{sr}$ , e quelle servite immediatamente  $\lambda_{si}$ , in funzione della probabilità di perdita  $P_p$  e di ritardo  $P_r$ . Nei termini di queste quantità, valgono le relazioni:



$$\lambda_p = P_p \lambda_o; \quad \lambda_{sr} = P_r (1 - P_p) \lambda_o; \quad \lambda_{si} = (1 - P_r) (1 - P_p) \lambda_o$$

Indicando con  $\tau_S = \frac{1}{\mu}$  il tempo medio di servizio di ogni richiesta, (che non comprende quindi il tempo di accodamento), si definisce, come già noto, una intensità di traffico offerto  $A_o = \frac{\lambda_o}{\mu} = \lambda_o \tau_S$ , che deve risultare

$$A_o = A_p + A_{sr} + A_{si} \quad \text{e quindi} \quad A_{sr} = \frac{\lambda_{sr}}{\mu}, \quad A_{si} = \frac{\lambda_{si}}{\mu}$$

Considerando il caso in cui la coda abbia una lunghezza finita e pari ad  $L$ , osserviamo che, a prima vista, anche le  $L$  richieste successive all'impegno di tutti gli  $M$  serventi sono accolte (e poste in coda), come se i serventi fossero divenuti  $M + L$ . In realtà l'analisi fornisce risultati differenti, in quanto le richieste accodate devono essere ancora servite, e quindi il calcolo della  $P_p$  non è una diretta estensione dei risultati ottenuti per i sistemi orientati alla perdita. E' comunque abbastanza semplice verificare<sup>25</sup> che ora la  $P_p$  risulta inferiore alla  $P_B$  del caso senza coda, e pertanto l'intensità di traffico smaltito  $A_s = A_{sr} + A_{si} = (1 - P_p) A_o$  aumenta, a parità di offerta.

#### 17.4.1 Risultato di Little

Si tratta di un risultato molto generale, valido per qualsiasi distribuzione dei tempi di interarrivo e di servizio, la cui applicazione può tornare utile nell'analisi, e che recita:

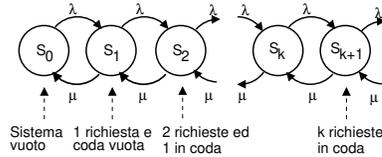
*Il numero medio  $\bar{N}$  di utenti contemporaneamente presenti in un sistema di servizio è pari al prodotto tra frequenza media di smaltimento delle richieste  $\lambda_s$  ed il tempo medio di permanenza  $\tau_p$  dell'utente nel sistema*

<sup>25</sup>Se  $P_B$  è la probabilità di blocco derivante dalla disponibilità di  $M$  serventi, una frequenza di richieste pari a  $P_B \cdot \lambda_o$  non può essere servita immediatamente; adottando una coda, la frequenza delle richieste non servite immediatamente  $P_B \cdot \lambda_o$  è uguale a  $\lambda_o (P_p + P_r (1 - P_p))$ , ed eguagliando le due espressioni si ottiene  $P_p = \frac{P_B - P_r}{1 - P_r}$ , che è sempre minore di  $P_B$ .

e quindi in definitiva  $\bar{N} = \lambda_s \cdot \tau_p$ . Nell'applicazione al caso di servizi orientati alla perdita, si ha  $\tau_p = \tau_S$ , mentre nei servizi a coda risulta  $\tau_p = \tau_c + \tau_S$  in cui  $\tau_c$  rappresenta il tempo medio di coda.

**17.4.2 Sistemi a coda infinita ed a servente unico**

Prima di fornire risultati più generali, svolgiamo l'analisi per questo caso particolare, in cui la frequenza di richieste perse  $\lambda_p$  è nulla, dato che una coda di lunghezza infinita le accoglie comunque tutte. Da un punto di vista statistico, un tale sistema è descritto mediante il diagramma di nascita e morte riportato a fianco, in cui ogni stato  $S_k$  rappresenta  $k$  richieste nel sistema, di cui una sta ricevendo servizio e  $k - 1$  sono accodate.



Per procedere nell'analisi, si applica lo stesso principio di equilibrio statistico già adottato a pag. 525 dove si asserisce che, esaurito un periodo transitorio iniziale, la frequenza media delle transizioni tra  $S_k$  e  $S_{k+1}$  deve eguagliare quella da  $S_{k+1}$  ad  $S_k$ . Indicando con  $p_k = Pr(S_k)$  la probabilità che il sistema contenga  $k$  richieste, l'equilibrio statistico si traduce nell'insieme di equazioni

$$\lambda_0 p_k = \mu p_{k+1} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, \infty \tag{17.9}$$

Infatti, in base alle stesse considerazioni svolte nella prima parte della nota 19 di pag. 525,  $\lambda_0 p_k$  è pari alla frequenza media (frazione di  $\lambda_0$ ) con cui il numero di richieste accolte passa da  $k$  a  $k+1$ ; essendo il servente unico, la frequenza di servizio è sempre  $\mu = \frac{1}{\tau_S}$ , indipendentemente dal numero di richieste accodate, e dunque  $\mu p_{k+1}$  è proprio la frequenza media con cui il sistema passa da  $k + 1$  a  $k$  richieste accolte.

La relazione (17.9) è di natura ricorsiva, e può esprimersi come

$$p_k = \left(\frac{\lambda_0}{\mu}\right)^k p_0 = A_o^k p_0$$

Per determinare il valore  $p_0 = Pr(S_0)$ , uguale alla probabilità che il sistema sia vuoto, ricordiamo<sup>26</sup> che deve risultare

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_0 A_o^k = p_0 \frac{1}{1 - A_o}$$

da cui otteniamo  $p_0 = 1 - A_o$  e dunque

$$p_k = (1 - A_o) A_o^k$$

che corrisponde ad una densità di probabilità esponenziale discreta.

Siamo ora in grado di determinare alcune grandezze di interesse:

<sup>26</sup>Nella derivazione del risultato si fa uso della relazione  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$ , nota con il nome di *serie geometrica*, e valida se  $\alpha < 1$ , come infatti risulta nel nostro caso, in quanto necessariamente deve risultare  $A_o = \frac{\lambda_0}{\mu} < 1$ ; se il servente è unico infatti, una frequenza di arrivo maggiore di quella di servizio preclude ogni speranza di funzionamento, dato che evidentemente il sistema non ha modo di smaltire in tempo le richieste che si presentano.

**Probabilità di ritardo**  $P_r$ : risulta pari alla probabilità che il sistema non sia vuoto, e cioè che ci sia già almeno una richiesta accolta, ed è pari a<sup>27</sup>

$$P_r = 1 - p_o = 1 - (1 - A_o) = A_o$$

Ricordiamo di aver già definito l'efficienza come il rapporto  $\rho = \frac{A_s}{M}$  tra il traffico smaltito ed il numero dei serventi; nel nostro caso  $M = 1$  e  $A_s = A_o$ : dunque  $\rho = A_o$ . Pertanto, il risultato  $P_r = A_o = \rho$  indica come, al tendere ad 1 dell'efficienza, la probabilità di ritardo tenda anch'essa ad 1.

**Lunghezza media di coda** indicata con  $\bar{L}$ : risulta essere semplicemente il valore atteso del numero di richieste presenti nel sistema, ovvero<sup>28</sup>

$$\bar{L} = E\{k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1 - A_o) \sum_{k=0}^{\infty} k A_o^k = \frac{A_o}{1 - A_o}$$

da cui risulta che per  $A_o \rightarrow 1$  la coda tende ad una lunghezza infinita.

**Tempo medio di permanenza** indicato con  $\tau_p$ , e scomponibile nella somma  $\tau_p = \tau_S + \tau_c$  tra il tempo medio di servizio ed il tempo medio di coda. Possiamo applicare qui il risultato di Little  $\bar{N} = \lambda_s \cdot \tau_p$ , che esprime la relazione tra numero medio  $\bar{N}$  di richieste presenti, frequenza di smaltimento (qui pari a quella di offerta<sup>29</sup>), e tempo medio di permanenza; infatti accade che  $\bar{N} = \bar{L}$ , ed utilizzando il risultato  $\bar{L} = \frac{A_o}{1 - A_o}$  si ottiene

$$\tau_p = \frac{\bar{N}}{\lambda_s} = \frac{\bar{L}}{\lambda_o} = \frac{A_o}{1 - A_o} \frac{1}{\lambda_o} = \frac{\lambda_o}{\mu} \frac{1}{\lambda_o} \frac{1}{1 - \lambda_o/\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda_o}$$

da cui si osserva che, se la frequenza di offerta tende al valore della frequenza di servizio, il tempo medio di permanenza tende ad  $\infty$ .

**Tempo medio di coda** si calcola come

$$\tau_c = \tau_p - \tau_S = \frac{1}{\mu - \lambda_o} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - \mu + \lambda_o}{\mu(\mu - \lambda_o)} = \frac{A_o}{\mu(1 - A_o)} = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1 - \rho} = \tau_S \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Questo risultato mostra che il tempo medio di coda è legato al tempo medio di servizio e all'efficienza di giunzione, confermando ancora i risultati per  $\rho \rightarrow \infty$ .

La fig. 17.3 mostra l'andamento delle grandezze appena calcolate.

### 17.4.3 Sistemi a coda finita e con più serventi

Riportiamo solo i risultati, validi se entrambi i processi di ingresso e di servizio sono esponenziali con frequenza media  $\lambda_o$  e  $\mu$ , la coda è lunga  $L$ , i serventi sono  $M$  e le sorgenti infinite.

<sup>27</sup>Ricordiamo che  $p_o$  è la probabilità che il sistema sia vuoto, e dunque  $1 - p_o$  quella che non sia vuoto.

<sup>28</sup>si fa uso della relazione  $\sum_{k=0}^{\infty} k \alpha^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} k \alpha^{k-1} = \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{1 - \alpha} = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2}$

<sup>29</sup>Non può essere  $\lambda_s > \lambda_o$ , perché si servirebbero più richieste di quante se ne presentano. Se fosse invece  $\lambda_s < \lambda_o$ , la coda crescerebbe inesorabilmente e sarebbe quindi inutile.

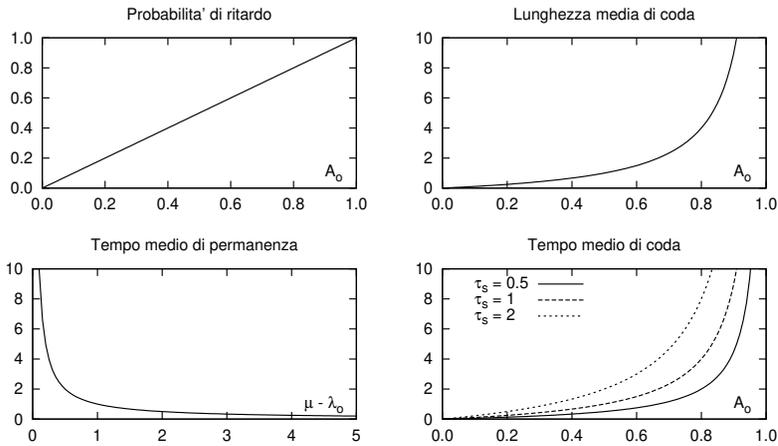


Figura 17.3: Grandezze di interesse per il sistema a coda infinita ed unico servente

**Probabilità di k richieste nel sistema**

$$p_k(A_o) = \begin{cases} \frac{A_o^k}{k! \alpha(A_o)} & 0 \leq k \leq M \\ \frac{A_o^k}{M^{k-M} M! \alpha(A_o)} & M \leq k \leq M + L \end{cases}$$

in cui  $\alpha(A_o) = \frac{1}{p_0(A_o)} = \sum_{k=0}^{M+L} \frac{A_o^k}{k!}$  e  $A_o = \frac{\lambda_o}{\mu}$ . Si noti come per  $0 \leq k \leq M$  ed  $L = 0$  si ottenga lo stesso risultato già esposto per i sistemi orientati alla perdita, mentre per  $M = 1$  ed  $L = \infty$  ci si riconduca al caso precedentemente analizzato.

**Probabilità di ritardo**

$$P_r = \sum_{k=M}^{M+L} p_k(A_o) = p_M(A_o) \frac{1 - \rho^{L+1}}{1 - \rho} \quad \text{in cui} \quad \rho = \frac{A_o}{M}$$

**Probabilità di perdita**

$$P_p = p_{M+L}(A_o) = \frac{A_o^{M+L}}{M^L M! \cdot \alpha(A_o)}$$

**Tempo medio di coda**

$$\tau_c = \tau_S \frac{P_r - L \cdot P_{M+L}(A_o)}{M - A_o}$$

La Figura 17.4 descrive la probabilità di perdita per un sistema a servente singolo (a sinistra) e con 10 serventi (a destra), in funzione dell'intensità di traffico offerto e della lunghezza di coda, così come risulta dalla applicazione delle formule riportate. Nel caso di trasmissione di pacchetti di lunghezza fissa, per i quali il tempo di servizio è fisso e non a distribuzione esponenziale<sup>30</sup>, i risultati ottenuti costituiscono una *stima conservativa* delle prestazioni del sistema (che potranno cioè essere migliori). L'analisi delle curve permette di valutare con esattezza il vantaggio dell'uso di una coda (a spese del tempo di ritardo). Infatti, aumentando il numero di posizioni di coda si mantiene una probabilità di blocco accettabile anche per traffico intenso.

<sup>30</sup>In una trasmissione a pacchetto, operata a frequenza binaria  $f_b$  e con pacchetti di lunghezza media  $\bar{L}_p$  bit, il tempo medio di servizio per un singolo pacchetto è pari a quello medio necessario alla sua trasmissione, e cioè  $\tau_S = \bar{L}_p / f_b$ .

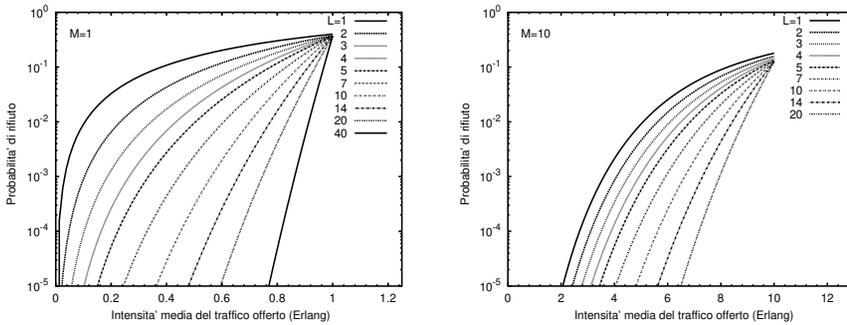


Figura 17.4: Probabilità di perdita per un sistema a coda finita con uno o dieci server

Ad esempio, per  $P_b = 1\%$  ed  $M = 1$ , osserviamo che una coda con  $L = 20$  posizioni gestisce un traffico di  $A_o = 0.83$  Erlang, contro gli  $A_o = 0.11$  Erlang del caso senza coda. Ciò corrisponde ad un aumento dell'efficienza di  $\frac{0.83}{0.11} = 7.54$  volte. D'altra parte ora il tempo medio di coda (calcolato in modo conservativo applicando la relazione per coda infinita) è  $\tau_c = \tau_S \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.83}{1-0.83} \tau_S = 4.9 \tau_S$ , ed è quindi aumentato (rispetto a  $\tau_S$ ) di quasi 5 volte.

**Esercizio** Un nodo di una rete per dati effettua la moltiplicazione di pacchetti di dimensione media di 8 KByte<sup>31</sup> su collegamenti con velocità binaria  $f_b = 100$  Mbps<sup>32</sup>

- 1) Determinare il tempo medio di servizio di ogni singolo pacchetto;
- 2) determinare il tempo medio di interarrivo  $\tau_a$  tra pacchetti corrispondente ad un traffico di ingresso di 1200 pacchetti/secondo, e l'associata intensità  $A_o$ ;
- 3) assumendo che la dimensione dei pacchetti sia una v.a. con densità esponenziale negativa, così come il tempo di interarrivo tra pacchetti, e che la memoria del moltiplicatore sia così grande da approssimare le condizioni di coda infinita, determinare il ritardo medio di un pacchetto, ossia il tempo medio trascorso tra quando un pacchetto si presenta in ingresso al nodo e quando ne esce;
- 4) calcolare la quantità di memoria necessaria ad ospitare i dati che si accumulano in un intervallo temporale pari al ritardo medio, considerando pacchetti di lunghezza fissa e pari alla media.

**Risposte** 1) Il tempo medio di servizio di un pacchetto è pari al tempo occorrente per trasmetterlo:

$$\tau_S = \frac{1}{\mu} = \text{durata di un bit} \cdot \frac{\text{bit}}{\text{pacchetto}} = \frac{1}{10^8} \left[ \frac{\text{secondi}}{\text{bit}} \right] \cdot 1024 \left[ \frac{\text{byte}}{\text{pacchetto}} \right] \cdot 8 \left[ \frac{\text{bit}}{\text{byte}} \right] \simeq 655 \mu\text{sec};$$

2)  $\tau_a = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{1200} = 833 \mu\text{sec}; A_o = \frac{\lambda}{\mu} = 1200 \cdot 655 \cdot 10^{-6} = 0.786$  Erlang;

3) Le condizioni poste corrispondono a quelle di traffico poissoniano e sistema a singolo server e coda infinita, per il quale la teoria fornisce per il tempo di permanenza il risultato  $\tau_p = \frac{1}{\mu - \lambda_o} = \frac{1}{\frac{10^6}{655} - \frac{10^6}{833}} = \frac{1}{326} \simeq 3$  msec;

4) La memoria necessaria è pari al prodotto tra il tempo medio di permanenza ed il numero di bit che si accumulano in quel periodo, ovvero  $3 \cdot 10^{-3} [\text{sec}] \cdot 1200 \left[ \frac{\text{pacch}}{\text{sec}} \right] \cdot 1024 \left[ \frac{\text{byte}}{\text{pacch}} \right] \simeq 3.7$  Kbyte.

<sup>31</sup> 1 byte = 8 bit, 1 K =  $2^{10} = 1024$ . Il "K" in questione è "un K informatico". Nel caso invece in cui ci si riferisca ad una velocità di trasmissione, il prefisso K torna a valere  $10^3 = 1000$ .

<sup>32</sup> In virtù di quanto esposto alla nota precedente, in questo caso  $1M = 10^6 = 1000000$ .

## 17.5 Reti per trasmissione dati

In questa sezione illustriamo le particolarità legate alle *trasmissioni dati*, e come queste possano essere vantaggiosamente sfruttate per conseguire la *maggiore efficienza* che i sistemi di servizio a coda presentano rispetto a quelli orientati alla perdita. Le particolari *modalità e funzioni* legate alle trasmissioni dati saranno classificate secondo uno schema che ne consente il confronto in termini di prestazioni e vincoli sulla realizzazione della rete. Infine, verranno formalizzate le esigenze legate alla soluzione dei problemi di trasmissione dati, introducendo i concetti legati alle *architetture protocollari*, assieme ad alcuni esempi reali.

Le trasmissioni dati si prestano bene a comunicazioni in cui siano possibili ritardi temporali variabili, attuando una filosofia di tipo *ad immagazzinamento e rilancio* (STORE AND FORWARD) basata sul suddividere il messaggio in unità informative elementari denominate *pacchetti*, che possono essere inoltrati sulla rete di comunicazione, assieme a quelli prodotti da altre trasmissioni. L'applicazione della stessa metodologia a trasmissioni (ad esempio) vocali non è per nulla semplice, in quanto la presenza di un ritardo variabile per la trasmissione dei pacchetti comporta problemi non trascurabili, a meno di attuare speciali meccanismi di priorità e prenotazione della banda, tuttora oggetto di ricerca.

### 17.5.1 Il pacchetto dati

Discutiamo brevemente, in termini generali, i possibili contenuti di un pacchetto dati; il suo formato effettivo dipenderà dal particolare protocollo di trasmissione adottato.

La prima osservazione da fare è che la suddivisione del messaggio in pacchetti comporta un aumento delle informazioni da trasmettere, in quanto ognuno di questi dovrà contenere informazioni addizionali per consentire un suo corretto recapito e la sua ricombinazione con gli altri pacchetti dello stesso messaggio. Occorre inoltre affrontare gli ulteriori problemi tipici di una comunicazione dati, ovvero come contrastare gli errori di trasmissione, e come gestire le risorse di rete.

In termini generali, un pacchetto è composto da una *intestazione* (HEADER), dalla parte di messaggio che trasporta (*dati*), e da un campo *codice di parità* (CRC) necessario a rivelare l'occorrenza

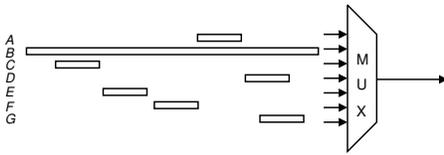


di errori di trasmissione<sup>33</sup>. L'*header* a sua volta può essere suddiviso in campi, in cui trovano posto (tra le altre cose) gli *indirizzi* del destinatario e della sorgente, un *codice di controllo* che causa in chi lo riceve l'esecuzione di una procedura specifica, un *numero di sequenza* che identifica il pacchetto all'interno del messaggio originale, ed un campo che indica la *lunghezza* del pacchetto. Nonostante la presenza delle informazioni aggiuntive<sup>34</sup>, la trasmissione a pacchetto consegue una efficienza maggiore di quella a circuito, in quanto è attuata mediante sistemi a coda.

Può sembrare vantaggioso mantenere la dimensione dei pacchetti elevata, riducendo così la rilevanza delle informazioni aggiuntive, ma si verificano controindicazioni. Infatti, suddividere messaggi lunghi in pacchetti più piccoli garantisce l'inoltro di (altre) comunicazioni più brevi

<sup>33</sup>La sigla CRC significa *Cyclic Redundancy Check* (controllo ciclico di ridondanza) ed indica una parola binaria i cui bit sono calcolati in base ad operazioni algebriche (vedi § 8.5.3.3) attuate sui bit di cui il resto del messaggio è composto. Dal lato ricevente sono eseguite le stesse operazioni, ed il risultato confrontato con quello presente nel CRC, in modo da controllare la presenza di errori di trasmissione.

<sup>34</sup>L'entità delle informazioni aggiuntive rispetto a quelle del messaggio può variare molto per i diversi protocolli, da pochi bit a pacchetto fino ad un 10-20% dell'intero pacchetto (per lunghezze ridotte di quest'ultimo).



durante la trasmissione di messaggi lunghi, che altrimenti *bloccherebbero* i sistemi di coda se realizzate con un unico “pacchettone”: in figura è mostrato un esempio in cui *B*, presentandosi in ingresso al multiplexer con lieve anticipo

rispetto agli altri pacchetti più piccoli, ne impedisce l’inoltro, monopolizzando la linea di uscita per tutta la durata della sua trasmissione.

Infine, all’aumentare della lunghezza di un pacchetto aumenta proporzionalmente la probabilità di uno (o più) bit errati (vedi anche la formula (8.24) a pag. 226 e la discussione al § 8.6.2.3), e dunque l’uso di dimensioni contenute riduce le necessità di ritrasmissione.

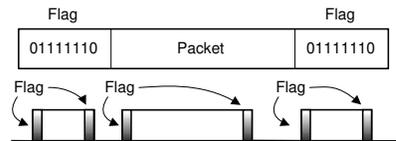
### 17.5.2 Modo di trasferimento delle informazioni

È definito in base alla specificazione di 3 caratteristiche che lo contraddistinguono: *lo schema di multiplazione*, il *principio di commutazione* e l’*architettura protocollare*.

#### 17.5.2.1 Schema di multiplazione

Al § 19.3.1 è descritto uno schema a divisione di tempo che prevede l’uso di una *trama* in cui trovano posto diverse comunicazioni vocali<sup>35</sup>, e che necessita di un funzionamento sincronizzato (o quasi) dei nodi di rete. La trasmissione *a pacchetto* invece non prevede l’uso esclusivo di risorse da parte delle singole comunicazioni, e *non fa uso* di una struttura di trama e pertanto occorrono soluzioni particolari per permettere la *delimitazione* dei pacchetti.

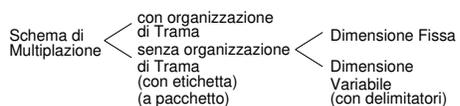
Ad esempio, i protocolli HDLC ed X.25<sup>36</sup> presentano pacchetti di dimensione variabile, e fanno uso di un byte di *flag* (vedi pag. 243) costituito dalla sequenza 01111110 in testa ed in coda, per separare tra loro i pacchetti di comunicazioni differenti. Per evitare che i dati “propri” del pacchetto possano simulare un flag, in trasmissione viene inserito un bit 0 dopo 5 uni di fila, che (se presente) viene rimosso al ricevitore. Se dopo 5 uni c’è ancora un 1 (e poi uno zero), allora è un flag.



Nel caso in cui il pacchetto invece abbia una *dimensione fissa*<sup>37</sup>, ci si trova ad operare in una situazione simile a quella in presenza di trama, tranne che... la trama non c’è, e dunque l’ordine dei pacchetti è qualsiasi, ma viene meno l’esigenza dei flag di delimitazione.



In entrambi i casi (lunghezza di pacchetto fissa o variabile) i nodi della rete non necessitano di operare in sincronismo tra loro; lo schema di multiplazione è quindi detto *a divisione di tempo senza organizzazione di trama, asincrono, con etichetta*. Il termine etichetta (o *label*) indica che ogni pacchetto deve recare con sé le informazioni idonee a ricombinarlo assieme agli altri dello stesso messaggio.



<sup>35</sup>Come nel PCM telefonico, vedi § 19.3.1

<sup>36</sup>A riguardo di questi due protocolli ormai fuori moda, si veda ad es.

[https://it.wikipedia.org/wiki/High-Level\\_Data\\_Link\\_Control](https://it.wikipedia.org/wiki/High-Level_Data_Link_Control) e <https://it.wikipedia.org/wiki/X.25>

<sup>37</sup>Un modo di trasferimento con pacchetti di dimensione fissa è l’ATM (*Asynchronous Transfer Mode*) che viene descritto al § 18.2.

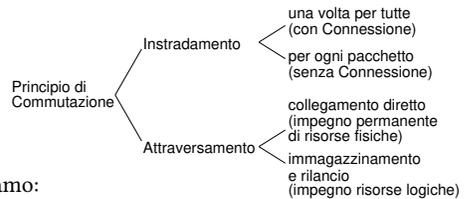
### 17.5.2.2 Principio di commutazione

È definito in base a come sono realizzate le due funzioni di *instradamento*, ovvero come individuare un percorso nella rete, e di *attraversamento*, ossia come permettere l'inoltro del messaggio tra le porte di ingresso e di uscita del commutatore.

Se l'*instradamento* (ROUTING) viene determinato una volta per tutte all'inizio del collegamento, il modo di trasferimento viene detto *con connessione*. Se al contrario l'instradamento avviene in modo indipendente per ogni pacchetto, il collegamento è detto *senza connessione* ed ogni pacchetto di uno stesso messaggio può seguire percorsi differenti.

L'*attraversamento* di un nodo di rete consiste invece nel *demultiplare* le informazioni in ingresso e moltiplicarle di nuovo su uscite diverse: ciò può avvenire mediante un *collegamento diretto* o per *immagazzinamento e rilancio*.

Sulla base di queste considerazioni, definiamo:



**Commutazione di circuito:** l'instradamento avviene una volta per tutte prima della comunicazione, e l'attraversamento impegna in *modo permanente ed esclusivo* le *risorse fisiche* dei nodi della rete; è il caso della telefonia, sia POTS che PCM<sup>38</sup>.

**Commutazione di pacchetto a circuito virtuale:** L'instradamento è determinato *una volta per tutte* prima dell'inizio della trasmissione, durante una fase di *setup* delle risorse della rete ad essa necessarie, e conseguente ad una *richiesta di connessione* da parte del nodo sorgente. I pacchetti di uno stesso messaggio seguono quindi tutti uno stesso percorso, e l'attraversamento si basa sull'impegno di *risorse logiche*<sup>39</sup> ed avviene per *immagazzinamento e rilancio*. La trasmissione ha luogo dopo aver contrassegnato ogni pacchetto con un *identificativo di connessione* (ic) che individua un *canale virtuale*<sup>40</sup> tra coppie di nodi di rete, e che ne identifica l'appartenenza ad uno dei collegamenti in transito.

L'intestazione del pacchetto può essere ridotta, al limite, a contenere il solo ic del canale virtuale. L'attraversamento avviene consultando apposite tabelle (di *routing*), generate nella fase di setup che precede quella di trasmissione, in cui è indicata la porta di uscita per tutti i pacchetti appartenenti ad uno stesso messaggio. Facciamo un esempio, riferendoci allo schema di fig. 17.5: una sorgente, a seguito della fase di instradamento, invia i pacchetti con identificativo ic = 1 al primo nodo individuato dal routing. Consultando la propria tabella, il nodo trova che il canale virtuale 1 sulla *porta di ingresso* (P.I.) A si connette al c.v. 3 sulla *porta di uscita* (P.U.) C. Ora i pacchetti escono da C con ic = 3 ed una volta giunti al nodo seguente sulla P.I. A, escono dalla P.U. B con ic = 2 e giungono finalmente a destinazione. Notiamo che su di un collegamento *tra due nodi*, i numeri dei canali virtuali identificano in modo univoco il

<sup>38</sup>Nel caso del POTS (vedi § 19.9.1) si creava un vero e proprio circuito elettrico (vedi anche pag. 568), e le risorse fisiche impegnate sono gli organi di centrale ed i collegamenti tra centrali, assegnati per tutta la durata della comunicazione in esclusiva alle due parti in colloquio. Nel caso del PCM (vedi § 19.3.1), le risorse allocate cambiano natura (ad esempio consistono anche nell'intervallo temporale assegnato al canale all'interno della trama) ma ciononostante vi si continua a far riferimento come ad una rete a *commutazione di circuito*.

<sup>39</sup>Le risorse impegnate sono dette *logiche* in quanto corrispondono ad entità concettuali (i *canali virtuali* descritti nel seguito).

<sup>40</sup>Il termine *Canale Virtuale* simboleggia il fatto che, nonostante i pacchetti di più comunicazioni viaggino "rimiscolati" su di uno stesso mezzo, questi possono essere distinti in base alla comunicazione a cui appartengono, grazie ai differenti IC (numeri) con cui sono etichettati; pertanto, è come se i pacchetti di una stessa comunicazione seguissero un proprio *canale virtuale* indipendente dagli altri.

collegamento a cui appartengono i pacchetti, mentre uno stesso numero di canale virtuale può essere riutilizzato su porte differenti<sup>41</sup>.

La concatenazione dei canali virtuali attraversati viene infine indicata con il termine *Circuito Virtuale* per similitudine con il caso di commutazione di circuito, con la differenza che ora il percorso individuato è definito solo in termini di tabelle e di etichette, e non di risorse fisiche (tranne che per la memoria della tabella).

Al termine della comunicazione, sul circuito virtuale viene inviato un apposito pacchetto di controllo, che provoca la rimozione del routing dalle tabelle.

**Congestione e controllo di flusso**

Durante la fase di instradamento, il percorso nella rete è determinato in base alle condizioni di traffico del momento, ed eventualmente la connessione può essere rifiutata nel caso in cui la memoria di coda nei nodi coinvolti sia quasi esaurita, evento indicato con il termine di *congestione*.

D'altra parte, se alcune sorgenti origine dei Canali Virtuali già assegnati e che si incrociano in uno stesso nodo intermedio, iniziano ad emettere pacchetti a frequenza più elevata del previsto, il nodo intermedio si congestionava (ossia esaurisce la memoria di transito) ed inizia a *perdere pacchetti*, penalizzando tutti i Canali Virtuali che attraversano il nodo.

Per questo motivo, sono indispensabili strategie di *controllo di flusso* che permettano ai nodi di regolare l'emissione delle sorgenti. Il controllo di flusso è attuato anch'esso mediante pacchetti (di controllo), privi del campo di dati, ma contenenti un codice identificativo del comando che rappresentano. Ad esempio, un nodo non invia nuovi pacchetti di un circuito virtuale finché non riceve un *pacchetto di riscontro* relativo ai pacchetti precedenti. D'altra parte, nel caso di una rete congestionata, la perdita di pacchetti causa il mancato invio dei riscontri relativi, e dunque i nodi a monte cessano l'invio di nuovi pacchetti<sup>42</sup>. Dopo un certo periodo di tempo (TIMEOUT) il collegamento è giudicato interrotto e viene generato un pacchetto di *Reset* da inviare sul canale virtuale, e che causa, nei nodi attraversati, il rilascio delle risorse logiche (tabelle) relative al Canale Virtuale.

Discutiamo ora invece di un ulteriore possibile principio di commutazione:

**Commutazione di pacchetto a datagramma**

Anche in questo caso, *l'attraversamento* dei nodi avviene per *immagazzinamento e rilancio*, mentre la funzione di *instradamento* è svolta in modo distribuito tra i nodi di rete *per ogni pacchetto*, il quale (chiamato ora *datagramma*) deve necessariamente contenere l'indirizzo completo della destinazione. Infatti, in questo caso manca del tutto la fase iniziale del collegamento, in cui prenotare l'impegno delle risorse (fisiche o logiche) che saranno utilizzate<sup>43</sup>. Semplicemente, non è previsto alcun impegno a priori, ed

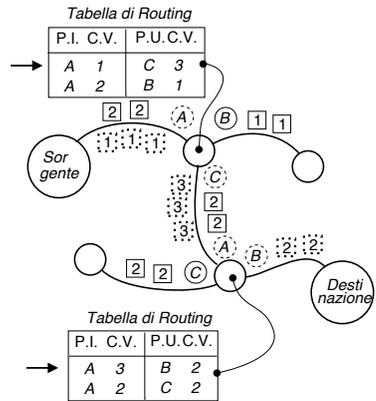


Figura 17.5: Commutazione di pacchetto a circuito virtuale

<sup>41</sup>I numeri di c.v. sono negoziati tra ciascuna coppia di nodi durante la fase di instradamento, e scelti tra quelli non utilizzati da altre comunicazioni già in corso. Alcuni numeri di c.v. inoltre possono essere riservati, ed utilizzati per propagare messaggi di segnalazione inerenti il controllo di rete.

<sup>42</sup>In realtà vengono prima fatti dei tentativi di inviare nuovamente i pacchetti "vecchi". Questi ultimi infatti sono conservati da chi li invia (che può anche essere un nodo intermedio), finché non sono riscontrati dal ricevente. Quest'ultimo fatto può causare ulteriore congestione, in quanto restano impegnate risorse di memoria "a monte" della congestione che così si propaga.

<sup>43</sup>Per questo motivo, il collegamento è detto *senza connessione*.

ogni pacchetto costituisce un collegamento individuale che impegna i nodi di rete solo per la durata del proprio passaggio. L'instradamento avviene mediante tabelle presenti nei nodi, di tipo sia statico che dinamico (nel qual caso tengono conto delle condizioni di carico e di coda dei nodi limitrofi) che indicano le possibili porte di uscita per raggiungere la destinazione scritta sul pacchetto. Quest'ultimo quindi viene fatto uscire *senza nessuna alterazione* dalla porta di uscita.

Uno dei maggiori vantaggi dei datagrammi rispetto ai circuiti virtuali è una migliore resistenza ai guasti e malfunzionamenti: in questo caso infatti, a parte una eventuale necessità di ritrasmettere i pacchetti persi, il collegamento prosegue attraverso percorsi alternativi; inoltre l'elevato numero di percorsi alternativi, può permettere (in condizioni di carico leggero) di soddisfare brevi richieste di trasmissione a velocità elevate. Allo stesso tempo, in presenza di messaggi molto brevi, l'invio di un singolo datagramma è più che sufficiente, mentre nel caso a circuito virtuale le fasi di instaurazione ed abbattimento sarebbero state un lavoro in più da svolgere (tanto che ad es. l'X.25, che è nato a c.v., prevede anche il funzionamento a datagramma).

**Consegna ordinata e gestione** Uno dei maggiori problemi legati all'uso di datagrammi è che l'ordine di arrivo dei pacchetti può essere diverso da quello di partenza, potendo questi seguire percorsi differenti. Per questo motivo, nei datagrammi è presente un *numero di sequenza* che si incrementa ad ogni pacchetto trasmesso, ed alla destinazione sono predisposti dei *buffer*<sup>44</sup> di memoria nei quali ricostruire l'ordine esatto dei pacchetti.

Nel caso di un pacchetto mancante, il ricevente non sa se questo è semplicemente ritardato oppure è andato perso, rendendo problematico il controllo di flusso. In questo caso si produce un impegno anomalo dei buffer di ingresso, che non possono essere rilasciati perché incompleti, e ciò può causare il rifiuto dell'accettazione di nuovi pacchetti, provocando un impegno anomalo anche per i buffer di uscita di altri nodi, causando congestione<sup>45</sup>.

Prima di effettuare un trasferimento a datagramma, è opportuno (a parte il caso di messaggi composti da un singolo datagramma) verificare la disponibilità del destinatario finale, e preavvisarlo di riservare una adeguata quantità di memoria. Ad esempio, in Internet avviene proprio questo (vedi pag. 546).

Proseguiamo la descrizione delle reti per dati con l'ultima caratteristica di un modo di trasferimento:

### 17.5.2.3 Architettura protocollare

Definisce la stratificazione delle funzioni di comunicazione, sia per gli apparati terminali che per i nodi di transito, e di come queste interagiscono reciprocamente sia tra nodi diversi, che nell'ambito di uno stesso nodo. Alcune di queste sono già state introdotte, e le citiamo per prime, seguite da quelle più rilevanti illustrate di seguito:

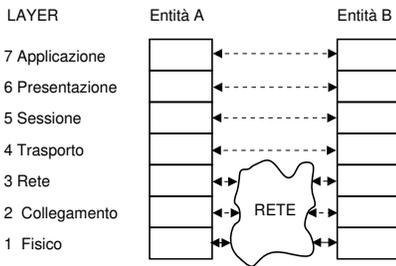
- il *controllo di flusso*, che impedisce la saturazione dei buffer;
- la *consegna ordinata*, per riassemblare messaggi frammentati su più datagrammi;
- la *segmentazione e riassetto*, che definisce le regole per frammentare un messaggio in pacchetti e ricomporli, ad esempio in corrispondenza dei "confini" tra sottoreti con differente lunghezza di pacchetto;

<sup>44</sup>Il termine *buffer* ha traduzione letterale "respingente, paracolpi, cuscinetto" ed è a volte espresso in italiano dalla locuzione memoria tampone.

<sup>45</sup>La soluzione a questa "spirale negativa" si basa ancora sull'uso di un allarme a tempo (timeout), scaduto il quale si giudica interrotto il collegamento, e sono liberati i buffer.

- il *controllo di connessione*, che provvede ad instaurare la connessione, eseguire l'instradamento, impegnare le risorse, supervisionare il controllo di flusso, abbattere la connessione al suo termine;
- il *controllo di errore*, che provvede a riscontrare le unità informative, a rilevare gli errori di trasmissione, a gestire le richieste di trasmissione;
- l'*incapsulamento*, che aggiunge ai pacchetti di dati da trasmettere le informazioni di protocollo come l'header, gli indirizzi, il controllo di parità...

**Stratificazione ISO-OSI** Per aiutare nella schematizzazione delle interazioni tra le funzioni illustrate, l'*International Standard Organization* (iso) ha formalizzato un modello concettuale per sistemi di comunicazione denominato *Open System Interconnection* (osi)<sup>46</sup>, che individua una relazione gerarchica tra i protocolli. In particolare sono definiti sette strati o *livelli* (LAYERS) ognuno dei quali raggruppa un insieme di funzioni affini. Gli strati più elevati (4-7) sono indicati anche come *strati di utente*, in quanto legati a funzioni relative ai soli apparati terminali; gli *strati di transito* invece (1-3) riguardano funzioni che devono essere presenti anche nei nodi intermedi.



La relazione gerarchica individuata stabilisce tra due strati contigui un rapporto di tipo *utente-servizio*; ovvero lo svolgimento delle funzioni di strato superiore necessita dei servizi offerti dallo strato inferiore. A titolo di esempio, si pensi all'invio di un documento mediante un corriere espresso: ci si affida allora ad uno strato di trasporto che offre all'utente (strato di sessione) un servizio (appuntamento) di trasporto che ha il compito di "far apparire" il documento presso il destinatario.

La sede locale del corriere si affida quindi alla propria divisione interna che gestisce la rete dei corrispondenti, la quale si affida a sua volta ai corrispondenti stessi, che hanno il compito di assistere alla consegna ed all'arrivo (collegamento) del documento. Il trasferimento fisico dello stesso può quindi avvenire mediante un ultimo strato funzionale (treno, nave, aereo, auto...) che provvede al recapito in base alle informazioni ricevute dallo strato di collegamento.

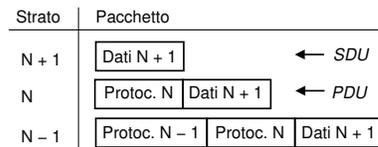
Per terminare l'esempio, facciamo notare come in ogni livello avvengano *due* tipi di colloqui (regolati da altrettanti protocolli): uno è *orizzontale*, detto anche *tra pari* (PEER-TO-PEER), come è ad esempio il contenuto del documento che spediamo, od i rapporti tra corrispondenti locali (che nel caso di un sistema di comunicazione corrisponde allo strato di collegamento, relativo ai protocolli tra singole coppie di nodi di rete); il secondo tipo di colloquio avviene invece in forma *verticale*, o *tra utente e servizio*, in quanto per realizzare le funzioni di uno strato *utente* ci si affida ad un *servizio* di comunicazione offerto dallo strato inferiore (che a sua volta può avvalersi dei servizi degli altri strati ancora inferiori)<sup>47</sup>.

<sup>46</sup>In virtù dell'intreccio di sigle, il modello di riferimento prende il nome (palindromo) di modello ISO-OSI.

<sup>47</sup>Il modo di trasferimento è completamente definito dopo che sia stato specificato in quale strato siano svolte le funzioni di commutazione e moltiplicazione. In una rete a commutazione di circuito, queste sono realizzate dallo strato fisico che, esaurita la fase di instradamento ed impegno di risorse fisiche, collega in modo trasparente sorgente e destinazione. Nella commutazione di pacchetto, invece, le funzioni di moltiplicazione e commutazione coinvolgono (per tutti i pacchetti del messaggio) tutti i nodi di rete interessati; si dice pertanto che i protocolli di collegamento e di rete devono *essere terminati* (nel senso di gestiti) da tutti i nodi di rete.

**Incapsulamento** La modalità con cui un protocollo tra pari di strato  $N$  affida i suoi dati ad un servizio di strato  $N - 1$ , si avvale (nella commutazione di pacchetto) della funzione di *incapsulamento*, di cui viene data una interpretazione grafica alla figura seguente.

I dati che lo strato  $N + 1$  vuol trasmettere al suo pari, indicati anche come *Service Data Unit* (SDU), sono prefissi dalle informazioni di protocollo necessarie alla gestione del collegamento tra entità allo strato  $N$ . Questa nuova unità informativa prende il nome di *Protocol Data Unit* (PDU) per lo strato  $N$ , e viene passata in forma di SDU al servizio di collegamento offerto dallo strato  $N - 1$ , che ripete l'operazione di incapsulamento con le proprie informazioni di protocollo, generando una nuova PDU (di strato  $N - 1$ ). Pertanto, lo strato fisico provvederà a trasmettere pacchetti contenenti tutte le informazioni di protocollo degli strati superiori.



I dati che lo strato  $N + 1$  vuol trasmettere al suo pari, indicati anche come *Service Data Unit* (SDU), sono prefissi dalle informazioni di protocollo necessarie alla gestione del collegamento tra entità allo strato  $N$ . Questa nuova unità informativa prende il nome di *Protocol Data Unit* (PDU) per lo strato  $N$ , e viene passata in forma di SDU al servizio di collegamento offerto dallo strato  $N - 1$ , che ripete l'operazione di incapsulamento con le proprie informazioni di protocollo, generando una nuova PDU (di strato  $N - 1$ ). Pertanto, lo strato fisico provvederà a trasmettere pacchetti contenenti tutte le informazioni di protocollo degli strati superiori.

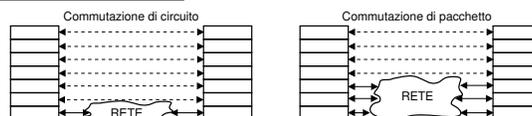
**Indipendenza dei servizi tra pari dal servizio di collegamento** Quando uno strato affida il collegamento con un suo pari allo strato inferiore, quest'ultimo può mascherare al superiore la modalità con cui viene realizzato il trasferimento.

In particolare, se ci riferiamo all'interfaccia tra gli strati di trasporto e di rete, lo strato di rete può realizzare con il suo pari collegamenti con o senza connessione, mentre quello di trasporto offre allo stesso tempo (ma in modo indipendente) agli strati superiori un servizio con o senza connessione, dando luogo alle seguenti 4 possibilità:

Servizio di rete	SERVIZIO DI TRASPORTO	
	CIRCUITO VIRTUALE	DATAGRAMMA
Circuito Virtuale	SNA, X.25	Insolito
Datagramma	Arpanet, TCP/IP	Decnet

**SNA** (SYSTEM NETWORK ARCHITECTURE) è una architettura proprietaria IBM, in cui il trasferimento avviene in modo ordinato, richiedendo al livello di trasporto un circuito virtuale, che è realizzato da una serie di canali virtuali tra i nodi di rete. La stessa architettura è adottata anche dall'X.25, che costituisce l'insieme di protocolli che descrivono il funzionamento di reti pubbliche a commutazione di pacchetto, presenti in tutto il mondo: quella italiana prende il nome di ITAPAC.

**Arpanet** è l'architettura di Internet, in cui sebbene lo strato di rete operi con un principio di commutazione a datagramma, mediante il protocollo *IP* (INTERNET PROTOCOL), lo strato di trasporto (*TCP*, TRANSFER CONTROL PROGRAM) offre a quelli superiori un servizio con connessione, attuato mediante circuiti virtuali, in modo da garantire il corretto sequenziamento delle unità informative, ed offrire canali di comunicazione formalmente simili ai files presenti localmente su disco. Il mascheramento del servizio di rete interna a datagramma in un servizio con connessione avviene a carico dello strato *TCP* di trasporto presente nei nodi terminali, che appunto affronta il riassetto ordinato dei datagrammi ricevuti dallo strato di rete.



**Decnet** è (o meglio era) l'architettura Digital, in cui il controllo di errore, la sequenzializzazione, ed il controllo di flusso sono realizzati dal livello di trasporto.

**Soluzione insolita** non è praticata perché equivale a fornire alla rete pacchetti disordinati, farli consegnare nello stesso identico disordine a destinazione, dove poi sono riassemblati. Può avere un senso se la comunicazione è sporadica, ma sempre per la stessa destinazione, nel qual caso somiglia ad un circuito virtuale permanente.

## Reti a pacchetto

**A**LFINE è giunto il momento di parlare della *rete delle reti*, ossia di INTERNET! Il tema è sviluppato con riferimento ai vari strati che sono coinvolti nel suo funzionamento, iniziando da una visione di insieme che descrive la concatenazione di indirizzi su cui si basa, per approfondire l'analisi a partire dallo strato di trasporto, giù fino allo strato fisico. Per una visione ancora più ampia che approfondisce gli aspetti che *sovrastano* lo strato di trasporto, il lettore può far riferimento ad un altro testo dello stesso autore, *Lo strato applicativo di Internet*. Sempre in questo capitolo, sono discussi anche i principi e le pratiche su cui si basa l'ATM, una architettura di rete nata quasi in contemporanea ad Internet, e che pur non avendone eguagliato il successo, rappresenta un caso di scuola per la categoria di reti basate sul paradigma del circuito virtuale. Viceversa, la realizzazione delle reti orientate *alla perdita* ovvero a commutazione di circuito, è rimandata al capitolo 19.

Affermiamo fin da subito che il modello a strati ISO-OSI (pag. 538) è una astrazione concettuale utile per individuare raggruppamenti di funzioni, e serve ottimamente come modello per stimolare l'interoperabilità di apparati di diversi costruttori. D'altra parte, realizzazioni come Internet si sono sviluppate precedentemente alla definizione di tale modello, mentre altre (come ATM) seguono filosofie che solo successivamente sono state incorporate nel modello di riferimento. Pertanto, utilizzeremo le classificazioni ISO-OSI riferimento culturale e terminologico, mediante il quale analizzare le funzioni delle reti reali.

### 18.1 La rete Internet

**Storia** Nel 1964 L. Kleinrock (UCLA) propone un modello di rete non gerarchica e con parti ridondanti, che realizza una modalità di trasferimento senza connessione e senza garanzie di qualità del servizio, rimandando queste ultime ai livelli superiori dell'architettura protocollare. Tale tipologia di servizio è oggi indicata con il termine *best effort*<sup>1</sup>. Nel '69 sono operativi cinque nodi nelle università americane, e nel '72 avviene la prima dimostrazione pubblica di ARPANET, basata su NCP. Nel '73 Kahn e Cerf iniziano a definire TCP, da cui viene successivamente separato l'IP per la convenienza di non dover necessariamente aprire sempre una connessione. Fino all'80, il DoD<sup>2</sup> sovvenziona le università per implementare in ambiente UNIX i protocolli, che nel frattempo si vanno arricchendo di servizi, mentre la trasmissione Ethernet (del 1973) è adottata per realizzare LAN.

<sup>1</sup>Migliore sforzo, ossia la rete dà il massimo, senza però garantire nulla.

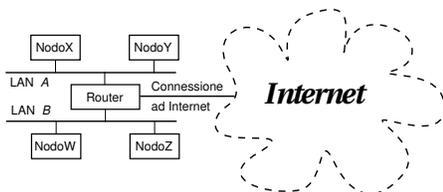
<sup>2</sup>Department of Defense.

Nel 1983 il DoD decreta che tutti i calcolatori connessi a ARPANET adottino i protocolli TCP/IP, e separa la rete in due parti: una civile (ARPANET) ed una militare (MILNET). Negli anni seguenti i finanziamenti dalla *National Science Foundation* permettono lo sviluppo di una rete di trasporto a lunga distanza e di reti regionali, che interconnettono LAN di altre università e di enti di ricerca alla rete ARPANET, alla quale si collegano poi anche le comunità scientifiche non americane.

Nel 1990 ARPANET cessa le sue attività, e Barners-Lee (CERN) definisce il WWW, mentre nel '93 Andreessen (NCSA) sviluppa *Mosaic*, il primo *browser* WWW. Dal 1995 L'NSF non finanzia più la rete di interconnessione, ed il traffico inizia ad essere trasportato da operatori privati.

**Caratteristiche** La parola *Internet* in realtà è composta da due parole, INTER e NET, in quanto le caratteristiche della rete Internet sono quelle di fondere in una unica architettura una infinità di singole reti locali, potenzialmente disomogenee, e permettere la comunicazione tra i computer delle diverse sottoreti.

Ogni nodo della rete è connesso ad una rete locale (LAN<sup>3</sup>), la quale a sua volta è interconnessa ad Internet mediante dei nodi detti *router*<sup>4</sup> che sono collegati ad una o più LAN e ad Internet, e svolgono la funzione di instradare le comunicazioni verso l'esterno. L'instradamento ha luogo in base ad un *indirizzo IP*<sup>5</sup>, che individua i singoli nodi in modo univoco su scala mondiale.



Come anticipato, lo strato di rete (o strato IP) realizza un modo di trasferimento a datagramma e non fornisce garanzie sulla qualità di servizio (QoS, QUALITY OF SERVICE) in termini di ritardi, errori e pacchetti persi. La situazione è mitigata dalla strato di trasporto (TCP, TRANSMISSION CONTROL PROTOCOL) che offre ai processi applicativi un

servizio a circuito virtuale.

I protocolli di Internet sono realizzati in software e sono pubblici; gli utenti stessi e molte sottoreti private contribuiscono significativamente al trasporto, all'indirizzamento, alla commutazione ed alla notifica delle informazioni. Queste sono alcune ragioni fondamentali per cui Internet *non è di nessuno* ed è un patrimonio dell'umanità.

### 18.1.1 Gli indirizzi

Iniziamo l'argomento discutendo subito la stratificazione degli indirizzi coinvolti in una comunicazione via Internet. Ogni livello funzionale infatti utilizza le proprie convenzioni di indirizzamento, come illustrato nella tabella a fianco. Se a prima vista questa

Strato	Indirizzo
Applicazione	<i>protocollo://nodo.dominio.tld</i>
Trasporto	<i>socket TCP o porta</i>
Rete	<i>indirizzo IP x.y.w.z</i>
Collegamento	<i>indirizzo Ethernet a:b:c:d:e:f</i>

<sup>3</sup>LOCAL AREA NETWORK, ossia *rete locale*. Con questo termine si indica un collegamento che non si estende oltre (approssimativamente) un edificio.

<sup>4</sup>La funzione di conversione di protocollo tra reti disomogenee è detta di *gateway*, mentre l'interconnessione tra reti locali è svolta da dispositivi *bridge* oppure da *ripetitori* se le reti sono omogenee. Con il termine *router* si indica più propriamente il caso in cui il nodo svolge funzioni di instradamento, che tipicamente avviene nello *strato di rete*. Nel caso in cui invece si operi un instradamento a livello dello *strato di collegamento*, ossia nell'ambito di sezioni diverse (collegate da bridge o ripetitori) di una stessa LAN, il dispositivo viene detto *switch*. Infine, un *firewall* opera a livello di trasporto, e permette di impostare *regole di controllo* per restringere l'accesso alla rete interna in base all'indirizzo di sorgente, al tipo di *protocollo*, e/o a determinati *servizi*.

<sup>5</sup>IP = Internet Protocol.

abbondanza di indirizzi può apparire esagerata, è proprio in questo modo che si realizza l'interoperabilità tra ambienti di rete differenti.

### 18.1.1.1 IP ed Ethernet

I computer connessi ad Internet (detti *nodi*) sono le sorgenti e le destinazioni dell'informazione, e sono individuati da un indirizzo IP, che consiste in un gruppo di 4 byte<sup>6</sup> e che si scrive *x.y.w.z* con ognuna delle 4 variabili pari ad un numero tra 0 e 255.

I nodi sono connessi alla rete mediante una interfaccia a volte indicata come MAC (MEDIA ACCESS CONTROL). Prendendo come esempio<sup>7</sup> i nodi connessi ad una LAN Ethernet, l'interfaccia di rete è individuata a sua volta da un indirizzo Ethernet composto da 6 byte. Quest'ultimo è unico in tutto il mondo, ed impresso dal costruttore nella scheda di interfaccia. L'indirizzo Ethernet viene però utilizzato solo nell'ambito della LAN di cui il nodo fa parte, ossia dopo che i pacchetti sono stati instradati dai router, per mezzo dell'indirizzo IP, verso la LAN.

### 18.1.1.2 Sottoreti

Ogni nodo conosce, oltre al proprio indirizzo IP, anche una *maschera di sottorete* composta da una serie di uni seguita da zeri, in numero complessivo di 32 bit, tanti quanti ne sono presenti nell'indirizzo IP. Il termine *maschera* è dovuto all'operazione di AND binario (vedi tabella) operata tra la maschera e gli indirizzi IP, per determinare se questi appartengano alla propria stessa LAN oppure risiedano altrove.

Indirizzo IP	Maschera Sottorete	Indirizzo sottorete
151.100.8.33	255.255.255.0	151.100.8.0

Nel caso in cui la sottorete di un nodo Y verso cui il nodo X deve inviare un pacchetto è la stessa su cui è connesso X, allora questi può individuare l'indirizzo Ethernet del destinatario<sup>8</sup> ed inviargli il pacchetto direttamente. In caso contrario, X invierà il pacchetto al proprio *default gateway* verso Internet.

### 18.1.1.3 Intranet

Alcuni gruppi di indirizzi IP (come quelli 192.168.w.z oppure 10.y.w.z) non vengono instradati dai router, e possono essere riutilizzati nelle *reti private* di tutto il mondo per realizzare le cosiddette *reti intranet* operanti con gli stessi protocolli ed applicativi che funzionano via Internet.

### 18.1.1.4 Domain Name Service (DNS)

L'utente di una applicazione internet in realtà non è a conoscenza degli indirizzi IP dei diversi nodi, ma li identifica per mezzo di nomi simbolici del tipo *nodo.dominio.tld*, detti anche *indirizzi Internet*. Il processo di risoluzione che individua l'indirizzo IP associato al nome avviene interrogando un particolare nodo, il DOMAIN NAME SERVICE (*servizio dei nomi di dominio*). La

<sup>6</sup>Con 4 byte si indirizzano (in linea di principio)  $2^{32} = 4.29 \cdot 10^9$  diversi nodi (più di 4 miliardi). E' tuttora in sviluppo il cosiddetto IPv6, che estenderà l'indirizzo IP a 16 byte, portando la capacità teorica a  $3.4 \cdot 10^{38}$  nodi. L'IPv6 prevede inoltre particolari soluzioni di suddivisione dell'indirizzo, allo scopo di coadiuvare le operazioni di *routing*.

<sup>7</sup>Evidentemente esistono molte diverse possibilità di collegamento ad Internet, come via telefono (tramite provider), collegamento satellitare, Frame Relay, linea dedicata, ISDN, ADSL... ma si preferisce svolgere un unico esempio per non appesantire eccessivamente l'esposizione. La consapevolezza delle molteplici alternative consente ad ogni modo di comprendere la necessità di separare gli strati di trasporto e di rete dall'effettiva modalità di trasmissione.

<sup>8</sup>Mostriamo in seguito che questo avviene mediante il protocollo ARP.

struttura dei nomi, scandita dai punti, individua una gerarchia di autorità per i diversi campi. Il campo tld è chiamato *dominio di primo livello* (TOP LEVEL DOMAIN<sup>9</sup>), mentre il campo dominio in genere è stato registrato da qualche organizzazione che lo giudica rappresentativo della propria offerta informativa. Il campo nodo rappresenta invece una ben determinata macchina, il cui indirizzo Internet completo è nodo.dominio.tld, e che non necessariamente è collegato alla stessa LAN a cui sono connessi gli altri nodi con indirizzo che termina per dominio.tld.

Quando un nodoX generico deve comunicare con nodoY.dominio.tld, interroga il proprio DNS<sup>10</sup> per conoscerne l'IP. Nella rete sono presenti molti DNS, alcuni dei quali detengono informazioni *autorevoli*<sup>11</sup> riguardo ai nodi di uno o più domini, altri (i DNS *radice*, o ROOT) detengono le informazioni relative a quali DNS siano autorevoli per i domini di primo livello, ed altri fanno da tramite tra i primi due ed i *client* che richiedono una risoluzione di indirizzo. Se il DNS di nodoX *non è autorevole per* nodoY, allora<sup>12</sup> provvede ad inoltrare la richiesta, interrogando prima un DNS radice per individuare chi è autorevole per .tld, quindi interroga questo per trovare chi è autorevole per .dominio.tld, e quindi usa la risposta ottenuta per dirigere la richiesta di risoluzione originaria. Se la cosa può sembrare troppo macchinosa per funzionare bene, è perché la stessa sequenza di operazioni *non deve* essere effettuata sempre: il DNS utilizzato da nodoX riceve infatti, assieme all'IP di nodoY, anche una informazione detta TIME TO LIVE (TTL o *tempo di vita*) che descrive la scadenza della coppia *nome-IP* ottenuta. Genericamente il TTL è di qualche giorno, e fino alla sua scadenza il DNS *ricorda*<sup>13</sup> la corrispondenza, in modo da fornire la propria copia in corrispondenza delle richieste future, e ridurre sensibilmente il traffico legato alla risoluzione degli indirizzi Internet. L'insieme delle risoluzioni apprese è denominata *cache* del DNS<sup>14</sup>.

### 18.1.1.5 Indirizzi TCP

Si è detto che ogni nodo è individuato in Internet mediante il proprio indirizzo IP, ma questo non è sufficiente ad indicare con quale particolare programma (che può essere uno specifico *server* come nel caso del DNS) si vuole entrare in comunicazione. I programmi che sono pronti a ricevere connessioni si pongono *in ascolto* su ben determinate *porte* (o *socket*<sup>15</sup>), identificate da numeri<sup>16</sup>, e che sono referenziati in modo simbolico (es. *http://*, *ftp://*) dagli applicativi di utente che si rivolgono allo strato di trasporto (il TCP) per stabilire un collegamento con un server presente su di un nodo remoto.

<sup>9</sup>I top level domain possono essere pari ad un identificativo geografico (.it, .se, .au...) od una delle sigle .com, .org, .net, .mil, .edu, che sono quelle utilizzate quando internet era solo americana.

<sup>10</sup>Il "proprio" DNS viene configurato per l'host in modo fisso, oppure in modo dinamico da alcuni Service Provider raggiungibili per via telefonica, e convenientemente corrisponde ad un nodo situato "vicino" al nodo che lo interroga.

<sup>11</sup>Chi registra il dominio deve disporre necessariamente di un DNS in cui inserire le informazioni sulle corrispondenze tra i nomi dei nodi del proprio dominio ed i loro corrispondenti indirizzi IP. In tal caso quel DNS si dice *autorevole* per il dominio ed è responsabile di diffondere tali informazioni al resto della rete.

<sup>12</sup>In realtà esiste anche una diversa modalità operativa, che consiste nel delegare la ricerca ad un diverso DNS (detto *forwarder*), il quale attua lui i passi descritti appresso, e provvede per proprio conto alla risoluzione, il cui esito è poi comunicato al primo DNS e da questi ad *hostX*. Il vantaggio di tale procedura risiede nella maggiore ricchezza della *cache* (descritta appresso) di un DNS utilizzato intensivamente.

<sup>13</sup>Il DNS ricorda anche le altre corrispondenze ottenute, come il DNS autorevole per *.tld* e per *.dominio.tld*; nel caso infine in cui si sia utilizzato un forwarder, sarà quest'ultimo a mantenere memoria delle corrispondenze per i DNS intermedi.

<sup>14</sup>CACHE è un termine generico, che letteralmente si traduce *nascondiglio dei viveri*, e che viene adottato ogni volta si debba indicare una memoria che contiene copie di riserva, o di scorta...

<sup>15</sup>*Socket* è un termine che corrisponde alla... presa per l'energia elettrica casalinga, ed in questo contesto ha il significato di una *presa* a cui si "attacca" il processo che richiede la comunicazione. Per l'esattezza, un *Socket internet* è individuato dal numero di porta TCP e dall'indirizzo IP.

<sup>16</sup>Spesso gli indirizzi che identificano i punti di contatto di servizi specifici vengono indicati come SERVICE ACCESS POINT (SAP), anche per situazioni differenti dal caso specifico delle porte del TCP.

Alcuni servizi rispondono ad indirizzi *ben noti*, fissi per tutti i nodi, in quanto il chiamante deve sapere a priori a quale porta connettersi. Il nodo contattato invece, apre con il chiamante una connessione di ritorno, su di un numero di porta diverso, che è stato comunicato dal chiamante al momento della richiesta di connessione, e per il quale il chiamante non ha già aperto altre connessioni differenti.

### 18.1.2 TCP

Discutiamo ora del TCP<sup>17</sup>, che offre ai processi applicativi un servizio di trasporto a circuito virtuale, *attaccato* ad una porta<sup>18</sup> di un nodo remoto individuato dall'indirizzo IP. Il suo compito è quello di ricevere dai processi applicativi dei dati, suddividerli in pacchetti, ed inviarli al suo pari che svolge il processo inverso.

#### 18.1.2.1 Il pacchetto TCP

La struttura di un pacchetto TCP è mostrata in figura, e comprende una intestazione composta da 6 gruppi (o più) di 4 byte per un minimo di 192 bit, a cui segue un numero variabile di gruppi di 4 byte di Dati, provenienti dagli strati applicativi superiori.

Troviamo subito i numeri delle porte a cui si riferisce la connessione, mentre gli indirizzi IP sono aggiunti dallo strato di rete. I numeri di *Sequenza* e di *Riscontro* servono rispettivamente a numerare i bytes dei pacchetti uscenti, ed a notificare l'altro lato del collegamento del numero di sequenza del prossimo byte che si aspetta di ricevere<sup>19</sup>, riscontrando implicitamente come correttamente arrivati i pacchetti con numero di sequenza più basso.

1		8		16		24	
Porta Sorgente				Porta Destinazione			
Numero di Sequenza (Tx)							
Numero di Riscontro (Rx)							
Offset	Riserva	Contr.	Finestra				
Checksum				Puntatore Urgente			
Opzioni				Riempimento			
Dati							
Dati							
...							

*Offset* (4 bit) codifica il numero di parole da 4 byte dell'intestazione, mentre nei 6 bit *Riservati* non è mai stato scritto nulla. I 6 bit del campo *Controllo* hanno ognuno un nome ed un significato preciso, qualora posti ad uno. Il primo (*URG*) indica che il campo *urgenter pointer* contiene un valore significativo; *ACK* indica che si sta usando il Numero di Riscontro; *PSH* indica un pacchetto urgente che non può rispettare la coda in ricezione; *RST* segnala un malfunzionamento e impone il reset della connessione; *SYN* è pari ad uno solo per il primo pacchetto

<sup>17</sup>TCP = *Transport Control Protocol*.

<sup>18</sup>Il numero di porta costituisce in pratica l'*identificativo di connessione* del circuito virtuale. Nel caso in cui un server debba comunicare con più client, dopo avere accettato la connessione giunta su di una *porta ben nota*, apre con i client diversi canali di ritorno, differenziati dall'uso di porte di risposta differenti.

La lista completa dei servizi standardizzati e degli indirizzi ben noti (*socket*) presso i quali i serventi sono in attesa di richieste di connessione, è presente in tutte le distribuzioni Linux nel file */etc/services*.

<sup>19</sup>Il numero di sequenza si incrementa ad ogni pacchetto di una quantità pari alla sua dimensione in bytes, ed ha lo scopo di permettere le operazioni di controllo di flusso. Il valore iniziale del numero di sequenza e di riscontro è diverso per ogni connessione, e generato in modo pseudo-casuale da entrambe le parti in base ai propri orologi interni, allo scopo di minimizzare i problemi dovuti all'inaffidabilità dello strato di rete (l'IP) che può perdere o ritardare i datagrammi, nel qual caso il TCP trasmittente ri-invia i pacchetti precedenti dopo un time-out. Questo comportamento può determinare l'arrivo al lato ricevente di un pacchetto duplicato, e consegnato addirittura dopo che la connessione tra i due nodi è stata chiusa e riaperta. In tal caso però la nuova connessione adotta un diverso numero di sequenza iniziale, cosicché il pacchetto duplicato e ritardato risulta fuori sequenza, e non viene accettato.

inviato per richiedere di creare una connessione; FIN indica che la sorgente ha esaurito i dati da trasmettere.

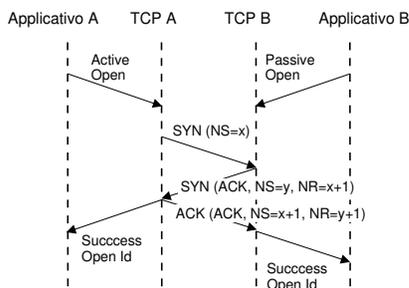
I 16 bit di *Finestra* rappresentano il numero di byte che, a partire dal numero espresso dal *Numero di Riscontro*, chi invia il pacchetto è in grado di ricevere, ed il suo utilizzo sarà meglio illustrato tra breve nel contesto del controllo di flusso. Il *Checksum* serve al ricevente per verificare se si sia verificato un errore, il *Puntatore Urgente* contiene il numero di sequenza dell'ultimo byte di una sequenza di dati urgenti, e le *Opzioni* (di lunghezza variabile) sono presenti solo raramente, ed utilizzate a fini di controllo, ad esempio per variare la dimensione della finestra. Infine, il *Riempimento* conclude l'ultima parola da 32 bit.

Uno stesso pacchetto TCP può svolgere funzioni di sola segnalazione, o di sola trasmissione dati, od entrambe.

### 18.1.2.2 Apertura e chiusura della connessione

Il TCP offre un servizio di di trasporto a circuito virtuale, e prima di inviare dati, deve effettuare un colloquio iniziale con il nodo remoto di destinazione. In particolare, il colloquio ha lo scopo di accertare la disponibilità del destinatario ad accettare la connessione, e permette alle due parti di scambiarsi i rispettivi numeri di sequenza descritti alla nota 19.

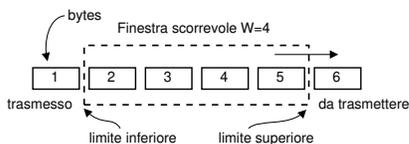
L'estremo che viene "chiamato" riveste il ruolo di *server*, e l'altro di *client*. Dato che anche quest'ultimo deve riscontrare il numero di sequenza fornito dal server, occorrono tre pacchetti per terminare il dialogo, che prende il nome di THREE WAY HANDSHAKE<sup>20</sup>. Il diagramma a lato mostra l'evoluzione temporale del colloquio tra un processo applicativo client (A), ed un server (B) che si pone in ascolto, mostrando come al primo SYN che pone  $NS_A = x$ , ne segua un altro che pone  $NS_B = y$ , seguito a sua volta dall'ACK di chi ha iniziato<sup>21</sup>. La chiusura può avvenire per diverse cause: o perché è terminato il messaggio, segnalato dal bit FIN, o per situazioni anomale, che il TCP indica con il bit RST.



### 18.1.2.3 Protocollo a finestra

Allo scopo di realizzare un controllo di flusso, il TCP prevede l'uso dell'*NR* inviato dal ricevente per dosare il ritmo con cui trasmettere i propri pacchetti.

La lunghezza di *Finestra* comunicata con il SYN del ricevente, determina la quantità di memoria riservata per i buffer dedicati alla connessione, che viene gestita come una memoria a scorrimento o *finestra scorrevole* (SLIDING WINDOW). Questa memoria è presente per gestire i casi di pacchetti ritardati o fuori sequenza, e contiene i bytes già trasmessi. Il trasmittente (vedi figura) non fa avanzare il limite inferiore finché non riceve un riscontro con *NR* maggiore di tale limite. In questo modo non occorre attendere il riscontro di tutti i bytes, o di tutti i pacchetti (che devono



<sup>20</sup>HANDSHAKE = stretta di mano.

<sup>21</sup>Per ciò che riguarda i valori dei numeri di riscontro *NR*, questi sono incrementati di 1, perché la *finestra* (descritta nel seguito) inizia dai bytes del prossimo pacchetto, a cui competeranno appunto valori di *NS* incrementati di uno.

comunque essere di dimensione inferiore alla finestra), ma ci può avvantaggiare trasmettendo l'intero contenuto della finestra.

Una finestra del tutto analoga è utilizzata dal ricevente, allo scopo di ricomporre l'ordine originario dei pacchetti consegnati disordinatamente dallo strato IP di rete. Non appena il ricevente completa un segmento contiguo al limite inferiore, sposta quest'ultimo in avanti di tanti bytes quanti ne è riuscito a leggere in modo contiguo, ed invia un riscontro con  $NR$  pari al più basso numero di byte che ancora non è pervenuto<sup>22</sup>.

Nel caso in cui sia settato il bit  $URG$ <sup>23</sup>, si stanno inviando dati urgenti fuori sequenza, e che non devono rispettare il protocollo a finestra, come ad esempio per recapitare un segnale di interrupt relativo ad una sessione Telnet per terminare una applicazione remota.

**Controllo di errore** Trascorso un certo tempo (detto *timeout*) nell'attesa di un riscontro, il trasmittente ritiene che alcuni pacchetti sono andati persi, e li re-invia<sup>24</sup>. Il valore del *timeout* viene calcolato dinamicamente dal TCP in base alle sue misure di *round-trip delay*<sup>25</sup>, ossia del tempo che intercorre in media tra invio di un pacchetto e ricezione del suo riscontro. In questo modo il TCP si adatta alle condizioni di carico della rete ed evita di ri-spediti pacchetti troppo presto o di effettuare attese inutili. In particolare, nel caso di rete congestionata aumenta la frequenza dei pacchetti persi, e valori di *timeout* troppo ridotti potrebbero peggiorare la situazione.

**Controllo di flusso** Il meccanismo a finestra scorrevole determina, istante per istante, il numero massimo di bytes che possono essere trasmessi verso il destinatario, e pertanto consente al nodo meno veloce di adeguare la velocità di trasmissione alle proprie capacità. La dimensione della finestra può essere variata (su iniziativa del ricevente) nel corso della connessione, in accordo al valore presente nel campo *Finestra* dell'intestazione TCP. Ad esempio, una connessione può iniziare con una dimensione di finestra ridotta, e poi aumentarla nel caso in cui non si verificano errori, la rete sopporti il traffico, ed i nodi abbiano memoria disponibile.

**Controllo di congestione** Il TCP può usare la sua misura di *round-trip delay* come un indicatore di congestione della rete, e lo scadere di un *timeout* come un segnale del peggioramento della congestione. In tal caso quindi, può essere ridotta la dimensione della finestra di trasmissione, caricando così di meno la rete.

#### 18.1.2.4 UDP

Lo *User Datagram Protocol* è ancora un protocollo di trasporto, che opera senza connessione, e sostituisce il TCP per inviare pacchetti isolati, o serie di pacchetti la cui ritrasmissione (se perduti) sarebbe inutile. Ad esempio, è utilizzato nella trasmissione di dati in tempo reale, oppure per protocolli di interrogazione e controllo come il DNS.

<sup>22</sup>Il riscontro può viaggiare su di un pacchetto già in "partenza" con un carico utile di dati e destinato al nodo a cui si deve inviare il riscontro. In tal caso quest'ultimo prende il nome di *PIGGYBACK* (*rimorchio*), o *riscontro rimorchiato*.

<sup>23</sup>In tal caso, il campo *Puntatore Urgente* contiene il numero di sequenza del byte che delimita superiormente i dati che devono essere consegnati urgentemente.

<sup>24</sup>Il mancato invio del riscontro può anche essere causato dal verificarsi di un *checksum* errato dal lato ricevente, nel qual caso quest'ultimo semplicemente evita di inviare il riscontro, confidando nella ritrasmissione per timeout.

<sup>25</sup>Con licenza poetica: *il ritardo del girotondo*, che qui raffigura un percorso di andata e ritorno senza soste.

### 18.1.3 IP

L'*Internet Protocol* costituisce l'ossatura della rete internet, realizzandone i servizi di rete ed interfacciando le diverse sottoreti a cui sono connessi i nodi. Le sue principali funzioni sono pertanto l'indirizzamento, l'instradamento e la variazione della dimensione<sup>26</sup> dei pacchetti prodotti dal TCP o da altri protocolli degli strati superiori. Ogni pacchetto è inviato come un messaggio indipendente, in modalità datagramma; la consegna dei datagrammi non è garantita<sup>27</sup>, e questi possono essere persi, duplicati o consegnati fuori sequenza.

L'IP riceve dallo strato superiore (il TCP od un altro protocollo) un flusso di byte suddivisi in pacchetti, a cui si aggiunge l'indirizzo IP di destinazione; tale flusso è utilizzato per riempire un proprio buffer di dimensione opportuna, che quando pieno (od al termine del pacchetto ricevuto dall'alto) è *incapsulato* aggiungendo una intestazione (*l'header*) che codifica la segnalazione dello strato di rete realizzato dal protocollo IP.

#### 18.1.3.1 L'intestazione IP

Codifica le informazioni mostrate nella figura a lato. Il campo *VER* indica quale versione si sta utilizzando, e permette sperimentazioni e miglioramenti senza interrompere il servizio. *HLEN* e *TLEN* indicano rispettivamente la lunghezza dell'header e di tutto il pacchetto, mentre *TOS* codifica un *Type of Service* per differenziare ad esempio la QoS<sup>28</sup> richiesta. L'*identificazione* riporta lo stesso valore per tutti i frammenti di uno stesso datagramma, mentre l'*Offset di frammento* indica la posizione del frammento nel datagramma (con frammenti di dimensione multipla di 8 byte).

1	5	9	17	20	32
VER	HLEN	TOS	TLEN		
Identificazione			Flags	Frag. Offset	
TTL	Protocollo		Checksum		
IP Address Sorgente					
IP Address Destinazione					
Opzioni			Riempimento		

Solo 2 dei tre bit di *Flags* sono usati, *DF* (*Don't Fragment*) per richiedere alla rete di non frammentare il datagramma, e *MF* (*More Fragments*) per indicare che seguiranno altri frammenti. Il *TTL* (Time To Live) determina la massima permanenza del pacchetto nella rete<sup>29</sup>, il *protocollo* indica a chi consegnare il datagramma all'arrivo (ad es. TCP o UDP), e *Checksum* serve per verificare l'assenza di errori nell'header<sup>30</sup>.

Gli *Indirizzi IP* di sorgente e destinazione hanno l'evidente funzione di recapitare correttamente il messaggio, mentre il campo *Opzioni* ha una lunghezza variabile, può essere omesso, e consente ad esempio di richiedere il tracciamento della serie di router attraversati.

<sup>26</sup>L'IP può trovarsi a dover inoltrare i pacchetti su sottoreti che operano con dimensioni di pacchetto inferiori. Per questo, deve essere in grado di frammentare il pacchetto in più datagrammi, e di ricomporli nell'unità informativa originaria all'altro estremo del collegamento.

<sup>27</sup>Si suppone infatti che le sottoreti a cui sono connessi i nodi non garantiscano affidabilità. Ciò consente di poter usare sottoreti le più generiche (incluse quelle affidabili, ovviamente).

<sup>28</sup>La Qualità del Servizio richiesta per il particolare datagramma può esprimere necessità particolari, come ad esempio il ritardo massimo di consegna. La possibilità di esprimere questa esigenza a livello IP fa parte dello standard, ma per lunghi anni non se ne è fatto uso. L'avvento delle comunicazioni multimediali ha risvegliato l'interesse per il campo *TOS*.

<sup>29</sup>Lo scopo del *TTL* è di evitare che si verifichino fenomeni di loop infinito, nei quali un pacchetto "rimbalza" tra due nodi per problemi di configurazione. Per questo, *TTL* è inizializzato al massimo numero di nodi che il pacchetto può attraversare, e viene decrementato da ogni nodo che lo riceve (e ritrasmette). Quando *TTL* arriva a zero, il pacchetto è scartato.

<sup>30</sup>In presenza di un frammento ricevuto con errori nell'header, viene scartato tutto il datagramma di cui il frammento fa parte, delegando allo strato superiore le procedure per l'eventuale recupero dell'errore.

### 18.1.3.2 Indirizzamento e Routing

A pagina 543 si è anticipata la relazione che lega la parte iniziale dell'indirizzo IP ad una determinata sottorete, in modo da partizionare i  $2^{32}$  indirizzi su di una gerarchia a due livelli e delegare la consegna all'host finale ad uno o più router responsabili di servire la sottorete<sup>31</sup>. In realtà la gerarchia presenta una ulteriore suddivisione, dettata sia da esigenze amministrative che funzionali.

I bit più significativi dell'indirizzo IP identificano 5 diversi gruppi (o *classi*) di indirizzi, descritti dalla seguente tabella:

Inizio IP addr	Classe	bit rete/nodo	N. reti	N. nodi per rete
0	A	7/24	128	16 777 216
10	B	14/16	16 384	65 536
110	C	21/8	2 097 152	256
1110	D	28 bit di indirizzo multicast per 268 435 456 canali		
11110	E	27 bit per usi futuri e ricerca		

Quando una organizzazione decide di essere presente in internet, richiede l'assegnazione di un lotto di indirizzi IP ad apposti organismi, i quali attribuiscono all'organizzazione un gruppo di indirizzi di classe A, B o C in base al numero di nodi che l'organizzazione prevede di mettere in rete. Una rete in classe B ad esempio è individuata da 14 bit (ossia, assieme ai bit di classe, dai primi due bytes dell'indirizzo IP), e quindi esistono  $2^{14} = 16384$  diverse reti in classe B, ognuna con una capacità di  $2^{16} = 65536$  diversi nodi. Chi è intestatario di un gruppo di indirizzi, provvede ad assegnarli ai singoli nodi della propria sottorete.

### 18.1.3.3 Subnetting e Supernetting

Osserviamo ora che la maschera di sottorete presentata a pag. 543 *non* coincide con il gruppo di bit che identifica la classe e la rete: infatti, l'insieme di indirizzi 151.100.x.y corrisponde ad una rete in classe B, mentre la maschera di sottorete 255.255.255.0 individua una sottorete in classe C. Praticamente, la rete in classe B è stata ulteriormente suddivisa (*subnettata*) in 256 sottoreti di classe C, permettendo di realizzare un instradamento gerarchico su due livelli nell'ambito dell'organizzazione intestataria della rete in classe B<sup>32</sup>. L'operazione inversa (detta *supernetting*), ossia quella di aggregare più reti di dimensione ridotta in una di dimensione maggiore, ha senso all'interno del router che instrada il traffico verso l'organizzazione intestataria delle sottoreti, in quanto permette di ridurre la dimensione delle tabelle di routing, che contengono così un solo elemento relativo alla super-rete, anziché un elemento per ogni singola sottorete.

### 18.1.3.4 Classless Interdomain Routing - CIDR

Nella prima metà degli anni '90 apparve evidente che il partizionamento degli indirizzi nelle tre classi A, B e C non era rispondente alle richieste dell'utenza; accadeva infatti che le reti in classe C erano troppo "piccole", mentre quelle in classe B rischiavano di esaurirsi a breve, pur essendo sfruttate molto poco<sup>33</sup>. Per questo motivo, è stata rimossa la suddivisione rigida

<sup>31</sup>Possiamo portare come analogia un indirizzo civico, a cui il postino consegna la corrispondenza, che viene poi smistata ai singoli condomini dal portiere dello stabile. Il servizio postale, così come la rete Internet, non ha interesse di sapere come sono suddivise le sottoreti delle diverse organizzazioni, ed i router instradano i pacchetti IP in base alla parte "rete" dell'indirizzo, delegando ai router della rete di destinazione il completamento dell'instradamento.

<sup>32</sup>In questo caso, l'Università di Roma "La Sapienza" è intestataria della rete 151.100.

<sup>33</sup>Ad esempio, organizzazioni con poco più di un migliaio di nodi erano costrette a richiedere una intera classe B con capacità di 65536 nodi.

nelle tre classi, e si è sistematicamente applicato il principio del supernetting. In pratica, si è ridefinita la maschera di sottorete, come una sequenza di *uni* allineata a sinistra, permettendo così di definire reti di dimensione pari a una potenza di due qualsiasi. Come risultato, ora una sottorete è identificata da una coppia indirizzo/maschera del tipo (ad es.) 172.192.0.0/12, che rappresenta tutti  $2^{20}$  indirizzi che vanno da 172.192.0.0 a 172.207.255.255, che hanno i 12 bit più elevati uguali a 101011001100: questa sequenza prende il nome di *prefisso* della rete. In definitiva quindi, la maschera è espressa come il numero di bit più significativi in comune a tutti i nodi della sottorete.

### 18.1.3.5 Longest Match

Un router decide su che porta instradare un pacchetto IP in base al confronto tra l'indirizzo di destinazione e tutti i prefissi presenti nella tabella di routing, associati ciascuno alla "migliore" porta di uscita verso la sottorete definita dal prefisso. Nel caso in cui si verifichi più di una uguaglianza, si sceglie l'instradamento caratterizzato dal *maggior numero* di bit coincidenti, ossia relativo al prefisso *più lungo*. Infatti, in tal modo viene preferita la direzione *più specifica* verso la destinazione finale. In assenza di uguaglianze invece, il pacchetto è inoltrato in base ad una *default route*, che tipicamente rimanda la decisione ad un router "gerarchicamente più elevato"<sup>34</sup>.

### 18.1.3.6 Sistemi Autonomi e Border Gateway

Vi sono router collegati direttamente con le LAN, e configurati per instradare correttamente i pacchetti diretti a destinazioni locali. Vi sono poi router collegati solo ad altri router, che *apprendono* gli instradamenti verso le reti locali mediante appositi *protocolli di routing* che consentono ai router di primo tipo di *pubblicizzare* (ADVVERTISE) le reti raggiungibili direttamente, ed ai router del secondo tipo di fare altrettanto nei confronti dei loro pari.

L'insieme di sottoreti (e router, nodi e DNS) gestite da una stessa organizzazione prende il nome di *Autonomous System (AS)*, e nel suo ambito sono attivi protocolli di routing detti *Interior Gateway Protocols (IGP)*, che distribuiscono le informazioni di raggiungibilità interna. Alcuni router di uno stesso AS svolgono il ruolo di *Border Gateway (BG)*, e comunicano con i BG di altri AS mediante appositi *Exterior Gateway Protocols (EGP)*, pubblicizzando all'esterno le proprie sottoreti, apprendendo dagli altri BG la raggiungibilità delle sottoreti esterne, e distribuendo tali informazioni ai router interni. Un compito particolare dell'EGP, è quello di attuare qualche politica nei confronti del *traffico di transito* tra due AS diversi dall'AS di cui il BG fa parte: in tal caso, il protocollo prende il nome di *Border Gateway Protocol (BGP)*.

L'applicazione del CDIR comporta, per ogni scambio di informazioni di routing, la necessità di aggregare o disaggregare i prefissi di sottorete, in modo da mantenere al minimo la dimensione delle tabelle di instradamento.

### 18.1.3.7 Multicast

Tornando all'esame della tabella di pag. 549, in cui la classe E costituisce evidentemente una "riserva" di indirizzi per poter effettuare sperimentazioni, la classe D individua invece dei canali *multicast*<sup>35</sup>. Quando un nodo decide di aderire ad un canale multicast, invia un messaggio<sup>36</sup>

<sup>34</sup>Sebbene la topologia di Internet possa essere qualunque, nella pratica esistono dei *carrier* internazionali che svolgono la funzione di *backbone* (spina dorsale) della rete, interconnettendo tra loro i continenti e le nazioni.

<sup>35</sup>Il termine *multicast* è ispirato alle trasmissioni *broadcast* effettuate dalle emittenti radio televisive.

<sup>36</sup>Mediante il protocollo IGMP (*Internet Group Management Protocol*) che opera sopra lo strato IP, ma (a differenza del TCP) fa uso di datagrammi non riscontrati, similmente all'UDP ed all'ICMP.

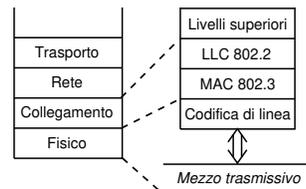
in tal senso al proprio router più vicino, che a sua volta si occupa di informare gli altri router. Questi ultimi provvederanno quindi, qualora osservino transitare un pacchetto avente come destinazione un canale multicast, ad instradarlo verso l'host aderente. In presenza di più nodi nella stessa sottorete in ascolto dello stesso canale, solo una copia dei pacchetti attraverserà il router: il traffico multicast<sup>37</sup> evita infatti di aprire una connessione dedicata per ogni destinatario, ma si suddivide via via nella rete solo quando i destinatari sono raggiungibili da vie diverse.

### 18.1.4 Ethernet

Ci occupiamo qui di un caso particolare di realizzazione dei primi due livelli del modello ISO-OSI. Come anticipato a pag. 543, molti nodi di Internet sono univocamente individuati da un indirizzo (Ethernet) di 6 byte che, sebbene sia unico al mondo, viene usato solamente nell'ambito della LAN a cui il nodo è connesso, in quanto la distribuzione mondiale degli indirizzi Ethernet è casuale<sup>38</sup>: se infatti questi fossero usati come indirizzi a livello di rete, le tabelle di instradamento dovrebbero essere a conoscenza di *tutti* i nodi esistenti<sup>39</sup>. Puntualizziamo inoltre che un nodo di Internet può essere connesso alla rete anche per via telefonica, o con svariati altri metodi; ci limitiamo qui a descrivere il caso delle LAN Ethernet, peraltro particolarmente diffuso.

Ethernet individua un particolare tipo di pacchetto dati, adottato inizialmente dalla Xerox, adatto ad incapsulare dati provenienti da protocolli diversi. Successivamente, il formato è stato standardizzato dall'IEEE, e per ciò che ci interessa le specifiche sono quelle identificate dalle sigle 802.2 (LOGICAL LINK CONTROL, LLC) e 802.3 (CARRIER SENSE MULTIPLE ACCESS - COLLISION DETECT, CSMA/CD).

La figura mostra il legame tra queste due sigle e gli strati del modello; lo strato MAC in cui si realizza il CSMA/CD individua il MEDIA ACCESS CONTROL. Il mezzo trasmissivo è un cavo, coassiale o coppia simmetrica, sul quale sono collegati tutti i nodi della LAN, che si *contendono* il mezzo trasmissivo, in quanto vi può trasmettere solo un nodo per volta. Inoltre, tutti i nodi sono in ascolto sullo stesso mezzo per ricevere i pacchetti a loro destinati, riconoscibili per la presenza del proprio indirizzo Ethernet nel campo destinazione. Un pacchetto Ethernet può inoltre riportare un indirizzo di destinazione particolare, detto di *Broadcast*, che obbliga *tutti* i nodi presenti alla ricezione del pacchetto.



#### 18.1.4.1 Address Resolution Protocol - ARP

Quando un pacchetto IP giunge ad un router, e l'indirizzo IP indica che il destinatario è connesso ad una delle LAN direttamente raggiungibili dal router<sup>40</sup>, questo invia su quella LAN un pacchetto *broadcast*, su cui viaggia una richiesta ARP (ADDRESS RESOLUTION PROTOCOL), allo scopo di individuare l'indirizzo Ethernet del nodo a cui è assegnato l'indirizzo IP di destinazione del pacchetto arrivato al router. Se tale nodo è presente ed operativo, riconosce che la richiesta

<sup>37</sup>Data l'impossibilità a stabilire un controllo di flusso con tutti i destinatari, il traffico multicast viaggia all'interno di pacchetti UDP.

<sup>38</sup>E rappresenta quindi ciò che viene detto uno *spazio di indirizzi piatto* (FLAT ADDRESS SPACE).

<sup>39</sup>Al contrario, il partizionamento dell'indirizzo IP in rete+nodo permette di utilizzare tabelle di routing di dimensioni gestibili.

<sup>40</sup>Ad ogni porta del router è associata una coppia sottorete/maschera (vedi pag. 543) che descrive l'insieme degli indirizzi direttamente connessi alla porta. La verifica di raggiungibilità (o *adiacenza*) è attuata mettendo in AND l'IP di destinazione con le maschere, e confrontando il risultato con quello dell'AND tra le maschere e gli indirizzi delle sottoreti collegate.

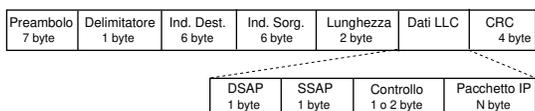
è diretta a lui, ed invia un pacchetto di risposta comunicando il proprio indirizzo Ethernet, che viene memorizzato dal router in una apposita tabella<sup>41</sup>.

Operazioni simili sono svolte da ognuno dei nodi della LAN, ogni volta che debbano inviare un pacchetto ad un altro nodo direttamente connesso alla stessa rete locale. Se al contrario l'IP di destinazione non fa parte della stessa LAN, il pacchetto è inviato al *default gateway*.

### 18.1.4.2 Formato di pacchetto

Il pacchetto Ethernet è generato dall'LLC e dal MAC, ognuno dei quali incapsula il pacchetto IP con le proprie informazioni di protocollo.

Nella figura seguente è mostrato il risultato finale delle operazioni. In testa troviamo 7 byte di *preambolo*, necessario a permettere la sincronizzazione dell'orologio del ricevente con



quello in trasmissione; dato che la sincronizzazione richiede un tempo non noto a priori, un byte di *flag* segnala l'inizio del pacchetto. Troviamo quindi gli *indirizzi Ethernet*

di sorgente e destinazione, due byte che indicano la *lunghezza* della restante parte del pacchetto, e quindi l'incapsulamento dei dati prodotti dall'LLC. In fondo, sono presenti 4 byte che realizzano il *controllo di errore*.

L'LLC inserisce invece, in testa al pacchetto IP, due indirizzi *SAP* (SERVICE ACCESS POINT) di sorgente e destinazione, da utilizzare per indicare il codice che identifica il tipo di rete e/o protocollo del pacchetto incapsulato (ad es., IP od ARP). Nel campo di *controllo* possono essere anche ospitati numeri di sequenza, per i casi che lo possano richiedere, ed infine troviamo il pacchetto IP originario.

D'altra parte, per ovviare al numero limitato di possibili incapsulamenti esprimibili utilizzando solo gli 8 bit dei campi *SAP*, è stata introdotta una estensione all'LLC denominata *SNAP* (*Subnetwork Access Protocol*)<sup>42</sup> che pone i campi *DSAP*, *SSAP* e controllo pari a 0xAAAA03, a cui aggiunge altri 5 bytes, dei quali i primi tre sono denominati *OUI* (*Organizationally Unique Identifier*) che, se posti tutti a zero, stabiliscono che i due byte seguenti (indicati come *protocol ID*) debbano essere interpretati come un codice *Ethertype*<sup>43</sup>, lo stesso usato nel formato *Ethernet II* discusso appresso, permettendo quindi di specificare finalmente il protocollo incapsulato.

Infine, viene molto frequentemente usato un formato di trama ancora diverso, detto *Ethernet II* o *DIX*<sup>44</sup>, che corrisponde a quello definito inizialmente prima che l'IEEE emettesse gli standard della serie 802, e che usa i 16 bit del campo *lunghezza* per indicare direttamente l'*Ethertype* della *SDU* incapsulata, ed omette i campi *DSAP*, *SSAP* e di controllo. In tal caso, il campo *lunghezza* rappresenta un numero più grande di 0x0600, maggiore della massima lunghezza prevista, e ciò fa sì che venga interpretato come codice *Ethertype*, e che se sono incapsulati pacchetti *IP*, vale 0x0800. La figura seguente, tratta dal documento dell'IEEE, illustra la corrispondenza tra i campi del formato *SNAP* e *DIX*.

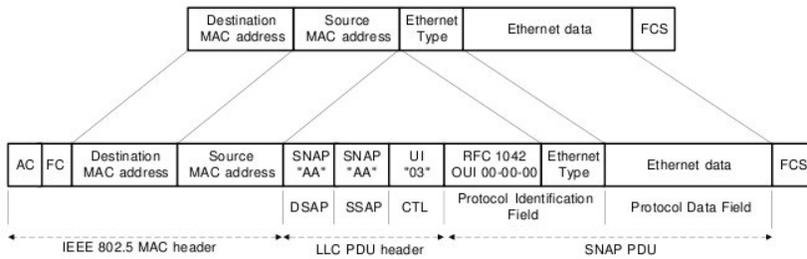
<sup>41</sup>Dato che i nodi possono essere spostati, possono cambiare scheda di rete e possono cambiare indirizzo IP assegnatogli, la corrispondenza IP-Ethernet è tutt'altro che duratura, ed ogni riga della tabella ARP indica anche quando si sia appresa la corrispondenza, in modo da poter stabilire una scadenza, ed effettuare nuovamente la richiesta per verificare se sono intervenuti cambiamenti topologici.

Se il nodo ha cambiato IP, ma non il nome, sarà il TTL del DNS (mantenuto aggiornato per il dominio del nodo) a provocare il rinnovo della richiesta dell'indirizzo.

<sup>42</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Subnetwork\\_Access\\_Protocol](http://en.wikipedia.org/wiki/Subnetwork_Access_Protocol)

<sup>43</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/EtherType>

<sup>44</sup>Vedi [http://en.wikipedia.org/wiki/Ethernet\\_II\\_framing](http://en.wikipedia.org/wiki/Ethernet_II_framing). La sigla *DIX* deriva dalle iniziali delle aziende che l'hanno definito, ossia DEC, Intel and Xerox



### 18.1.4.3 Collisione

Come anticipato, il mezzo trasmissivo è in comune con tutti i nodi, e dunque si è studiata una particolare soluzione il cui nome CSMA/CD indica che l'Accesso Multiplo avviene in due fasi: prima di trasmettere, si ascolta se non vi sia già qualcuno che trasmette (CARRIER SENSE), e durante la trasmissione, si verifica che nessun altro stia trasmettendo contemporaneamente (COLLISION DETECT). Pertanto, ogni nodo che debba trasmettere si pone prima in ascolto, e se osserva che già vi sono trasmissioni in corso, attende un tempo casuale e riprova. Quando trova il mezzo "libero", inizia a trasmettere, ma contemporaneamente verifica che nessun altro inizi a sua volta la trasmissione: questo fatto può accadere, in virtù del tempo di propagazione<sup>45</sup> non nullo, e determina un periodo (detto di *contesa*, e che dipende dalla massima lunghezza del cavo) entro il quale un nodo può erroneamente credere che nessun altro stia trasmettendo.

Qualora sia rilevata una contesa, i due nodi smettono di trasmettere, e riprovano solo dopo una attesa di durata casuale.

### 18.1.4.4 Trasmissione

Il segnale relativo al pacchetto Ethernet viene trasmesso adottando una codifica di linea di tipo Manchester differenziale. La configurazione con tutti i nodi collegati su di uno stesso cavo è detta *a bus*, e sono state coniate apposite sigle per identificare il tipo di connessione, come ad esempio 10BASE5 e 10BASE2, relative al collegamento di banda base a 10 Mbps, su cavo *tick* e *thin*<sup>46</sup>, con estensione massima 500 e 200 metri<sup>47</sup>.

## 18.1.5 Fast e Gigabit Ethernet

Mentre si proponeva ATM come una soluzione idonea per quasi tutti gli ambiti, la tecnologia Ethernet ha incrementato la velocità trasmissiva di un fattore pari a mille, e si propone sempre più come soluzione generalizzata.

<sup>45</sup>Su di un cavo coassiale *tick* da 50  $\Omega$ , la velocità di propagazione risulta di  $231 \cdot 10^6$  metri/secondo. Su di una lunghezza di 500 metri, occorrono 2.16  $\mu\text{sec}$  perché un segnale si propaghi da un estremo all'altro. Dato che è permesso di congiungere fino a 5 segmenti di rete per mezzo di ripetitori, e che anch'essi introducono un ritardo, si è stabilito che la minima lunghezza di un pacchetto Ethernet debba essere di 64 byte, che alla velocità di trasmissione di 10 Mbit/sec corrisponde ad una durata di 54.4  $\mu\text{sec}$ , garantendo così che se si è verificata una collisione, le due parti in causa possano accorgersene.

<sup>46</sup>TICK = duro (grosso), THIN = sottile. Ci si riferisce al diametro del cavo.

<sup>47</sup>Le sigle indicano infatti la velocità, se in banda base o meno, e la lunghezza della tratta.

### 18.1.5.1 Fast Ethernet

Nel 1995 è stato definito lo standard IEEE 802.3u detto *Fast Ethernet*, che eleva la velocità di trasmissione a 100 Mbps ed impiega due diversi cavi UTP<sup>48</sup> per le due direzioni di trasmissione, rendendo eventualmente la comunicazione *full-duplex*<sup>49</sup>. In quest'ambito sono definiti i sistemi 10BASET e 100BASET, relativi all'uso del cavo UTP anziché di un coassiale, e prevedono una topologia *a stella* per la LAN, realizzata utilizzando una unità centrale (detta HUB=*mozzo di ruota*) da cui si dipartono tanti cavi, ognuno che collega un unico nodo. Nel caso di un HUB economico, questo svolge solo le funzioni di ripetitore (ritrasmette tutto su tutte le sue porte) e dunque le collisioni possono ancora verificarsi.

### 18.1.5.2 LAN Switch

D'altra parte, i dispositivi detti BRIDGE o LAN SWITCH *apprendono* dai pacchetti in transito gli indirizzi ethernet dei nodi collegati alle porte, ed evitano di ritrasmettere i pacchetti sulle porte dove *non si trova* il destinatario. Dato che gran parte del traffico è inviato verso il *gateway* della LAN, lo SWITCH apprende in fretta su che porta questo si trovi, cosicché tutti i pacchetti destinati all'esterno non sono ritrasmessi sugli altri rami della LAN, ed il traffico tra i nodi connessi allo SWITCH non si propaga al resto della LAN.

La lunghezza massima dei collegamenti è ora ridotta a 100 metri, per il motivo che un pacchetto di dimensione minima di 64 byte trasmesso a 100 Mbps, impiega un tempo che è  $\frac{1}{10}$  di quello relativo alla velocità di 10 Mbps, e quindi per consentire la detezione di collisione, si è dovuta ridurre di pari misura la massima distanza tra nodi trasmettenti.

### 18.1.5.3 Dominio di broadcast e VLAN

Anche se i dispositivi BRIDGE e SWITCH evitano di trasmettere traffico verso le porte diverse da quella di destinazione, alcuni pacchetti devono comunque essere ritrasmessi in tutte le direzioni: si tratta del traffico *broadcast*, diretto verso un ben preciso insieme di indirizzi ethernet, ed usato per funzioni di coordinamento tra i nodi della LAN, come ad esempio l'*esplorazione di risorse di rete*. Il traffico broadcast non esce dalla LAN, arrestandosi al router di livello IP; una eccessiva presenza di traffico broadcast può però pregiudicare l'efficienza sia della LAN che dei suoi nodi, oltre che produrre problemi di sicurezza; per questo si è sviluppata la possibilità di assegnare le porte di uno switch a diversi *domini di broadcast*, detti *LAN virtuali* (VLAN), che non scambiano traffico, realizzando di fatto molteplici LAN con uno stesso cablaggio. Per interconnettere le LAN, occorre attraversare un dispositivo router.

### 18.1.5.4 Gigabit Ethernet

Nel giugno 1998 viene standardizzato l'IEEE 802.3z, che porta ad 1 Gbps la velocità di trasmissione delle trame Ethernet, rimpiazzando lo strato di codifica di linea dell'802.3 con i due strati inferiori dell'ANSI X3T11 *Fiber Channel*. In questo modo, si mantiene la compatibilità con gli strati LLC e MAC di Ethernet, mentre la trasmissione avviene su fibra ottica o su cavo in accordo alla tabella seguente.

<sup>48</sup>UNSHIELDED TWISTED PAIR (UTP), ossia la coppia ritorta non schermata.

<sup>49</sup>La trasmissione *full-duplex* si instaura quando entrambe le interfacce agli estremi ne sono capaci. Una interfaccia *half-duplex* deve invece gestire situazioni *interne* di collisione, quando un pacchetto uscente da un nodo si scontra con uno entrante.

media	distanza	mezzo	sorgente
1000BASE-SX	300 m	f.o. multimodo $\phi$ 62.5 $\mu\text{m}$	laser 850 nm
	550 m	f.o. multimodo $\phi$ 50 $\mu\text{m}$	laser 850 nm
1000BASE-LX	550 m	f.o. multimodo $\phi$ 50 o 62.5 $\mu\text{m}$	laser 1300 nm
	3000 m	f.o. monomodo $\phi$ 9 $\mu\text{m}$	laser 1300 nm
1000BASE-CX	25 m	cavo STP ( <i>shielded twisted pair</i> )	
1000BASE-T	25-100 m	4 coppie di cavo UTP	

### 18.1.5.5 Packet bursting

Dato che ora la velocità di trasmissione è 10 volte quella del fast Ethernet, la compatibilità con il MAC CSMA/CD richiederebbe di ridurre la massima lunghezza del collegamento a 10 metri. Al contrario, è stata aumentata la durata minima di una trama portandola a 512 byte, in modo da aumentare la durata della trasmissione e garantire la detezione di collisione. In effetti, il MAC ethernet continua a produrre pacchetti di durata minima 64 byte, e questi sono riempiti (*padding*) fino a 512 byte con una *carrier extension* di simboli speciali. Questa operazione è particolarmente inefficiente se i pacchetti da 64 byte sono frequenti; in tal caso si attua allora il *packet bursting* che, esauriti i 512 byte minimi realizzati come indicato, accoda gli ulteriori pacchetti nello stesso burst trasmissivo, fino ad una lunghezza di 1500 byte.

### 18.1.5.6 Architettura

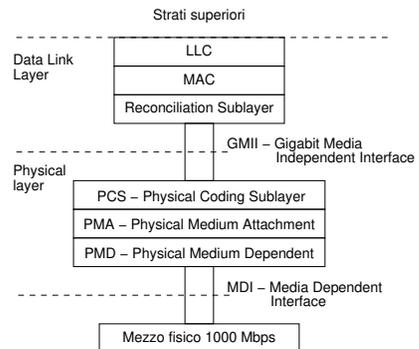
La figura a lato mostra la pila protocollare per Gigabit Ethernet. La GMII permette di usare lo strato MAC con qualunque strato fisico, ed opera sia in full-duplex che in half-duplex, alle velocità di 10, 100 e 1000 Mbps, mediante due percorsi dati (Tx e Rx) da 8 bit, più due segnali di strato per indicare presenza di portante e detezione di collisione, che sono mappati dal rs nelle primitive riconosciute dallo strato MAC preesistente.

Lo strato fisico è suddiviso in tre sottolivelli. Il PCS fornisce una interfaccia uniforme al rs per tutti i media. Provvede alla conversione 8B/10B tipica del *Fiber Channel*, che rappresenta gruppi di 8 bit mediante *code group* da 10 bit, alcuni dei quali rappresentano i simboli, ed altri sono codici di controllo, come quelli usati per la *carrier extension*. Il PCS genera inoltre le indicazioni sulla portante e sulla collisione, e gestisce la auto-negoziazione sulla velocità di trasmissione e sulla bidirezionalità del media.

Il PMA provvede alla conversione parallelo-serie e viceversa, mentre il PMD definisce l'MDI, ossia la segnalazione di strato fisico necessaria ai diversi media, così come il tipo di connettore.

### 18.1.5.7 Ripetitore full-duplex e controllo di flusso

Qualora tutte le porte di un ripetitore siano di tipo full-duplex, non può più verificarsi contesa di accesso al mezzo, e la contesa avviene all'interno del ripetitore, che (non essendo un SWITCH) copia tutte le trame in ingresso (debitamente bufferizzate in apposite code) in tutte le code associate alle porte di uscita. Pertanto, la lunghezza massima dei collegamenti non è più dettata dalla necessità di rilevare collisioni, ma dalle caratteristiche del mezzo trasmissivo. D'altra parte, possono verificarsi situazioni di *flooding* delle code di ingresso; il comitato IEEE 802.3x



ha quindi definito un meccanismo di controllo di flusso, che mette in grado i ripetitori (e gli switch) di richiedere ai nodi connessi la sospensione temporanea della trasmissione.

### 18.1.5.8 10 Gigabit Ethernet

Nel 2002 viene definito lo standard IEEE 802.3ae, che stabilisce le modalità operative di un collegamento Ethernet operante solo in full duplex su fibra ottica. Lo standard prevede di interoperare con la trasmissione SONET/SDH.

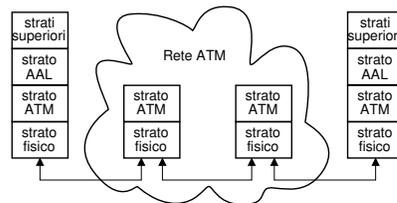
## 18.2 ATM

La sigla ATM sta per *Asynchronous Transfer Mode*, ed identifica una particolare rete progettata per trasportare indifferentemente traffico di diversa natura, sia di tipo dati che real-time<sup>50</sup>, che per questo motivo è indicata anche come B-ISDN<sup>51</sup>. Il suo funzionamento si basa sul principio della *commutazione di cella* (CELL SWITCHING), dove per cella si intende un pacchetto di lunghezza fissa di 53 byte. I primi 5 byte delle celle contengono un identificativo di connessione, ed il loro instradamento avviene mediante dei circuiti virtuali. La commutazione delle celle tra i nodi di rete ha luogo in maniera particolarmente efficiente, e questa è una delle caratteristiche più rilevanti dell'ATM.

### 18.2.1 Architettura

La rete ATM viene indicata anche come una *Overlay Network*, in quanto operativamente si sovrappone ai livelli inferiori di una rete esterna.

Dal canto suo, ATM è strutturata sui tre strati funzionali di adattamento (AAL), di commutazione ATM, e fisico. Mentre i nodi ai bordi della rete devono realizzare tutti e tre gli strati, i nodi interni svolgono solo le funzioni attuate da quelli inferiori. La tabella 18.1 riporta le principali funzioni svolte dai tre strati, e pone in evidenza come in uno stesso strato siano identificabili diverse sotto-funzioni.



### 18.2.2 Strato fisico

Il mezzo primario di trasmissione (con cui è in contatto il sotto-strato PM) per ATM è la fibra ottica, in accordo alla struttura di trama dell'SDH/SONET, per la quale sono state standardizzate le velocità di 1.5 e 2 Mbps (DS1/E1), 155 Mbps (OC3) e 622 Mbps (OC12c). La velocità di 155 Mbps è disponibile anche su FIBRE CHANNEL, e su cavo ritorto, mentre la velocità di 100 Mbps è disponibile su FDDI. Infine, sono previste anche velocità di interconnessione di 139, 52, 45, 34 e 25 Mbps.

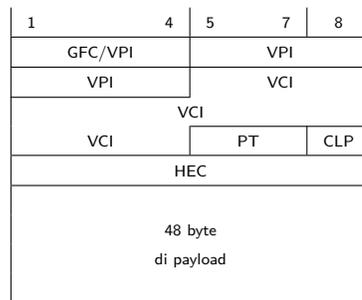
<sup>50</sup>Per traffico real-time si intende sia quello telefonico, sia più in generale quello di natura multimediale.

<sup>51</sup>Siamo alla fine degli anni '80, e la definizione *Integrated Service Data Network* (ISDN) si riferisce ad una rete in grado di permettere, oltre al normale trasporto dei dati, anche servizi di rete. La rete ISDN era però limitata ad una velocità massima (presso l'utente) di 2 Mbps, e per questo venne chiamata *narrow-band ISDN* (N-ISDN). A questa, avrebbe fatto seguito la *broad-band ISDN* (B-ISDN) che ha poi dato luogo alla definizione dell'ATM.

strato	sotto-strato	funzioni
ATM Adaptation Layer (AAL)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Convergenza (CS)</li> <li>• Segmentazione e Riasssemblaggio (SAR)</li> </ul>	Definisce il servizio offerto agli strati superiori Suddivide i dati in modo compatibile con la dimensione di cella, e li ricostruisce in ricezione
ATM layer		Moltiplicazione e demoltiplicazione delle celle Traslazione delle etichette VPI/VCI Generazione/estrazione dell'HEADER della cella Gestione del controllo di flusso GFC
Physical Layer (PL)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Convergenza di trasmissione (TC)</li> <li>• Mezzo Fisico (PM)</li> </ul>	Delimitazione delle celle Inserimento celle IDLE per adattamento velocità Generazione e verifica dell'HEC (controllo di errore) Generazione della trama di trasmissione Temporizzazione e sincronizzazione Gestione del mezzo

Tabella 18.1: Stratificazione delle funzioni in una rete ATM

In funzione del mezzo trasmissivo, può variare la *struttura di trama*<sup>52</sup> (mostrata in figura) in cui vanno inserite le celle. Il quinto byte della intestazione di cella, contiene l'*Header Error Code* (HEC) calcolato sui 4 byte precedenti, che viene usato in ricezione per rivelare due errori e correggerne uno<sup>53</sup>. Nel caso in cui la sorgente produca dati a velocità inferiore a quella del collegamento, sono inserite celle aggiuntive di tipo IDLE, rimosse al ricevitore<sup>54</sup>. Infine, la *delimitazione delle celle* è attuata in ricezione in base alla correlazione tra i primi quattro byte dell'header, ed il campo HEC dello stesso.



Formato della cella ATM

### 18.2.3 Strato ATM

Mentre lo strato fisico si occupa di trasmettere e ricevere celle, lo strato ATM si occupa di elaborarle. Nei nodi di frontiera, le celle sono multiplate e demultiplate, mentre dentro la rete, sono commutate tra gli ingressi e le uscite.

Nei primi quattro byte dell'header di cella trova posto l'*etichetta* necessaria a realizzare il trasferimento a circuito virtuale; questa etichetta è suddivisa in due campi, il *Virtual Path Identifier* (VPI) ed il *Virtual Channel Identifier* (VCI)<sup>55</sup>.

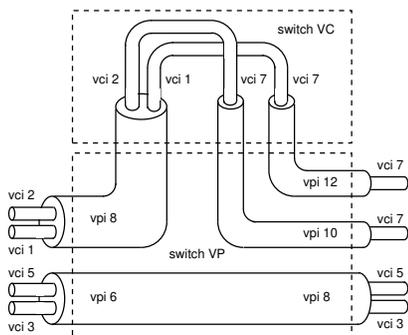
Il motivo della suddivisione risiede nella possibilità di raggruppare logicamente diversi circuiti virtuali che condividono lo stesso percorso nella rete. Nei collegamenti di cui è composto il percorso comune, viene usato uno stesso vpi per tutte le celle, mentre le diverse connessioni

<sup>52</sup>Sono definite due tipi di *interfaccia utente-network* (UNI): quella SDH/SONET, in cui le celle sono inserite nel *payload* della trama SDH, e quella CELL-BASED, che prevede un flusso continuo di celle. Mentre nel primo caso il bit rate lordo comprende l'*overhead* di trama, nel secondo comprende la presenza di celle di tipo *Operation and Maintenance* (OAM).

<sup>53</sup>Nel primo caso la cella viene scartata, mentre nel secondo inoltrata correttamente. La presenza di più di due errori, provoca un errato inoltro della cella.

<sup>54</sup>Le celle IDLE sono riconoscibili in base ad una particolare configurazione dei primi 4 byte dell'header, così come avviene per le celle OAM, nonché per altri tipi particolari di cella, che trasportano la segnalazione degli strati superiori.

<sup>55</sup>Mentre per VCI sono riservati 16 bit, per VPI si usano 12 bit all'interno della rete, e 8 bit ai suoi bordi, riservando 4 bit indicati come *Generic Flow Control* (GFC) per regolare il flusso delle sorgenti.



su quel percorso sono identificate mediante diversi vci. L'instradamento congiunto delle celle con uguale vpi è effettuato nei nodi (vp switch), che si occupano solo<sup>56</sup> di scambiare il vpi delle celle, e di porle sulla porta di uscita corretta, come indicato dalle tabelle di instradamento.

La sequenza dei nodi attraversati dall'instradamento è indicata come *Virtual Path Connection* (VPC), è composta da zero o più vp switch, ed è delimitata tra due nodi (vc o vp/vc switch<sup>57</sup>) che elaborano anche i vci. La sequenza dei vc switch che elaborano i vci, e che si estende tra due nodi che terminano lo strato di adattamento, è indicata

invece con il termine *Virtual Channel Connection* (VCC)<sup>58</sup> e comprende uno o più VPC, coincidendo spesso<sup>59</sup> con il percorso tra ingresso ed uscita<sup>60</sup> della rete ATM.

La creazione delle tabelle di instradamento può essere di tipo manuale, dando luogo ad una *Permanent Virtual Connection* (PVC), oppure può essere il risultato di una richiesta estemporanea, dando luogo ad una *Switched Virtual Connection* (SVC)<sup>61</sup>; L'OGGETTO DELLA RICHIESTA PUÒ ESSERE UNA VCC od una VPC, ed in questo secondo caso la VPC verrà usata per tutte le VCC future tra i due nodi.

#### 18.2.4 Classi di traffico e Qualità del Servizio (QoS)

Nella fase di *setup*, sono attuate delle verifiche dette *Connession Admission Control* (CAC) per assicurarsi che la nuova connessione non degradi le prestazioni di quelle già in corso, nel qual caso la chiamata è rifiutata. La sua accettazione determina invece la stipula tra utente e rete di un *Traffic Contract* a cui la sorgente si deve attenere. Nel corso della trasmissione, i nodi ATM verificano che le caratteristiche del traffico in transito nelle VCC siano conformi al rispettivo contratto, svolgendo un *Usage Parameter Control* (UPC) detto anche *policing*<sup>62</sup>. Prima di proseguire, forniamo però alcune definizioni.

Come anticipato, ATM si è sviluppata per trasportare diversi tipi di traffico, classificabili come segue, nei termini dei parametri indicati di seguito:

- *Constant Bit Rate* (CBR) identifica il traffico real-time come la voce<sup>63</sup> ed il video non codificato;

<sup>56</sup>Questa semplificazione del lavoro di instradamento, quando confrontata con quello relativo ad una rete IP, è all'origine della vocazione *fast switching* della rete ATM. Per di più, permette la realizzazione *hardware* dei circuiti di commutazione. D'altra parte, mentre per IP l'instradamento avviene al momento della trasmissione, in ATM avviene durante il *set-up* della connessione, quando le tabelle di instradamento sono iniziate.

<sup>57</sup>Nel caso in cui venga invece scambiato solo il vci, si ottiene uno switch vc puro.

<sup>58</sup>La rete ATM assicura la consegna delle celle di una stessa VCC nello stesso ordine con cui sono state trasmesse, mentre non assicura l'ordinamento per le celle di una stessa VPC.

<sup>59</sup>Può accadere infatti di incontrare uno switch vc puro, in cui è scambiato solo il vci, ed al quale fanno capo due diverse VCC.

<sup>60</sup>I nodi di ingresso ed uscita sono indicati come *ingress* ed *egress* nella terminologia ATM.

<sup>61</sup>Nella richiesta di una SVC, l'utente invia i messaggi di *setup* su di una particolare (*well known*) coppia VPI/VCI=0/5. In generale, le prime 32 vci di ogni vpi sono riservate per propositi di controllo. In queste, sono contenuti dei messaggi di segnalazione che aderiscono alle specifiche Q.2931, che fanno parte di *User Network Interface* (UNI) 3.1, e che sono un adattamento di Q.931 per N-ISDN. Le specifiche UNI 4.0 prevedono la negoziazione della QoS, e la capacità di richiedere una SVC per una VPC.

<sup>62</sup>Letteralmente: POLIZIOTTAMENTO. Il controllo può anche essere effettuato su di una intera VPC.

<sup>63</sup>La classe CBR si presta bene a trasportare traffico telefonico PCM. In questo caso, può trasportare solo gli intervalli temporali realmente occupati.

- *Variable Bit Rate* (VBR) può essere di tipo real time (es. video MPEG) oppure no, ed allora può tollerare variazioni di ritardo (CDV) ma non l'eccessiva perdita di dati (CLR);
- *Available Bit Rate* (ABR) tenta di sfruttare al meglio la banda disponibile. Il contratto prevede la fornitura di un MCR da parte della rete, e le sorgenti sono in grado di rispondere ad una indicazione di congestione, riducendo di conseguenza l'attività;
- *Unspecified Bit Rate* (UBR) condivide la banda rimanente con ABR, ma non gli è riconosciuto un MBR, né è previsto nessun controllo di congestione. Le celle in eccesso sono scartate. Idonea per trasmissioni insensibili a ritardi elevati, e che dispongono di meccanismi di controllo di flusso indipendenti<sup>64</sup>.

Le classi di traffico sono descrivibili mediante i parametri

- *Peak Cell Rate* (PCR) applicabile a tutte le classi, ma è l'unico parametro per CBR;
- *Sustainable Cell Rate* (SCR) assieme ai tre seguenti, descrive le caratteristiche di VBR: velocità comprese tra SCR e PCR sono non-conformi, se di durata maggiore di MBS;
- *Minimum Cell Rate* (MCR) caratterizza la garanzia di banda offerta alla classe ABR;
- *Maximum Burst Size* (MBS) descrive la durata dei picchi di traffico per sorgenti VBR.

Il contratto di traffico, mentre impegna la sorgente a rispettare i parametri di traffico dichiarati, vincola la rete alla realizzazione di una *Quality of Service* (QoS), rappresentata dalle grandezze (tra le altre)

- *Cell Transfer Delay* (CTD) assieme alla seguente, è molto importante per la classe CBR;
- *Cell Delay Variation* (CDV) rappresenta la variabilità nella consegna delle celle, dannosa per le applicazioni real-time. La presenza di una CDV elevata può inoltre provocare fenomeni di momentanea congestione all'interno della rete, e può essere ridotta adottando degli *shaper*<sup>65</sup>, che riducono la variabilità di ritardo a spese un aumento di CTD;
- *Cell Loss Ratio* (CLR) rappresenta il tasso di scarto di celle del collegamento.

Nel caso in cui il policing rilevi che una connessione viola le condizioni contrattuali<sup>66</sup>, può intraprendere svariate azioni, e se può, non scarta immediatamente la cella, ma provvede comunque a segnalare l'anomalia, ponendo pari ad uno il bit *Cell Loss Priority* (CLP) dell'header. Ciò fa sì che la cella divenga *scartabile*<sup>67</sup> in caso di congestione in altri nodi. Un ulteriore campo dell'header, il *Payload Type* (PT), può infine ospitare una *segnalazione in avanti*, che manifesta il fatto che la cella in questione ha subito congestione.

### 18.2.5 Indirizzamento

I nodi di una rete ATM sono identificati da un indirizzo di 20 byte, di diverso significato nei casi di reti private o pubbliche, come indicato dal primo byte (AFI). Nel primo caso, detto *formato*

<sup>64</sup>La classe UBR è particolarmente adatta al trasporto di traffico IP, in quanto questo è un protocollo senza connessione, e gli strati superiori (ad es. il TCP) sono in grado di gestire correttamente un servizio di collegamento con perdita di dati.

<sup>65</sup>Un *sagomatore* è composto in prima approssimazione da un buffer di memoria, il cui ritmo di svuotamento *non è mai* superiore ad un valore costante.

<sup>66</sup>Ad esempio, una CBR supera il proprio PCR, od una VBR oltrepassa il PCR per più tempo di MBS, oppure il traffico generato da una UBR non può essere instradato per l'esaurimento della banda.

<sup>67</sup>Alcune classi di traffico pongono CLP=1 già in partenza, sia per una capacità indipendente di risolvere situazioni di perdita di dati, sia per la diversa natura dei dati che possono inviare, come ad esempio una codifica di segnale in cui alcuni dati possono essere interpolati, mentre altri no. Al contrario, alcune sorgenti confidano molto nel rispetto del proprio CLP=0, come ad esempio nel caso in cui queste inviino pacchetti di dati ben più grandi delle celle ATM, e che sono di conseguenza frammentati in molte unità, ed in presenza di una sola cella mancante, devono ritrasmettere l'intero pacchetto. In quest'ultimo caso, sono state elaborate strategie di *scarto precoce* (EARLY DISCARD) di tutte le celle di un pacchetto, per il quale si è già verificato lo scarto di una cella componente.

Rete Privata				
AFI	ICD/DCC	HO-DSP	ESI	SEL
Rete Pubblica				
AFI	E.164	HO-DSP	ESI	SEL

NSAP<sup>68</sup>, il DCC o l'ICD sono assegnati dall'ISO, e l'indirizzo del nodo è disposto nei 10 byte indicati come *High-Order Domain Specific Part* (HO-DSP). I sei byte dell'*End*

*System Identifier* (ESI) sono forniti dal dispositivo connesso ai bordi della rete, e coincidono con il suo indirizzo *Ethernet*: in tal modo la rete comunica un prefisso che identifica il nodo di ingresso, ed il dispositivo lo associa al proprio ESI per forgiare il proprio indirizzo completo. Infine, il byte SEL può essere usato per moltiplicare più entità presso il terminale, ed è ignorato dalla rete.

Nel caso di rete pubblica, il campo HO-DSP è ristretto a 4 byte, e gli 8 byte di E.164 contengono un indirizzo appartenente alla numerazione telefonica mondiale.

### 18.2.6 Strato di adattamento

Come mostrato in tab. 18.1, l'AAL è suddiviso in due componenti, *Segmenting and Reassembly* (SAR) e *Convergence Sublayer* (CS); le funzioni di quest'ultimo sono ulteriormente ripartite tra una *Common Part* (CPCS) ed un *Service Specific cs* (SSCS).

Il compito di AAL è quello di generare i 48 byte del payload per le celle ATM, a partire dalle SDU ricevute, e di ricomporre queste ultime in ricezione, a partire dal risultato della loro demoltiplicazione operata (in base alle etichette VPI/VCI) dallo strato ATM ricevente. Mentre il SAR si interfaccia con lo strato ATM, il CS interagisce con i protocolli superiori, e le esatte operazioni svolte dipendono dalla natura del traffico trasportato: la fig. 18.1 mostra quattro diverse situazioni.

La classe A è un classico caso CBR, ed in tal caso si adotta un AAL di tipo 1, in cui lo strato CS è assente, ed il SAR utilizza il primo dei 48 byte di cella per inserire informazioni di controllo sull'ordine di consegna, e di ausilio al recupero della temporizzazione di sorgente presso la destinazione.

La classe B (AAL 2) individua sorgenti multimediali a pacchetto, mentre per la C (AAL 3/4 o 5) siamo più tipicamente in presenza di una connessione dati a circuito virtuale. In questa categoria rientra il trasporto di collegamenti X.25 e *frame relay*, sia di tipo ABR che UBR. Lo stesso tipo di AAL (3/4 o 5) è infine usato anche per la classe D, in cui rientra pienamente il trasporto di traffico IP su ATM.

Quando il CS di AAL 3/4 riceve una SDU (di dimensione massima  $2^{16} - 1$ ) dagli strati superiori, la allinea ad un multiplo di 32 byte, e vi aggiunge 32 byte in testa ed in coda con informazioni di lunghezza e di controllo di integrità. La CS-PDU risultante è passata al SAR, che la suddivide

<sup>68</sup>Il formato NSAP si ispira al *Network Service Access Point* dell'OSI, e se ne differenzia per aver fuso i campi *Routing Domain* e *Area* in un solo campo HO-DSP, per il quale si è adottata una gerarchia di instradamento basata su di un prefisso mobile, in modo simile al CDR dell'IP.

A	B	C	D
servizio isocrono		ritardo variabile consentito	
bit rate costante	bit rate variabile		
con connessione			senza connessione
AAL 1	AAL 2	AAL 3/4 o 5	AAL 3/4 o 5

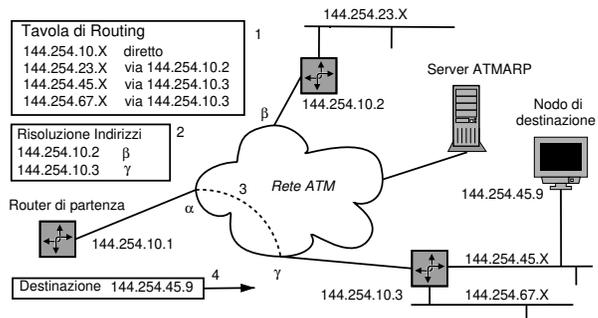
Figura 18.1: Classi di servizio della rete ATM

in blocchi di 44 byte, a cui ne aggiunge 2 in testa e due in coda<sup>69</sup>, e completa così la serie di 48 byte da passare allo strato ATM. Al contrario, il SAR dell'AAL 5 suddivide la CS-PDU in blocchi da 48 byte e non aggiunge informazioni<sup>70</sup>, demandando il riconoscimento dell'ultima cella di una stessa CS-PDU ad un bit del campo PT presente nell'header di cella ATM. D'altra parte, la lunghezza della CS-PDU dell'AAL 5 è multipla di 48 byte, aggiungendone un numero appropriato, oltre ai 64 byte di intestazione (ora posta in coda), in cui ora sono presenti anche 8 bit di informazione da utente ad utente.

### 18.2.7 IP su ATM classico

Allo stesso tempo in cui si diffonde l'uso di ATM tra gli operatori di TLC, il TCP/IP emerge come lo standard comune per l'interconnessione tra elaboratori. Sebbene il TCP/IP si appoggi ad Ethernet in area locale, per i collegamenti a lunga distanza<sup>71</sup> l'ATM presenta indubbi vantaggi come la disponibilità di banda su richiesta, la coesistenza con il traffico di tipo diverso, l'elevata efficienza della commutazione, e la possibilità di raggiungere diverse destinazioni. Una prima soluzione, subito scartata, fu quella nota come *peer model*, in cui i nodi ATM possiedono un indirizzo IP, ed usano i protocolli di routing IP. ATM risulta così *appaiata* alla rete IP, ma ciò complica la realizzazione dei nodi ATM, ed il metodo non si generalizza per protocolli diversi da IP.

L'alternativa seguita, detta *overlay model*, vede ATM come uno stato di collegamento su cui opera l'IP, che si comporta come se si trovasse su di una LAN. In particolare, solo i nodi di frontiera tra IP ed ATM prendono un doppio indirizzo, ed individuano una *Logical Subnet* (LIS) definita da uno stesso prefisso IP ed una stessa maschera di sottorete. Con riferimento alla figura che segue, quando il router di partenza vuole contattare il nodo di destinazione, trova (1) prima l'IP del router di destinazione, e quindi invia una richiesta ARP al server ATMARP presente nella LIS<sup>72</sup>, che risponde comunicando l'indirizzo  $\gamma$ , il quale è così risolto (2). A questo punto si può instaurare una VCC con  $B$  mediante la segnalazione ATM (3), ed effettuare la comunicazione (4). Una tale soluzione è nota come *vc multiplexing*, ed i dati sono incapsulati direttamente nella CPCS-PDU di AAL5. In ricezione, l'etichetta VPI/VCI è usata per consegnare il pacchetto al protocollo di strato superiore che ha realizzato la connessione ATM. D'altra parte, questa elaborazione deve avvenire a *diretto contatto* con AAL5, e ciò preclude la possibilità di interlavoro con nodi esterni alla rete ATM.



<sup>69</sup>Questi ultimi 4 byte contengono l'indicazione (2 bit) se si tratti della prima, ultima od intermedia cella di una stessa CS-PDU, la lunghezza dei dati validi se è l'ultima (6 bit), un numero di sequenza (4 bit), un controllo di errore (10 bit), ed una etichetta (10 bit) che rende possibile interallacciare temporalmente le celle di diverse CS-PDU.

<sup>70</sup>In questo modo si risparmiano 4 byte ogni 48. Ora però è indispensabile che le celle arrivino in sequenza, e non è più possibile alternare diverse CS-PDU.

<sup>71</sup>Quando la distanza tra i nodi oltrepassa dimensioni di un edificio, si parla di *Campus Network* o di *Wide Area Network* (WAN), ed a volte è usato il termine *Metropolitan Area Network* (MAN) per estensione cittadine. Per estensioni ancora maggiori si parla di *reti in area geografica*.

<sup>72</sup>Tutti i nodi della LIS hanno configurato manualmente l'indirizzo ATM del server ATMARP.

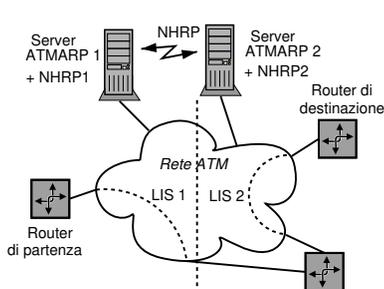
Nel caso in cui sia antieconomico creare un gran numero di vc, o se si dispone unicamente di un pvc<sup>73</sup>, il pacchetto IP viene incapsulato in un header LLC IEEE 802.2 prima di essere consegnato all'AAL5. In tal modo, il router ricevente esamina l'header LLC del pacchetto ricevuto dal nodo ATM di egress, per consegnare il pacchetto al protocollo appropriato, realizzando così un *trasporto multiprotocollo* su ATM.

### 18.2.8 LANE, NHRP e MPOA

Discutiamo qui brevemente ulteriori possibilità di utilizzo di ATM come trasporto IP, ma a cui verosimilmente sarà preferito l'MPLS.

Mentre l'approccio classico aggiunge un substrato tra IP ed AAL5, per così dire *esterno* alla rete ATM, l'approccio LANE (LAN Emulation) ne aggiunge uno *esterno* alla rete IP, che *crede* di avere a che fare con una LAN ethernet. In questo caso anziché una LIS, si definisce una *Emulated LAN* (ELAN), il cui esatto funzionamento prevede diversi passaggi<sup>74</sup>.

Sia nel caso classico che in quello LANE, se due router IP sono su due LAN (LIS o ELAN) differenti (con prefissi differenti) la comunicazione tra i due deve necessariamente attraversare un terzo router IP, anche se esiste un collegamento diretto tra i primi due, tutto interno alla rete ATM. La situazione è illustrata nella figura seguente, per il caso classico. Come possiamo notare, i router di partenza e di destinazione potrebbero dialogare direttamente tramite la rete ATM, diminuendo il carico di traffico della stessa, e risparmiando al router intermedio il compito di riassemblare e disassemblare i pacchetti IP in transito, oltre a riclassificarli ai fini del routing. Se



i server ATMARP delle due LIS possono scambiarsi le proprie informazioni, il router di partenza può arrivare a conoscere l'indirizzo ATM di quello di destinazione, e creare un collegamento diretto. Lo scambio delle corrispondenze <ind. IP; ind. ATM> avviene per mezzo del *Next Hop Resolution Protocol* (NHRP) tra entità indicate come *NHRP Server* (NHS), che possono appartenere ognuno a più LIS, e che instaurano tra di loro un meccanismo di *passa-parola*<sup>75</sup>, per rispondere alle interrogazioni che ricevono. L'applicazione

<sup>73</sup>Un vc permanente collega solamente una coppia di nodi, ed in tal caso è possibile anche fare a meno del server ATMARP, in quanto un pvc è configurato manualmente. Nei fatti, questo è l'uso più diffuso del trasporto IP over ATM, ed è tipicamente utilizzato per collegare sedi distanti di uno stesso sistema autonomo, eliminando la necessità di sviluppare in proprio un impianto di TLC tra le sedi.

<sup>74</sup>La emulazione di una LAN da parte della rete ATM è possibile dopo aver definito per ogni ELAN un *LAN Emulation Server* (LES) a cui ogni *LAN Emulation Client* (LEC) si rivolge per conoscere l'indirizzo ATM di un altro LEC, a partire da suo indirizzo MAC (la traduzione da IP a MAC è già avvenuta tramite ARP a livello IP). In una ELAN deve inoltre essere presente un dispositivo *Broadcast and Unknown Server* (BUS) che diffonde a tutti i LEC i pacchetti broadcast Ethernet (come ad es. le richieste ARP), e che viene usato dai LEC che devono inviare un broadcast. Infine, occorre un *LAN Emulation Configuration Server* (LECS) che conosce, per ogni ELAN della rete ATM, l'elenco dei LEC, del LES e del BUS.

All'accensione di un LEC, questo contatta il LECS (conoscendone l'indirizzo ATM, oppure su di una vcc ben nota, o tramite segnalazione ATM) per apprendere gli indirizzi ATM del proprio LES e del BUS. Quindi, registra presso il LES la corrispondenza tra i propri indirizzi MAC ed ATM. Quando un LEC desidera inviare dati ad un altro LEC, dopo averne risolto l'indirizzo ATM interrogando il LES, incapsula le trame IP con un header LLC IEEE 802.2 proprio come nel caso classico.

<sup>75</sup>I NHS risiedono su dispositivi che sono anche router IP, e che quindi mantengono aggiornate le tabelle di instradamento che indicano il prossimo salto (*next hop*) verso destinazioni IP. Le richieste di risoluzione ATMARP per un certo indirizzo IP sono instradate mediante queste stesse tabelle, giungendo di salto in salto fino al router-NHS appartenente alla stessa LIS dell'IP di destinazione, che conosce la risposta. Quest'ultima ripercorre all'indietro il percorso fatto dalla richiesta, fino alla sorgente. I router attraversati dal *passa parola*, ricordano (per un pò) le risposte trasportate, riducendo il traffico NHRP.

di un meccanismo in parte simile, porta nel caso delle ELAN alla definizione del *Multi Protocol over ATM* (MPOA<sup>76</sup>).

### 18.2.9 MPLS

Il *Multi Protocol Label Switching* (MPLS) è un metodo di realizzare una trasmissione a circuito virtuale su reti IP, la cui architettura è descritta nella RFC 3031 dell'IETF, e che verrà esposto meglio in una prossima edizione. Qui illustriamo i legami che MPLS presenta con ATM.

Lo sviluppo di MPLS ha origine dalle iniziative industriali tese a realizzare router internet economici di prestazioni elevate, e capaci di gestire la banda in modo appropriato. Lo IETF ha ricevuto il compito di armonizzare in una architettura standardizzata i diversi approcci, basati sul principio di inoltrare i pacchetti in base ad una etichetta (LABEL) impostata dal primo router della rete, proprio come avviene in ATM. Dato che erano già disponibili i dispositivi hardware per realizzare i nodi di switching ATM, i primi prototipi hanno semplicemente utilizzato tali switch sotto il diretto controllo di un router IP, collegato ad altri simili tramite la rete ATM. L'MPLS è tuttavia più generale, sia verso l'alto (è *multiprotocollo* in quanto si applica oltre che ad IP, a qualunque altro strato di rete) che verso il basso (funziona indifferentemente dall'implementazione dello strato di collegamento, sia ATM, *ethernet* od altro).

La *label* apposta dal primo MPLS Router (LSR) dipende dalla destinazione IP del pacchetto; diverse destinazioni possono coincidere con una sola *Forwarding Equivalence Class* (FEC)<sup>77</sup>, identificata da una singola *label*. Tutti i pacchetti di una stessa FEC sono inoltrati verso il medesimo *next hop*, indicato dalla tabella di routing, indicizzata dalla *label*<sup>78</sup>. Nella stessa tabella, si trova anche la nuova *label* da assegnare al pacchetto, prima di consegnarlo all'LSR seguente. In tutti i LSR successivi, il pacchetto non è riclassificato, ma solo inoltrato verso il *next hop* con una nuova *label* come ordinato dalla tabella di routing. Pertanto, è il primo LSR a decidere tutto il tragitto, ed i pacchetti di una stessa FEC seguono tutti lo stesso *Label Switched Path* (LSP). In tal modo, gli switch possono essere più semplici, si possono stabilire instradamenti diversi per una stessa destinazione<sup>79</sup> in base al punto di ingresso, così come le FEC possono essere rese dipendenti non solo dalla destinazione, ma anche da altri parametri, come la classe di servizio richiesta.

L'associazione tra *label* e FEC (ossia il *next hop* per i pacchetti con quella *label*) è stabilita dal LSR di *destinazione*<sup>80</sup>, e cioè un LSR indica agli LSR dai quali *si aspetta di ricevere* traffico, quale *label* usare in corrispondenza delle FEC per le quali conosce l'instradamento. Dato che la conoscenza di un instradamento è anche il prerequisito sulla cui base sono annunciate le informazioni di routing *hop-by-hop* in internet, il *Label Distribution Protocol* (LDP) può essere vantaggiosamente associato ai protocolli di distribuzione delle informazioni di routing già esistenti (es. BGP). Le associazioni tra FEC e *label* si propagano dunque fino ai nodi di ingresso, realizzando

<sup>76</sup>Il metodo si basa su di un meccanismo indicato come *flow detection*, attuato dal router IP-ATM prossimo alla sorgente, che è in grado di accorgersi di traffico non sporadico diretto verso una medesima destinazione. Questo router impersona allora un *MPOA Client* (MPC), ed interroga un *MPOA server* (MPS) per conoscere l'indirizzo ATM della destinazione, in modo da creare un collegamento diretto. Ogni MPS serve una o più ELAN, e gli MPS comunicano tra loro mediante il NHRP.

L'MPOA realizza la separazione tra il calcolo dell'instradamento e l'inoltro dei dati. A differenza di un router tradizionale, che svolge entrambi i compiti, l'MPC svolge solo l'inoltro verso l'indirizzo ATM di destinazione, mentre quest'ultimo è fornito dall'MPS, che si comporta quindi come un *route server*.

<sup>77</sup>Nel routing IP tradizionale, una FEC coincide con l'instradamento individuato dal *longest match*.

<sup>78</sup>Nel routing IP convenzionale, per ogni router, la tabella di routing deve essere esaminata per intero per ogni pacchetto, alla ricerca del *longest match* tra le regole presenti.

<sup>79</sup>Il routing IP tradizionale opera su di una base *hop-by-hop*, e per questo non può tenere conto della provenienza. Quando due pacchetti per una medesima destinazione passano da uno stesso router, proseguono per lo stesso percorso.

<sup>80</sup>Infatti, è la *label* del pacchetto *ricevuto* che determina il *next hop*, e quindi è quest'ultimo a definire la semantica della *label* presso i propri vicini.

un reticolo di “alberi” di LSP, costituiti dagli LSP definiti da una stessa FEC, e che convergono verso uno stesso *egress* a partire da diversi *ingress*. Nel nodo in cui più LSP si riuniscono, è possibile effettuare il *label merging* assegnando la stessa *label* ai pacchetti uscenti, riducendo così la dimensione delle tabelle di routing.

L'etichetta *label* su cui si basa l'MPLS può genericamente consistere in un incapsulamento della PDU dello strato di rete, prima che questa sia passata allo strato di collegamento. Quando i LSR sono realizzati mediante switch ATM, la *label* è efficacemente realizzata usando la coppia VPI/VCI, realizzando i LSP come delle VCC. In questo caso però, sorgono problemi nel caso in cui si debba effettuare il *merge* di più LSP relative ad una stessa FEC, che passano da uno stesso ATM-LSR. Infatti, se un nodo adottasse in uscita una stessa *label-vcc* per differenti VCC entranti, le celle in cui sono segmentati i pacchetti IP, ed ora con uguale *label-vcc*, si alternerebbero, rendendo impossibile il riassetto dei pacchetti. Per questo motivo, MPLS può operare anche con LSR che non permettono il *merging*, e che possono quindi essere utilizzati assieme ad altri che ne sono capaci; in tal caso, l'LSR non-merging non è notificato automaticamente delle associazioni FEC-*label*, ma gli viene comunicata una (diversa) *label* ogni volta che ne chiede una (da associare ad una FEC), usando così più *label* del necessario. Una alternativa, è quella di codificare la FEC mediante il solo VPI, ed usare il VCI per indicare il nodo di partenza. In questo modo, il *merging* è per così dire *automatico*, senza problemi di alternanza temporale delle celle di diversi pacchetti IP, ed il metodo può essere applicato se è possibile coordinare l'assegnazione dei VCI tra sorgenti diverse, e se il numero delle *label* non oltrepassa la capacità di indirizzamento.

L'esposizione svolta è volutamente semplificata, e trascura per comodità alcune importanti caratteristiche di MPLS.

## Reti a commutazione di circuito

**I**N questo capitolo si espongono i principi di funzionamento della rete pubblica commutata, dalle origini della telefonia analogica, alle tecniche di segnalazione, di moltiplicazione plesiocrona e sincrona della telefonia numerica, fino alla commutazione, ed ai sistemi di trasporto.

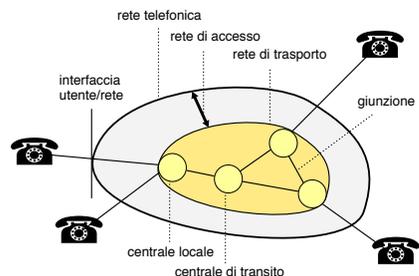
### 19.1 Introduzione

I casi di trasmissione finora analizzati fanno riferimento a collegamenti *punto-punto*, in cui una unica sorgente di informazione intende comunicare con un unico destinatario. Nella realtà, è assai più frequente il caso in cui i soggetti coinvolti nella comunicazione affidino la stessa ad una *rete* di collegamento, consegnando il messaggio al *nodo* di commutazione a cui hanno accesso. Il messaggio quindi, una volta determinato un percorso di *attraversamento* che coinvolga i nodi della rete più opportuni, giunge al destinatario, grazie anche alla presenza di informazioni addizionali, dette *di segnalazione*.

Le nozioni che seguono fanno esplicito riferimento alle *reti di telefonia* per come si sono evolute a partire dalla fine dell'800, dette anche a *commutazione di circuito*, allo scopo di fornire una panoramica dei principali aspetti delle stesse. Altri aspetti legati alle *reti di trasmissione dati* saranno illustrati a seguito della trattazione relativa alla teoria del traffico, assieme alle reti a *commutazione di pacchetto*.

#### 19.1.1 Elementi della rete telefonica

Con riferimento alla figura, si anticipa che discuteremo prima dei metodi di *moltiplicazione* che permettono alle diverse comunicazioni che terminano presso le *interfacce utente/rete* di essere aggregate da parte delle *centrali locali* per utilizzare un medesimo *collegamento di giunzione* interno alla *rete di trasporto*. Quindi, nel § 19.8 si esaminano i metodi di *commutazione* ed *instradamento* con cui viene individuato il percorso che una comunicazione deve intraprendere tra l'ingresso e l'uscita dalla rete di trasporto.



### 19.1.2 La rete di accesso

E' la parte più rilevante e *pesante* della rete, e consiste nel *doppino* in rame (pag. 470) che raggiunge la presa telefonica casalinga. All'interfaccia utente/rete sono così resi disponibili i servizi noti nel loro insieme come

- POTS (*Plain Old Telephone Service*) - vedi § 19.9.1;
- ISDN (*Integrated Service and Data Network*) - vedi § 19.9.2;
- ADSL (*Asymmetric Digital Subscriber Line*) - che in realtà usa POTS solo come tramite per raggiungere una rete IP vedi § 19.9.4.

Oltre a questi, nella rete di accesso sono contemplate forme di collegamento anche diverse dal cavo, come

- accesso ottico - come nel caso FTTH o *Fiber To The Home* (vedi § 16.4.4.3), e che permette
  - di interconnettere un insieme più numeroso di collegamenti POTS già multiplati assieme, come nel caso di un grosso centralino aziendale, sovrapponendosi allo scopo di un accesso ISDN-PRI;
  - di interconnettersi ad una rete IP ad una velocità maggiore di quella consentita dalla tecnologia ADSL;
- accesso radio
  - GSM<sup>1</sup> - noto anche come sistema cellulare di seconda generazione<sup>2</sup>, usa una rete diversa da PSTN, ma vi si interconnette in modo naturale. Il GSM nasce come standard aperto, favorendone la diffusione mondiale e l'interoperabilità tra gestori (*roaming*), e si sviluppa in forma completamente numerica, sia per la codifica vocale, che per il meccanismo di accesso multiplo al mezzo trasmissivo<sup>3</sup>, che adotta una organizzazione in trame; inoltre, ha introdotto la comunicazione dei messaggi SMS<sup>4</sup>;
  - GPRS<sup>5</sup> e UMTS<sup>6</sup> - mentre il primo (detto di *generazione 2.5*) usa la rete GSM per trasmettere dati a pacchetto, con velocità dell'ordine di 30-70 kbps, il secondo (detto anche di *terza generazione* o 3G) supporta in modo integrato sia le comunicazioni vocali, che i dati a pacchetto, con velocità dell'ordine dei 300 kbps, che salgono (teoricamente) a 3 e 14 Mbps con le estensioni UMTS 2+ e HSDPA rispettivamente;
  - WiFi<sup>7</sup> e WiMax<sup>8</sup> - mentre il primo distribuisce l'accesso ADSL su di un'area di estensione casalinga, il secondo ha una copertura di qualche chilometro, e permette collegamenti in mobilità. Entrambi permettono l'interconnessione ad un *Internet Service Provider* o ISP.

Altri tipi di offerte invece *non possono* essere considerate di accesso alla rete, pur se realizzate sfruttando sia la rete di accesso che quella di trasporto, come nel caso di

<sup>1</sup>[http://it.wikipedia.org/wiki/Global\\_System\\_for\\_Mobile\\_Communications](http://it.wikipedia.org/wiki/Global_System_for_Mobile_Communications)

<sup>2</sup>La prima generazione si riferisce al sistema analogico TACS <http://it.wikipedia.org/wiki/TACS>

<sup>3</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Time\\_division\\_multiple\\_access](http://en.wikipedia.org/wiki/Time_division_multiple_access)

<sup>4</sup><http://it.wikipedia.org/wiki/SMS>

<sup>5</sup>[http://it.wikipedia.org/wiki/General\\_Packet\\_Radio\\_Service](http://it.wikipedia.org/wiki/General_Packet_Radio_Service)

<sup>6</sup>[http://it.wikipedia.org/wiki/Universal\\_Mobile\\_Telecommunications\\_System](http://it.wikipedia.org/wiki/Universal_Mobile_Telecommunications_System)

<sup>7</sup><http://it.wikipedia.org/wiki/Wi-Fi>

<sup>8</sup><http://it.wikipedia.org/wiki/WiMAX>

- *CDN (Circuito Diretto Numerico)* - offre la connettività diretta e continuativa con un'altra (ben specifica) interfaccia utente/rete, e pertanto viene a mancare la componente di commutazione;
- *VPN (Virtual Private Network)* - come sopra, con la differenza che in questo caso la connettività è basata su di una comunicazione a pacchetto anziché a circuito.

## 19.2 Multiplicazione

In generale, raggruppare assieme più comunicazioni dirette alla medesima destinazione, in modo che condividano uno stesso mezzo trasmissivo, permette di

- tentare di occupare tutta la banda messa a disposizione dal mezzo trasmissivo
- massimizzare la percentuale di utilizzo del mezzo trasmissivo, nel caso di sorgenti non continuamente attive (vedi § 17.3.4)
- semplificare la gestione e la manutenzione dei collegamenti a lunga distanza, essendo questi minori in numero

Le tecniche di moltiplicazione, nella evoluzione storica delle telecomunicazioni, possono operare secondo le diverse modalità di

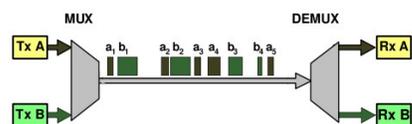
- *divisione di frequenza* - ogni comunicazione usa una banda di frequenze diversa, come descritto al § 9.1.1, nel contesto dello studio dei segnali modulati;
- *divisione di tempo* - le comunicazioni avvengono in intervalli di tempo disgiunti, mediante segnali numerici, e sono affrontate nel resto di questo capitolo;
- *divisione di codice* - tutte le comunicazioni usano la stessa banda allo stesso tempo, ma ogni diverso destinatario è ancora in grado di distinguere il proprio messaggio, in virtù della ortogonalità tra i codici utilizzati (vedi § 6.8.2). Dato che il segnale trasmesso in questo caso si trova ad occupare una banda più estesa di quella originaria, la tecnica è detta *ad espansione di spettro* ed esposta al § 14.9.

### 19.2.1 Multiplicazione a divisione di tempo

Per quanto riguarda la moltiplicazione a divisione di tempo, nella pratica questa è attuata solo a partire da segnali numerici, come sono sempre stati i segnali dati, ed in quel contesto si è sviluppato un approccio basato sull'uso di un *pacchetto dati* (vedi § 17.5.1), attuando uno schema detto

**Multiplicazione statistica e commutazione di pacchetto** In questo caso il mezzo trasmissivo non è impegnato in modo esclusivo, ma la trasmissione può avvenire in modo sporadico, ed i dati inviati ad intervalli irregolari. Questo motivo, assieme alla dimensione variabile delle singole comunicazioni, porta a suddividere la comunicazione in unità autonome indicate come pacchetto dati.

La moltiplicazione dei pacchetti avviene quindi in modo *statistico*, senza riservare con esattezza risorse a questo o quel tributario: il moltiplicatore si limita ad inserire i pacchetti ricevuti in apposite code, da cui li preleva per poterli trasmettere in sequenza, attuando una modalità di trasferimento *orientata al ritardo* (vedi § 17.4). La presenza di code comporta



- il determinarsi di un ritardo variabile ed imprevedibile
- la possibilità che la coda sia piena, ed il pacchetto in ingresso venga scartato

D'altra parte, ogni pacchetto reca con sé le informazioni necessarie al suo recapito, facilitando il compito dell'instradamento (vedi § 19.7). A seconda dell'adozione di un principio di commutazione di tipo *a circuito virtuale* oppure a *datagramma* (vedi § 17.5.2.2), può essere presente o meno una *fase di setup* precedente l'inizio della comunicazione.

**Multiplicazione deterministica e commutazione di circuito** La modalità usata nella rete telefonica è invece basata su di uno schema di moltiplicazione con organizzazione di trama (vedi § 17.5.2.1) che determina un paradigma noto come *commutazione di circuito*, per il motivo che ora illustriamo.

Alle origini storiche della telefonia, nell'epoca dei telefoni *a manovella*, con la cornetta appesa al muro, la commutazione si basava sull'operato di un centralinista umano, che creava un vero e proprio *circuito elettrico*, collegando fisicamente tra loro le terminazioni dei diversi utenti. Nel caso in cui intervenissero più centralinisti in cascata, la chiamata risultava instradata attraverso più centralini. Da allora, il termine commutazione di circuito individua il caso in cui



- è necessaria una fase di *setup* precedente alla comunicazione vera e propria, in cui vengono riservate le risorse;
- nella fase di setup si determina anche l'*instradamento* della chiamata nell'ambito della rete, che rimane lo stesso per tutta la durata della medesima;
- le risorse trasmissive restano impegnate in *modo esclusivo* per l'intera durata della conversazione.

Le cose non sono cambiate di molto (da un punto di vista concettuale) con l'avvento della telefonia numerica: in tal caso, più segnali vocali sono campionati e quantizzati in modo sincrono, ed il risultato (numerico) è moltiplicato in una *trama PCM* (§ 19.3.1), in cui viene riservato un intervallo temporale per ognuno dei flussi tributari.

Ad ogni buon conto, si noti che un risultato della teoria del traffico (pag. 531) mostra come l'adozione di una strategia *orientata al ritardo* migliora notevolmente l'efficienza di utilizzo del mezzo stesso.

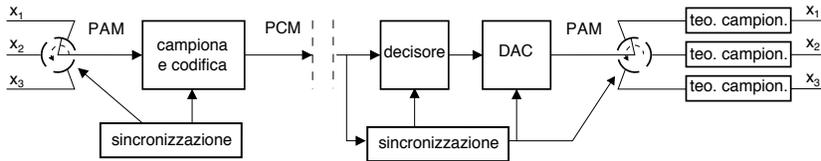
## 19.3 Rete plesiocrona

Questo termine si riferisce alla modalità di funzionamento quasi-sincrona adottata dalle centrali telefoniche, almeno finché la rete di trasporto non è divenuta capace di realizzare una modalità di moltiplicazione sincrona (§ 19.4). In entrambi i casi, i segnali vocali sono trasportati in forma numerica, moltiplicandone i campioni a divisione di tempo in modo deterministico, in accordo ad una organizzazione di trama realizzata presso la centrale di accesso, come descritto di seguito.

### 19.3.1 Trama PCM

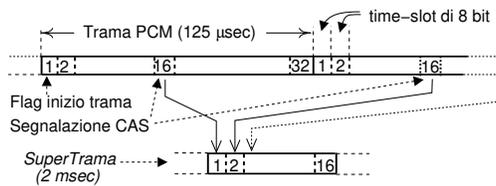
Nella figura seguente sono rappresentati tre segnali *tributari*, campionati a turno alla stessa frequenza di 8 KHz, quantizzati ad 8 bit per campione con quantizzazione logaritmica (vedi *TeoriadeiSegnali.it*

§ 4.2.2), e trasmessi (8 bit alla volta<sup>9</sup>) a turno su di un unico collegamento, producendo un segnale binario che prende il nome di PCM (*Pulse Code Modulation*<sup>10</sup>). In figura è evidenziato inoltre un blocco di sincronizzazione (§ 19.3.3) necessario a ricostruire la corretta sequenza ricevuta, in modo da redistribuire correttamente i campioni ai filtri di restituzione.



La struttura temporale ripetitiva che ospita i campioni dei singoli tributari prende il nome di *trama* (FRAME<sup>11</sup>), ed è composta da 32 intervalli temporali detti *time-slot*. Trenta di questi ospitano a turno i bit di un campione proveniente da un numero massimo di 30 tributari<sup>12</sup>, mentre i rimanenti due intervalli convogliano le informazioni di segnalazione<sup>13</sup>, che indicano lo stato dei singoli collegamenti (il 16° intervallo) e forniscono il sincronismo relativo all'inizio della trama stessa (il primo). La velocità binaria complessiva risulta quindi di 32 intervalli \* 8 bit/intervallo \* 8000 campioni/secondo = 2048000 bit per secondo; per questo motivo, ci si riferisce all'insieme come alla *trama PCM a 2 Mbit*. D'altra parte, la durata della trama deve essere pari al periodo di campionamento, ossia  $1/8000 = 125 \mu\text{sec}$ .

Il primo time-slot della trama contiene una configurazione di bit sempre uguale, chiamata FLAG (*bandiera*, vedi § 17.5.2.1), che ha lo scopo di indicare ai circuiti di sincronismo l'inizio della trama stessa. I dati di segnalazione contenuti nel 16° intervallo devono



essere *diluiti* su più trame, per poter rappresentare tutti i 30 tributari<sup>14</sup>. Si è stabilito che occorra prelevare il 16° intervallo di 16 trame successive, per ricostruire una struttura detta *supertrama* (di  $16 \cdot 8 = 128$  bit) che rappresenta le informazioni di tutti i tributari (disponendo così di 4 bit/tributario/supertrama), e che si ripete ogni  $16 \cdot 125 = 2000 \mu\text{sec} = 2 \text{ msec}$ .

In effetti nel 16° time-slot della trama sono presenti a turno, oltre ai bit di segnalazione relativi allo stato dei tributari, anche bit necessari alla sincronizzazione della supertrama (ossia un *flag*), mentre le informazioni di segnalazione sono ripetute più volte nella stessa supertrama, per proteggersi da eventuali errori di ricezione, che danneggiando l'informazione sullo stato dei canali, potrebbero causare la "caduta della linea".

<sup>9</sup>La tecnica di moltiplicare un blocco di bit (in questo caso 8) alla volta prende il nome di *word interleaving*, distinto dal *bit interleaving*, in cui l'alternanza è a livello di bit.

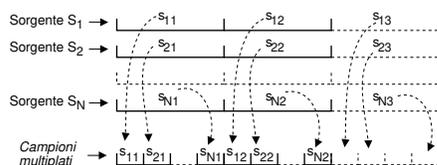
<sup>10</sup>Il segnale PCM ispira il suo nome dal PAM (vedi § 19.9.5) in quanto ora, anziché trasmettere le ampiezze degli impulsi, si inviano i codici binari dei livelli di quantizzazione.

<sup>11</sup>FRAME significa più propriamente *telajo*, e in questo caso ha il senso di individuare una struttura, da "riempire" con il messaggio informativo.

In figura è mostrato un esempio, in cui i campioni  $s_{ij}$  di  $N$  sorgenti  $S_i$  si alternano a formare una trama. Durante l'intervallo temporale tra due campioni, devono essere collocati nella trama tutti gli  $M$  bit/campione delle  $N$  sorgenti, e quindi la frequenza binaria (in bit/secondo) complessiva sarà pari a  $f_b = f_c$  (campioni/secondo/sorgente)  $\cdot N$  (sorgenti)  $\cdot M$  (bit/campione).

<sup>13</sup>Vedi anche le sezioni 19.3.2 e 19.9.1.

<sup>14</sup>Gli 8 bit del 16° intervallo sono infatti insufficienti a codificare lo stato dei 30 tributari che contribuiscono al segnale TDM.



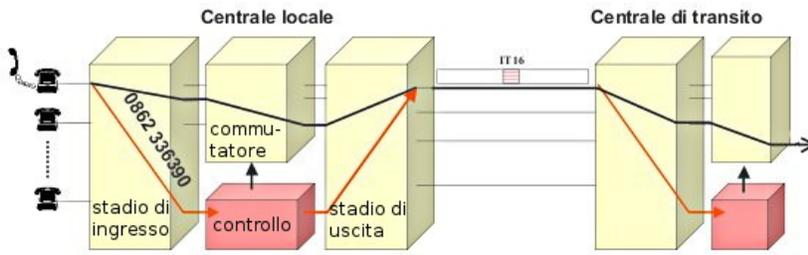


Figura 19.1: Controllo di centrale nel caso di segnalazione *associata al canale*

### 19.3.2 Messaggi di segnalazione

Come illustrato al § 19.9.1, la rete di accesso è sede di uno scambio di informazioni tra terminale e centrale locale, detta *segnalazione di utente*, e che ha lo scopo di indicare la disponibilità della rete, il numero chiamato, l'attivazione della suoneria, ed i messaggi a ritroso di libero/occupato. Queste informazioni, quando devono essere propagate verso il lato-rete della centrale di accesso, possono essere gestite secondo due diversi approcci.

**Segnalazione associata al canale** In questo caso la centrale di accesso inserisce le informazioni di segnalazione relative ad un tributario all'interno della *supertrama* di segnalazione, ottenuta collezionando i valori presenti nel 16° time-slot. Questa modalità viene indicata come *CAS (Channel Associated Signaling)*, ed ha origine dalla conversione dei precedenti collegamenti analogici, in cui la segnalazione relativa ad ogni terminale viaggiava in modo indissolubilmente associato al segnale vocale, condividendo con questo il mezzo trasmissivo a commutazione di circuito<sup>15</sup>. Con la numerizzazione, si è inizialmente scelto di mantenere la segnalazione *associata* al segnale vocale, con la contropartita che quando, nell'attraversare una centrale di transito, una comunicazione è commutata su di una diversa linea di uscita, deve essere commutata anche la segnalazione associata.

La figura 19.1 mostra come la numerazione venga recepita da un organo di *controllo centrale*, che provvede a impostare il dispositivo di commutazione (§ 19.8), in modo che la comunicazione sia instradata verso la linea di uscita in direzione della destinazione. Quindi, l'informazione di segnalazione viene ri-associata nell'intervallo 16.

**Segnalazione a canale comune** Il primo passo evolutivo è stato quello di provvedere ad un *canale comune* di segnalazione direttamente collegato agli organi di controllo (vedi fig. 19.2), su cui poter convogliare la segnalazione relativa *a tutte* le comunicazioni in transito tra le due centrali.

I messaggi di segnalazione, per loro natura, devono essere trasmessi solo quando si verificano degli eventi significativi, e per questo motivo sono ora inviati mediante dei *pacchetti dati*. Il passo successivo è quindi stato quello di realizzare una intera rete a *commutazione di pacchetto*, parallela a quella di transito su cui viaggiano (in modalità a circuito) le conversazioni vocali.

In tal modo, gli organi di controllo delle centrali sono in comunicazione diretta tra loro, secondo la modalità cosiddetta *ccs (Common Channel Signaling)*, mediante una rete a pacchetto

<sup>15</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/In-band\\_signaling](https://en.wikipedia.org/wiki/In-band_signaling)

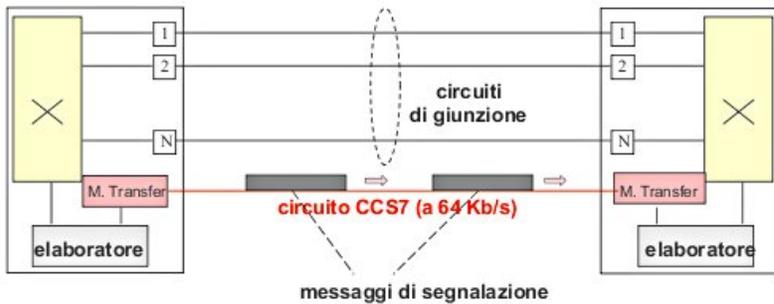
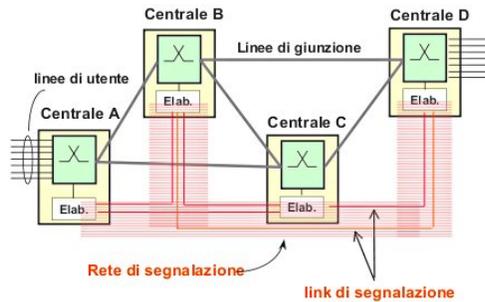


Figura 19.2: Separazione della segnalazione in un canale comune

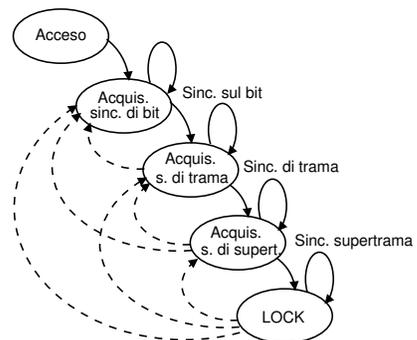
dedicata alla segnalazione, sulla quale viaggiano i messaggi definiti da un apposito *sistema di segnalazione* (vedi § 19.9.3), e che permette di centralizzare il controllo e la configurazione di tutte le centrali coinvolte nell'instradamento di una stessa comunicazione, rendendo così possibile la disponibilità di servizi come il trasferimento di chiamata, la conversazione a tre, l'avviso di chiamata....



### 19.3.3 Sincronizzazione di centrale

Nella figura a lato sono mostrati i diversi stati attraverso cui deve evolvere il dispositivo di sincronizzazione che opera sui flussi PCM CAS, prima di entrare nello stato di LOCK (*aggancio*) ed iniziare a poter leggere e smistare i contenuti dei diversi time-slot.

Occorre infatti acquisire innanzitutto il sincronismo sul bit, sfruttando le caratteristiche del codice di linea utilizzato<sup>16</sup>; quindi si sfrutta la conoscenza della configurazione scelta per il flag di inizio trama, per individuare da dove iniziare a conteggiare gli intervalli temporali. Infine, viene individuato l'inizio della supertrama, grazie ad un'ulteriore configurazione prefissata, posta all'inizio della stessa. In ogni stato poi, esiste la possibilità (fortunatamente remota) di perdere il sincronismo ed *indietreggiare* (linee tratteggiate) nel diagramma di stato, perdendo le comunicazioni in corso.



<sup>16</sup>Nel caso specifico, l'HDB3, pag. 207.

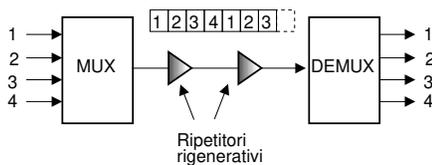
### 19.3.4 Multiplazione asincrona e PDH

L'argomento di questo paragrafo non va confuso con la *trasmissione* asincrona (quella START-STOP mostrata al § 8.7.1), e che descrive una modalità di *inviare* informazioni numeriche; qui invece si tratta di *multiplare*, ossia come *mettere assieme* più comunicazioni.

Via via che la rete di trasporto è interconnessa mediante centrali di livello gerarchico superiore, associate ad aree di influenza geografica più estesa (vedi § 19.5), i collegamenti di giunzione trasportano un numero di tributari sempre più elevato, ottenuti raggruppando assieme tutte le conversazioni contemporaneamente dirette verso la stessa destinazione. Considerando allo stesso tempo le problematiche legate al dover svolgere nelle centrali la funzione di commutazione, ci si pone il problema di individuare dei metodi efficienti di raggruppare assieme più tributari, anche a velocità diverse, facendo in modo che l'operazione di inserimento/rimozione di un singolo tributario sia relativamente agevole. Rimandiamo al § 19.4 l'analisi di come avvenga il processo di multiplazione nel caso in cui esista una perfetta sincronizzazione tra gli elementi della rete, e trattiamo nel seguito il caso della rete *plesiocrona*.

Nella trama PCM (§ 19.3.1), tutti i 30 canali sono campionati congiuntamente, e più flussi a 2 Mbit possono a loro volta essere "messi assieme" in modalità *bit interleaved* (prendendo un bit alla volta da ogni tributario) da appositi dispositivi *multiplatori* (o MULTIPLEXER, o MUX). Il collegamento può prevedere più dispositivi detti *ripetitori rigenerativi* (§ 15.3.2), che oltre ad amplificare il segnale, lo "puliscono" dal rumore accumulato, decodificando i dati in ingresso per poi generare ex-novo il segnale numerico.

Il problema con questo modo di procedere è che i singoli tributari possono ragionevolmente avere origine da centrali differenti, ognuno con un proprio orologio indipendente, e quindi le velocità possono essere lievemente differenti l'una dall'altra<sup>17</sup>, pur essendo molto simili. In questo caso si dice che la rete opera in modo *plesiocrono*, ossia *quasi* isocrono (ma non del tutto).



N. Canali	sigla	Vel. (kbps)	Teorica
30	E1	2.048	
120	E2	8.448	8.192
480	E3	34.368	32.768
1920	E4	139.264	131.072
7680	E5	565.148	524.288

In tabella riportiamo la gerarchia CCITT<sup>18</sup>, nota come *Plesiochronous Digital Hierarchy* (PDH), secondo la quale ad esempio 4 flussi da 2 Mbps (detti E1) sono multiplati in uno da 8 Mb/sec (E2): notiamo che sebbene siano teoricamente sufficienti 8192 Mb/sec, in realtà il Multiplexer ne produce di più (8448). Questo avviene proprio per permettere la trasmissione di segnali non necessariamente sincroni, mediante la tecnica del *bit stuffing*<sup>19</sup>.

#### 19.3.4.1 Bit stuffing

Consideriamo 2 tributari i cui bit vengono inseriti alternativamente in una trama da 4 bit/canale; il secondo risulta lievemente più lento. I primi 3 + 3 bit vengono trasmessi comunque, mentre il 4° può essere trasmesso o meno, a seconda se i tributari lo abbiano pronto. Per ottenere questo risultato, i bit  $C_1$  e  $C_2$  (di controllo) valgono 0 oppure 1 a seconda se l'intervallo seguente ( $S_1$  e

<sup>17</sup>Un oscillatore con precisione di una parte su milione, produce un ciclo in più o in meno ogni  $10^6$ ; ad una velocità di 2 Mbps, ciò equivale a un paio di bit in più od in meno ogni secondo.

<sup>18</sup>Comité Consultatif International pour la Telephonie et Telegraphie. Questo organismo non esiste più. ed ora l'ente di standardizzazione ha nome ITU-T <https://it.wikipedia.org/wiki/ITU-T>.

<sup>19</sup>Da: TO STUFF = riempire.

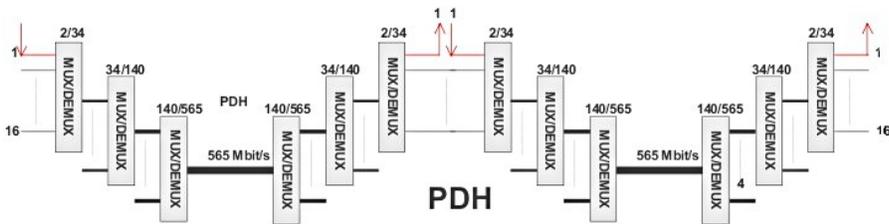
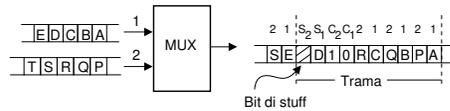


Figura 19.3: Gerarchia di moltiplicazione PDH e complessità di un ADM

$S_2$ ) contenga un dato valido oppure sia solo un *bit di stuff*, cioè vuoto, in quanto il tributario corrispondente è più lento rispetto alla velocità nominale. Ecco perché le velocità delle gerarchie superiori sono *abbondanti*:

per ospitare i bit di controllo, necessari a gestire tributari non sincronizzati.



Il metodo illustrato permette in ricezione di effettuare il *destuffing*, e riottenere i flussi originali. Nella realtà le informazioni di controllo sono molto ridondate, perché se scambiassimo un bit di stuff per uno buono (o viceversa), distruggeremmo anche la struttura di trama del tributario che ha subito l'errore.

#### 19.3.4.2 Add and Drop Multiplexer - ADM

La modalità *bit interleaved* con cui è realizzata la gerarchia PDH è particolarmente problematica qualora di desideri estrarre e/o introdurre un singolo tributario da/in un segnale multiploato di ordine elevato, ovvero realizzare una funzione detta *Add and Drop*. In questo caso è infatti necessario eseguire un'operazione inversa a quella di moltiplicazione, ovvero (vedi fig. 19.3) demoltiplicare l'intero flusso, compresi tutti gli altri tributari, e successivamente ri-moltiplicare di nuovo il tutto.

Questa caratteristica limita notevolmente la flessibilità delle configurazioni di rete che si possono ottenere con questa tecnologia, e per i tributari passanti comporta l'aggiunta di un tempo di ritardo addizionale dovuto alle operazioni di demoltiplicazione e moltiplicazione. Nella pratica vengono usati solo flussi di tipo E1, E3 ed E4, che sono quelli più adatti per essere trasportati nella gerarchia sincrona SDH, moltiplicando direttamente sedici tributari a 2 Mbit/s all'interno di un unico flusso a 34 Mbit/s.

#### 19.3.5 Sincronizzazione di rete

Se tutti i nodi della rete operassero alla stessa velocità, non sussisterebbero problemi nella moltiplicazione di più tributari. Nel caso in cui la sincronizzazione tra nodi sia completamente affidata ad un orologio di centrale di elevata precisione, si verifica il caso di funzionamento *plesiocrono*, che è quello prescritto per le centrali che interconnettono le reti di due diverse nazioni, o di due diversi operatori di telecomunicazioni. Ma questa non è l'unica soluzione.

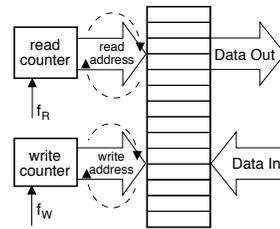
Una alternativa è la sincronizzazione *mutua* tra centrali, in cui ognuna di queste emette i dati in uscita ad una frequenza pari alla media delle frequenze dei dati in ingresso. A parte fenomeni transitori durante i quali la rete è soggetta ad oscillazioni di velocità, relativi all'insierimento od alla disattivazione di centrali "topologicamente importanti", il metodo funziona

ragionevolmente bene. Una seconda soluzione è una sincronizzazione di rete di tipo *gerarchico* in cui le centrali ricevono informazioni di sincronismo da soggetti “più importanti”, come per configurazioni *Master-Slave* in cui il Master è una centrale ad elevata precisione, od un riferimento in comune come ad esempio un satellite in orbita terrestre.

### 19.3.5.1 Elastic store

Si tratta di un accorgimento<sup>20</sup> idoneo ad *assorbire* le fluttuazioni della velocità di trasmissione, come ad esempio nel caso della sincronizzazione mutua. Mentre il *bit stuffing* (§ 19.3.4.1) è adottato nella moltiplicazione di più tributari in un livello gerarchico più elevato, l'*elastic store* è usato per compensare le diverse velocità tra tributari di eguale livello gerarchico in ingresso ad un elemento di commutazione (§ 19.8).

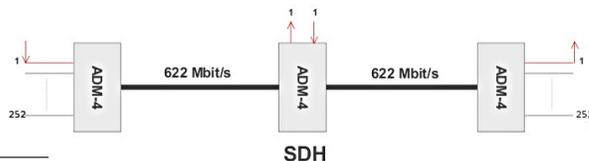
È realizzato mediante un banco di memoria (di dimensione pari ad una trama), riempito (ciclicamente) con le parole (word) del flusso binario in ingresso, alla velocità  $f_W$  di quest'ultimo, alla posizione individuata dal contatore WRITE che si incrementa<sup>21</sup> appunto a velocità  $f_W$ , e che torna a puntare all'inizio della memoria una volta raggiunto l'indirizzo più elevato. Un secondo puntatore READ viene utilizzato per leggere la memoria, alla velocità  $f_R$  richiesta, e prelevare i dati da inviare in uscita: se  $f_R$  e  $f_W$  sono differenti, READ e WRITE prima o poi si sovrappongono, causando la perdita o la ripetizione di una intera trama, e nulla più<sup>22</sup>.



## 19.4 Gerarchia digitale sincrona

**Definizione dei livelli della gerarchia** Come anticipato, la *Synchronous Digital Hierarchy* (SDH<sup>23</sup>) è una metodologia di moltiplicazione che presuppone un funzionamento perfettamente sincrono degli elementi di rete, ed ha solo una variante (nel Nord America), denominata SONET (*Synchronous Optical Network*), i cui livelli sono siglati STS oppure OC nel caso in cui ci si riferisca al segnale ottico corrispondente, e che interopera abbastanza bene con SDH. La tabella 19.1 elenca le velocità del *payload*<sup>24</sup> e di trasmissione associate ai diversi livelli della gerarchia di moltiplicazione SDH/SONET; la sigla STM sta per *synchronous transport module* ed il numero che segue indica il numero di flussi STM-1 che sono aggregati.

**Multiplexer Add and Drop** La differenza strutturale rispetto a PDH, è che in SDH i tributari usano tutti lo stesso clock, da cui deriva la possibilità di aggiungere e togliere un singolo tributario senza alterare il flusso in cui è immerso, come



<sup>20</sup>Letteralmente: *magazzino elastico*.

<sup>21</sup>Il contatore WRITE, come anche READ, conta in binario, e si incrementa con frequenza  $f_W$  ( $f_R$ ). Le parole binarie rappresentate da READ e WRITE forniscono l'indirizzo (all'interno del banco di memoria) in cui leggere i dati in uscita e scrivere quelli in ingresso rispettivamente.

<sup>22</sup>Infatti il sincronismo di trama viene preservato; inoltre l'evento di sovrapposizione dei puntatori può essere rilevato, e segnalato ai dispositivi di demultiplicazione, in modo che tengano conto dell'errore che si è verificato.

<sup>23</sup>[http://it.wikipedia.org/wiki/Synchronous\\_Digital\\_Hierarchy](http://it.wikipedia.org/wiki/Synchronous_Digital_Hierarchy)

<sup>24</sup>Con il termine *payload* si indica il *carico pagante*, ossia i dati che vengono trasportati

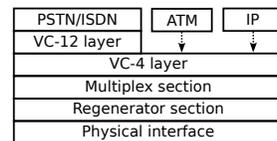
SONET	SDH	payload (kbps)	v. trasm. (kbps)
STS-1	-	48.960	51.840
STS-3	STM-1	150.336	155.520
STS-12	STM-4	601.344	622.080
STS-24	STM-8	1.202.688	1.244.160
STS-48	STM-16	2.405.376	2.488.320
STS-96	STM-32	4.810.752	4.976.640
STS-192	STM-64	9.621.504	9.953.280
STS-768	STM-256	38.486.016	39.813.120
STS-1536	STM-512	76.972.032	79.626.120

Tabella 19.1: Nomenclatura della gerarchia ottica e relative velocità

esemplificato in figura, in cui 252 flussi PDH E1 concorrono a formare un multiplex STM-4.

### Eterogeneità del trasporto

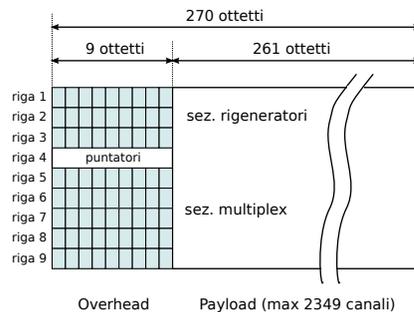
SDH nasce allo scopo di consentire il trasporto di dati di diversa origine (PCM telefonico, ISDN, pacchetti Ethernet ed IP, celle ATM), come illustrato nella figura a fianco, che rappresenta impilate le diverse elaborazioni che i tributari devono subire per essere immessi nel flusso SDH.



**Struttura di trama** SDH si basa su di una struttura di trama di durata di 125  $\mu$ sec, durante i quali sono trasmessi in modalità *byte interleaved* una sequenza di ottetti provenienti da diversi tributari a 64 kbps che condividono la medesima sorgente di temporizzazione, cosicché ogni tributario può essere inserito o prelevato semplicemente scrivendo o leggendo sempre nello stesso punto (con la stessa fase) un ottetto ogni trama.



**Synchronous Transport Module STM-1** Il livello più basso della gerarchia è indicato come STM-1, opera ad una velocità di 155.52 Mbit/s, può trasportare 63 flussi PDH E1 (ovvero 63 flussi \* 32 timeslot/flusso = 2016 canali PCM), ed è caratterizzato da una trama composta da 2430 ottetti, di cui 81 di segnalazione e 2349 di dati<sup>25</sup>, ovvero usando un ottetto di segnalazione ogni 30 totali, quasi come avviene per il flusso PDH E1 (in cui c'è un intervallo di segnalazione, il 16°, ogni 31 canali voce). Gli ottetti di segnalazione sono però ora raggruppati a gruppi di nove, seguiti da  $29 \cdot 9 = 261$  ottetti di dati, ed il risultato è tradizionalmente rappresentato incolonnando le 9 sotto-sequenze di 270 ottetti come in figura, rappresentando così una trama come una matrice di 9 righe per 270 colonne.

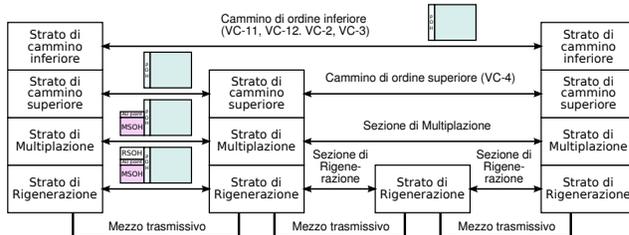
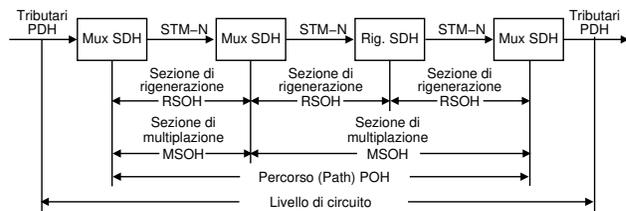


<sup>25</sup>Notiamo che la differenza tra i 2349 ottetti di payload ed i 2016 canali voce fornisce 2349 - 2016 = 333 ottetti, che suddivisi per le nove righe, danno luogo a 37 ottetti per riga in più.

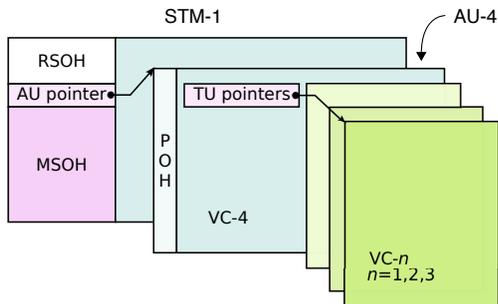
**Le componenti dell'overhead** Le prime 9 colonne prendono il nome di *overhead* della trama, mentre la parte dati è indicata come *payload* (o carico pagante). L'overhead contiene informazioni di segnalazione strettamente inerenti al processo di moltiplicazione, ossia finalizzate all'espletamento di funzioni OAM (*Operation, Administration, Maintenance*), che sono ora associate ad un annidamento di sezioni di trasmissione: *path*, *moltiplicazione* e *rigenerazione*. Infatti, il percorso (*path*) compiuto da un singolo tributario, si snoda tra un unico moltiplicatore di ingresso ed un unico demoltiplicatore di uscita, ma ad ogni moltiplicatore *add and drop* (o commutatore) incontrato, viene definita una nuova *sezione di moltiplicazione*.

Allo stesso modo, per ogni ripetitore rigenerativo incontrato (§ 15.3.2), è definita una nuova *sezione di rigenerazione*. Per ognuna di queste sezioni, è definito un *overhead* (OH) specifico per le operazioni OAM associate.

Dato che un ADM è anche rigeneratore, e che i dispositivi di ingresso - uscita del tributario sono anche ADM, si determina la *stratificazione funzionale* per la segnalazione raffigurata a fianco, in cui è evidenziato come l'overhead associato alle sezioni più esterne venga *impilato* su quello delle sezioni interne. Ma a differenza dell'incapsulamento (pag. 17.5.2.3) proprio dei formati di trasmissione a pacchetto, in questo caso i tre tipi di overhead (*Path POH*, *Multiplex Section MSOH*, e *Regenerator Section RSOH*) sono inseriti nella trama STM-1 in punti diversi, come mostrato dalla figura che segue.

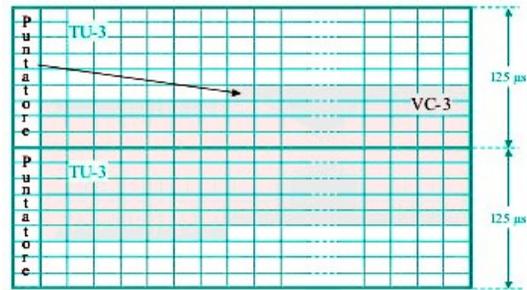


**Il puntatore all'unità amministrativa** Nelle prime tre righe dell'overhead della trama STM-1 trova posto l'RSOH, che viene scritto dai dispositivi di rigenerazione, e quindi letto e ri-scritto ad ogni rigeneratore successivo; in particolare, alla prima riga sono presenti i flag che consentono di acquisire il sincronismo di trama. Nelle ultime cinque righe dell'OH, troviamo il MSOH, scritto, letto e ri-creato dai dispositivi di moltiplicazione. Il POH trova posto all'interno del payload, e su questo torniamo tra brevissimo. Alla quarta riga dell'OH di trama, troviamo un puntatore (*AU Pointer*), che specifica la posizione di inizio del payload (chiamato ora AU, o *Administrative Unit*) nell'ambito della struttura di trama.



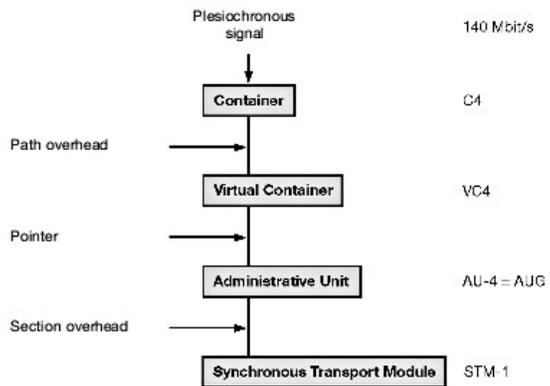
La presenza di questo puntatore deriva dalla volontà di ridurre al minimo l'uso di buffer e di evitare l'introduzione di ritardi di consegna; pertanto i dati da trasmettere

non vengono inseriti nella struttura di trama all'inizio della stessa, bensì *al primo ottetto possibile* al momento della disponibilità dei dati stessi. Quindi, è più che normale il caso in cui la AU inizi a metà di una trama, e termini a metà della trama successiva, come illustrato nella figura che a lato. La coppia AU ed AU Pointer prende quindi il nome di *Administrative Unit Group (AUG)*.



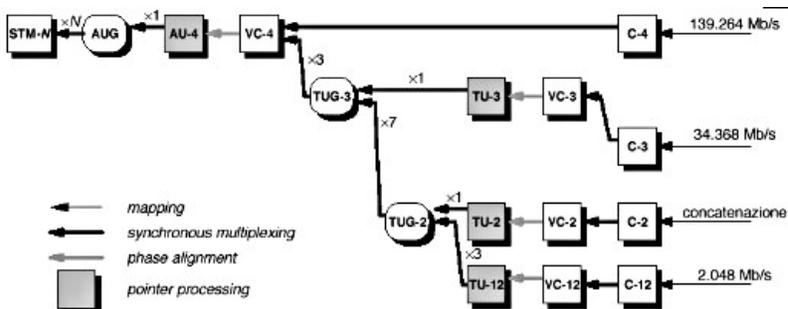
**Virtual Container e Tributary Unit**

Il riempimento della AU con i dati da trasmettere, avviene (vedi figura seguente) mediante una serie di passi successivi, che vedono prima la creazione di una struttura dati detta *Container*, a cui si aggiunge il POH per ottenere un *Virtual Container*, da cui dopo l'aggiunta del puntatore deriva la AU. Notiamo ora che non necessariamente la AU deve essere riempita da un unico tributario; al contrario, la moltiplicazione serve appunto ad ospitarne diversi!!



A questo scopo, più vc a bassa velocità possono essere a loro volta moltiplicati in modalità *byte interleaved*, per produrre una struttura dati intermedia indicata *TU (Tributary Unit)*, che a sua volta può essere inserita assieme ad altre TU, all'interno del vc di ordine superiore.

Non approfondiamo oltre questo argomento, che richiede una buona dose di pazienza per essere analizzato a fondo, e ci limitiamo ad inserire un diagramma che mostra le possibilità di combinazione di tributari differenti, in accordo alle specifiche di ETSI.



**Esercizio** Quanti canali voce entrano in un multiplex STM-1? *Risposta:* ci entra un AUG composto fino da 3 TUG-3, ognuno dei quali può contenere 7 TUG-2, che a loro volta contengono 3 flussi PDH a 2 Mbit/s, ognuno con 30 canali PCM. Pertanto:  $30 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 = 1890$  canali voce. In alternativa, qualora VC4 contenga un unico flusso E4 a 140 Mb, 1920 canali voce.

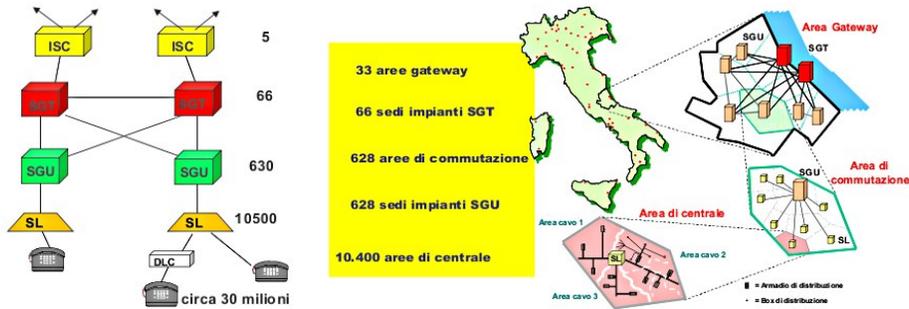
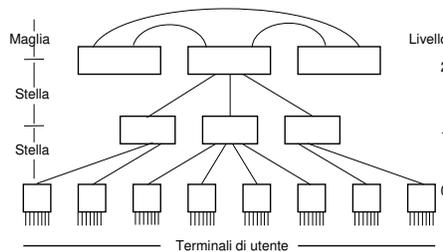


Figura 19.4: Topologia della rete telefonica Italiana

### 19.5 Topologia di rete

Nella figura a lato è riportata una possibile topologia di rete, a scopo puramente esemplificativo, dato che è un elemento su cui gli operatori godono di massima libertà. Il nostro esempio si riferisce ad una rete a 2 livelli, in cui i terminali di utente che fanno capo ad una stessa centrale locale di livello zero accedono alla rete per mezzo di un collegamento che moltiplica le comunicazioni provenienti dalla stessa centrale.



Come vedremo al capitolo 17, il numero di collegamenti contemporaneamente possibili è inferiore al numero di terminali di utente, ed è dimensionato applicando i metodi della teoria del traffico al caso in questione. Le centrali locali sono connesse *a stella* a quelle di livello 1, che quindi realizzano instradamenti relativi alle comunicazioni tra utenti geograficamente vicini, ma connessi a centrali locali diverse. Se, al contrario, due utenti sono connessi alla stessa centrale di livello zero, l'instradamento non esce dalla centrale locale.

Le centrali di livello 1 sono a loro volta connesse a stella a quelle di livello 2, che gestiscono il traffico a livello nazionale; alcune di queste poi, consentono di instradare anche i collegamenti verso altre reti (ad es. di altre nazioni od operatori). Le centrali di 2° livello sono connesse tra loro a *maglia completa* (MESH in inglese) in modo da consentire instradamenti alternativi anche nel caso in cui un collegamento tra centrali vada fuori servizio.

Nello specifico caso italiano, la denominazione attribuita alle centrali dei diversi livelli segue lo schema mostrato nella parte sinistra della figura 19.4: i terminali di utente sono attestati presso gli *Stadi di Linea* (SL) tramite la rete di accesso, mentre gli SL sono collegati agli *Stadi di Gruppo Urbano* (SGU) tramite la rete di trasporto; infine, gli SGU sono collegati agli *Stadi di Gruppo di Transito* (SGT) tramite rete di trasporto in fibra ottica. La parte destra della figura mostra inoltre come questi elementi siano dislocati geograficamente per la regione Abruzzo, individuando la ripartizione del territorio, e mostrando come ad un livello inferiore agli stadi di linea, la rete di accesso si dirami ulteriormente attraverso gli armadi ed i box di distribuzione.

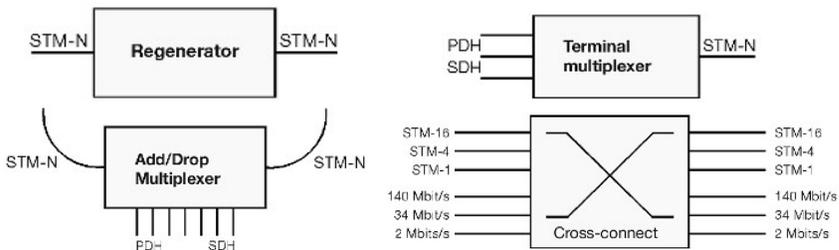


Figura 19.5: Dispositivi SDH

## 19.6 Rete in fibra ottica

Nel periodo iniziale le fibre ottiche sono state usate prevalentemente nella rete di trasporto tra centrali di grado gerarchicamente elevato, mentre ora trovano impiego anche nella sezione di accesso. Per ciò che riguarda le modalità di trasmissione ottica, si rimanda al § 16.4; nel seguito illustriamo i dispositivi utilizzati, la topologia risultante, ed i sistemi di protezione.

### 19.6.1 Dispositivi SDH

Come anticipato, la trasmissione SDH si avvale di elementi (vedi Fig. 19.5) che possono essere descritti in termini funzionali secondo la seguente classificazione:

**Rigeneratori** Sono gli elementi di base, che consentono di suddividere su più tratte i collegamenti più lunghi, e che eliminano dal segnale in transito gli effetti del rumore e della dispersione temporale.

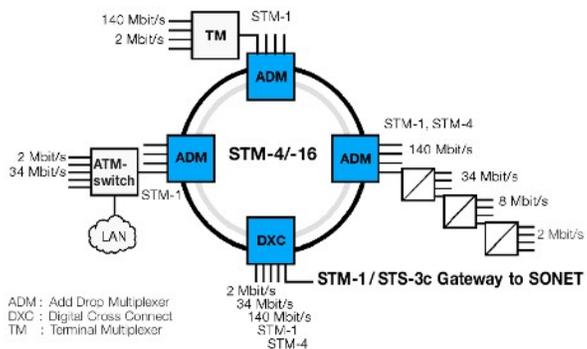
**Multipiatori** Combinano tributari PDH ed SDH, in modo da inserirli in flussi a velocità più elevate.

**Multipiatori Add and Drop** Permettono l'inserimento e l'estrazione di tributari a bassa velocità in/da un flusso in transito, e consentono la creazione di strutture ad anello.

**Digital Cross Connect** A differenza di un ADM, un DXC è interconnesso a più di un flusso SDH, e quindi può inserire un tributario (od un container) prelevato da un flusso entrante, all'interno di un diverso flusso uscente, realizzando così la funzione di commutazione.

### 19.6.2 Topologia ad anello

Le reti in fibra ottica sono quasi sempre realizzate mediante degli *anelli* che congiungono tra loro i nodi di commutazione in forma ciclica. I dispositivi DXC (*Digital Cross Connect*) sono infatti interconnessi a più di un anello, e svolgono la funzione di commutazione delle comunicazioni che devono essere inoltrate verso gli altri anelli.



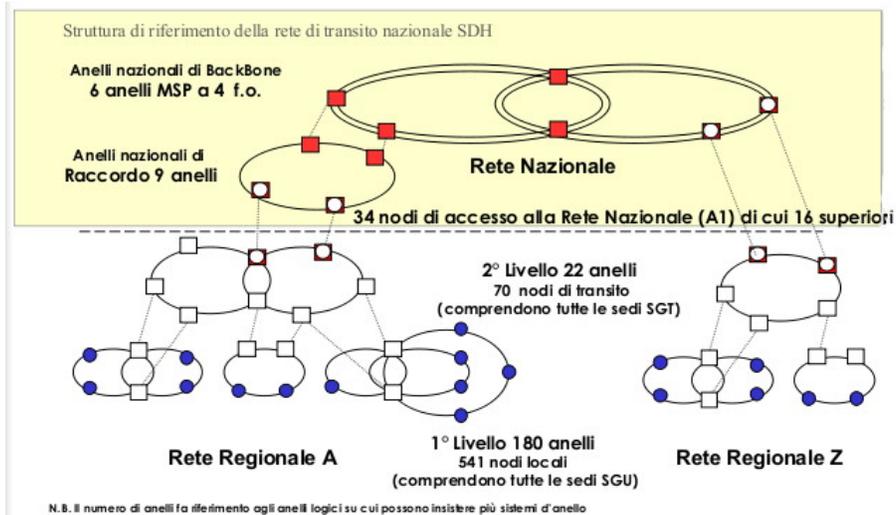


Figura 19.6: Struttura collegamenti SDH nazionali - anno 2002

### 19.6.2.1 Rete di trasporto

Al 2002, l'interconnessione dei collegamenti SDH nazionali risultava permessa dalla struttura su tre livelli riportata in Fig. 19.6.

### 19.6.2.2 Rete di accesso in fibra

La capacità del trasporto SDH di accettare tributari di tipo Ethernet o IP, facilita la realizzazione di una rete completamente ottica, anche nella sezione di accesso. La fig. 19.7 mostra alcuni casi pratici di accesso in fibra ottica. Iniziando da destra, sono mostrate delle reti Gigabit Ethernet (pag. 554) residenziali, interconnesse mediante *switch di livello 2* ad un POP (*Point of Presence*), il cui router (12000) si interconnette ad un anello SDH a 622 Mbps, sul quale sono instradati i pacchetti IP diretti verso Internet, per il tramite del POP primario. In basso a sinistra, sono mostrati accessi a due Megabit, contenenti sia traffico voce che dati, che vengono inseriti in anelli SDH da 155 Mbps: quello al centro inoltra i canali voce verso la PSTN, mentre quello di sinistra si interconnette nel *backbone* IP da 2.5 Gbps.

## 19.6.3 Sistemi di protezione automatica

L'abbondanza di ottetti OAM nella multiplexazione SDH permette un monitoraggio costante della qualità del collegamento e di eventuali malfunzionamenti, al punto che gli stessi apparati di commutazione sono in grado di svolgere compiti di rimpiazzo automatico tra la linea andata fuori servizio, ed una riserva presente, come indicato nei seguenti schemi.

**Protezione 1+1** In questo caso, ogni collegamento (vedi fig. 19.8) è provvisto di un collegamento di riserva. Qualora la via di esercizio vada fuori servizio, i terminali di linea che sono posti agli estremi se ne avvedono pressoché immediatamente, e provvedono a commutare la comunicazione sulla via di riserva.

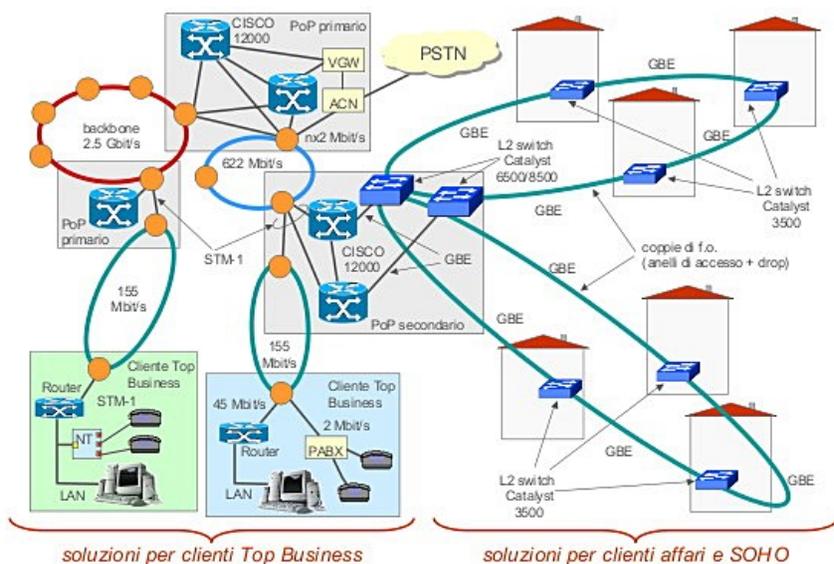


Figura 19.7: Diffusione della fibra ottica nella rete di accesso

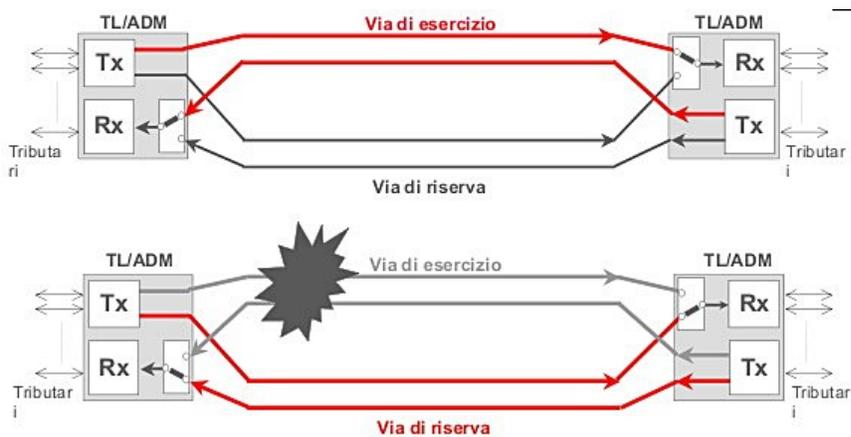


Figura 19.8: Sistema di protezione 1+1

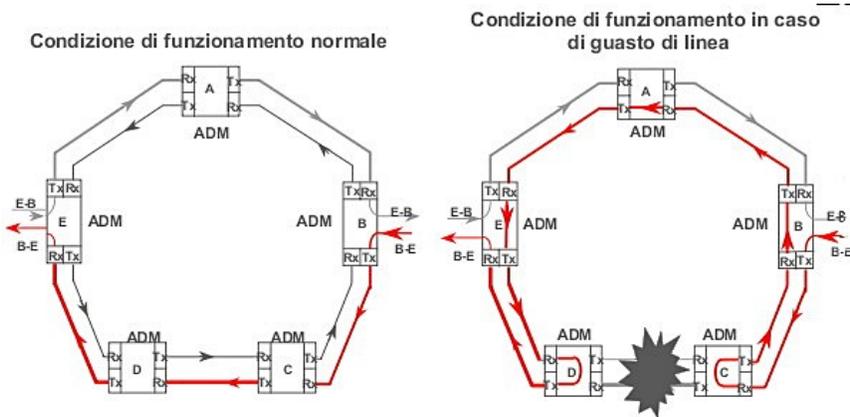


Figura 19.9: Configurazione ridondante ad anello

**Collegamento ad anello** Come prima, per ognuna delle due direzioni di trasmissione è impegnata una diversa fibra ottica, ma in questo caso la via di ritorno (vedi fig. 19.9) si sviluppa investendo l'altra metà della circonferenza, percorsa nello stesso senso di rotazione. Aggiungendo un secondo anello di riserva (quello interno nella figura), anch'esso unidirezionale ma diretto in senso opposto al primo, la comunicazione può continuare anche nel caso in cui entrambi i collegamenti (generalmente co-locati) tra due nodi vadano fuori servizio.

## 19.7 Instradamento

Per questo argomento sono fornite solo alcune definizioni estremamente sommarie di tre possibili strategie, adottate nel corso della evoluzione delle reti telefoniche:

**END to END** o *Right-through* (da estremo ad estremo): la scelta del percorso è effettuata dalla centrale di origine, ad esempio in base al prefisso od all'inizio del numero, utilizzando delle *tabelle di routing* statiche. E' la modalità dell'inizio della telefonia, in cui i commutatori erano elettromeccanici, ed i collegamenti verso altre centrali erano *cablati*. Ha l'enorme svantaggio che i cambiamenti alla topologia della rete si devono riflettere in cambiamenti di tutte le tabelle - *o dei morsetti!*

**Link-by-link** o *Own-Exchange* (tratta per tratta): ogni centrale decide in autonomia dove instradare (in uscita) le connessioni entranti, in base a sue tabelle dinamiche, ovvero informazioni che giungono dalla rete stessa. Si adatta alle modifiche della topologia ma non è affidabile al 100 %, potendo ad esempio produrre dei *loop* (o circoli viziosi);

**Tramite ccs** (*Common Channel Signaling*, segnalazione a canale comune): le decisioni sull'instradamento sono demandate ad una rete di segnalazione parallela ed indipendente da quella del traffico smaltito, e che collega tutte le centrali ad un unico organo di controllo (il *canale comune*), il quale determina l'instradamento in base alla sua conoscenza dello stato del traffico nella rete, e comunica contemporaneamente a tutte le centrali coinvolte nell'instradamento, come configurare i propri organi di commutazione per realizzare il collegamento richiesto.

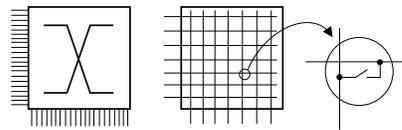
## 19.8 Commutazione

Illustriamo ora l'architettura di dispositivi che consentono la cosiddetta *commutazione di circuito*, ovvero la creazione di un collegamento *stabile* tra due porte del commutatore, con un *impegno permanente* di risorse fisiche per tutta la durata del collegamento. Un'altra modalità di commutazione, quella di *pacchetto*, sarà illustrata al Capitolo 17.

### 19.8.1 Reti a divisione di spazio

Individuano gli organi di commutazione che realizzano un collegamento fisico (elettrico) tra uno degli  $N$  ingressi ed una delle  $M$  uscite. Nel caso in cui  $N > M$ , la rete è un *concentratore*<sup>26</sup>, mentre se  $N < M$  la rete è un espansore; se  $N = M$  la rete è quadrata e *non bloccante*.

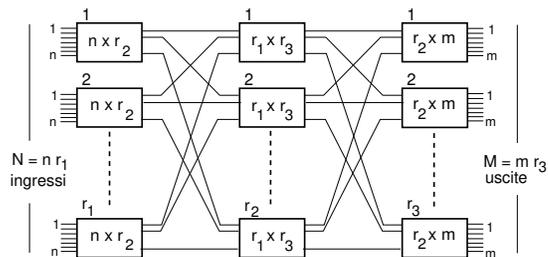
Il commutatore è rappresentato da un blocco con una "X" (in inglese *cross*, od incrocio), e può essere pensata come una matrice binaria in cui ogni elemento (1 o 0) rappresenta lo stato (chiuso od aperto) di un interruttore (realizzato ad esempio mediante un transistor) che collega una linea di ingresso ad una di uscita.



Realizzare in questo modo una rete non bloccante prevede l'uso di un numero di interruttori pari ad  $N \cdot M$ , dei quali solo  $\min(N, M)$  sono utilizzati, anche nelle condizioni di massimo carico. Inoltre, nessun interruttore può essere "eliminato" senza precludere irrimediabilmente la possibilità di collegare qualunque ingresso a qualunque uscita. Allo scopo di utilizzare un numero ridotto di interruttori, sia per costruire reti non bloccanti oppure bloccanti con bassa probabilità di blocco, si ricorre alle...

### 19.8.2 Reti multistadio

...di cui in figura è riportato un esempio a 3 stadi, in cui gli  $N$  ingressi sono ripartiti su  $r_1$  reti più piccole con  $n$  ingressi, e le  $M$  uscite su  $r_3$  reti con  $m$  uscite. Nel mezzo ci sono  $r_2$  reti con  $r_1$  ingressi ed  $r_3$  uscite. Si può dimostrare che la rete complessiva è *non bloccante* se il numero di matrici dello stadio intermedio è almeno  $r_2 \geq n + m - 1$  (condizione di CLOS<sup>27</sup>). Una connessione da sinistra a destra ha ora la possibilità di scegliere attraverso quale matrice intermedia passare.



una connessione da sinistra a destra ha ora la possibilità di scegliere attraverso quale matrice intermedia passare.

<sup>26</sup> come ad esempio un centralino (PBX, PRIVATE BRANCH EXCHANGE) con 8 derivati (interni) e 2 linee esterne: se due interni parlano con l'esterno, un terzo interno che vuole anche lui uscire trova occupato. Si dice allora che si è verificata una condizione di *blocco*.

<sup>27</sup> E' una condizione *sufficiente* a scongiurare il blocco anche nella condizione *peggiore*. Tale circostanza si verifica quando:

- ▷ una matrice del primo stadio ( $i$ ) ha  $n - 1$  terminazioni occupate
- ▷ una matrice del terzo stadio ( $j$ ) ha  $m - 1$  terminazioni occupate e
- ▷ tali terminazioni non sono connesse tra loro, anzi le connessioni associate impegnano ognuna una diversa matrice intermedia e

▷ si richiede la connessione tra le ultime due terminazioni libere di  $i$  e  $j$

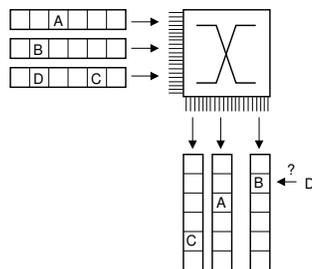
⇒ in totale si impegnano allora  $m - 1 + n - 1 + 1 = m + n - 1$  matrici intermedie.

Nel caso di reti quadrate ( $N = M$ ), ponendo  $n = m = \sqrt{\frac{N}{2}}$ , si ottiene un numero complessivo di incroci pari a  $4 \left( \sqrt{2}N^{\frac{3}{2}} - N \right)$ , che risulta inferiore ad  $N^2$  (e dunque vantaggioso rispetto ad un commutatore monostadio) a partire da  $N \geq 24$ .

Ovviamente, la problematica relativa alle matrici di commutazione è molto articolata, coinvolgendo topologie più complesse, filosofie di instradamento, e tecniche per la stima delle probabilità di blocco. Tralasciamo ulteriori approfondimenti, per illustrare invece come realizzare dispositivi di commutazione per trasmissioni numeriche *a divisione di tempo*.

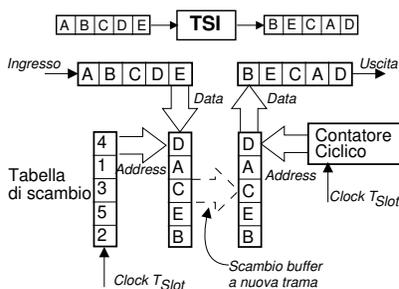
### 19.8.3 Commutazione numerica a divisione di tempo

Consideriamo il caso in cui si debbano commutare le comunicazioni associate ai singoli *time-slot* presenti in diversi flussi<sup>28</sup> numerici organizzati in trame. Avendo a disposizione solamente una matrice di commutazione spaziale, quest'ultima può essere riprogrammata alla stessa frequenza dei *time-slot*, consentendo alle comunicazioni entranti di dirigersi verso i flussi uscenti in direzione delle rispettive destinazioni finali. La matrice spaziale, però, non può alterare l'ordine temporale dei dati in ingresso! Come rappresentato nella figura a lato, non può (ad esempio) inviare le conversazioni *B* e *D* sulla stessa linea uscente, in quanto si verifica un conflitto temporale. E' quindi evidente la necessità di introdurre uno stadio di *commutazione temporale*.



#### 19.8.3.1 Time Slot Interchanger

Questo dispositivo è indicato come TSI (*Time Slot Interchanger*) ed ha la funzione di produrre in uscita una sequenza di dati identica a quella in ingresso, tranne per averne cambiato l'ordine temporale. In figura è mostrato un possibile schema di funzionamento: una trama entrante viene scritta, agli indirizzi ottenuti leggendo sequenzialmente la tabella di scambio, in un buffer di memoria (es.: *entra E e lo scrivo al 4° posto, poi entra D e va al 1° posto, etc.*). Prima dell'inizio di una nuova trama, il primo buffer è copiato in un secondo<sup>29</sup>, che a sua volta viene letto con ordine sequenziale (partendo dall'alto), per creare la nuova trama in uscita. Ovviamente, è possibile anche la realizzazione opposta, con scrittura sequenziale e lettura secondo il nuovo ordinamento.



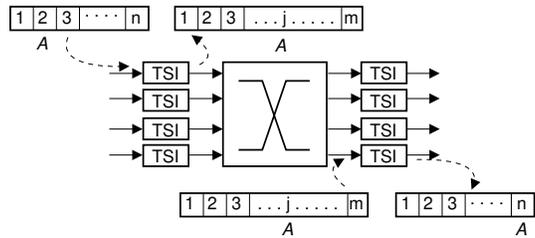
#### 19.8.3.2 Commutazione bidimensionale

Così come un commutatore spaziale non è sufficiente, anche un TSI "da solo" è di scarsa utilità, non potendo instradare le comunicazioni su vie diverse. Combinando assieme le due funzioni, si giunge a realizzare commutatori sia di tempo che di spazio, come la struttura a 3 stadi in figura, chiamata "TS<sup>2</sup>" perché alterna uno stadio temporale, uno spaziale ed uno temporale.

<sup>28</sup>Le comunicazioni presenti in uno stesso flusso, ovvero appartenenti alla stessa trama, condividono la stessa origine/destinazione.

<sup>29</sup>La tecnica prende il nome di *Double Buffering*.

Notiamo subito che, in questo schema, il numero di intervalli temporali in uscita dai TSI di ingresso è  $m > n$ <sup>30</sup>: ciò determina, per lo stadio spaziale, una frequenza di commutazione più elevata della frequenza dei time-slot in ingresso. Una generica conversazione "A" che occupa il 2° slot del



primo flusso può raggiungere (ad esempio) l'ultimo slot dell'ultimo flusso, occupando uno qualsiasi ( $j$ ) degli  $m$  slot utilizzati dal commutatore spaziale. Aumentando il valore di  $m$ , si riduce la probabilità di blocco; in particolare, questa è nulla se  $m = 2n - 1$ <sup>31</sup>.

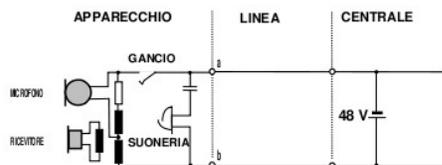
Analizziamo i vantaggi conseguiti dalla commutazione numerica con un semplice esempio. Poniamo di voler commutare con lo schema illustrato 4 flussi PCM (con  $n = 30$ ): i  $4 * 30 = 120$  canali presenti sono commutati utilizzando solo  $4 * 4 = 16$  interruttori, contro i  $120 * 120 = 14.400$  interruttori necessari ad una matrice spaziale monostadio che svolge la commutazione dei 120 canali analogici !

## 19.9 Appendici

### 19.9.1 Plain old telephony services (POTS)

Il *buon vecchio servizio telefonico* consiste nel collegamento audio, nella banda del canale telefonico, attuato mediante un *terminale di utente* (telefono), e nella *segnalazione* (sempre *di utente*) necessaria ad instaurare il collegamento. L'insieme degli apparati che permette di interconnettere tra loro i telefoni di rete fissa è spesso indicato con l'acronimo PSTN (*Public Switched Telephone Network*), da cui si sono evoluti tutti gli sviluppi successivi delle telecomunicazioni.

Quando la centrale locale deve far squillare il telefono, invia sul doppino una tensione alternata che ne attiva la suoneria. Quando la cornetta dell'apparecchio telefonico viene sollevata<sup>32</sup>, nel telefono si chiude un interruttore che determina lo scorrimento di una corrente continua nel *subscriber loop*, indicando la risposta da parte del chiamato. Se viceversa siamo dal lato chiamante, sollevando la cornetta *allertiamo* la centrale di accesso, la quale dopo aver riservato le risorse necessarie (ivi compreso un time-slot in uno dei flussi PCM uscenti) ci manifesta la sua disponibilità ad acquisire il numero che intendiamo comporre, mediante l'invio di un *tono di centrale*.



All'interno del telefono troviamo un particolare trasformatore a quattro porte, detto *ibrido*<sup>33</sup>, in grado di separare il segnale in ingresso da quello in uscita, in modo da inviare il primo all'altoparlante, e di inviare al secondo quello del microfono.

Per comporre il numero, fino agli anni 80 erano in uso i *dischi combinatori*, che aprendo e chiudendo l'interruttore, determinavano una forma d'onda impulsiva, in cui il numero degli

<sup>30</sup>Ovviamente,  $m - n$  intervalli sono lasciati vuoti, in ordine *sperso* tra gli  $m$ .

<sup>31</sup>Si confronti questo risultato con la condizione di Clos, fornita al § 19.8.2.

<sup>32</sup>In inglese si dice andare OFF-HOOK, con riferimento storico al gancio su cui riporre la cornetta, presente nei primi modelli di telefono.

<sup>33</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Hybrid\\_coil](http://en.wikipedia.org/wiki/Hybrid_coil)

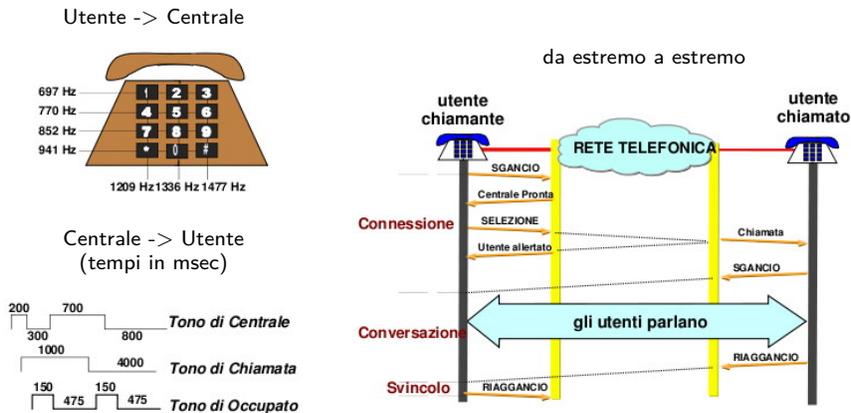


Figura 19.10: Segnalazione di utente

impulsi corrispondeva alla cifra immessa. Questo meccanismo è in diretta relazione alla presenza, nelle centrali telefoniche di prima generazione, dei motori passo-passo che determinavano l'azionamento dei commutatori di centrale.

Il disco combinatore è stato poi soppiantato dalla attuale tastiera numerica DTMF (*Dual Tone Multi Frequency*), in cui ad ogni tasto (vedi lato sinistro della fig. 19.10) sono associate *due frequenze* che individuano la cifra (od il simbolo \* e #) premuta, come descritto dalla figura. Viceversa, la segnalazione di utente nella direzione centrale -> utente avviene per mezzo di un codice basato su di un tono intermittente a 440 Hz<sup>34</sup>, le cui durate sono descritte in basso a sinistra nella figura.

A seguito della ricezione del numero, la centrale *di origine* coinvolge il resto della rete, impegnando risorse della stessa, ed individuando quali nodi attraversare per giungere a destinazione (fase di *istradamento*, in inglese ROUTING). Una volta contattata la centrale di destinazione, questa provvede a far squillare il telefono chiamato, ed inviare indietro un segnale di *RingBack* che produce presso il chiamante un *tono di libero*, oppure un segnale di occupato (*Busy*), nel caso in cui il chiamato sia già impegnato in altra conversazione.

Il risultato dei messaggi di segnalazione di utente è esemplificato nel lato destro di fig. 19.10, in cui è evidenziato come ogni conversazione è in realtà composta da tre fasi imprescindibili:

- formazione della connessione (*call setup*), in cui sono svolte le funzioni di indirizzamento, e vengono riservate da parte della rete le risorse necessarie alla comunicazione
- mantenimento (*hold*), durante la quale le risorse impegnate sono utilizzate in modo esclusivo dalle parti in conversazione
- svincolo (*release*) in cui le risorse impegnate sono liberate

Il passaggio dalla telefonia analogica a quella numerica, in cui il segnale vocale è campionato e quantizzato come PCM, non ha di fatto alterato la presenza di queste tre fasi.

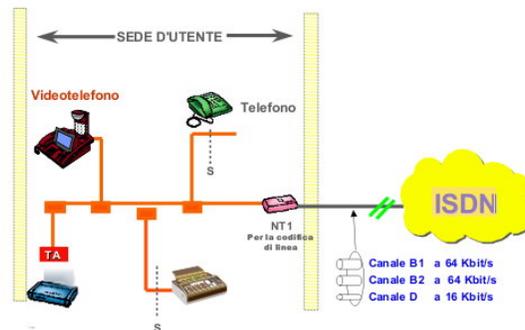
<sup>34</sup>corrispondente alla centrale del pianoforte. Ho provato a verificare, e... a me arriva un la bemolle!

### 19.9.2 ISDN

La *Integrated Service Data Network*<sup>35</sup> è una modalità di accesso numerico alla rete telefonica, definito da una serie di standard reperibili presso l'ITU<sup>36</sup>. In ISDN la conversione A/D avviene all'interno del terminale di utente, il quale può collegare allo stesso bus ISDN (interfaccia S<sup>37</sup> a quattro fili, utilizzando un codice di linea AMI), diversi dispositivi numerici, oppure anche analogici, interponendo per questi ultimi un dispositivo detto *Terminal Adapter* (TA).

L'accesso alla rete da parte del dispositivo NT (*Network Termination*) connesso al doppio, corrisponde alla *Interfaccia U*<sup>38</sup>, su cui è trasmesso un segnale a quattro livelli noto come 2B1Q<sup>39</sup>, per il quale sono standardizzate due diverse velocità di trasmissione. Nella modalità cosiddetta di *Accesso Base* (BRI, *Basic Rate Interface*), si ha a disposizione un collegamento numerico di banda base a 144 kbps, in cui trova posto una struttura di trama<sup>40</sup> che ospita due canali voce (B1 e B2, da *Bearer*, ossia *portatore*, con dati PCM) a 64 kbps, in cui la trasmissione avviene in modo ininterrotto, e un canale dati (D) a 16 kbps, in cui la trasmissione avviene in modalità a pacchetto, ed in cui trovano posto le informazioni di segnalazione<sup>41</sup>, come il protocollo Q.931<sup>42</sup>.

#### Accesso Base ISDN



Nella modalità di *Accesso Primario* (PRI, *Primary Rate Interface*), adatta al collegamento di centralini, si hanno a disposizione 30 canali B (voce) a 64 kbps, ed un canale D (dati) di segnalazione a 64 kbps. Pertanto, PRI viene direttamente interconnesso al primo livello (E1) della gerarchia PDH descritta al § 19.3.4.

Dato che l'accesso ISDN preserva il flusso binario inviato sui canali B da estremo a estremo della rete, su quegli stessi canali possono essere inviate anche informazioni niente affatto vocali, ma bensì nativamente numeriche, purché il ricevente condivida le stesse modalità di interpretazione dei bit in arrivo. Sfruttando tale possibilità, sono stati (ad esempio) definiti i primi standard di videotelegrafia H.320<sup>43</sup>.

### 19.9.3 Sistema di segnalazione numero 7

Il *Signaling System #7* (SS7<sup>44</sup>) è un insieme di protocolli di segnalazione telefonica a canale comune, usato per controllare la maggior parte delle chiamate telefoniche della PSTN mondiale, che in questo caso prende il nome di *Intelligent Network* (IN<sup>45</sup>). Oltre ad gestire la fasi di

<sup>35</sup><http://it.wikipedia.org/wiki/ISDN>

<sup>36</sup><http://www.itu.int/rec/T-REC-I/e>

<sup>37</sup><http://hea-www.harvard.edu/~fine/ISDN/n-isdn.html>

<sup>38</sup><http://www.ralpb.net/ISDN/ifaces.html>

<sup>39</sup><http://it.wikipedia.org/wiki/2B1Q>

<sup>40</sup>[http://telemat.die.unifi.it/book/corso\\_telematica/lez\\_100/grp\\_4.html](http://telemat.die.unifi.it/book/corso_telematica/lez_100/grp_4.html)

<sup>41</sup><http://www.rhyshaden.com/isdn.htm>

<sup>42</sup><http://www.freesoft.org/CIE/Topics/126.htm>

<sup>43</sup><http://it.wikipedia.org/wiki/H.320>

<sup>44</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Signalling\\_System\\_No.\\_7](https://en.wikipedia.org/wiki/Signalling_System_No._7)

<sup>45</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Intelligent\\_network](http://en.wikipedia.org/wiki/Intelligent_network)

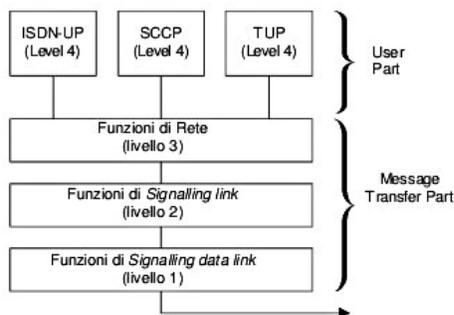
instaurazione e abbattimento della chiamata, permette altri servizi come reindirizzamento, carte prepagate, SMS, numero verde, conferenza, richiamata su occupato...

L'ss7 è descritto dalla serie di raccomandazioni ITU-T Q.700<sup>46</sup>, a cui aderiscono anche le varianti regionali descritte da altri enti normativi. I messaggi ss7 sono trasferiti mediante connessioni numeriche tra entità di segnalazione, ospitate nelle centrali telefoniche, indicate con i termini di



- *Service switching point* (ssp<sup>47</sup>), che termina la segnalazione di utente, ed invia una query all'SCP per determinare come gestire la richiesta di servizio;
- *Signal Transfer Point* (stp<sup>48</sup>), che instrada i messaggi SS7 tra le diverse entità della IN;
- *Service Control Point* (scp<sup>49</sup>), che interroga un *Service Data Point* (sdp<sup>50</sup>), il quale a sua volta detiene un database che (ad es.) identifica il numero geografico a cui deve essere inoltrata una chiamata diretta ad un numero verde. Alternativamente, l'scp può determinare la riproduzione di messaggi preregistrati, o richiedere ulteriore input da parte del chiamante, in base all'*Intelligent Network Application Protocol* (inap<sup>51</sup>) che opera sopra il *Transaction Capabilities Application Part* (tcap) della pila protocollare ss7.

Oltre alle entità che prendono parte alla architettura, ss7 è definito anche nei termini della gerarchia protocollare che descrive la stratificazione delle funzioni necessarie allo svolgimento dei servizi richiesti. Il semplice scambio dei messaggi tra le entità è basato su di una rete a commutazione di pacchetto, ed avviene in base alle procedure collettivamente indicate come *Message Transfer Part* (mtp<sup>52</sup>), responsabile della consegna affidabile dei messaggi ss7 tra le parti in comunicazione. Le funzioni di MTP sono stratificate su tre livelli, che dal basso in alto, si occupano degli aspetti di trasmissione tra le entità, della gestione degli errori in modo da garantire una comunicazione affidabile, e dell'instradamento dei messaggi tra le entità.



Al disopra della MTP possono operare diversi protocolli indicati come *User Part*, come ad esempio il *Signalling Connection Control Part* (sccp<sup>53</sup>), che arricchisce le funzionalità di rete, offrendo ulteriori capacità di indirizzamento, ed un servizio orientato alla connessione

<sup>46</sup><http://www.itu.int/rec/T-REC-Q.700/en>

<sup>47</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Service\\_switching\\_point](http://en.wikipedia.org/wiki/Service_switching_point)

<sup>48</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Signal\\_transfer\\_point](http://en.wikipedia.org/wiki/Signal_transfer_point)

<sup>49</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Service\\_Control\\_Point](http://en.wikipedia.org/wiki/Service_Control_Point)

<sup>50</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Service\\_Data\\_Point](http://en.wikipedia.org/wiki/Service_Data_Point)

<sup>51</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/INAP>

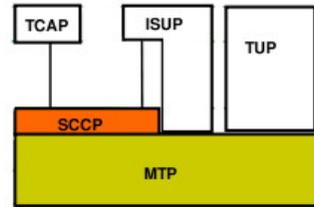
<sup>52</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Message\\_Transfer\\_Part](http://en.wikipedia.org/wiki/Message_Transfer_Part)

<sup>53</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Signalling\\_Connection\\_Control\\_Part](https://en.wikipedia.org/wiki/Signalling_Connection_Control_Part)

anziché a pacchetto; attraverso SCCP possono operare processi applicativi basati sul *Transaction Capabilities Application Part* (TCAP<sup>54</sup>).

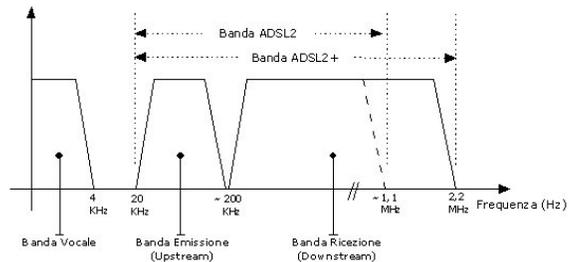
Altri esempi di User Part sono la *Telephone User Part* (TUP<sup>55</sup>) e la *ISDN User Part* (ISUP<sup>56</sup>). TUP è stata la prima UP ad essere definita, e fornisce il supporto all'offerta di servizi PSTN mediante la rete ss7. Attualmente è quasi ovunque rimpiazzato da ISUP, che offre altri servizi, come ad esempio l'identificazione del chiamante, e che può dialogare con l'MTP anche per il tramite di SCCP.

Qualora la rete di interconnessione tra le entità della IN sia una rete IP, allora sono da considerare gli ulteriori protocolli indicati come SIGTRAN<sup>57</sup> o *Signalling Transport*.



### 19.9.4 ADSL

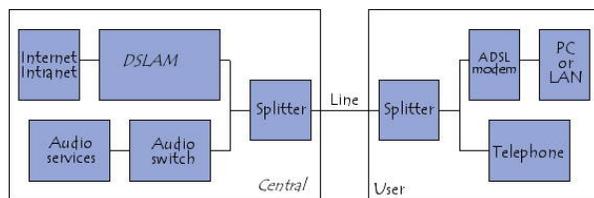
L'*Asymmetric Digital Subscriber Line*<sup>58</sup> è l'insieme di tecnologie trasmissive e di rete per mezzo delle quali viene fornito l'accesso ad Internet a banda larga per il tramite del doppino telefonico (*subscriber loop*) in rame, già utilizzato per il normale servizio telefonico POTS. L'uso condiviso



del mezzo è reso possibile realizzando la trasmissione numerica ADSL su di una banda di frequenze *più elevate* di quelle usate da POTS, come mostrato in figura, dove sono rappresentati gli intervalli di frequenza riservati alla telefonia PSTN, ai dati in uscita (*upstream*) ed in ingresso (*downstream*).

La massima velocità di trasmissione è stata inizialmente posta rispettivamente pari ad 1 e 8 Mbps per i due versi trasmissivi, anche in funzione della lunghezza del collegamento utente - centrale<sup>59</sup>; successivamente, la massima velocità di ricezione è stata elevata rispettivamente a 12 e 20 Mbit/sec per gli standard ADSL2 e ADSL2+.

I due segnali (vocale e numerico) sono poi separati su linee differenti<sup>60</sup> inserendo, a valle della presa telefonica casalinga, un doppio filtro passa-alto e passa-basso detto *splitter*<sup>61</sup>. Un



<sup>54</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Transaction\\_Capabilities\\_Application\\_Part](http://en.wikipedia.org/wiki/Transaction_Capabilities_Application_Part)

<sup>55</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Telephone\\_User\\_Part\\_\(TUP\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Telephone_User_Part_(TUP))

<sup>56</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/ISDN\\_User\\_Part](http://en.wikipedia.org/wiki/ISDN_User_Part)

<sup>57</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/SIGTRAN>

<sup>58</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Asymmetric\\_digital\\_subscriber\\_line](https://en.wikipedia.org/wiki/Asymmetric_digital_subscriber_line)

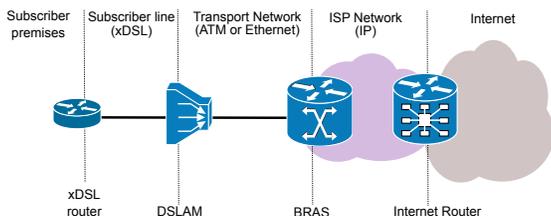
<sup>59</sup>All'aumentare della lunghezza del collegamento, oltre a ridursi la potenza ricevuta e quindi peggiorare l'SNR, aumenta l'entità della diafonia (di tipo NEXT, pag. 468) tra utenti differenti, determinando un ulteriore peggioramento di SNR, che la tecnica di modulazione affronta riducendo la velocità trasmissiva.

<sup>60</sup>Ciò permette di non ascoltare nel telefono il *fruscio* della trasmissione ADSL, e di ridurre il rischio che le comunicazioni vocali determinino la *caduta* della connessione ADSL.

<sup>61</sup>I modem più recenti incorporano il passa alto al loro interno, e sono venduti assieme a splitter con la sola funzione passa basso per il canale vocale.

filtro del tutto simile esiste anche dal lato centrale, in modo da inoltrare la componente in banda audio alla centrale POTS, e la componente dati verso un dispositivo DSLAM.

**DSLAM e oltre** Il *Digital Subscriber Line Access Multiplexer* risiede nella centrale dell'operatore che offre il servizio POTS, provvede ad effettuare la demodulazione del segnale ADSL di ogni singolo utente, e si occupa di aggregare il traffico relativo a più utenti ed inviarlo verso gli ISP (*Internet Service Provider*) con cui gli utenti hanno un contratto di connessione ad Internet.



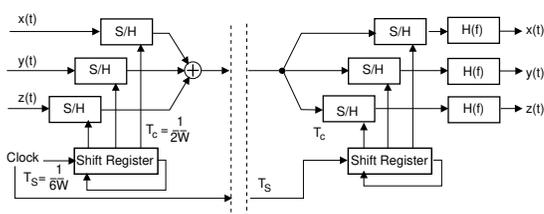
A questo fine può essere necessario attraversare prima una rete di trasporto<sup>62</sup> basata su ATM o ETHERNET, che termina il traffico sul *Broadband Remote Access Server* (BRAS)<sup>63</sup> dell'ISP, utilizzato da quest'ultimo anche per terminare il protocollo di collegamento

di PPP<sup>64</sup>, svolgere le funzioni di autenticazione dell'accesso, ed applicare eventuali *policy* a livello IP. Quindi, l'ISP provvede ad interconnettere il traffico del cliente con la rete Internet. Alternativamente, l'ISP può disporre di un *Point of Presence* (POP) nella stessa centrale in cui sono ospitati i DSLAM dei propri clienti<sup>65</sup>, che in questo caso producono direttamente traffico IP, inoltrato verso la *core network* dell'ISP usando la sua stessa connettività.

**DMT** Il modem ADSL utilizza una tecnica di modulazione numerica multi-portante detta *Discrete Multi Tone*, in cui il flusso binario viene ripartito su più canali di frequenza contigui, ed il segnale analogico sintetizzato direttamente nel dominio della frequenza mediante il calcolo di una FFT, come previsto dalla tecnica di trasmissione OFDM (vedi § 14.8). In questo modo, oltre a semplificare le operazioni di equalizzazione, è possibile variare la velocità di trasmissione in modo indipendente per le diverse portanti, e mantenere buone prestazioni anche nel caso in cui l'SNR vari con la frequenza.

### 19.9.5 TDM mediante modulazione di ampiezza degli impulsi

Al tempo in cui la realizzazione del componente di quantizzazione (vedi § 4.2.1.1) presentava discrete difficoltà circuitali, si pensò<sup>66</sup> di sfruttare il teorema del campionamento (vedi § 4.1) per inviare su di un unico collegamento più comunicazioni multiple a divisione di tempo (TDM = *Time Division Multiplex*).



<sup>62</sup>Non lasciarsi fuorviare dal ruolo di *trasporto* della rete, che in effetti assolve unicamente un ruolo di *livello due* (o di collegamento), in quanto il punto di uscita non è qualsiasi, ma l'ISP fornitore dell'utente.

<sup>63</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Broadband\\_Remote\\_Access\\_Server](http://en.wikipedia.org/wiki/Broadband_Remote_Access_Server)

<sup>64</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Point-to-Point\\_Protocol](http://en.wikipedia.org/wiki/Point-to-Point_Protocol)

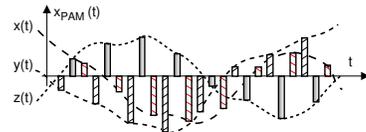
<sup>65</sup>Come ad es, nel caso dell'Unbundling: [http://it.wikipedia.org/wiki/Unbundling\\_local\\_loop](http://it.wikipedia.org/wiki/Unbundling_local_loop)

<sup>66</sup>La *pensata* non ebbe molte applicazioni, se non in ambito della commutazione interna ad esempio ad un centralino, a causa della sensibilità del metodo agli errori di temporizzazione, ed alle caratteristiche del mezzo trasmissivo su cui inviare il segnale PAM.

E' sufficiente infatti sommare alla funzione  $x^\circ(t)$  introdotta al § 4.1.4 altri segnali simili, ad esempio  $y^\circ(t)$ ,  $z^\circ(t)$  come mostrato alla figura precedente, ognuno campionato a frequenza  $f_c$ , ma sfasato rispetto agli altri.

Da questa modalit  di moltiplicazione analogica deriva il termine *onda PAM*, che sta per *Pulse Amplitude Modulation*, ovvero modulazione ad ampiezza di impulsi; gli impulsi sono separati da un intervallo  $T_s = \frac{1}{Nf_c}$ , con  $N$  pari al numero di segnali moltiplicati. Il pedice  $s$  indica che si tratta di un *periodo di simbolo*.

Il segnale  $x_{PAM}(t)$  composto dalle 3 sorgenti dell'esempio della figura in alto   mostrato a lato, e pu  essere nuovamente campionato estraendo  $x(nT_c)$ ,  $y(nT_c)$ ,  $z(nT_c)$ , mentre i segnali  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  sono riprodotti facendone passare gli impulsi campionati a frequenza  $f_c$  in un filtro di ricostruzione con banda  $W \leq f_c/2$ .



## 19.10 Riferimenti

Per questo capitolo un po particolare, si elencano in modo distinto alcune fonti on-line a cui ci si   ispirati, e dalle quali sono state tratte alcune illustrazioni.

- La Rete di Telecomunicazioni [http://net.infocom.uniroma1.it/corsi/impianti/lezioni\\_new/lez\\_1.pdf](http://net.infocom.uniroma1.it/corsi/impianti/lezioni_new/lez_1.pdf) di *Stefano Paggi* <http://net.infocom.uniroma1.it/corsi/impianti/impianti.htm>
- ISDN <http://www-tlc.deis.unibo.it/Didattica/CorsiBO/RetiLB/lucidi/ISDN.pdf> di *Giorgio Corazza* <http://www-tlc.deis.unibo.it/Didattica/CorsiBO/RetiLB/>
- Sistema di Segnalazione SS No 7 <http://www.cedi.unipr.it/links/Corsi/telematica/Materiale/dispense/Telefonia/Ss7.pdf> di *A. Lazzari* <http://www.cedi.unipr.it/links/Corsi/telematica/Materiale/dispense.html>
- La segnalazione a canale comune [http://primo.ing.uniroma1.it/materiale/Commutazione/2007\\_2008/IV.ppt](http://primo.ing.uniroma1.it/materiale/Commutazione/2007_2008/IV.ppt) di *Aldo Roveri*
- La Rete Telefonica <http://www.cedi.unipr.it/links/Corsi/telematica/Materiale/dispense/Telefonia/Telefonica.pdf> di *A. Lazzari*
- Understanding SONET/SDH <http://www.electrosofts.com/sonet/index.html>
- Reti Ottiche <http://net.infocom.uniroma1.it/corsi/ro/ro.htm> di *Andrea Bacciocchi*

## Broadcast

Ritroviamo qui alcuni argomenti che nelle precedenti edizioni erano inseriti come appendici ad alcuni capitoli, come casi di applicazione delle teorie esposte alla realtà quotidiana che ci circonda. In particolare, sono raggruppati i casi di *radiodiffusione* audio e video, come la radio FM, la televisione analogica, e quella satellitare, senza particolari miglioramenti od aggiunte rispetto a quanto già sviluppato a suo tempo.

### 20.1 Trasmissione televisiva analogica

Illustriamo molto brevemente le modalità di codifica e trasmissione del segnale televisivo mediante broadcast *analogico*, con riferimento a standard e tecnologie ormai *dismessi*<sup>1</sup>, e che hanno rappresentato una delle principali applicazioni della modulazione a *banda laterale ridotta* discussa al § 10.1.3.

#### 20.1.1 Codifica dell'immagine

Una trasmissione televisiva avviene riproducendo 25 diverse immagini (dette *quadri*) al secondo. Ogni immagine è scomposta in 625 linee orizzontali, che vengono trasmesse in due fasi: prima le linee dispari, poi quelle pari. In questo modo un singolo quadro è riprodotto due volte<sup>2</sup> ogni  $\frac{1}{25} = 0.04$  secondi (seppure in modo alternato) portando così a 50 semiquadri/secondo<sup>3</sup> la frequenza di rinfresco, in modo da impedire i fenomeni di *sfarfallamento* (FLICKER) ottico<sup>4</sup>.

La riproduzione di un quadro avviene (vedi fig. 20.1) mediante un *tubo catodico*, il quale dispone posteriormente di un catodo che emette elettroni, che sono accelerati da un segnale di luminanza positivo applicato all'anodo, e che terminano la loro corsa contro lo strato di fosforo distribuito sulla parte anteriore (schermo) del tubo. Il *fascio* (BEAM) di elettroni è focalizzato elettronicamente, e viene deflesso ciclicamente sia in orizzontale alla frequenza di  $625 \frac{\text{linee}}{\text{quadro}}$ .  
 $25 \frac{\text{quadri}}{\text{secondo}} = 15625 \text{ Hz}$  (*frequenza di riga*), sia verticalmente con velocità di  $50 \frac{\text{semiquadri}}{\text{secondo}}$ .

<sup>1</sup>Lo *switch off* al digitale terrestre in Italia è avvenuto nel luglio 2012, ed anche i *tubi catodici* sono pressoché estinti..

<sup>2</sup>La riproduzione di metà quadro alla volta è chiamata *scansione interallacciata* dell'immagine. Nulla vieta al costruttore del ricevitore di prevedere una *memoria di quadro* e di riprodurre le immagini in modo non interallacciato; il segnale trasmesso invece presenta sempre le righe in formato interallacciato.

<sup>3</sup>La frequenza di 50 semiquadri/secondo è stata scelta di proposito uguale alla frequenza di funzionamento della rete elettrica, in modo che eventuali disturbi elettrici avvengano sempre *nello stesso punto* dell'immagine, riducendo gli effetti fastidiosi.

<sup>4</sup>Il *flicker* si manifesta nel caso in cui la frequenza di rinfresco è inferiore al tempo di persistenza delle immagini sulla retina, pari a circa  $\frac{1}{40}$  di secondo.

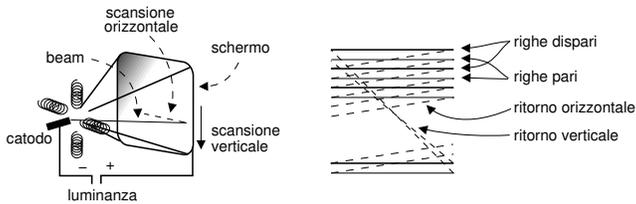


Figura 20.1: Modalità di scansione interlacciata dell'immagine televisiva

### 20.1.2 Segnale televisivo in bianco e nero

Il segnale televisivo contiene sia le informazioni di temporizzazione necessarie a sincronizzare la scansione dell'immagine, che l'informazione di luminanza che pilota la tensione anodica, e quindi la forza con cui l'elettrone urta lo schermo.

Durante la trasmissione di ogni semiquadro, ogni riga dispone di  $\frac{1}{15625} = 64 \mu\text{secondi}$ . Il segnale modulante è sempre positivo (vedi fig. 20.2), ed associa ai valori più piccoli la maggiore luminanza<sup>5</sup>, trasmettendo in logica negata, in modo che gli impulsi di sincronismo orizzontale siano di ampiezza superiore al livello del nero (il 70 % dell'ampiezza). Il tempo dedicato alla trasmissione della luminanza di una riga è di  $52 \mu\text{sec}$ , mentre nei restanti 12 il segnale oltrepassa il livello del nero (in modo da rendere invisibile il beam) e quindi un impulso determina il ritorno orizzontale. In figura è anche mostrato un *burst colore* che è presente nelle trasmissioni a colori per sincronizzare la *portante di colore* (vedi di seguito).

### 20.1.3 Formato dell'immagine

Ogni singolo quadro è realizzato con un rapporto di aspetto 4:3 (che rappresenta il rapporto tra le dimensioni orizzontale e verticale), e solo 575 delle 625 linee vengono mostrate (infatti 25 linee per ogni semiquadro cadono al di fuori dello schermo<sup>6</sup>).

<sup>5</sup>In questo modo si riduce mediamente la potenza trasmessa, dato che sono più frequenti scene chiare che scure.

<sup>6</sup>Nel tempo destinato alle linee che non sono mostrate, vengono comunque trasmesse altre informazioni, come ad esempio i dati che compaiono nelle pagine del televideo.

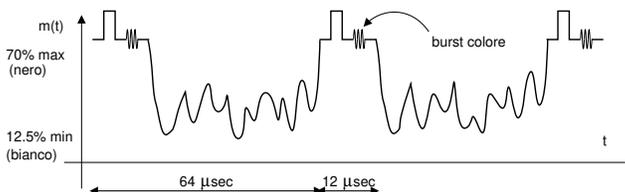


Figura 20.2: Forma d'onda del segnale televisivo

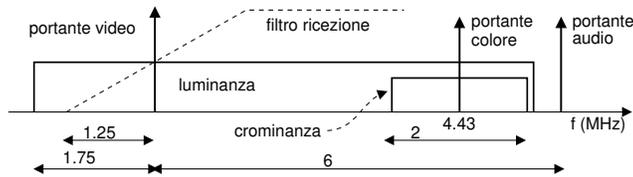


Figura 20.3: Occupazione spettrale di un segnale televisivo

### 20.1.4 Occupazione spettrale

Diverse considerazioni<sup>7</sup> hanno portato a stabilire che la banda del segnale televisivo sia di circa  $\pm 5$  MHz, e nell'ultima versione del sistema PAL questa è stata portata a 6 MHz. In particolare, dato che le immagini presentano spesso ampie zone uniformi, corrispondenti ad un segnale di luminanza pressoché costante, la densità spettrale del segnale televisivo è piuttosto concentrata nella regione delle basse frequenze. Per questo motivo, si è deciso di trasmettere il segnale mediante modulazione di ampiezza a banda laterale ridotta, conseguendo un risparmio di banda e contemporaneamente preservando le componenti del messaggio a frequenze più basse.

La figura 20.3 mostra la situazione, in cui solo parte (1.75 MHz) della banda inferiore del segnale di luminanza viene trasmessa, mentre il filtro di ricezione provvede a realizzare un filtraggio complessivo tale che  $\underline{H}(f) + \underline{H}^*(-f) = \text{cost}$  (vedi nota 27 a pag. 281).

### 20.1.5 Segnale audio

In figura 20.3 è rappresentata anche una portante audio, che viene trasmessa oltre la banda del segnale video, mediante una modulazione FM con  $\Delta f_{Max} = 25$  KHz.

### 20.1.6 Segnale di crominanza

Il requisito che più di altri ha determinato quale soluzione adottare per effettuare trasmissioni a colori, è che queste dovessero essere correttamente visibili anche da parte di ricevitori in bianco e nero.

Un risultato di colorimetria è che ogni colore è scomponibile nella somma di tre colori fondamentali (verde, rosso e blu), effettivamente operata dagli apparati di acquisizione. La somma<sup>8</sup> della tre componenti fornisce il segnale di luminanza  $L$ , che viene utilizzato esattamente come per il bianco e nero. Il segnale di crominanza è invece costruito da una coppia di segnali differenza  $\begin{cases} \Delta_R = R - L \\ \Delta_B = B - L \end{cases}$ , che sono usati per modulare in ampiezza, portante soppressa, una portante di colore, usando  $\Delta_R$  come componente in fase e  $\Delta_B$  come componente in quadratura<sup>9</sup>. Una analisi più precisa, è fornita al § 21.2.2.

<sup>7</sup>Ad esempio, si può stabilire di realizzare la stessa risoluzione orizzontale e verticale. A fronte delle 625 linee, il rapporto di aspetto di  $\frac{4}{3}$  determina l'esigenza di individuare  $625 \cdot \frac{4}{3} = 833 \frac{\text{punti}}{\text{linea}}$ , e quindi  $833 \cdot 625 = 520625 \frac{\text{punti}}{\text{quadrato}}$ , ossia circa  $13 \cdot 10^6 \frac{\text{punti}}{\text{secondo}}$ . Per il teorema del campionamento, il segnale deve avere una banda minore od uguale di  $\frac{f_c}{2} = 6.5$  MHz.

<sup>8</sup>In realtà ogni componente è pesata mediante un opportuno coefficiente che tiene conto della diversa sensibilità dell'occhio ai tre colori fondamentali. Infatti, per ottenere il bianco, i tre colori non devono essere mescolati in parti uguali, bensì 59% di verde, 30% di rosso e 11% di blu.

<sup>9</sup>Le ampiezze delle componenti in fase e quadratura del segnale di crominanza devono essere opportunamente scalate, per impedire al segnale complessivo (luminanza più crominanza) di assumere valori troppo elevati.

L'occupazione spettrale del segnale di crominanza è ridotta ( $\pm 1$  MHz) rispetto a quello di luminanza, in quanto la *risoluzione spaziale* dell'occhio umano è ridotta per stimoli colorati, e quindi  $\Delta_R$  e  $\Delta_B$  possono variare più lentamente di  $L$ .

### 20.1.7 Sincronizzazione

Per impedire fenomeni di interferenza tra c.a. di b.f. nella ricezione del segnale di crominanza, occorre effettuare una demodulazione omodina, e l'oscillatore del ricevitore si mantiene coerente con la portante di colore, grazie ai *burst di colore* presenti dopo l'impulso di sincronizzazione orizzontale, costituiti da 8 cicli di portante. Questo segnale ha inoltre lo scopo di segnalare la *presenza* della componente di crominanza: in caso contrario infatti (trasmissione B/N) il ricevitore deve disattivare il circuito del colore, per non produrre deterioramenti dell'immagine.

### 20.1.8 Interferenza

La presenza di entrambi i segnali di luminanza e crominanza nella stessa banda sembrerebbe dare luogo a difficili problemi di interferenza. Innanzitutto osserviamo che, come anticipato, il segnale di luminanza è concentrato attorno alla portante video, e dunque arreca un disturbo ridotto<sup>10</sup> alla crominanza. Quest'ultima quindi, prima di essere demodolata, viene filtrata per rimuovere il segnale di luminanza fuori della banda di crominanza, ed il disturbo è generalmente trascurabile. Viene inoltre adottata una soluzione che riduce anche l'interferenza di crominanza su luminanza. Quest'ultima presenta infatti una spiccata periodicità, legata alla frequenza di riga  $f_r$  ed alla presenza degli impulsi di sincronismo ogni  $64 \mu\text{sec}$ , che determina uno spettro con energia concentrata alle armoniche di  $f_r = 15625$  Hz. Pertanto, si colloca la portante di colore a metà tra due armoniche del segnale di luminanza<sup>11</sup>, in modo che le densità spettrali risultino, pur se sovrapposte, intercalate. L'uso di *filtri a pettine*<sup>12</sup> nel ricevitore può quindi ridurre notevolmente l'interferenza.

### 20.1.9 Video composito o separato

Il segnale video in *banda base* realizzato come ora descritto, e privo della componente audio, può essere trasferito tra dispositivi e/o distribuito via cavo coassiale, e prende il nome di *segnale video composito*<sup>13</sup>, contrapponendosi al *separate video* o S-VIDEO<sup>14</sup>, in cui invece luminanza e crominanza vengono mantenute separate, ed utilizzato ad esempio nei cavi con attacco SCART<sup>15</sup>.

## 20.2 FM broadcast

Illustriamo brevissimamente i parametri delle trasmissioni FM ricevibili mediante *la radio di casa*. Nella banda 88-108 MHz operano le radio FM, con spaziatura di 200 KHz l'una dall'altra.

<sup>10</sup>Possiamo riflettere su quali siano le circostanze che producono la massima interferenza della luminanza sulla crominanza: ciò avviene in corrispondenza di scene molto definite, relative ad immagini con elevato contenuto di frequenze spaziali elevate, ad esempio nel caso di righe fitte; il disturbo è più appariscente nel caso in cui la zona ad elevato contrasto sia povera di componenti cromatiche. Avete mai notato cravatte a righe bianche e nere, divenire cangianti?

<sup>11</sup>La portante di colore si colloca a 4,43361975 MHz per il sistema PAL.

<sup>12</sup>Introdotta al § 6.6, l'argomento può essere approfondito presso [http://it.wikipedia.org/wiki/Filtro\\_combo](http://it.wikipedia.org/wiki/Filtro_combo)

<sup>13</sup>Vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Video\\_composito](https://it.wikipedia.org/wiki/Video_composito)

<sup>14</sup>Vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/S-Video>

<sup>15</sup>Vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/SCART>

Ad ogni emittente è concessa una deviazione massima della frequenza istantanea pari a  $\Delta f = 75$  KHz, ed il trasmettitore viene tarato mediante un  $m(t)$  sinusoidale a frequenza di 15 KHz, e  $k_f$  regolato in modo da ottenere  $\Delta f = 75$  KHz. In queste condizioni, risulta  $\beta = \frac{k_f}{w} = \frac{75}{15} = 5$ , e la regola di Carson fornisce

$$B_C = 2(k_f + w) = 2(75 + 15) = 180 \text{ kHz}$$

Un esame degli andamenti riportati in Fig. 10.5 mostra che per  $\beta = 5$ , le  $\mathcal{J}_n(\beta) \neq 0$  sono le prime 8, e dunque la “vera” banda ha una estensione

$$B = 2 \cdot 8w = 16 \cdot 15 \cdot 10^3 = 240 \text{ kHz}$$

mostrando l’ approssimazione della regola di Carson. D’altra parte, risulta che  $2 \sum_{n=6}^8 |\mathcal{J}_n(5)|^2 = 2 [(.13)^2 + (.05)^2 + (.02)^2] = 2 \cdot 0.0198 = 0.0396$  e dunque l’errore commesso esclude circa il 4% della potenza totale.

Qualora il segnale sinusoidale venga sostituito da un messaggio limitato in banda con  $\pm W = \pm 15$  KHz, con potenza eguale a quella del seno e cioè  $P_m = \frac{1}{2}$ , la  $\Delta f$  non è più definita con esattezza, e conviene ricorrere alla definizione di

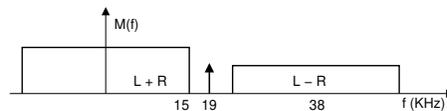
$$\beta' = \frac{\sigma_f}{W} = \frac{k_f \sqrt{P_m}}{W} = \beta \sqrt{P_m} = \beta \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot \beta$$

a cui corrisponde una banda *efficace*

$$B = 2W(\beta' + 1) = 2 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot (0.707 \cdot 5 + 1) = 136 \text{ kHz}$$

Nell’FM stereo, il segnale trasmesso deve essere compatibile con i ricevitori mono, ed allora il segnale modulante è un segnale multiplato FDM, e *composto* da tre *canali*:

- la somma di Left + Right (L+R) come segnale di banda base, che consente la compatibilità con gli apparati “mono”;
- il segnale L-R è centrato a frequenza di 38 KHz mediante modulazione AM-BLD;
- una portante posta a 19 KHz, ed a cui si concede il 10% di  $\mathcal{P}_M$ , mentre il restante 90% di  $\mathcal{P}_M$  è condiviso tra L+R e L-R. Il tutto è poi modulato FM.



La portante a 19 KHz può essere impiegata per sincronizzare il ricevitore, e generare la portante (a frequenza doppia, di 38 KHz) necessaria a demodulare il canale L-R. Se assente, indica la ricezione di un canale mono. A prima vista, sembrerebbe che la presenza del canale L-R possa aumentare la massima deviazione di frequenza. In realtà ciò non avviene, per due motivi:

- quando L+R è *grande*, significa che i due canali sono simili, e dunque L-R è piccolo, e viceversa;
- il canale L-R, trovandosi a frequenze più elevate, è caratterizzato da un indice di modulazione inferiore. Infatti, la massima deviazione di frequenza istantanea dipende dalle *ampiezze* di  $m(t)$ , e non dalla sua banda.

## 20.3 Collegamenti satellitari

Tutti i satelliti artificiali hanno, ovviamente, l'esigenza di mantenere un collegamento radio con il centro di controllo orbitale terrestre; in tutti i modi, un buon numero di satelliti è stato lanciato per svolgere un ruolo nell'ambito dei sistemi di comunicazione e telerilevamento, come ad esempio nei casi dei satelliti meteorologici, di radiolocalizzazione (il GPS, ma non solo), per ponti radio televisivi, di telefonia, di broadcast televisivo. Senza molto togliere alla generalità dell'esposizione, questa procede illustrando l'ultimo caso citato, detto DVB (*Digital Video Broadcast*), in cui il satellite semplicemente ritrasmette verso una estesa area geografica i segnali ricevuti da terra, come mostrato in figura 20.4, assieme all'*ipsogramma*<sup>16</sup> relativo.

### 20.3.1 Studio di produzione

Non volendo assolutamente entrare qui negli innumerevoli dettagli che andrebbero illustrati, limitiamoci a descrivere i passi necessari a generare il segnale inviato al satellite:

- si effettua la codifica digitale MPEG2 (§ 21.3.1.4) del segnale televisivo, ottenendo un flusso numerico chiamato PS (*Program Stream*);
- più PS sono pacchettizzati e multiplati (§ 21.3.2.1) in un nuovo flusso chiamato MPEG-TS (*Transport Stream*), assegnando loro un identificativo noto come PID (*Packet Identifier* o *Program ID*);
- alcuni PID sono riservati per indicare l'inserimento all'interno del TS di informazioni di controllo (*o tabelle*) note come PAT (*Program Association Table*), PMT (*Program Map Table*), CAT (*Conditional Access Table*), NIT (*Network Information Table*), etc;
- il TS è sottoposto ad un processo di *scrambling* basato su di un generatore binario pseudocasuale, in modo da renderne la densità spettrale più uniforme possibile;
- il risultato è sottoposto ad una codifica di canale FEC (vedi pag. 225) a tre stadi, in cui è prima applicato un codice di Reed-Solomon (§ 13.3.1.2), poi un *interleaver*, (§ 8.5.2.3) e quindi un codificatore *convoluzionale* (§ 13.3.2), rendendo il segnale particolarmente robusto nei confronti degli errori di trasmissione sia singoli che a burst;
- il nuovo flusso numerico è modulato QPSK (a due bit per simbolo) con codifica *di Gray*, sagomando i simboli con un filtro a coseno rialzato con  $\gamma = 0.35$  ripartito tra trasmettitore e ricevitore finale, ossia adottando un formatore di impulsi a *radice di coseno rialzato* (vedi § 8.2.2.3).

### 20.3.2 Uplink

Il *collegamento in salita* (UPLINK) è quello mediante il quale lo studio di produzione invia al satellite l'MPEG-TS che deve essere re-distribuito. Il segnale sopra descritto è quindi amplificato a potenza  $W_{dT}$ , parte della quale si perde nel cavo che collega l'antenna trasmittente di guadagno  $G_T^e$ . L'EIRP<sup>e</sup> (*Equivalent Isotropically Radiated Power*) rappresenta la potenza effettivamente irradiata<sup>17</sup>, che si riduce notevolmente nella trasmissione da terra a satellite. Considerando

<sup>16</sup>Dal greco *hypsos* che significa *altezza*. Mentre l'*ipsografia* è un diagramma che individua il rilievo altimetrico terrestre, il termine *ipsogramma* è a volte usato nelle telecomunicazioni per descrivere l'andamento del livello di potenza in un collegamento.

<sup>17</sup>Più precisamente, l'EIRP è la potenza che erogherebbe una antenna isotropa, per generare lo stesso campo elettrico prodotto dalla antenna direttiva nella direzione di massimo guadagno.

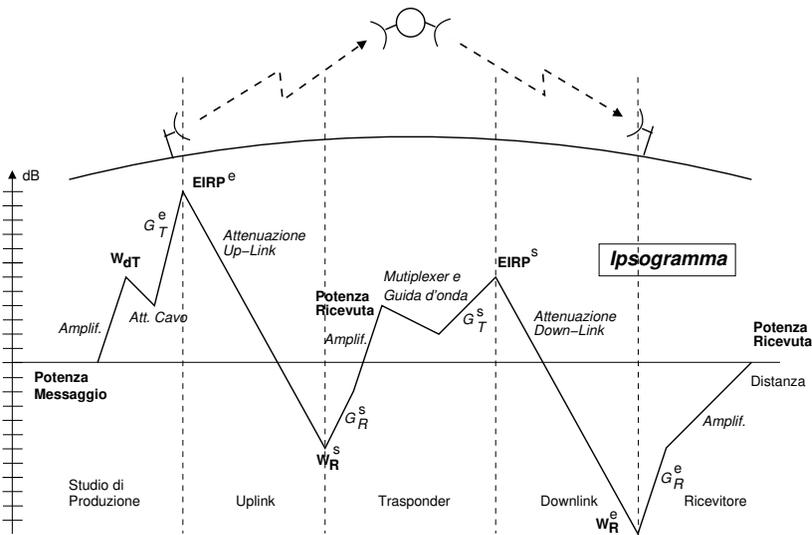


Figura 20.4: Andamento del livello di potenza in dB per un collegamento satellitare

una portante di 2 GHz e la quota di un satellite in orbita geostazionaria<sup>18</sup> (36.000 Km da terra), l'attenuazione di spazio libero dell'UP-LINK (eguale a quella del DOWN-LINK da satellite a terra) è di circa 190 dB.

### 20.3.3 Trasponder

Il segnale ricevuto, di potenza  $W_R^s$ , è captato dall'antenna ricevente del satellite di guadagno  $G_R^s$ , e l'amplificatore seguente eleva ulteriormente il livello del segnale ricevuto, che poi subisce alcune perdite nel collegamento con l'antenna *trasmittente* del satellite di guadagno  $G_T^s$ , determinando così il valore della  $EIRP^s$  all'uscita del *trasponder* satellitare. Questo termine descrive la circostanza che il satellite non si limita ad amplificare il segnale in transito, ma *traspone* anche la banda di frequenze occupata dalla trasmissione. Infatti, essendo la differenza tra  $EIRP^s$  e  $W_R^s$  molto elevata, se la frequenza portante utilizzata nell'uplink fosse uguale a quella del downlink il segnale trasmesso costituirebbe un rilevante termine di *interferenza* per il lato ricevente del satellite, nonostante l'elevata direttività delle antenne, dando così luogo ad un fenomeno di *diafonia*<sup>19</sup>. La Fig. 20.5 mostra come il segnale a banda larga (che trasporta molteplici canali) ricevuto da terra viene prima filtrato alla banda del segnale utile, quindi amplificato una prima volta, poi miscelato con un oscillatore locale<sup>20</sup>, ed infine amplificato una seconda volta<sup>21</sup>.

<sup>18</sup>Un satellite in orbita geostazionaria è visto da terra sempre nella stessa posizione (e ciò consente di puntare l'antenna in modo permanente) in quanto la sua orbita giace sul piano definito dall'equatore, ed il suo periodo di rivoluzione attorno all'asse terrestre coincide con quello di rotazione della terra (pari ad un giorno). Il moto orbitale è causa di una forza centrifuga, che è bilanciata da quella centripeta prodotta dall'attrazione terrestre. Dato che all'aumentare della distanza dalla terra, la prima aumenta (con orbite più grandi, deve aumentare la velocità tangenziale) e la seconda diminuisce, la quota di 36.000 Km costituisce un punto di equilibrio, al disotto del quale il satellite precipiterebbe al suolo, ed al disopra del quale si perderebbe nello spazio.

<sup>19</sup>Le considerazioni sulla diafonia si applicano altrettanto bene anche al caso di ripetitori terrestri.

<sup>20</sup>Come descritto al § 10.2.7, l'oscillatore locale deve avere una frequenza  $f_e$  tale che  $f_d = f_u - f_e$ , in modo che il segnale di downlink sia centrato ad una frequenza pari alla differenza tra quella di uplink e quella di eterodina.

<sup>21</sup>La suddivisione della amplificazione in due stadi a frequenza diversa previene fenomeni di reazione positiva.

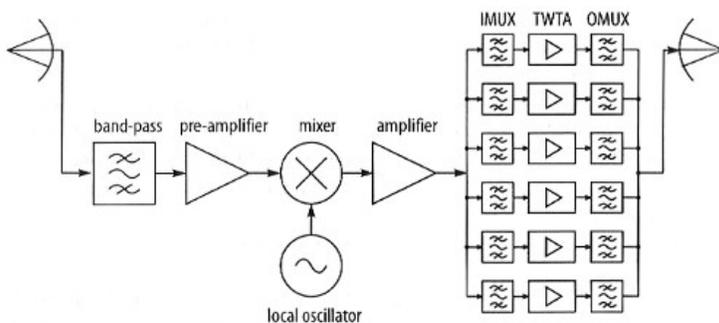
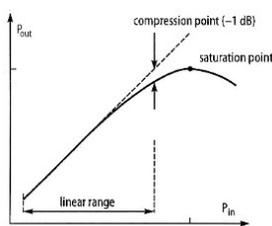


Figura 20.5: Elaborazione di bordo per un trasponder DVB satellitare

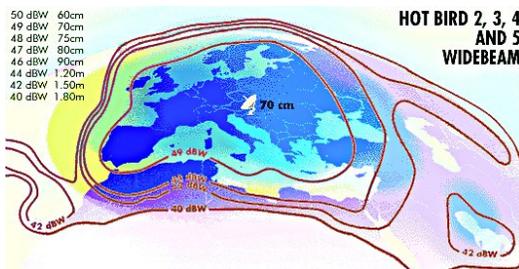
Quindi, i singoli canali FDM che compongono il segnale sono separati tra loro mediante il banco di filtri passa-banda indicati come IMUX (*input multiplexer*), e amplificati individualmente mediante dei TWTA<sup>22</sup> che, se spinti alla massima potenza, presentano una caratteristica ingresso-uscita non lineare (vedi § 7.3), mostrata nella figura a lato. Nel caso di trasmissioni modulate angolarmente, la distorsione in ampiezza è ben tollerata, e quindi si può mantenere limitato il *back-off* necessario; d'altra parte, le componenti frequenziali spurie prodotte dalla non linearità devono essere rimosse per non provocare disturbo alle altre comunicazioni, e questo è il compito del banco di filtri passa banda OMUX (*output multiplexer*) posti di seguito ai TWTA.



### 20.3.4 Footprint e Downlink

L'antenna trasmittente del satellite sagoma il proprio diagramma di radiazione in modo da concentrare la potenza trasmessa in una ben determinata area della terra, dando luogo alla cosiddetta *footprint* (impronta) raffigurata sotto, in cui le curve isomere individuano sia il livello di potenza ricevuto, che il diametro (e quindi il guadagno) necessario per l'antenna ricevente.

La tecnica che permette di distribuire la potenza emessa secondo una geometria diversa da una simmetria radiale prende il nome di *beamforming*, e si basa sull'utilizzo di più antenne trasmittenti, in modo da realizzare un *phased array*<sup>23</sup>. Ad ogni antenna dell'array perviene lo stesso segnale modulato, ma con una fase tale da creare uno schema di interferenza con le altre antenne dell'array, in modo che alla distanza di ricezione, si determini la distribuzione spaziale desiderata.



<sup>22</sup> *Travelling Wave Tube Amplifier*, ovvero tubi amplificatori ad onda progressiva: [http://it.wikipedia.org/wiki/Travelling\\_wave\\_tube](http://it.wikipedia.org/wiki/Travelling_wave_tube).

<sup>23</sup> [http://en.wikipedia.org/wiki/Phased\\_array](http://en.wikipedia.org/wiki/Phased_array)

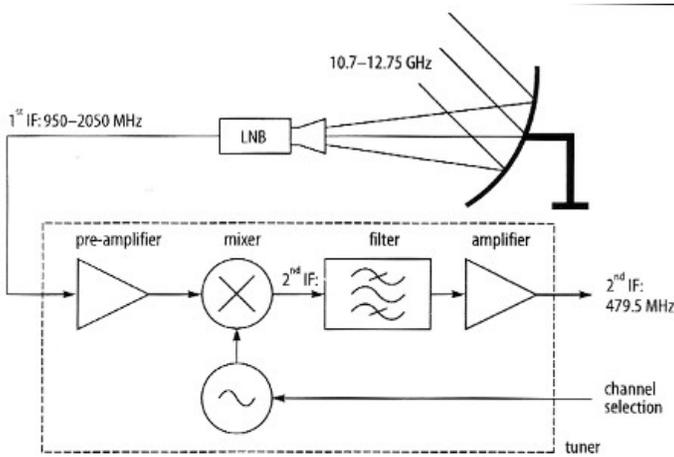


Figura 20.6: Ricevitore satellitare DVB

Dal lato del ricevitore terrestre arriva dunque un segnale di potenza  $W_R^e$ , che ha subito l'attenuazione del down-link; questo è quindi riportato ad un livello di potenza appropriato, sia grazie al guadagno di antenna, che per mezzo di uno stadio di amplificazione.

### 20.3.5 Temperatura di antenna

Come illustrato al § 16.3, una antenna ricevente è schematizzabile come un generatore controllato, ed al § 7.4.2.1 si mostra come la sua impedenza interna sia la fonte del rumore additivo gaussiano in ingresso al ricevitore, caratterizzato da una densità di potenza disponibile  $W_{dn}(f) = \frac{1}{2}kT_g$ , in cui  $T_g$  ora viene detta *temperatura di antenna*  $T_a$ , e assume un valore inferiore ai 290 °K, e precisamente compreso tra i 15 ed i 60 °K. La fonte diretta di rumore, in questo caso, è il *rumore galattico*, la cui temperatura si abbatta a 10 °K sopra i 2,5 GHz, mentre i *lobi laterali* del diagramma di radiazione captano il rumore legato alla temperatura terrestre<sup>24</sup>.

### 20.3.6 Ricevitore a terra

La figura 20.6 mostra l'architettura del ricevitore satellitare per la trasmissione televisiva DVB. La parabola, puntata nella direzione del satellite desiderato, riceve il segnale in una di due bande 10.7-11.7 GHz, oppure 11.7-12.75 GHz, ed un dispositivo LNB (*low noise block*) provvede ad un primo stadio di amplificazione a basso rumore, e ad una prima conversione di frequenza che centra il segnale tra 0.95 e 2.05 GHz, in modo da ridurre le perdite introdotte dal cavo coassiale<sup>25</sup> che collega l'antenna al ricevitore casalingo. Quindi, si ritrova uno schema simile a quello del trasponder, ovvero amplificatore-mixer-amplificatore, in cui questo secondo stadio eterodina centra il canale desiderato alla frequenza intermedia di 479.5 MHz.

<sup>24</sup>Per contro, nel caso in cui dietro al satellite verso cui è puntata l'antenna vi sia una stella luminosa, la  $T_a$  è più elevata.

<sup>25</sup>Come descritto nel paragrafo che discute dell'*effetto pelle* (pag. 467), l'attenuazione in dB del cavo aumenta con l'aumentare della radice della frequenza.

### 20.3.7 Polarizzazione

Chi ha provato a sintonizzare un ricevitore TV satellitare, si sarà accorto che tra le varie opzioni possibili, si può indicare anche il *tipo di polarizzazione*, orizzontale o verticale. Questo termine si riferisce all'orientamento (rispetto all'orizzonte) del piano su cui varia il vettore di campo elettrico relativo alla trasmissione radio. Mentre per le trasmissioni terrestri, a causa delle molteplici possibili riflessioni, questo è imprevedibile al ricevitore, nelle comunicazioni satellitari il tipo di polarizzazione adottata dal trasmettitore (il satellite) si mantiene fino a terra. Dato che un segnale polarizzato in un senso, risulta attenuato di decine di dB se ricevuto da una antenna predisposta per la polarizzazione nell'altro senso, nella stessa banda di frequenze possono essere effettuate due trasmissioni contemporanee.

## Codifica di sorgente multimediale

**A**FFRONTIAMO gli aspetti applicativi della teoria esposta al capitolo 13 e riguardante la codifica di sorgente continua, tipicamente applicata a *segnali audio-visivi*, e che dunque si particolarizza in base alle loro peculiari caratteristiche, ed alle caratteristiche degli organi sensoriali umani che ne sono i destinatari naturali. Per quanto riguarda *l'audio*, sono illustrate le tecniche orientate a riprodurre il segnale nel tempo come ad es. nel PCM, quindi quelle più orientate al segnale vocale e basate su di un modello del sistema fonatorio di produzione, ed infine le tecniche basate su di un modello del sistema uditivo come per l'MP3. Si passa quindi alla codifica di *immagini* fisse, alle quali possono applicarsi le tecniche nate per la codifica di sorgente discreta come ad es. GIF, oppure altre più ispirate alla fisiologia del sistema visivo come JPEG. La trattazione della codifica *video* si articola attraverso l'evoluzione storica dei vari standard che se ne sono occupati, arricchendo le tecniche di codifica di immagine con la rappresentazione del movimento e di come questo possa essere predetto, fino a generare il multiplex numerico con i programmi televisivi che pervadono la nostra esistenza.

### 21.1 Codifica audio

Al § 4.2.1.1 abbiamo svolto una valutazione approssimata della distorsione introdotta dal processo di quantizzazione di segnale audio, ricavando che l'utilizzo di  $M$  bit/campione si traduce in  $SNR_q(M)|_{dB} \simeq 6 \cdot M$  dB. Quindi, al § 4.2.2 si è mostrato come adottando una caratteristica di quantizzazione logaritmica anziché lineare, ci si può adattare meglio alla effettiva densità di probabilità del segnale vocale, rendendo inoltre  $SNR_q$  relativamente poco sensibile alla sua effettiva dinamica, dando luogo alla cosiddetta codifica PCM con *legge A* o *legge  $\mu$* , standardizzata nel 1988 da ITU-T come G.711,<sup>1</sup>. Mentre questa costituisce un formato universale di scambio permettendo la compatibilità tra dispositivi e tecnologie, nel seguito sono state sviluppate diverse tecniche alternative<sup>2</sup>, capaci di offrire la stessa (o migliore) qualità di ascolto con velocità di trasmissione contenute, non solo per segnali vocali in banda telefonica, ma anche per segnali a banda larga, musicali, e multicanale, di cui tentiamo ora una sommaria rassegna.

<sup>1</sup><http://www.itu.int/rec/T-REC-G.711/e>

<sup>2</sup>Una raccolta di riferimenti a risorse relative a codec audio orientati alle applicazioni multimediali può essere trovata presso <http://labtcl.ing.uniroma1.it/codecs>

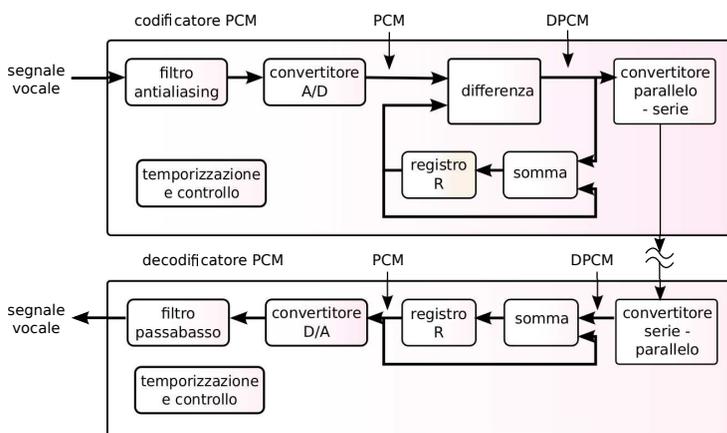


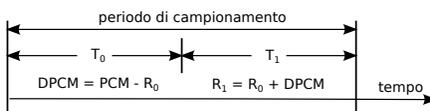
Figura 21.1: Codec audio Differential PCM o DPCM

### 21.1.1 Codifica di forma d'onda

Questa classe di codificatori opera esclusivamente nel dominio del tempo, agendo campione per campione, e ottiene una qualità comparabile o superiore a quella del PCM sfruttando le caratteristiche di memoria presenti nel segnale, e/o adattando alcuni parametri di funzionamento alle caratteristiche tempo varianti del segnale.

#### 21.1.1.1 DPCM o PCM Differenziale

La prima variazione rispetto al PCM è stata quella di applicare il principio della codifica predittiva (pag. 345), semplicemente adottando il precedente campione di ingresso come *predizione* di quello successivo. Il corrispondente schema di elaborazione è mostrato in fig. 21.1, ed il suo funzionamento è suddiviso in due fasi come rappresentato a lato: nella prima ( $T_0$ ) il codificatore sottrae il campione precedente (all'inizio nullo) all'attuale, e nella seconda ( $T_1$ ) questa differenza è risommata al valore di differenza precedente (all'inizio nullo) in modo da ri-calcolare il valore attuale, e salvarlo nel registro di memoria. Il segnale differenza è caratterizzato da valori di ampiezza ridotti rispetto all'originale, e può essere codificato con 7 bit/campione, producendo ora una velocità per la qualità telefonica di 56 kbps. Il decodificatore si limita quindi a sommare alla differenza ricevuta il valore ricostruito del campione precedente, ed effettuare l'operazione di restituzione analogica. Osserviamo che il codificatore calcola il valore precedente mediante un circuito identico a quello presente al decodificatore, e per questo l'operazione è perfettamente invertibile.



$R_0$  = contenuto corrente di R e  $R_1$  = contenuto aggiornato

#### 21.1.1.2 ADPCM o DPCM Adattivo

Questo metodo differisce dal precedente per due aspetti: da un lato il processo di predizione tiene conto di più di un campione passato e non di uno solo come nel DPCM, come descritto

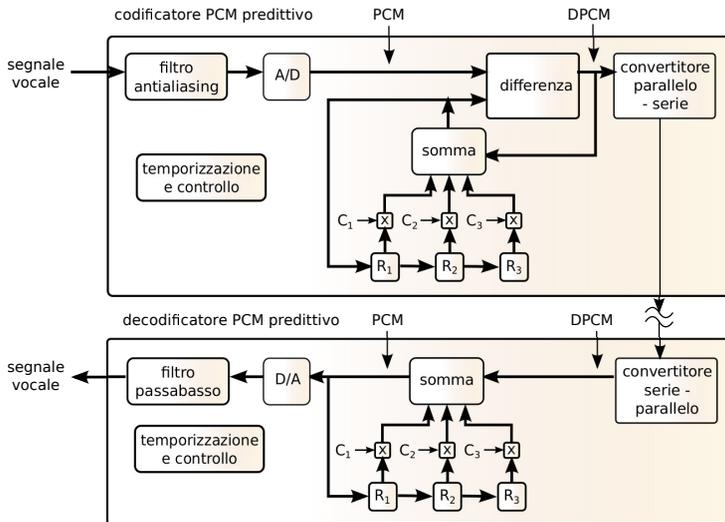


Figura 21.2: Codec DPCM con predittore a tre coefficienti costanti

in fig. 21.2 in cui è mostrato un predittore del terzo ordine che in pratica consiste in un filtro trasversale i cui coefficienti sono fissati in base alle caratteristiche statistiche medie del segnale vocale. Il secondo aspetto è che ora il quantizzatore *modifica nel tempo* la propria dinamica di azione (da cui il termine *adattativo*, o *adattivo*) in base ad una stima della dinamica del segnale.

Nel lato sinistro della fig. 21.3 è mostrata una caratteristica di quantizzazione uniforme operante su di una dinamica di ingresso  $\phi_x \hat{\sigma}_x$ , con  $\phi_x > 1$  scelto in modo da rendere trascurabile la probabilità che un valore di ingresso troppo elevato determini la saturazione del quantizzatore. Utilizzando una stima a breve termine della varianza  $\hat{\sigma}_x^2$  calcolata sugli ultimi campioni

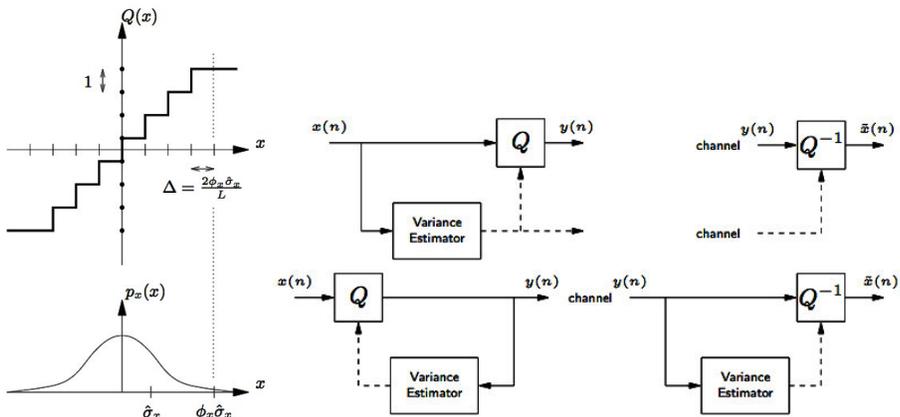


Figura 21.3: Dinamica di quantizzazione e sua stima diretta o *backward* - tratto da <http://cnx.org/content/m32074/latest/>

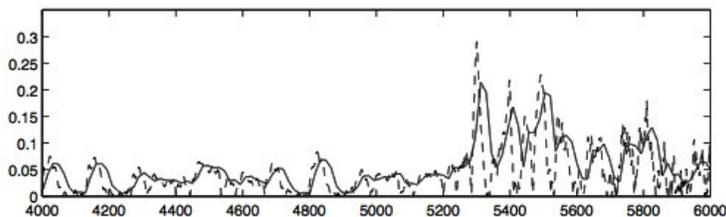


Figura 21.4: Stima ricursiva backward della varianza, confrontata con i valori di  $y^2(n)$ , per  $\alpha = 0.9$

di segnale (a media nulla), ossia ad es. calcolando  $\hat{\sigma}_x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^2(n-i)$ , si possono rendere gli intervalli di decisione  $\Delta$  piccoli nelle fasi di segnale piccolo, in modo da mantenere l'SNR costante anche per segnali con ampiezze molto variabili. Inoltre, è possibile *omettere* la trasmissione della stima di varianza se quest'ultima è calcolata in modalità *backward*, ossia a partire dai valori  $y(n) = Q[x(n)]$ , dato che la stessa operazione è eseguibile in modo indipendente anche dal lato del decodificatore. La stima della varianza è ulteriormente semplificata se realizzata mediante una formula ricursiva, ossia

$$\hat{\sigma}_x^2(n) = \alpha \hat{\sigma}_x^2(n-1) + (1-\alpha) y^2(n)$$

il cui risultato è mostrato in fig. 21.4, dove la linea tratteggiata rappresenta il valore istantaneo di  $y^2(n)$ , mentre quella continua mostra i valori di  $\hat{\sigma}_x^2(n)$  ottenuti in modo ricursivo. Infine, la fig. 21.5 mostra i due estremi del codec ADPCM, che rimangono sincronizzati anche nel caso di saturazione del quantizzatore adattivo.

Il miglioramento della qualità ottenibile ha determinato la possibilità di ridurre il numero di bit (e di conseguenza di livelli) del quantizzatore a 5, 4, 3, 2 bit/campione, a cui corrispondono rispettivamente velocità di codifica di 40, 32, 24, 16 kbps. Questi sono i valori a cui si riferisce lo standard ITU-T G.721, successivamente confluito nel G.726.

### 21.1.1.3 Codifica per sottobande

Anche la raccomandazione G.722 è basata sulla codifica ADPCM, ma applicata ad un segnale con una banda audio più larga, riproducendo correttamente frequenze fino a 7 KHz. Ciò avviene

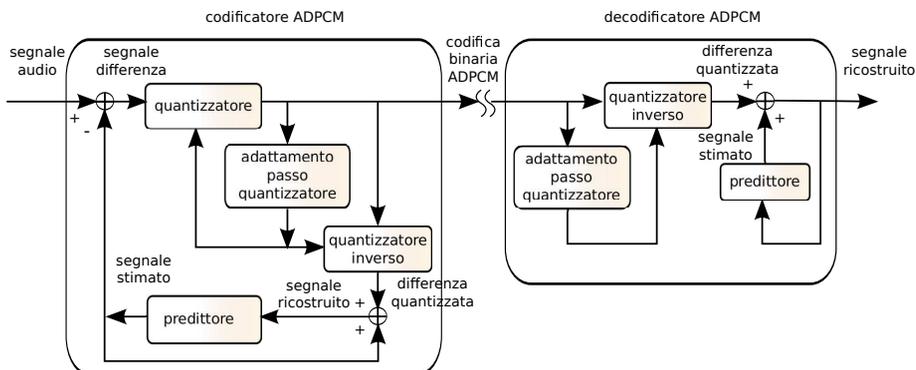


Figura 21.5: Architettura di un codec ADPCM

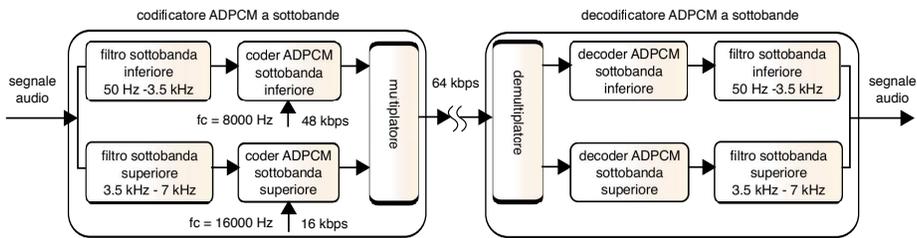


Figura 21.6: Architettura di un codec ADPCM a sottobande

dopo aver suddiviso le componenti frequenziali del segnale in due sottobande, come mostrato in fig. 21.6, mediante una coppia di filtri passa-basso e passa-alto con comune frequenza di taglio di 3.5 KHz. Il canale relativo alla semi banda superiore è quindi campionato a frequenza di 16 kHz, mentre l'altro è praticamente equivalente al segnale in banda telefonica preso in esame fino ad ora. Per entrambi i canali è applicata la codifica ADPCM, ma le velocità dei due sono impostate in modo differente, dando più importanza alla componente di bassa frequenza, percettivamente più rilevante: ad esempio, si può scegliere di assegnare 16 kbps alle alte frequenze e 48 alle basse, ottenendo un totale di 64 kbps per una qualità risultante migliore del G.711, in quanto ora si opera su di un segnale a larga banda, con risultati idonei ad applicazioni come la videoconferenza.

Lo stesso schema di codifica per sottobande più ADPCM è proposto anche dallo standard G.726, ma applicato ad un segnale a qualità telefonica, offrendo le velocità di 40, 32, 24 e 16 kbps.

## 21.1.2 Codifica basata su modello

I metodi fin qui discussi non tengono particolarmente conto della natura del segnale da codificare. Restringendo viceversa il campo al solo caso di segnale vocale, le conoscenze relative alla sua particolare modalità di produzione possono essere usate per ridurre le informazioni da trasmettere, costituite ora dai parametri che caratterizzano un suo modello di generazione. Essendo questo il dominio delle scienze linguistiche e fonetiche, svolgiamo una piccola digressione in tal senso.

### 21.1.2.1 Produzione del segnale vocale

L'apparato fonatorio viene idealizzato per mezzo del cosiddetto *modello a tubi* (vedi fig. 21.7), in cui sia il *tratto vocale* (compreso tra le corde vocali e le labbra) che il *tratto nasale* (dal velo alle narici) sono pensati come una concatenazione di tubi di diversa sezione. Nei suoni vocalici la muscolatura della *laringe* determina la chiusura periodica delle *corde vocali*, interrompendo il flusso d'aria che le attraversa, e dando origine ad un *segnale di eccitazione* anch'esso periodico detto *onda glottale*, la cui frequenza è detta *pitch*<sup>3</sup>; la differenza di area delle diverse sezioni del tratto vocale provoca un *disadattamento di impedenza acustica*<sup>4</sup> e la conseguente formazione di onde riflesse (vedi fig. 21.8), che per lunghezze d'onda in relazione intera con la lunghezza del

<sup>3</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Pitch\\_accent\\_\(intonation\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Pitch_accent_(intonation))

<sup>4</sup>Si applica in pratica la stessa teoria valida per le linee elettriche, in cui al posto di tensione e corrente, ora si considerano rispettivamente pressione  $p$  e velocità  $u$

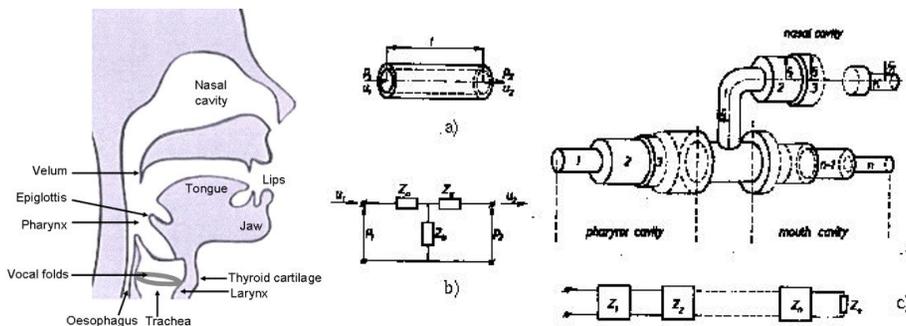


Figura 21.7: Rappresentazione schematica del tratto vocale e relativo modello a tubi

tratto vocale, determinano fenomeni di *onde stazionarie*, ovvero di *risonanze*<sup>5</sup>, le cui frequenze sono indicate in fonetica come *formanti*. La sussistenza di tali risonanze produce un *effetto filtrante* che modifica lo spettro dell'onda glottale, producendo così il *timbro* corrispondente ai diversi suoni della lingua<sup>6</sup>. Il tratto vocale termina quindi con l'apertura delle labbra, che nel modello a tubi corrisponde ad una *impedenza di radiazione* che produce un effetto di derivata, e dunque un' *enfasi* delle alte frequenze per lo spettro complessivo del parlato. Infine, il modello si assume valido anche per i suoni *fricativi*, prodotti anziché mediante le corde vocali, mediante una occlusione che causa una turbolenza nel flusso d'aria.

**Caratteristiche tempo-frequenza del segnale vocale** La parte sinistra di fig. 21.9 mostra

<sup>5</sup>Si tratta di un fenomeno in qualche modo simile a quello che si verifica soffiando in una bottiglia, e producendo un suono che dipende dalla dimensione della stessa.

<sup>6</sup>I diversi suoni vocalici e/o consonantici (detti *fonemi*) sono prodotti mediante diverse posture articolatorie (la posizione di lingua, mascella e labbra), ovvero diversi profili d'area del tratto vocale, nonché l'attivazione o meno del tratto nasale. Pertanto ai diversi fonemi corrispondono differenti frequenze formanti, e dunque una diversa risposta in frequenza.

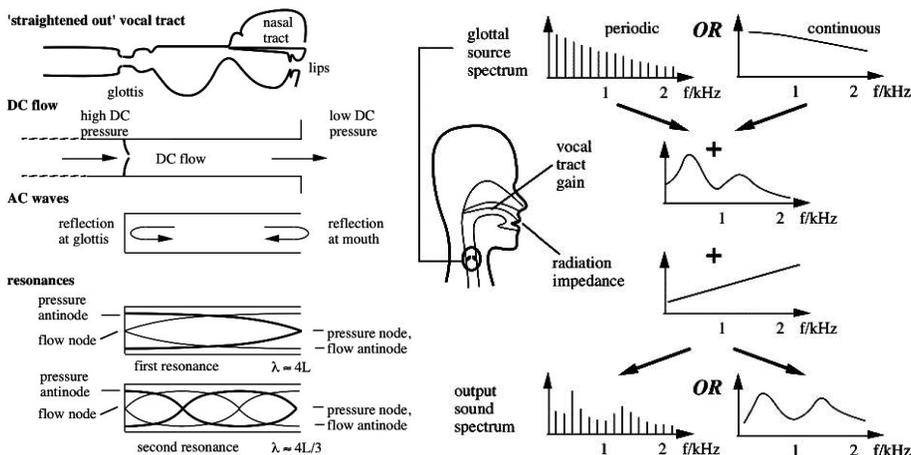


Figura 21.8: Natura delle risonanze del tratto vocale e loro effetto filtrante sull'onda glottale

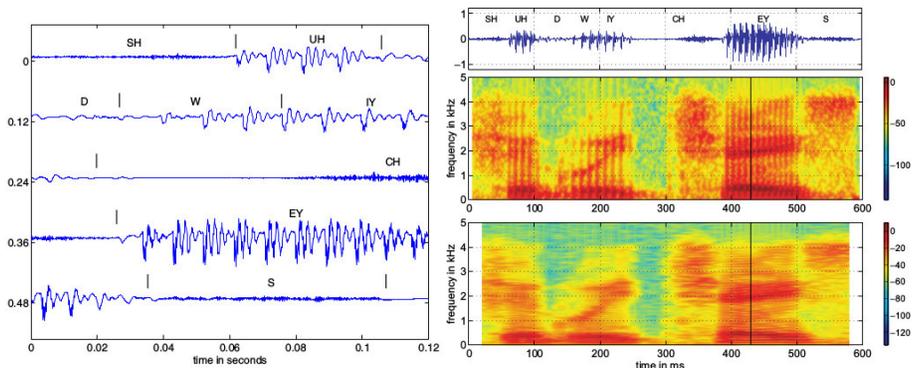


Figura 21.9: Forma d'onda e spettrogramma per la frase *should we chase*

la forma d'onda relativa alla frase inglese “should we chase” (*dovremmo inseguire?*) assieme alla relativa trascrizione fonetica<sup>7</sup>, mettendone in luce il carattere quasi periodico in corrispondenza delle vocali e quello tipo rumore per le consonanti, nonché la diversa durata dei vari suoni, l'assenza di confini temporali precisi tra gli stessi, e la diminuzione del periodo di pitch a fine frase, corrispondente all'intonazione crescente tipica di una frase interrogativa. In particolare, notiamo come per i suoni vocalici i singoli periodi di pitch siano caratterizzati da una brusca discontinuità prodotta dall'onda glottale, seguita da oscillazioni smorzate legate alle risonanze del tratto vocale.

Il segnale viene quindi campionato a 10 KHz e suddiviso in *finestre di analisi*, per le quali vengono calcolate delle DFT, la cui densità di energia in dB è riprodotta *in verticale* mediante una scala cromatica come mostrato nei *sonogrammi*<sup>8</sup> presenti al lato destro di fig. 21.9, che permettono di valutarne la variabilità temporale delle caratteristiche spettrali. Il differente aspetto dei due diagrammi è dovuto alla diversa lunghezza di finestra, pari rispettivamente a 10 e 40 msec per il grafico superiore ed inferiore<sup>9</sup>. In entrambe le rappresentazioni sono ben evidenti le *traiettorie delle formanti*, che evolvono in modo *continuo*, coerentemente con la velocità di articolazione del parlante.

### 21.1.2.2 Codifica a predizione lineare - LPC

Il modello di produzione e le caratteristiche illustrate portano a formulare un processo di codifica basato sulla suddivisione del segnale vocale in intervalli (o finestre di analisi) di estensione tra i 10 ed i 30 msec, durante i quali il segnale può essere considerato praticamente stazionario<sup>10</sup>, e su tali finestre condurre una *analisi* (o stima) dei parametri del modello, che sono

- il tipo di eccitazione (periodica o caotica), la sua frequenza fondamentale (o *pitch*) se periodica, e la sua intensità;
- i parametri che caratterizzano l'effetto filtrante del tratto vocale

<sup>7</sup>I simboli usati sono noti come *alphabet*, vedi <http://en.wikipedia.org/wiki/Arpabet>, e la pronuncia dovrebbe essere qualcosa del tipo *sciuduiceis*.

<sup>8</sup>Tratti da <https://books.google.it/books?id=Z60tr8Hj1WsC>

<sup>9</sup>Una finestra di 10 msec ha durata comparabile con il periodo di pitch, e ciò produce l'effetto a striature *verticali* del primo diagramma, meno pronunciato verso la fine, dove il pitch è più elevato. Una finestra di 40 msec si estende su più periodi di pitch, e determina una migliore risoluzione in frequenza, cosicché nel diagramma inferiore si possono notare delle striature *orizzontali* che corrispondono alle *armoniche* della frequenza di pitch.

<sup>10</sup>La durata di una sillaba può estendersi da 10-15 msec per le vocali *ridotte*, fino a più di 100 msec per quelle accentate.

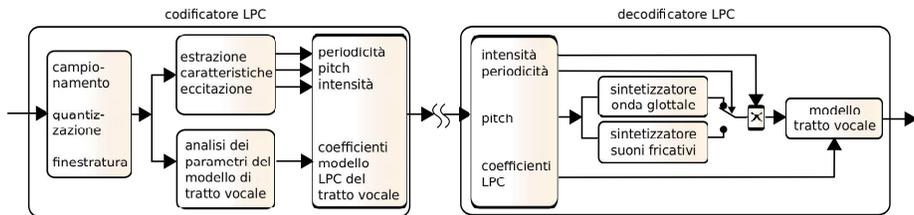


Figura 21.10: Schema di codificatore e decodificatore LPC

e quindi trasmettere questi valori, in modo che in ricezione sia possibile riprodurre un segnale simile all'originale mediante un decodificatore del tipo illustrato in fig. 21.10. In particolare, il modello *a tubi* (e quindi basato sulle risonanze) del tratto vocale si presta a considerare un filtro di sintesi di tipo numerico e ricorsivo, ossia che calcola il valore dei campioni di uscita  $y_n$  a partire da una combinazione lineare di  $p$  campioni passati  $\hat{y}_n = \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i}$ , piú un errore di predizione  $e_n$  che rappresenta il processo di eccitazione, ovvero

$$y_n = \hat{y}_n + e_n = \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} + e_n \tag{21.1}$$

Per ogni finestra di analisi, i coefficienti  $a_i$  (o coefficienti LPC del predittore di ordine  $p$ ) si ottengono come quelli che rendono minimo il valore atteso dell'errore quadratico  $E \{e_n^2\} = E \left\{ \left( y_n - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} \right)^2 \right\}$  (ovvero, l'energia dell'errore), e sono individuati eguagliando a zero l'espressione delle sue derivate parziali rispetto ai coefficienti  $a_j$ : scriviamo dunque

$$\frac{\partial}{\partial a_j} E \left\{ \left( y_n - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} \right)^2 \right\} = 2E \left\{ \left( y_n - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} \right) y_{n-j} \right\} = 0$$

da cui si ottiene

$$E \{y_n y_{n-j}\} = \sum_{i=1}^p a_i E \{y_{n-i} y_{n-j}\} \tag{21.2}$$

Il valore atteso  $E \{y_n y_{n-j}\}$  è quindi *stimato*<sup>11</sup> a partire dai campioni temporali presenti nella finestra di analisi, ovvero

$$\begin{aligned} E \{y_{n-i} y_{n-j}\} &\doteq R_{yy}(|i-j|) \quad \text{e ponendo } k = |i-j| \\ &= R_{yy}(k) = \sum_{n=1}^{N-k} y_n y_{n+k} \end{aligned} \tag{21.3}$$

dove l'estremo superiore della sommatoria varia in modo da includere solo i campioni effettivamente presenti nella finestra di analisi<sup>12</sup>. La (21.3) permette di riscrivere (21.2) come

$$R_{yy}(j) = \sum_{i=1}^p a_i R_{yy}(|i-j|)$$

<sup>11</sup>Sottintendendo una ipotesi di stazionarietà ed ergodicità non vera, ma molto comoda per arrivare ad un risultato.

<sup>12</sup>La (21.3) è effettivamente una stima della autocorrelazione del segnale a durata limitata che ricade nella finestra di segnale, mentre l'inclusione nella sommatoria di un numero di termini pari al numero di campioni disponibili porta ad un diverso tipo di risultato, detto *metodo della covarianza*, ed un diverso modo di risolvere il sistema (21.4).

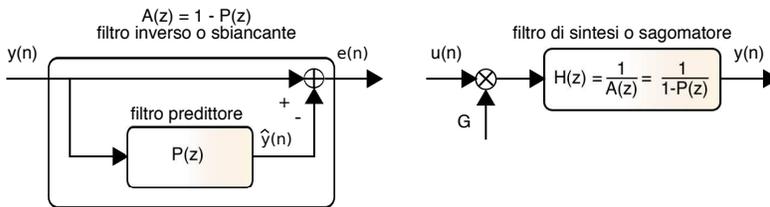


Figura 21.11: Filtro predittore, filtro inverso associato, e filtro di sintesi LPC

che valutata per  $j = 1, \dots, p$  individua un sistema di  $p$  equazioni<sup>13</sup> in  $p$  incognite

$$\begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ \vdots \\ R(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(p-1) \\ R(1) & R(0) & R(1) & R(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(p-1) & R(p-2) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} \quad (21.4)$$

che può essere risolto nei termini dei coefficienti  $a_i$  mediante metodi particolarmente efficienti<sup>14</sup>, ed i coefficienti utilizzati dal decodificatore per applicare la (21.1).

Il filtro trasversale che esegue il calcolo  $\hat{y}_n = \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i}$  è indicato come *predittore*, ed associato ad un polinomio<sup>15</sup>  $P(z) = \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}$ ; viceversa il filtro FIR che valuta l'errore di predizione (o *residuo*)  $e_n = y_n - \sum_{i=1}^p a_i y_{n-i}$  è indicato come *filtro inverso* o *sbiancante*, viene associato al polinomio  $A(z) = 1 - P(z)$ , ed è mostrato nel lato sinistro della fig. 21.11. Indicando ora con  $G \cdot u_n$  una *codifica* del residuo  $e_n$ , il segnale di partenza può essere (quasi) ritratto come mostrato nella parte destra della fig. 21.11, ossia facendo passare  $u_n$  attraverso il filtro IIR  $H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1-P(z)}$ .

Dato che, in base a considerazioni che non svolgiamo,  $e_n$  risulta possedere una densità spettrale *bianca*,  $|H(z)|^2$  (calcolato per  $z = e^{i\omega}$ ) rappresenta una vera e propria *stima spettrale* del segnale di partenza, come mostrato in fig. 21.12 per diversi valori di  $p$ , verificando che per suoni vocalici si ottengono risultati accettabili già per valori di  $p$  tra 8 e 14, mentre per le fricative l'ordine può essere ancora inferiore.

**Stima del periodo di pitch** Resta ora da illustrare il modo di decidere se la finestra di analisi contenga un suono sordo o sonoro, e nel secondo caso, il suo periodo. Osserviamo che *in media* la frequenza di pitch risulta pari a circa 120 e 210 Hz nel caso rispettivamente di voci maschili e femminili, con una estensione che varia approssimativamente da metà al doppio del pitch medio<sup>16</sup>. La stima del periodo di pitch può essere realizzata a partire dalla funzione di autocorrelazione a breve termine (21.3), mostrata nella colonna di destra della figura seguente, a fianco delle finestre di segnale su cui è stata calcolata<sup>17</sup>, per un suono vocalico (sopra) e fricativo

<sup>13</sup>dette di *Yule-Walker*.

<sup>14</sup>In base alle assunzioni adottate,  $R_{yy}(j)$  risulta una funzione pari dell'indice  $j$ , e la corrispondente matrice dei coefficienti viene detta di *Toeplitz*, consentendone l'inversione mediante il metodo di *Levinson-Durbin* (vedi [http://en.wikipedia.org/wiki/Levinson\\_recursion](http://en.wikipedia.org/wiki/Levinson_recursion)), che presenta una complessità  $O(n^2)$  anziché  $O(n^3)$ , come sarebbe necessario per invertire la matrice dei coefficienti.

<sup>15</sup>Una breve analisi della relazione tra DFT e trasformata *zeta* è svolta al § 4.4.1.

<sup>16</sup>Il pitch varia durante la pronuncia di una frase in accordo alla sua semantica, alla lingua, ed all'enfasi emotiva impressa dal parlatore. Da un punto di vista musicale, la dinamica dei valori (da metà al doppio) si estende quindi su di un intervallo di due ottave. L'intera gamma dei registri dell'opera si differenzia per 22 semitoni, dal Mi2 del basso al Do4 del soprano, ovvero un rapporto di frequenze pari a 3,6.

<sup>17</sup>In realtà prima del calcolo della autocorrelazione, il segmento di segnale è stato moltiplicato per una finestra di Hamming, che provoca lo smussamento visibile ai bordi.

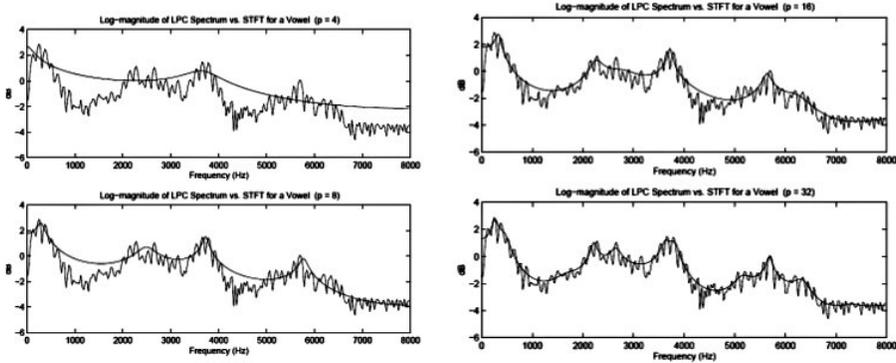
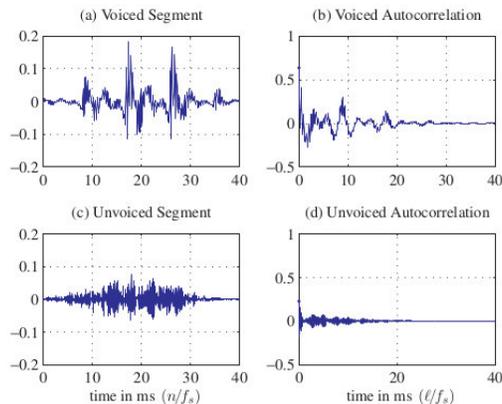


Figura 21.12: Approssimazione spettrale LPC per diversi ordini di predizione

(sotto). Come evidente, nel caso del suono vocale l'autocorrelazione presenta un primo picco a 9 msec ed un secondo a 18 msec, corrispondenti al periodo di pitch ed al suo doppio; viceversa nel caso del suono simile al rumore, non sono visibili picchi, come da aspettarsi nel caso di una segnale incorrelato. Pertanto, l'autocorrelazione può essere usata per indicare la presenza o meno di un suono vocale, e nel caso affermativo, stimare il suo pitch.

Nella pratica per i suoni sordi si ottengono buoni risultati di sintesi usando come eccitazione un vero e proprio rumore bianco; d'altra parte, per i suoni sonori l'uso di forme d'onda impulsive con periodo pari al pitch stimato, sebbene capaci di produrre un bit rate riducibile fino a 2.4 kbps, non fornisce risultati particolarmente utilizzabili, producendo un voce piuttosto robotica. Per questo motivo, si sono sviluppate le tecniche seguenti.



### 21.1.2.3 Predizione lineare ad eccitazione residuale - RELP

Per ovviare alla sovra-semplificazione dello schema di sintesi riportato in fig. 21.10, dopo aver svolto l'analisi spettrale LPC, il residuo di predizione relativo alla finestra di analisi viene effettivamente calcolato, e applicata una tecnica di codifica di forma d'onda<sup>18</sup>: questo modo di operare è indicato come codifica RELP (*Residual Excited LP*).

**Analysis by synthesis - ABS** Anziché *calcolare* il residuo di predizione, codificarlo, e trasmetterlo in tale forma, la tecnica di *analisi via sintesi* adotta una tecnica *ad anello chiuso*, cercando di trovare quale segnale di eccitazione<sup>19</sup> fornire al filtro di sintesi in modo che il ri-

<sup>18</sup>In questo modo si evita anche di dover operare una esplicita decisione *sonoro/sordo*, visto che in realtà le due fonti di eccitazione possono essere presenti contemporaneamente, come per i cosiddetti suoni *affricati*.

<sup>19</sup>Generato per tentativi, oppure da scegliere in un dizionario di sequenze di eccitazione già codificate.



Figura 21.13: Schema di codifica vocale ABS - Analysis by Synthesis

sultato sia quanto più possibile simile al segnale originale (vedi fig. 21.13); quindi, i parametri del filtro di sintesi e della eccitazione sono trasmessi al decoder. La funzione di minimizzazione opera dunque una vera e propria *ricerca tra i possibili segnali* di eccitazione.

**Filtraggio percettivo** Sempre in fig. 21.13 si mostra come il processo di minimizzazione prende in considerazione un segnale di errore ottenuto filtrando l'errore effettivo mediante un filtro di *pesatura percettiva*, il cui andamento frequenziale è sostanzialmente *reciproco* rispetto a quello stimato del segnale<sup>20</sup> (vedi fig. 21.14), in modo da attenuare la rilevanza dell'errore di predizione nelle regioni dove c'è più segnale<sup>21</sup> ed esaltarla invece nelle regioni con meno segnale, sfruttando così il fenomeno percettivo noto come *mascheramento uditivo* (vedi pag. 616). Anche se per questa via l'energia totale del rumore è maggiore, l'effetto soggettivo è migliore.

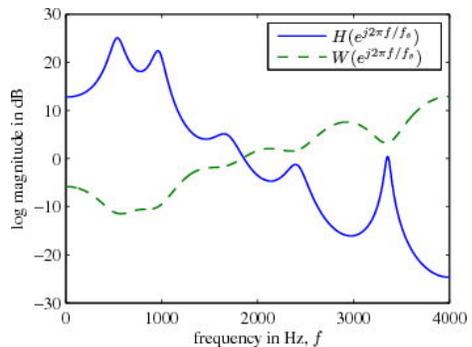


Figura 21.14: Spettro LPC vocale e relativo filtro di pesatura percettiva dell'errore di predizione

**Multi pulse linear prediction - MPLP** Lo schema operativo suggerito dalla tecnica ABS è stato inizialmente realizzato cercando di *costruire* la sequenza di eccitazione ottima (ossia in grado di minimizzare l'errore pesato percettivamente) come una sequenza di pochi impulsi sparsi, decidendone uno alla volta: pertanto viene inizialmente trovata l'*ampiezza* e la *posizione ottime* per un primo impulso, poi per un secondo (con il primo fisso), e così via, fino al numero di impulsi desiderati, tipicamente 4-5 ogni 5 msec, ottenuti suddividendo una finestra di 20 msec in quattro sotto-trame, ognuna con 40 campioni, se  $f_c = 8000$  Hz.

**Regular pulse excitation with long-term prediction - RPE-LTP o GSM 6.10** Il metodo MPLP presentava una complessità proibitiva, ma ha dato luogo alla versione semplificata RPE-LTP usata inizialmente nella telefonia GSM per fornire una velocità di 13 kbps. In questo caso dopo aver determinato la posizione del primo impulso nella sottofinestra, ne sono piazzati altri

<sup>20</sup>Il filtro di pesatura percettiva si ottiene a partire dagli stessi coefficienti di predizione  $a_i$  che descrivono l'andamento spettrale della finestra di segnale, definendo la sua trasformata zeta come  $W(z) = \frac{A(z/\alpha_1)}{A(z/\alpha_2)} = \frac{H(z/\alpha_2)}{H(z/\alpha_1)}$  in cui, se  $\alpha_{1,2}$  sono numeri reali, i poli di  $W(z)$  si trovano alle stesse frequenze di quelli di  $H(z)$  ma con raggio  $\alpha_2$  volte maggiore, così come gli zeri di  $W(z)$  hanno modulo  $\alpha_1$  volte maggiore. Scegliendo  $0 < \alpha_{1,2} < 1$  e  $\alpha_1 > \alpha_2$  per la  $W(z)$  si ottiene l'effetto desiderato, e mostrato in fig. 21.14

<sup>21</sup>La procedura di minimizzazione determina una eccitazione tale da rendere bianco il residuo al suo ingresso; dato però che questo ha subito il filtraggio da parte di  $W(z)$ , significa che le frequenze da questo depresse sono in realtà enfatizzate per il segnale di errore reale.

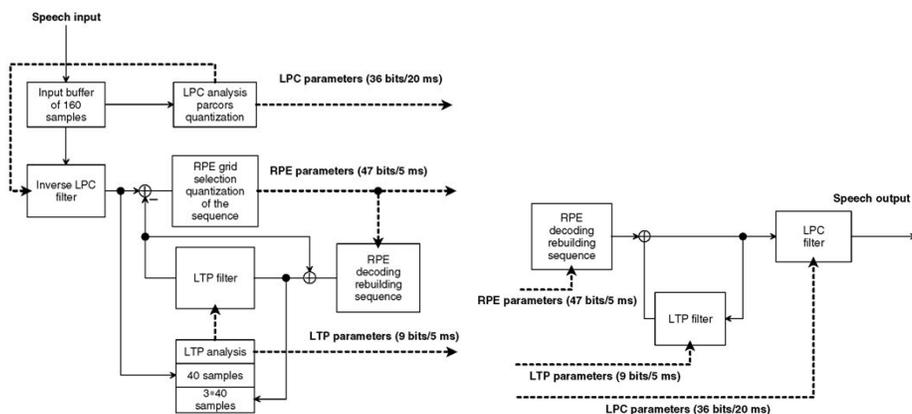


Figura 21.15: Codifica e decodifica GSM 6.10 *full rate* o RPE-LTP

9 ad intervalli regolari (un campione sì e tre no), e quindi l'ottimizzazione riguarda solo i valori delle ampiezze.

Rispetto allo schema di fig. 21.13 viene aggiunto un *predittore a lungo termine* o LTP, utilizzato per rimuovere dal segnale di eccitazione l'eventuale periodicità caratteristica dei suoni vocalici, e stimato a partire da sotto-finestre consecutive (vedi fig. 21.15). Il filtro LTP in essenza consiste in un semplice ritardo pari al periodo di pitch (e dunque  $\gg p$ ), ed il predittore LTP relativo (vedi lo schema di decodifica) *ripropone* in uscita una copia ritardata ed attenuata dell'uscita stessa. Il codificatore GSM pertanto determina ritardo e attenuazione dell'LTP in base all'analisi del residuo di predizione LPC<sup>22</sup>, e lo usa per reintrodurre la componente periodica nella sequenza RPE di cui si sta valutando l'idoneità. Una volta che al residuo LPC viene sottratta la componente predicibile per tramite del LTP, ciò che rimane risulta effettivamente assimilabile ad un rumore, ed è indicato anche come *processo di innovazione*.

#### 21.1.2.4 Quantizzazione vettoriale

Dato che la codifica del segnale di eccitazione è la parte che impegna più bit da trasmettere, l'evoluzione successiva della codifica vocale adottata la *quantizzazione vettoriale* per evitare la trasmissione di tutti i parametri dell'eccitazione, che sono invece visti come *un vettore* e quindi rappresentati per mezzo di *una unica codeword* che identifica un elemento scelto in un *codebook* tale da rappresentare l'eccitazione con un errore minimo.

La costruzione del codebook è realizzata *partizionando* la distribuzione dei vettori in più re-

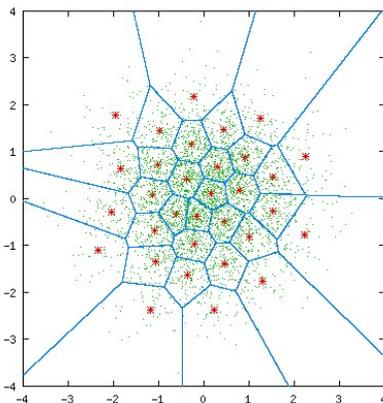


Figura 21.16: Regioni di decisione e centroidi per un quantizzatore vettoriale bidimensionale

<sup>22</sup>In effetti, mentre i coefficienti spettrali (denominati *paracor* in questo caso) sono determinati a partire dall'analisi dell'intera finestra di 20 msec, l'eccitazione RPE ed i parametri LTP sono ottenuti a partire da *sottofinestre* di 40 campioni, pari a 5 msec.

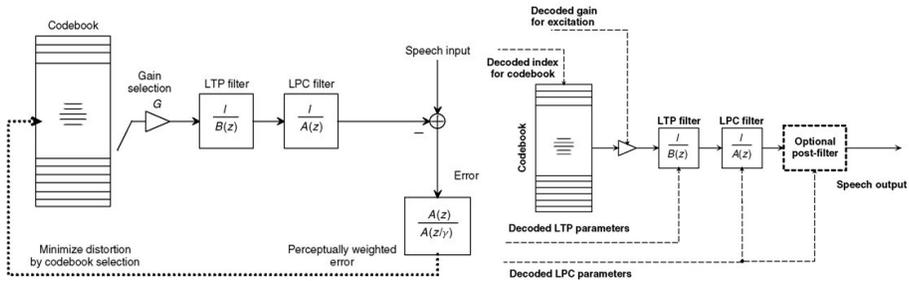


Figura 21.17: Codificatore e decodificatore CELP

gioni di decisione come quelle mostrate nell'esempio di fig. 21.16, in modo che un nuovo vettore possa essere classificato<sup>23</sup> come contenuto in una di esse, e venire quindi rappresentato dal *centroide* (i punti rossi) associato alla regione. I centroidi ed i confini di decisione sono determinati mediante un procedimento iterativo tale da minimizzare l'errore quadratico medio di rappresentazione<sup>24</sup>.

I coefficienti dei vettori associati ai centroidi sono quindi memorizzati in un dizionario (o *codebook*) noto sia al codificatore che al decodificatore, in modo che ogni vettore può essere rappresentato, anziché da tutti i suoi coefficienti, dal solo indice della *codeword* del centroide più vicino: al solito, utilizzando  $M$  bit per rappresentare l'indice, il codebook sarà formato da  $2^M$  diverse codeword. Oltre al codebook utilizzato per rappresentare i possibili vettori di innovazione, la codifica del segnale vocale si può avvantaggiare anche di un secondo codebook, usato per approssimare il vettore dei possibili coefficienti spettrali.

### 21.1.2.5 Predizione lineare ad eccitazione codificata - CELP

La fig. 21.17 mostra lo schema realizzativo di un codificatore CELP, in cui sono evidenziati il filtro di predizione a lungo termine ed il filtro LPC, stimati in modalità *ad anello aperto*, ed il *filtro percettivo* che fa in modo che la densità spettrale dell'errore di predizione sia concentrata nelle regioni dove è presente segnale.

Per ogni codeword di eccitazione selezionata dal codebook, ed il guadagno associato, viene calcolata l'energia dell'errore ottenuto, ed il risultato confrontato con quello ottenibile mediante le altre codeword, finché non si trova la codeword che minimizza l'errore. Ovviamente questo modo di procedere è estremamente oneroso, ma si sono trovati metodi di ricerca più efficienti adottando tecniche di costruzione del codebook come combinazione di sequenze elementari, dando luogo alla famiglia dei codificatori *algebrici* o ACELP.

D'altra parte, anche l'identificazione del LTP può essere ricondotta ad una ricerca ad anello chiuso, svolta ora nell'ambito di un *codebook adattivo*, costruito a partire dalla precedente sequenza di eccitazione ottima, replicata in forma traslata di un campione alla volta, come illustrato in fig. 21.18, che mostra appunto l'uso della eccitazione per la trama precedente per popolare il codebook adattivo: da questo viene quindi individuata la codeword  $I_a$  ed il guadagno  $G_a$  ottimi, e quindi individuata la codeword di innovazione  $I_s$  e  $G_s$  ottimi, riferiti ad un codebook detto *stocastico* perché costituito da sequenze pseudo casuali.

<sup>23</sup>Per questa classificazione, così come per poter definire l'insieme dei centroidi, occorre che sia definita una funzione di *distanza* tra vettori.

<sup>24</sup>Vedi <http://www.data-compression.com/vq.html>, ma anche la nota 24 a pag. 85.

Infine, viene mostrato come anche i coefficienti spettrali LPC sono trasmessi mediante una codeword derivata da un processo di quantizzazione vettoriale. Possiamo elencare i seguenti standard che adottano una tecnica di questo tipo:

- Federal Standard 1016 (4800-16000 bit/s) CELP
- ITU-T 8-kbit/s G.729 CS-ACELP (*conjugate-structure algebraic CELP*);
- dual-rate multimedia ITU-T G.723.1 a 5.3 kbit/s con ACELP e 6.3 kbit/s con MP-MLQ (*multi-pulse maximum likelihood quantization*);
- ITU-T low-delay CELP 16-kbit/s G.728 - usa finestre di analisi multo brevi e una predizione lineare all'indietro per conseguire un ritardo di 2 msec;
- ETSI enhanced full-rate EFR-GSM e half-rate HR-GSM, con velocità di 12.2 e 5.6 kbps, così come i codec AMR (*adaptive multirate*) e WB-AMR, con velocità da 7.95 a 4.75 kbps;
- Speex<sup>25</sup> - un insieme di codecs open source esenti da brevetti e liberamente utilizzabili, con velocità (a banda stretta) da 5,95 a 24,6 kbps, e da 5.75 a 42,4 kbps per segnali con banda di 16 kHz

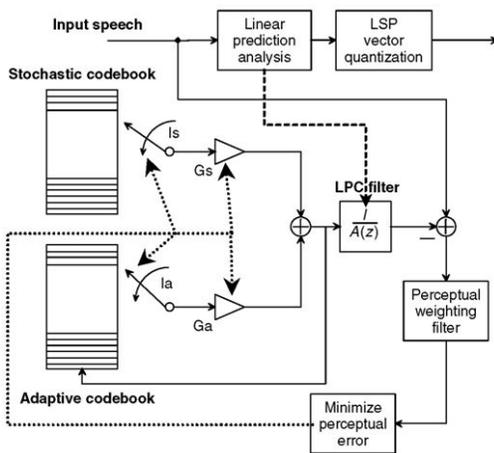


Figura 21.18: Codificatore CELP con codebook adattivo per la predizione a lungo termine

### 21.1.3 Codifica psicoacustica

Mentre la codifica di forma d'onda (§ 21.1.1) non fa assunzioni a riguardo della natura del segnale, i metodi esposti al § 21.1.2 sono tutti fortemente orientati a rappresentare segnali vocali. Viceversa, il gruppo di lavoro MPEG di ISO si è dedicato ad individuare metodi di codifica idonei alla trasmissione di segnali multimediali di natura qualsiasi, come ad esempio brani musicali. Inoltre, i vincoli relativi al basso ritardo necessario ad assicurare un buon grado di interattività vengono meno, e si possono dunque intraprendere elaborazioni più complesse, e che richiedono un tempo maggiore. Infine, vengono trascurati rigidi vincoli sulla velocità risultante, accettando invece che questa *vari* nel tempo in funzione del tipo di segnale da rappresentare.

Come vedremo tra breve, per queste tecniche si fa di nuovo uso di una codifica per sottobande, introdotta nella discussione dell'ADPCM, tenendo però anche conto di caratteristiche molto importanti della percezione sonora, il cui sfruttamento è già stato illustrato nella discussione del filtro di pesatura percettiva, ma che ora hanno un impatto ancora maggiore sulla realizzazione del codificatore. I codificatori che fanno uso di queste caratteristiche sono l'MPEG *layer 3* o MP3, il *Dolby AC*, e l'*advanced audio coding* o AAC.

**Sensibilità uditiva e mascheramento in frequenza** La fig. 21.19a mostra la curva di sensibilità del sistema uditivo, ovvero il livello di intensità minimo perché possa essere percepito un suono: come si vede, questo è molto variabile con la frequenza, per cui anche se il suono B (sinusoide o tono puro) ha la stessa intensità di A non può essere udito, mentre invece A si. Ma ad una analisi più approfondita, si scopre che la presenza di un suono in una determinata

<sup>25</sup>vedi <http://en.wikipedia.org/wiki/Speex>

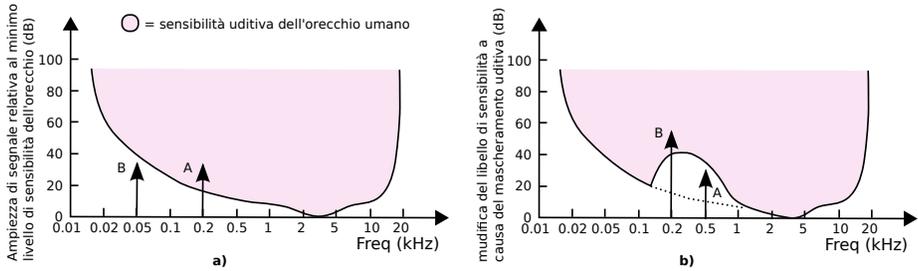


Figura 21.19: a) sensibilità uditiva alle diverse frequenze; b) mascheramento uditivo

regione di frequenza ha l'effetto di modificare la curva di sensibilità per le frequenze vicine, di fatto *mascherando* suoni a frequenze vicini che altrimenti avrebbero superato la soglia di sensibilità, come mostrato in fig. 21.19b: la presenza del suono B rende A non più udibile.

In realtà, l'estensione in frequenza per cui si verifica l'effetto di mascheramento dipende sia dalla frequenza del tono mascherante (come mostrato dalle curve in fig. 21.20 ottenute con toni a 1, 4 ed 8 kHz) che dalla sua intensità. In particolare, la banda delle frequenze mascherate viene detta *banda critica* ed ha una estensione differente alle diverse frequenze: si trova che sotto i 500 Hz la banda critica ha una estensione di circa 100 Hz, mentre a frequenze superiori aumenta (circa) linearmente per multipli di 100 Hz. Ad esempio, un segnale ad 1 KHz ( $2 \times 500$ ) produce una banda critica di 200 Hz ( $2 \times 100$ ), mentre a 5 kHz ( $10 \times 500$ ) questa vale circa 1 kHz ( $10 \times 100$ ).

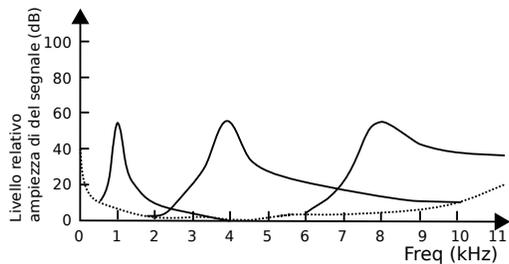


Figura 21.20: Variazione della banda critica in funzione della frequenza

**Mascheramento temporale** Il secondo effetto percettivo riguarda ancora una modifica alle curve di sensibilità, stavolta in modo *non selettivo* in frequenza, ma che coinvolge tutte le frequenze: si verifica infatti che dopo aver udito un suono forte, per il tempo necessario all'estinzione del suono e che tipicamente dura qualche decina di milisecondi (vedi fig. 21.21), l'orecchio non è più in grado di percepire suoni con intensità minore a quello che si sta estinguendo.

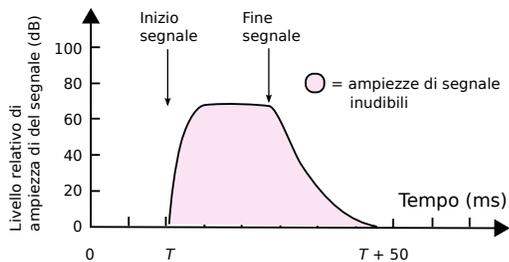


Figura 21.21: Mascheramento temporale

**MPEG layer 3** Il gruppo di lavoro MPEG di ISO ha definito uno standard di codifica audio basato su tre livelli di complessità (e potere di compressione) crescente, ed il terzo (o MP3) è quello di gran lunga più popolare, anche grazie alla diffusione che ha avuto via Internet.

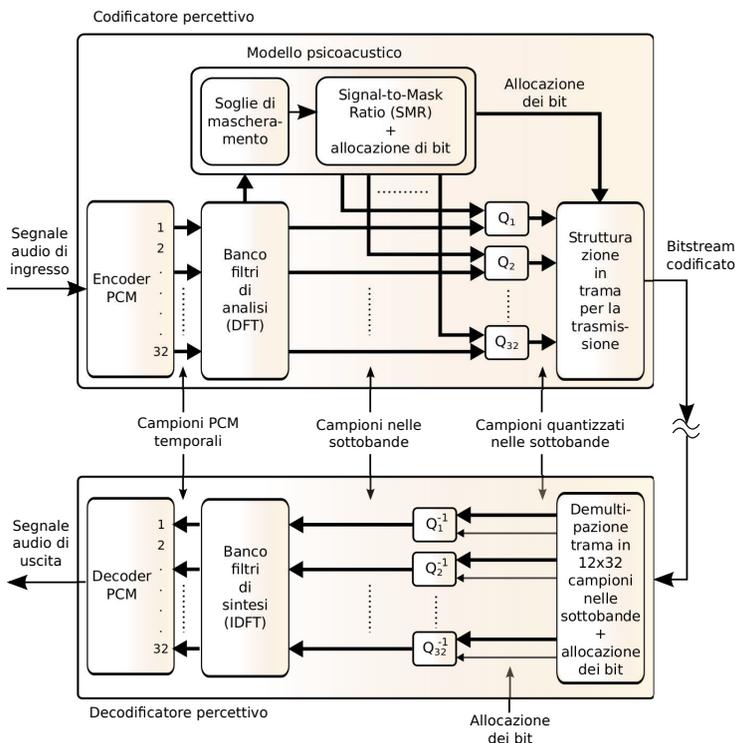


Figura 21.22: Codec percettivo MPEG

Lo schema di funzionamento di principio è mostrato in fig. 21.22: il segnale campionato in ingresso (a 32, 44.1 o 48 kHz) transita attraverso un *pcm encoder* che esegue un filtraggio<sup>26</sup> in 32 sottobande di eguale ampiezza, le cui uscite sono campionate a frequenza  $1/32$  di quella di ingresso. Ogni 384 campioni di ingresso (pari a 12 msec se  $f_c = 32$  kHz) sono quindi prodotti  $384/32 = 12$  campioni per ogni sotto-banda, e per ognuna di esse è individuato il valore del campione più grande, che contribuisce sia ad impostare la dinamica del quantizzatore per quella banda, sia come parametro per il modello psicoacustico.

Il modello psicoacustico riceve le informazioni prodotte da un banco di filtri di analisi realizzati mediante una MDCT,<sup>27</sup> che produce una stima spettrale con risoluzione maggiore di quella del primo banco di filtri, su cui basare le valutazioni di mascheramento uditivo, che a loro volta determinano per ogni sottobanda l'indicazione di un *signal to mask ratio (SMR)*, che a sua volta determina *quanti bit utilizzare* (e quindi quanti livelli) per la quantizzazione  $Q$  dei campioni relativi alle singole sottobande. Quelle contraddistinte da una maggiore sensibilità (ovvero nelle quali si percepiscono anche suoni deboli) saranno quantizzate con più accuratezza, e quindi con più bit e meno rumore; mentre le sottobande caratterizzate da una sensibilità inferiore possono essere quantizzate con meno bit, almeno finché l'*SNR* di quantizzazione si mantiene superio-

<sup>26</sup>Eseguito mediante un banco di *filtri polifase*, vedi ad es. [http://en.wikipedia.org/wiki/Polyphase\\_quadrature\\_filter](http://en.wikipedia.org/wiki/Polyphase_quadrature_filter) o <http://cnx.org/content/m32148/latest/>. Le uscite dei filtri polifase, anche se campionate a frequenza inferiore alla velocità di Nyquist, sono esenti da aliasing, che viene cancellato dall'effetto delle altre sottobande.

<sup>27</sup>Vedi [http://en.wikipedia.org/wiki/Modified\\_discrete\\_cosine\\_transform](http://en.wikipedia.org/wiki/Modified_discrete_cosine_transform)

re all'*SMR*, dato che in tal caso il rumore è mascherato, e dunque non viene udito. Quindi, i 12 campioni delle 32 sottobande sono quantizzati tenendo conto sia della dinamica effettiva, che del numero di livelli in cui suddividere la dinamica. Infine, viene prodotta una struttura di trama che contiene, oltre ai campioni, anche le informazioni sulla effettiva allocazione dei bit.

Ad una futura edizione, una trattazione più approfondita.

**Riferimenti** Si citano dei riferimenti essenziali sulla codifica audio, da cui sono anche tratte alcune illustrazioni

- Introduction to Digital Speech Processing, L. R. Rabiner and R. W. Schafer, <https://books.google.it/books?id=Z60tr8Hj1WsC>
- Beyond VoIP Protocols: Understanding Voice Technology And Networking, O. Hersent, J.P. Petit, D. Gurle <http://what-when-how.com/category/voip-protocols/>
- <http://www.data-compression.com/index.shtml>
- Voice Acoustics: an introduction - University of New South Wales, J. Wolfe, M. Garnier, J. Smith <http://www.phys.unsw.edu.au/jw/voice.html>
- Let's build an MP3-decoder! - Björn Edström <http://blog.bjrn.se/2008/10/lets-build-mp3-decoder.html>

## 21.2 Codifica di immagine

Un segnale di immagine può essere di tipo *vettoriale*<sup>28</sup>, come nel caso di un disegno prodotto da un *plotter*, e rappresentato mediante un linguaggio descrittivo che codifica le operazioni grafiche necessarie alla sua realizzazione; al contrario, un segnale di immagine è detto di tipo *bitmap*, o *raster* (griglia, reticolo), quando è il risultato di un campionamento spaziale, come nel caso di una foto digitale, di un fax, o del risultato di un processo di scansionamento elettronico. Mentre le immagini vettoriali sono pienamente scalabili e ridimensionabili senza perdita di definizione, quelle bitmap sono ottimizzate per essere riprodotte nelle loro dimensioni originali, avendo già operato un processo di distorsione tale da sfruttare al più possibile le caratteristiche di predicibilità e di sensibilità percettiva.

### 21.2.1 Dimensioni

Per quanto riguarda le immagini bitmap, queste sono definite nei termini di una matrice di elementi di immagine o *PIXEL* (*picture elements*)<sup>29</sup>, che sono l'equivalente bidimensionale dei campioni estratti da un segnale unidimensionale. Per ogni pixel è definito un valore associato alla intensità con la quale deve essere riprodotto: nel caso di immagini a colori, sono necessari tre valori di intensità, per cui una immagine è in realtà descritta da tre matrici, come approfondiamo di seguito.

Sebbene le dimensioni della matrice di pixel possano essere qualunque, nel corso del tempo si sono affermati una serie di valori di riferimento, associati ad altrettante serie di sigle, legate al tipo di dispositivo che deve poi riprodurre l'immagine, ma anche a quello da cui l'immagine viene acquisita; la tabella 21.1 riassume tali corrispondenze.

Ad esempio, la risoluzione *VGA* (640 x 480) trae origine dai parametri dello standard *NTSC* della televisione analogica, i cui quadri sono composti da una serie di 525 linee, di cui solo 480 visibili: volendo mantenere una risoluzione orizzontale pari a quella verticale, con un rapporto d'aspetto di 4:3, ogni linea deve essere campionata su  $480/3 \times 4 = 640$  punti. Già prima dell'uso

<sup>28</sup>Esempi di formati per la grafica vettoriale sono PDF, EPS, PDF, e VRML.

<sup>29</sup>Per alcuni anni, si è usato come sinonimo anche il termine *PEL* <http://www.foveon.com/files/ABriefHistoryofPixel2.pdf>.

	<i>banda</i>	<i>linee</i>	<i>fps</i>	<i>aspetto</i>	<i>colonne</i>	<i>righe</i>	<i>colore</i>
PAL	6 MHz	625	25 int	4:3			
NTSC	5 MHz	525	30 int	4:3			
HDTV		1080		4:3	1440	1152	
				16:9	1920	1152	
PDFA				4:3	1024	768	
4:2:2		625/525	50/60	4:3	720	576/480	360 × 576/480
			non int				
4:2:0		625/525	25/30	4:3	720	576/480	360 × 288/240
			int				
VGA				4:3	640	480	
SIF		625/525	25/30	4:3	360	288/240	180 × 144/120
			non int				
CIF			30 non	4:3	360	288	180 × 144
			int				
QCIF			15:7.5	4:3	180	144	90 × 72
			non int				

Tabella 21.1: Griglia dei parametri corrispondenti ai formati video

broadcast della TV digitale, la raccomandazione BT 601<sup>30</sup> stabilisce le regole per la conversione tra standard video differenti, mediante l'uso di una comune frequenza di campionamento del segnale video a 13.5 MHz, individuando così nei  $52 \mu\text{sec}$  (<sup>31</sup>) di una linea  $52 \times 10^{-6} \times 13.5^6 = 702$  campioni per linea, a cui si aggiungono 9 campioni neri in testa ed in coda per ottenere 720 campioni per linea; per un segnale a 525 linee si ottiene quindi la matrice 720 x 480 del formato 4:2:2, che approfondiremo tra breve.

Le matrici più grandi di 1024 x 768 sono spesso descritte in termini di *Megapixel* (es 1600 x 1200 = 1,9 Mpixel), spesso usati per confrontare la risoluzione (ma non necessariamente la qualità) dei mezzi di fotografia digitale; inoltre, i *grandi formati* traggono origine anche dalla tecnologia delle schede video per computer da un lato, e da quella della televisione ad alta definizione da un altro, come riassunto nella figura 21.23<sup>32</sup>.

Il formato SIF (*source intermediate format*) è ottenuto a partire dal 4:2:2, conservando la metà dei pixel sia in verticale che in orizzontale, e trascurando la metà dei quadri di immagine; il suo uso è orientato alla memorizzazione, e quindi usa una scansione non interallacciata. Il formato CIF (*common intermediate format*) è simile al SIF, tranne per aver perso il riferimento al numero di linee analogiche da cui deriva; il suo uso è orientato ai sistemi di videoconferenza, e da questo sono definiti formati a maggior risoluzione, come il 4CIF ed il 16CIF, equivalenti al 4:2:2 ed all'HDTV. Il formato QCIF (*quarter CIF*) è orientato alla videotelefonata, dimezzando ancora sia la risoluzione spaziale che quella temporale. Da questo è a sua volta derivato il formato SUB-QCIF (o S-QCIF) di 128 x 96 pixel, orientato a collegamenti lenti come quelli via modem.

<sup>30</sup>Il sito di ITU-R <http://www.itu.int/ITU-R/index.asp?category=information&link=rec-601&lang=en> non consente l'accesso pubblico alla raccomandazione. Un approfondimento può essere svolto presso Wikipedia <http://it.wikipedia.org/wiki/BT.601>.

<sup>31</sup>Vedi fig. 20.2 a pag. 594.

<sup>32</sup>La figura è tratta da Wikipedia, dove possono essere approfonditi gli altri aspetti legati a queste risoluzioni video [http://it.wikipedia.org/wiki/Risoluzioni\\_standard](http://it.wikipedia.org/wiki/Risoluzioni_standard).

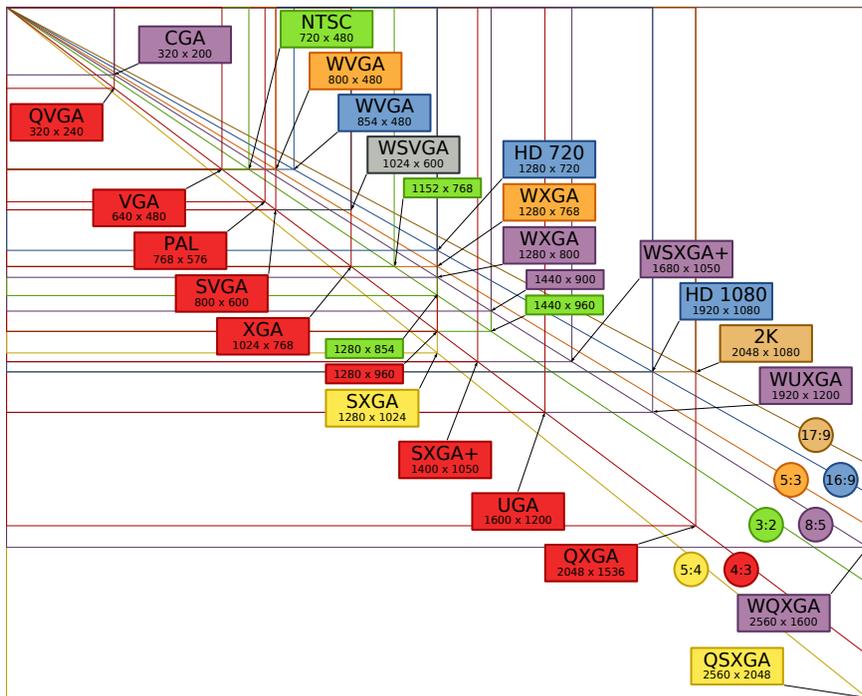


Figura 21.23: Risoluzioni standard o modalità video digitale

### 21.2.2 Spazio dei colori

I dispositivi di acquisizione e riproduzione di immagini a colori operano su tre diverse matrici di pixel, che rappresentano i tre colori di base della *sintesi additiva*, ossia *rosso*, *verde*, e *blu*, o RGB (dalle iniziali inglesi *Red*, *Green* e *Blue*). In figura 21.24 viene mostrato il principio di funzionamento di un *prisma dicroico*, che devia le tre componenti di colore verso tre diversi dispositivi di acquisizione. Variando quindi la proporzione con cui si sommano gli stimoli dei tre colori, si ottiene, oltre al bianco, anche qualunque altro colore. Sebbene dalle figure riportate sembra che il bianco risulti dal contributo in parti uguali delle tre componenti RGB, in realtà la scala di grigi della immagine *monocromatica* corrispondente si ottiene calcolando un segnale  $Y$  di *luminanza* secondo la formula

$$Y = 0.299 \cdot R + 0.587 \cdot G + 0.114 \cdot B \quad (21.5)$$

che è quella usata per modulare il segnale video analogico<sup>33</sup>. Come già discusso, in tale ambito la componente di colore viene trasmessa utilizzando due altri segnali,  $C_b$  o *crominanza blu* e  $C_r$  o *crominanza rossa*, secondo la formula

$$C_b = B - Y \quad \text{e} \quad C_r = R - Y \quad (21.6)$$

Disponendo dei segnali  $Y$ ,  $C_b$  e  $C_r$ , si possono riottenere i valori RGB inserendo la (21.5) nelle (21.6), e risolvendo il sistema di tre equazioni in tre incognite risultante.

<sup>33</sup>Vedi nota 8 a pag. 595.

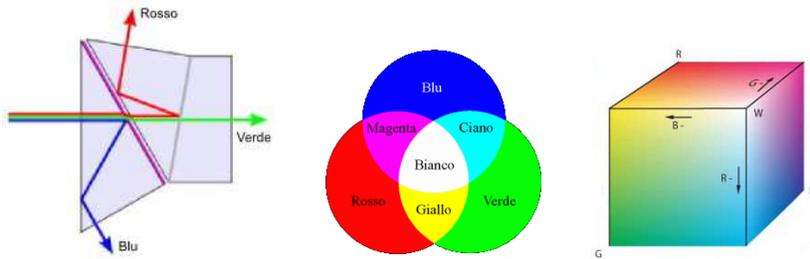


Figura 21.24: Prisma dicroico, sintesi cromatica additiva, cubo dei colori

**Segnale video composito** Al § 20.1 abbiamo descritto come nel segnale televisivo analogico la componente di colore sia trasmessa assieme alla luminanza, su di una diversa portante, con modulazione in fase e quadratura. In realtà, per diversi motivi, le componenti trasmesse non sono direttamente quelle individuate dalle (21.6), ma piuttosto componenti denominate  $U$ ,  $V$  oppure  $I$ ,  $Q$ , e così definite:

$$\begin{aligned} PAL : \quad U &= 0.493 \cdot C_b & NTSC : \quad I &= 0.74 \cdot C_r - 0.27 \cdot C_b \\ V &= 0.877 \cdot C_r & Q &= 0.48 \cdot C_r + 0.41 \cdot C_b \end{aligned}$$

Pertanto, in funzione delle diverse modalità di rappresentazione, un segnale video a colori può essere descritto indifferentemente da una delle seguenti quattro terne di segnali: RGB,  $Y_C \cdot C_b$ , YUV, YIQ.

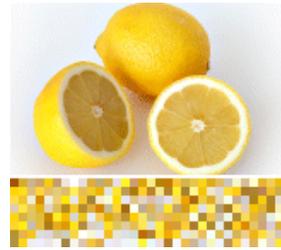
Una descrizione alternativa dello spazio di colore è fornita dai parametri di *tinta*, *saturatione* e *chiarezza*, ovvero HUE, SATURATION e LIGHTNESS, o HSL: si tratta di attributi più legati alla descrizione percettiva che non alle tecnologie della riproduzione dell'immagine. Mentre la tinta descrive una famiglia di colori (es tutti i rossi), la saturazione ne indica il grado di purezza, ossia la presenza congiunta di altre tonalità; la chiarezza, infine, denota la luminosità del colore, rispetto ad un punto bianco. La terna HSL viene a volte usata per descrivere un colore nell'ambito di programmi di *computer graphic*, mediante i quali è fornito anche l'equivalente RGB.

**Profondità di colore** Dato che l'occhio umano non distingue più di 250 tinte diverse, e di 100 livelli di saturazione, si ritiene che utilizzare 8 bit per ogni componente dello spazio di colore RGB sia più che sufficiente. Con  $8 \times 3 = 24$  bit per pixel (bpp) si possono infatti rappresentare  $2^{24} - 1$  diversi colori, ovvero più di 16 milioni, molti dei quali indistinguibili ad occhio nudo. Modalità più spinte di quella a 24 bpp (detta *truecolor*) adottano 10, 12, 16 bit/componente, o rappresentazioni in virgola mobile, e sebbene non migliorino la qualità visiva, possono comunque essere usate in contesti professionali, per non perdere precisione nelle operazioni di editing ripetuto. Al contrario, profondità inferiori sono comunemente usate per risparmiare memoria, come nel caso di 15 bpp, che usa 5 bit per componente, o 16 bpp, che usa 6 bit per il verde, offrendo 65.536 colori diversi.

**Palette** Nel caso si decida di adottare profondità molto ridotte, come 8 bpp, si preferisce ricorrere ad una modalità detta a *colore indicizzato*: l'insieme dei colori presenti nell'immagine viene *quantizzato*<sup>34</sup> in un insieme ridotto, i cui valori a 24 bpp sono memorizzati in una

<sup>34</sup>Per una breve introduzione alla *quantizzazione cromatica*, può essere consultata Wikipedia [http://en.wikipedia.org/wiki/Color\\_quantization](http://en.wikipedia.org/wiki/Color_quantization)

tavolozza (la *palette* detta anche *colour look-up table* o CLUT), che viene quindi utilizzata come un dizionario. La figura a lato mostra una immagine di esempio, assieme alla palette dei colori che usa. In questo modo, per ogni pixel dell'immagine è ora sufficiente specificare l'indice della palette dove è memorizzata la rappresentazione a 24 bpp del colore più prossimo.



**Esempio** Consideriamo una immagine in formato VGA rappresentata mediante una palette di 256 elementi da 24 bit: ognuno dei  $640 \times 480 = 307.200$  pixel può quindi assumere uno tra 256 diversi colori, scelti tra  $2^{24} = 16$  milioni. La dimensione di memoria occupata si ottiene considerando che per ogni pixel occorrono 8 bit per l'indice nella palette, e che la palette stessa ha dimensioni  $256 \times 24 = 6144$  bit = 768 byte, e quindi in totale 307.968 byte.

**Sottocampionamento del colore** Nella tabella riportata a pag. 620 è presente la colonna *colore*, che mostra come la dimensione riservata alle matrici di pixel che codificano le informazioni di crominanza sia ridotta di metà rispetto a quella della luminanza. Questo fatto trae origine da due buoni motivi: il primo è che l'acutezza visiva dell'occhio umano per ciò che riguarda le variazioni cromatiche è ridotta rispetto a quella relativa alle variazioni di luminosità; il secondo è che il segnale di crominanza presente nel segnale video composito occupa una banda circa metà di quella del segnale di luminanza. Pertanto, le componenti di luminanza sono generalmente campionate con una risoluzione spaziale inferiore a quella del segnale di luminanza. Il tipo di sotto-campionamento spaziale adottato per le componenti di crominanza è generalmente caratterizzato da quattro numeri, in accordo allo schema di fig. 21.25:

- **4:4:4** - Non si effettua sottocampionamento, e le tre componenti hanno lo stesso numero di campioni. Applicato principalmente a segnali RGB trattati in studio di produzione.
- **4:2:2** - Questo schema si applica tipicamente alle rappresentazioni  $YCbCr$ , memorizzando per ogni 4 campioni di luminanza, 2 campioni della componente  $C_b$  e 2 della componente  $C_r$ , ed è utilizzato in ambito professionale e broadcast.
- **4:1:1** - In questo caso ogni quattro campioni di luminanza su una riga, ne viene preso uno per  $C_b$  ed uno per  $C_r$ . E' lo schema usato nello standard DV NTSC.
- **4:2:0** - Ogni 4 campioni di luminanza, ne vengono salvati uno per  $C_b$  ed uno per  $C_r$  come per il caso 4:1:1, ma ora la crominanza è campionata su righe alterne. In particolare, la versione utilizzata per l'MPEG-1 campiona assieme entrambi i segnali di crominanza, una riga sì ed una no, mentre quella usata con il DV PAL li campiona a righe alternate, e prevede una riproduzione in modalità interallacciata.

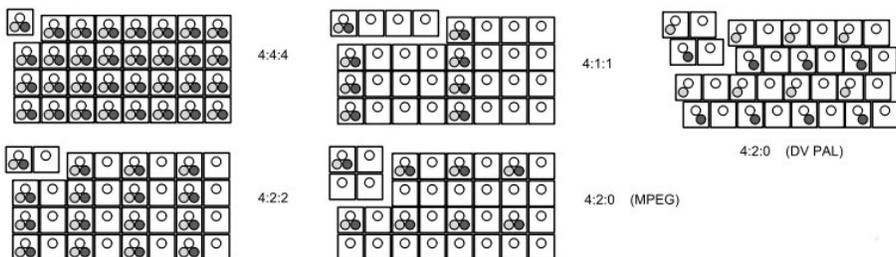
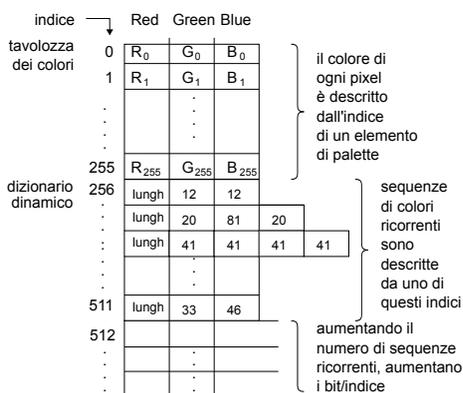


Figura 21.25: Sottocampionamento delle componenti di colore

### 21.2.3 Formato GIF

Il *Graphics Interchange Format* è un formato ad 8 bpp definito da *CompuServe* nel 1987<sup>35</sup> e da allora ha continuato ad essere molto popolare. Usa una *palette* con cui rappresentare 256 colori scelti tra 16 milioni, e quindi comprime l'immagine mediante l'algoritmo LZW, individuando sequenze ricorrenti dei valori di colore. Un singolo file può contenere più immagini (ognuna con la sua palette) in modo da realizzare brevi animazioni. Il numero ridotto di colori rende il formato poco idoneo alla riproduzione di fotografie, ma più che adatto ad immagini più semplici, come ad es. un logo di pagina web. Per rappresentare i colori assenti dalla palette, il codificatore può ricorrere ad una operazione di *dithering*, alternando colori che, osservati da lontano, ricreano l'effetto della tonalità mancante.

Il metodo di compressione è illustrato con l'ausilio della figura seguente, e adotta come anticipato l'algoritmo LZW<sup>36</sup>, il cui dizionario è inizialmente composto dalla palette, o meglio dai 256 valori ad 8 bit che indicizzano la terna RGB a 24 bit nella palette. Quando si incontra una sequenza di codici di colore già osservata, viene aggiunta una riga al dizionario, ed il valore dell'indice corrispondente viene usato per rappresentare tutta la sotto-sequenza; eventualmente, il numero di bit usati per indicare le righe del dizionario viene aumentato di uno. Per disegnare le sequenze di pixel rappresentate da indici inclusi nella sezione dinamica della tabella, occorre dunque individuare prima le rispettive terne RGB nella tavolozza.



**PNG** Dato che la compressione LZW era stata brevettata, venne sviluppata una codifica alternativa, denominata *Portable Network Graphics*. Al giorno d'oggi i brevetti relativi al formato GIF sono tutti scaduti, ed il formato PNG è stato standardizzato nella RFC 2083<sup>37</sup>. Come per GIF, anche PNG è di tipo *lossless* (senza perdite), ossia individua una compressione invertibile, capace di replicare in modo identico l'immagine di partenza, ovviamente senza considerare il processo di quantizzazione che porta alla generazione della palette. Oltre alla modalità di colore indicizzato, PNG offre anche una modalità *truecolor* a 24 o 32 bpp, e per questo può correttamente rappresentare anche materiale fotografico, al punto da consigliare l'uso di PNG (anziché JPEG) nel caso si prevedano successive operazioni di editing dell'immagine.

Per quanto riguarda la compressione, PNG fa uso dell'algoritmo *deflate*, preceduto da un passaggio di compressione differenziale, in cui al valore che rappresenta il colore di un pixel viene sottratto il valore predetto a partire dai pixel adiacenti: in tal modo l'algoritmo *deflate* riesce a conseguire rapporti di compressione più elevati, riuscendo quasi sempre a battere le prestazioni di GIF.

<sup>35</sup>Il documento di specifica può essere trovato presso W3C: <http://www.w3.org/Graphics/GIF/spec-gif89a.txt>

<sup>36</sup>Vedi § 13.1.2.3.

<sup>37</sup>Reperibile presso il sito di IETF: <http://tools.ietf.org/html/rfc2083>

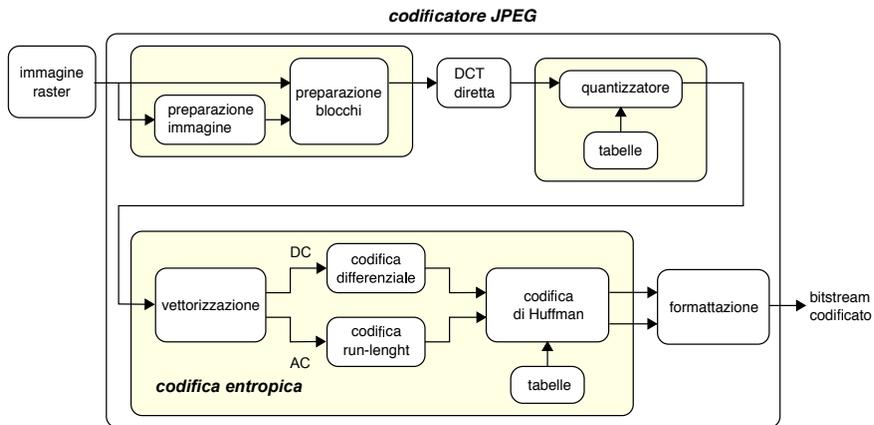


Figura 21.26: Stadi di elaborazione nella compressione jpeg

### 21.2.4 Codifica JPEG

Il *Joint Photographic Experts Group* è un comitato congiunto ISO/ITU che ha definito lo standard internazionale per la compressione di immagini ISO 10918-1<sup>38</sup>, particolarmente adatto alla codifica di immagini fotografiche. Descriviamo di seguito il funzionamento della modalità operativa detta *baseline*, o *lossy sequential mode*, che è quella che offre il migliore grado di compressione, e che prevede cinque stadi di elaborazione, mostrati alla fig. 21.26: preparazione dei blocchi, Discrete Cosine Transform (DCT), quantizzazione, codifica entropica, e formattazione.

**Preparazione dell'immagine e dei blocchi** L'immagine *raster* di partenza è formata da una o più matrici bidimensionali di valori (scala di grigi, oppure a colori indicizzati, o RGB,  $Y_C, C_b$ , YUV, ...), eventualmente di dimensioni differenti (come nel caso  $Y_C, C_b$ ). Sebbene sia possibile elaborare direttamente una rappresentazione RGB, le migliori prestazioni si ottengono nello spazio  $Y_C, C_b$  con sotto-campionamento spaziale 4:2:2 o (meglio) 4:2:0, e dunque il primo passo è quello di convertire l'immagine in questa modalità di rappresentazione.

Ogni matrice viene quindi suddivisa in *blocchi* della dimensione di 8x8 pixel<sup>39</sup>, ognuno dei quali è elaborato in sequenza in modo indipendente dagli altri.

**DCT diretta** Prima di procedere, la matrice Y (oppure le tre matrici R, G e B) che contiene valori ad 8 bit tutti positivi, viene normalizzata sottraendo ad ogni pixel il valore 128, in modo da ottenere valori tra -128 e 127. Quindi, per ogni blocco di 8x8 pixel, i cui valori indichiamo con  $p(x, y)$ , viene calcolata una nuova matrice di 8x8 valori  $D(i, j)$  ottenuti come coefficienti di una *trasformata coseno discreta* (DCT) bidimensionale (vedi § 4.4.3):

$$D(i, j) = \frac{1}{4} c_i c_j \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 p(x, y) \cos \frac{(2x+1)i\pi}{16} \cos \frac{(2y+1)j\pi}{16}$$

<sup>38</sup>Scaricabile presso il W3C: <http://www.w3.org/Graphics/JPEG/itu-t81.pdf>

<sup>39</sup>Notiamo incidentalmente come le dimensioni definite nella tabella di pag 620 siano multipli interi di 8. Se questo non è il caso, i blocchi ai bordi destro ed inferiore vengono riempiti con pixel scelti in modo da minimizzare le distorsioni risultanti.

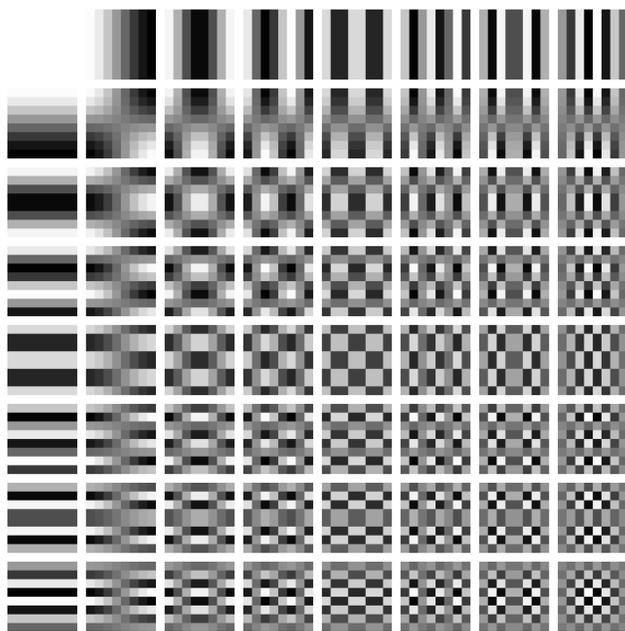


Figura 21.27: Rappresentazione grafica delle superfici DCT

in cui  $c_i$  e  $c_j$  sono ognuno pari a  $1/\sqrt{2}$  con indice  $i$  o  $j$  pari a zero, oppure  $c_i = c_j = 1$  negli altri casi, mentre gli indici  $i$  e  $j$  variano tra zero e sette. Tralasciando di approfondire le relazioni esistenti tra DCT e DFT<sup>40</sup>, consideriamo invece come i coefficienti  $D(i, j)$  così ottenuti permettano la ricostruzione della matrice originaria nei termini di una somma pesata delle superfici rappresentate (per mezzo di una scala di grigi) nel diagramma riportato alla figura 21.27, mediante l'applicazione della DCT inversa

$$p(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^7 \sum_{j=0}^7 c_i c_j D(i, j) \cos \frac{(2x+1)i\pi}{16} \cos \frac{(2y+1)j\pi}{16}$$

Ma se fosse tutto qui, non avremmo realizzato la funzione di compressione! Questa è infatti realizzata dalle elaborazioni successive, a partire dalla rappresentazione in termini di blocchi DCT, di cui ora approfondiamo il significato. Osserviamo quindi che ognuna delle superfici elementari rappresentate in fig. 21.27 è legata ad una coppia  $i, j$  associata ad un coefficiente della DCT calcolata, in modo che tale coefficiente esprime il contenuto di frequenze spaziali descritto da quella particolare funzione della base. Per questo l'elemento  $(i, j) = (0, 0)$  in alto a sinistra, ad andamento costante, è indicato come *coefficiente DC*, o componente continua, dato che essendo calcolato come somma di tutti i pixel, riflette un valore che è legato alla intensità media dell'intero blocco. I coefficienti legati alle funzioni della prima riga rappresentano contenuti di frequenza spaziale orizzontale, con un periodo via via minore spostandosi verso il margine destro, mentre quelli della prima colonna, frequenze verticali. I coefficienti localizzati all'interno della matrice esprimono contenuti di frequenze spaziali in entrambe le direzioni, con valori di

<sup>40</sup>Potremmo tentare comunque di estendere le considerazioni svolte al § 4.4.3 al caso bidimensionale...

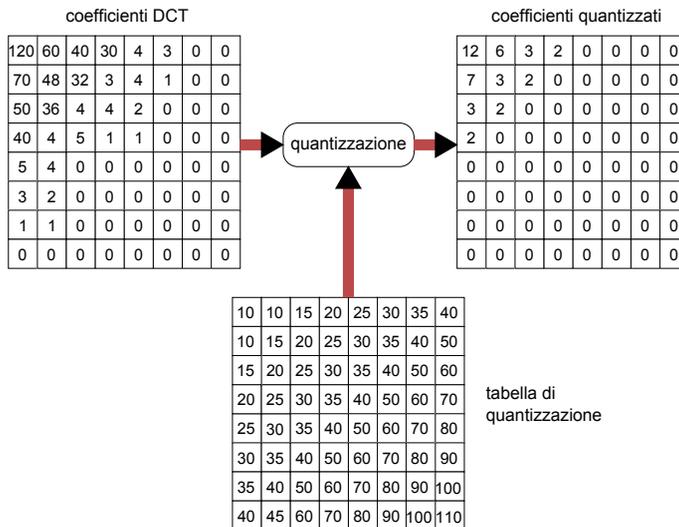


Figura 21.28: Processo di quantizzazione dei coefficienti DCT

frequenza tanto più elevati, quanto più ci si sposta verso l'angolo in basso a destra. Pertanto, i coefficienti descritti da indici diversi da  $(0, 0)$  sono indicati come *coefficienti AC*.

L'esperienza pratica mostra come quasi sempre i coefficienti  $D(i, j)$  presentino nella regione in alto a sinistra valori ben più elevati di quelli riscontrabili in basso a destra, come conseguenza della predominanza dei blocchi posti in corrispondenza ad aree dell'immagine quasi costanti, rispetto a quelli associati alla presenza di contorni netti e particolari dettagliati.

**Quantizzazione** Questo passo della elaborazione JPEG mira a sfruttare il fenomeno percettivo della ridotta sensibilità dell'occhio umano alle frequenze spaziali più elevate, ovvero la capacità di *filtrare percettivamente* le componenti di errore corrispondenti ai dettagli più minuti. Per questo, il processo di quantizzazione è orientato a ridurre, ed eventualmente sopprimere, le componenti di immagine legate alle frequenze spaziali più elevate, introducendo di fatto *una soglia* sotto la quale si stabilisce di non trasmettere quelle informazioni che tanto non sarebbero percepibili. A questo scopo, ogni coefficiente  $D(i, j)$  viene diviso per un coefficiente  $Q(i, j)$  dipendente da  $(i, j)$ , ed il risultato viene arrotondato:

$$B(i, j) = \text{round} \left( \frac{D(i, j)}{Q(i, j)} \right)$$

Il risultato corrisponde ad un processo di quantizzazione, perché quando in ricezione il processo viene invertito (ri-moltiplicando il coefficiente per la stessa quantità), viene persa la precisione legata all'arrotondamento, e pari alla metà del coefficiente di divisione. La scelta dei  $Q(i, j)$  è fatta in modo tale da utilizzare valori più elevati per gli indici  $(i, j)$  più elevati, in modo da ottenere due risultati: ridurre le componenti ad alta variabilità *spaziale* dell'immagine, e poter usare meno bit per codificare questi valori (più piccoli). Inoltre, molti dei coefficienti con  $(i, j)$  elevato, già piccoli di per se, quando divisi per un coefficiente di quantizzazione più elevato, non *sopravvivono* all'operazione di arrotondamento, in modo che tipicamente la parte

in basso a destra della matrice  $B(i, j)$  sarà tutta pari a zero, facilitando il compito della codifica run-length dello stadio successivo.

**Esempio** La figura 21.28 mostra un esempio di matrice di coefficienti DCT, assieme alla tabella di quantizzazione, ed al risultato dell'operazione. Notiamo come il valore dei coefficienti di quantizzazione aumenti allontanandosi dal coefficiente DC, e come nella matrice dei coefficienti quantizzati siano *sopravvissuti* solo i coefficienti relativi alle frequenze spaziali più basse.

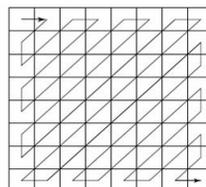
Sebbene esistano delle tabelle di quantizzazione predefinite, i valori effettivi possono essere variati in base ad un compromesso tra qualità che si intende conseguire e fattore di compressione; tali valori vengono poi acclusi assieme al bitstream codificato durante la fase di formattazione, in modo che il processo di quantizzazione possa essere invertito in fase di riproduzione dell'immagine.

**Codifica entropica** Questo passo è un processo senza perdita, nel senso che non aggiunge altre distorsioni oltre a quelle introdotte dal passo di quantizzazione, ma è essenziale ai fini della compressione, e sfrutta le caratteristiche statistiche del risultato delle elaborazioni precedenti. Come posto in evidenza nello schema di pag. 625, la codifica entropica adotta due diverse procedure per i coefficienti DC e AC, che in entrambi i casi culminano con uno stadio di codifica a lunghezza variabile mediante codici di Huffman.

**Vettorizzazione** Le matrici 8x8 relative ai blocchi di elaborazione visti fin qui vengono ora trasformate in sequenze lineari da un processo di scansione a *zig zag* delle stesse, come mostrato dalla figura seguente.

La sequenza così ottenuta presenta il coefficiente DC in testa, a cui fanno seguito i rimanenti 63 coefficienti AC, ordinati in base al massimo valore di frequenza spaziale che rappresentano. Se applichiamo la scansione zig-zag ai valori riportati nell'esempio precedente, otteniamo come risultato la sequenza

12 6 7 3 3 3 2 2 2 2 0 0 0 ..... 0 0



**Codifica differenziale** I blocchi adiacenti generalmente possiedono coefficienti DC molto simili tra loro, in virtù dell'omogeneità di ampie zone dell'immagine (pensiamo ad un porzione di cielo). Per questo motivo, anziché codificarli in modo indipendente, i singoli coefficienti DC di blocchi consecutivi vengono sottratti l'uno all'altro, e viene codificata solo la loro differenza. Ad esempio, se una sequenza di coefficienti DC risultasse pari a 12 13 11 11 10 ..., il risultato di questo processo di codifica differenziale darebbe luogo alla sequenza 12 1 -2 0 -1 ... (infatti, il valore *precedente* al primo coefficiente si assume pari a zero). Dato che differenze in valore assoluto piccole sono relativamente più frequenti di differenze grandi, si è scelto di adottare per queste una codifica a lunghezza di parola variabile, realizzata

- descrivendo innanzitutto ogni valore di differenza mediante una coppia (sss, valore), in cui sss rappresenta il numero di bit necessario per rappresentare il valore, e quindi
- per ogni coppia (sss, valore) il termine sss è rappresentato mediante una codeword di Huffman, ed il valore con numero variabile di bit.

**Esempio** Per chiarire le idee, mostriamo le corrispondenze citate mediante due tabelle, che poi applichiamo all'esempio precedente.

differenza	N. di bit sss	valore codificato		sss	codeword di Huffman
0	0				
-1, 1	1	1=1	-1=0	0	010
-3, -2, 2, 3	2	2=10	-2=01	1	011
		3=11	-3=00	2	100
				3	00
-7...-4, 4...7	3	4=100	-4=011	4	101
		5=101	-5=010	5	110
		6=110	-6=001	6	1110
		7=111	-7=000	7	11110
-15...-8, 8...15	4	8=1000,	-8=0111	8	111110
				9	1111110
⋮				⋮	
⋮				⋮	
				11	111111110

Tornando dunque al nostro esempio della sequenza differenziale  $12 \ 1 \ -2 \ 0 \ -1 \ \dots$ , in termini di coppie (sss, valore) questa diviene (4, 12), (1, 1), (2, -2), (0, 0), (1, -1),... e quindi, sostituendo ad sss il relativo codice di Huffman preso dalla seconda colonna della seconda tabella, ed ai valori la loro rappresentazione indicata dalla terza colonna della prima tabella, otteniamo la sequenza di bit 101 1100, 011 1, 100 01, 010, 011 0,... in cui si sono mantenute le virgole per chiarezza. In definitiva, abbiamo usato un totale di 23 bit per rappresentare 5 differenze, che ne avrebbero richiesti 45 se codificate con 9 bit.

**Codifica run-length** Viene applicata alla sequenza di coefficienti AC che è il risultato dello zig-zag scan. In base all'effetto congiunto delle caratteristiche dei coefficienti della DCT, e del processo di quantizzazione, la sequenza degli AC in uscita dal vettorizzatore presenta lunghe sequenze di zeri, consentendo di conseguire buoni rapporti di compressione mediante l'uso di una codifica run-length, realizzata scrivendo gli AC come una sequenza di coppie (skip, acn), in cui skip rappresenta il numero di zeri nel run, e acn è il coefficiente AC non nullo che viene dopo la sequenza di zeri. Quindi, il campo acn viene espresso a sua volta nella forma sss, valore, come indicato dalla prima tabella riportata nell'ultimo esempio. Infine, la coppia skip, sss viene rappresentata con una codeword di Huffman individuata in un nuovo codebook appositamente definito.

**Esempio** Applicando la codifica run-length alla sequenza dei coefficienti AC individuati nell'esempio di vettorizzazione, ossia alla sequenza  $6 \ 7 \ 3 \ 3 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0$ , si ottiene una sequenza di coppie (skip, acn), pari a (0,6), (0,7), (0,3), (0,3), (0,3), (0,2), (0,2), (0,2), (0,2) (0,0) in cui l'ultima coppia (0,0) indica la fine del blocco, che in fase di decodifica viene quindi ricostruito riempiendolo di zeri. Anziché usare questa, proseguiamo adottando una diversa sequenza di coppie (skip, acn), pari a (0,6), (0,7), (3,3), (0,-1), (0,0)<sup>41</sup>: sostituendo ai termini acn di questa, la coppia sss, valore, e codificando quindi il termine valore come indicato nella prima tabella dell'esempio precedente, si ottiene (0, 3, 110), (0, 3, 111), (3, 2, 11), (0, 1, 0), (0,0). Il bitstream finale viene quindi realizzato sostituendo alle attuali coppie skip, sss, le rispettive codeword individuate alla colonna Run/Size della tabella a pagina 150 e segg. delle specifiche ITU-T T.81 <http://www.digicamssoft.com/itu/itu-t81-154.html>, ottenendo (100, 110), (100, 111), (111110111, 11), (00, 0), (1010), e producendo così un totale di 30 bit per rappresentare i 63 coefficienti AC.

<sup>41</sup>La nuova sequenza di coppie corrisponde ad una sequenza di coefficienti AC pari a  $6 \ 7 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ -1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0$

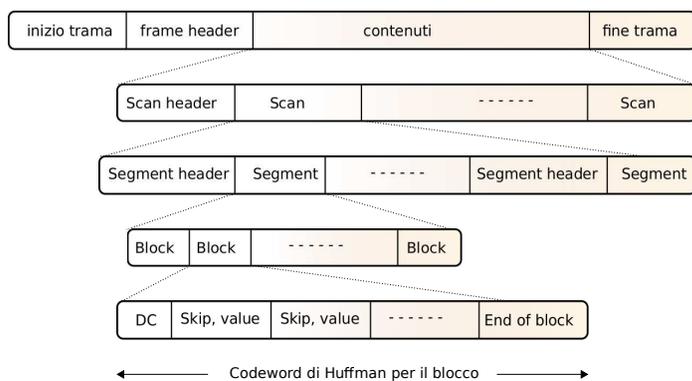


Figura 21.29: Formato del bitstream per la codifica JPEG

**Formattazione** Lo standard JPEG definisce, oltre alla sequenza di operazioni indicata, anche il formato di trama con il quale deve essere memorizzato il bitstream finale. La struttura risultante è gerarchica, e mostrata alla figura 21.29. Al livello superiore troviamo un *frame header* che contiene le dimensioni complessive dell'immagine, il numero ed il tipo di componenti usate (CLUT, RGB,  $YCbCr$ , etc), ed il formato di campionamento (4:2:2, 4:2:0, etc.). Al secondo livello, troviamo uno o più *Scan*, ognuno preceduto da una intestazione in cui viene riportata l'identità del componente (R, G, B, o Y,  $C_b$ ,  $C_r$ ), il numero di bit usato per rappresentare ogni coefficiente di DCT, e la tabella di quantizzazione usata per quella componente. Ogni Scan è composto da uno o più *segmenti*, preceduti da un'ulteriore intestazione, che contiene il codebook di Huffman usato per rappresentare i valori dei blocchi del segmento, nel caso non siano stati usati quelli standard. Infine, nel segmento trovano posto le sequenze di blocchi dell'immagine, così come risultano dopo lo stadio di codifica entropica.

### 21.3 Codifica video

In accordo al metodo di realizzazione dei segnali video analogici, in cui i singoli quadri sono codificati indipendentemente gli uni dagli altri, la codifica video digitale può essere realizzata semplicemente applicando tecniche di codifica di immagine (come JPEG) ad ognuno dei quadri che costituiscono la sequenza video: questo tipo di approccio prende il nome di *moving JPEG* o MJPEG.

D'altra parte, i quadri relativi ad istanti temporali vicini sono spesso molto simili tra loro, anche se quanto siano simili, e per quanto tempo, dipende dal tipo di filmato. La presenza di *memoria* nella sorgente determina quindi la possibilità di ridurre il tasso informativo prodotto dalla codifica ricorrendo a tecniche predittive, tentando quindi di *stimare il movimento* presente in quadri contigui, e trasmettere solo l'informazione necessaria a *compensare* l'errore di predizione. Nella parte destra di fig. 21.30 è mostrata l'immagine differenza  $\Delta Y$  tra la componente di luminanza di due quadri consecutivi, consentendo di apprezzarne la relativa semplicità. Considerando poi che alcune regioni si sono mosse più di altre, il quadro da codificare è scomposto in sottoimmagini, per ognuna delle quali si ha un diverso spostamento, e viene calcolata una specifica differenza rispetto alla sotto-immagine precedente (e spostata); questa tecnica prende il nome di *compensazione del movimento*.



Figura 21.30: Due fotogrammi consecutivi, e la differenza tra i rispettivi valori di luminanza

**Tipo di quadro** Come abbiamo fatto notare al § 13.1.2.2, le tecniche di codifica predittiva sono particolarmente sensibili agli errori di trasmissione, che possono causare una perdita di sincronismo tra i predittori di trasmissione e ricezione, e quindi l'impossibilità di ricostruire la restante parte di segnale. Per questo, nella codifica video sono presenti dei quadri di riferimento in corrispondenza biunivoca con un unico quadro di partenza, detti *intracoded frames* o I-frames, che permettono al ricevitore di ri-partire da una condizione nota. Tra due quadri I sono poi presenti un certo numero di quadri P (*predicted*) come in fig. 21.31a, oltre che quadri B (*bidirectional*) come in fig. 21.31b, e che corrispondono rispettivamente alla codifica della compensazione del movimento calcolato a partire da un unico quadro precedente, o da una coppia di quadri passato e futuro.

I quadri I sono codificati mediante l'algoritmo JPEG, usando lo stesso coefficiente di quantizzazione per tutti i pixel delle DCT, conseguendo un rapporto di compressione relativamente basso, e sono inseriti a cadenza fissa con un periodo  $N$  tipicamente compreso tra 3 e 12: la sequenza di quadri compresi tra due quadri I è detta *group of pictures* o GOP. Come mostrato in figura 21.31, la codifica di quadri P può dipendere dal quadro I immediatamente precedente, o dalla ricostruzione di un precedente quadro P, ottenendo un fattore di compressione maggiore che per i quadri I; la distanza temporale tra P e l'originale I è detta *intervallo di predizione*, indicato con  $M$ .

Per realizzare la compensazione del movimento, ogni regione del nuovo quadro è confrontata con regioni *limitrofe* del quadro precedente, riducendo così la complessità di ricerca. Nel caso dei quadri B la ricerca delle regioni simili è invece svolta rispetto ai quadri I (o P) situati sia

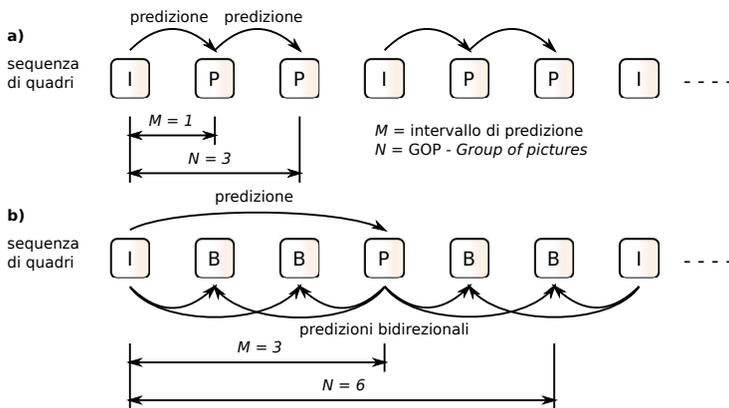


Figura 21.31: Esempi di sequenze di quadri con a) solo quadri di tipo I e P; b) quadri di tipo I, P e B

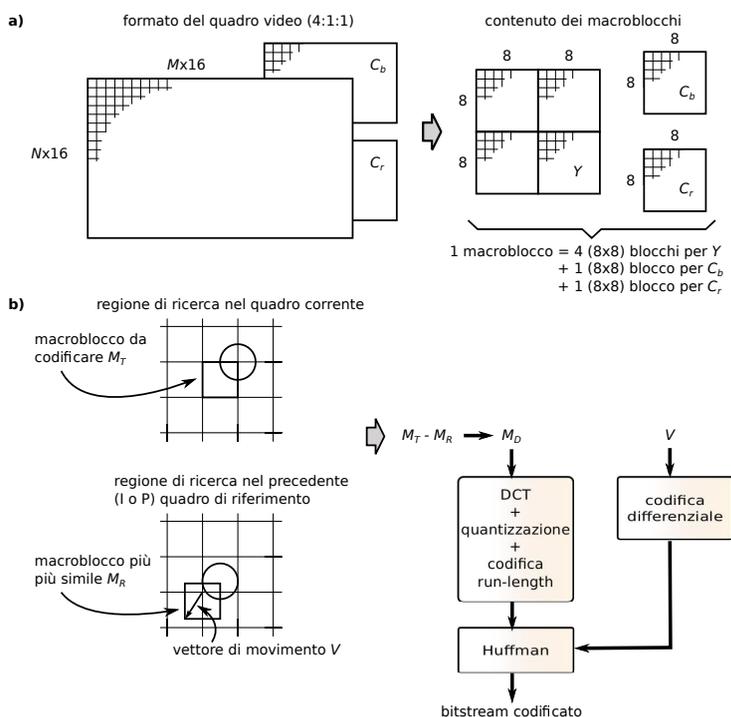


Figura 21.32: Codifica di un quadro P: a) struttura del macroblocco; b) procedura di codifica

nel passato che al futuro, migliorando la precisione della stima di movimento, e conseguendo rapporti di compressione ancora maggiori, a patto di subire un aumento del ritardo di codifica, legato al dover attendere un quadro futuro.

Allo scopo di ridurre il ritardo di decodifica, la sequenza di quadri viene trasmessa con un ordine diverso da quello dei quadri originali, consentendo ai quadri **B** di essere riprodotti non appena ricevuti, e non dopo la ricezione del quadro *futuro* da cui dipendono. Pertanto, se la sequenza originale è ad esempio

**IBBPBBPBBIBBP...**

questa verrà trasmessa nell'ordine

**IPBBPBBIBBPBB...**

**Stima di movimento e compensazione** Specifichiamo innanzitutto cosa intendere con il termine *regione* prima usato per definire il dominio dell'operazione di confronto necessaria alla stima di movimento. Come mostrato in fig. 21.32a, considerando una suddivisione in componenti  $Y C_b C_r$  ed un sottocampionamento 4:1:1, il quadro originale è suddiviso in  $N$  righe e  $M$  colonne di *macroblocchi* di 16x16 pixel, ed ogni macroblocco è rappresentato da sei blocchi 8x8 pixel, di cui quattro blocchi per la luminanza, più due blocchi per le componenti di cromaticanza; ogni blocco 8x8 corrisponde quindi ad un equivalente numero di coefficienti DCT, ed è individuato all'interno del quadro, in base al suo indirizzo di riga e colonna.

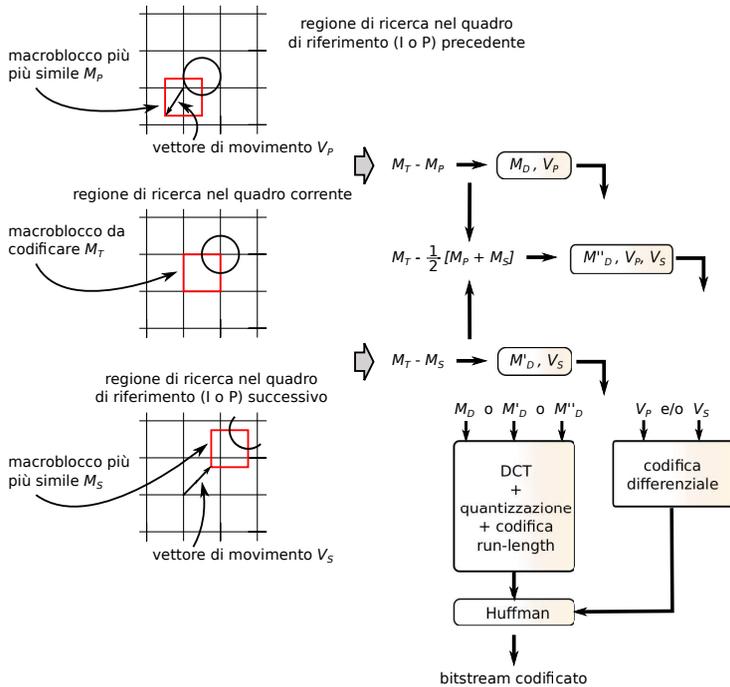


Figura 21.33: Procedura di codifica dei quadri B

Nella codifica dei quadri **P**, ogni macroblocco  $M_T$  del quadro corrente (*target*) è confrontato pixel per pixel con il corrispondente macroblocco  $M_R$  del quadro di riferimento, e nel caso sia riscontrata una sufficiente similitudine<sup>42</sup> complessiva, viene trasmesso solo l'indirizzo del blocco. Altrimenti, il confronto viene ripetuto per tutti i possibili spostamenti del macroblocco target nell'ambito dei macroblocchi contigui<sup>43</sup>, e qualora sia individuata una buona corrispondenza, il macroblocco viene codificato dal *vettore di movimento*  $V$  e dall'*errore di predizione*  $M_D$ . Con riferimento alla fig. 21.32b in cui l'immagine è simboleggiata da un cerchio,  $V$  rappresenta lo spostamento da applicare a  $M_T$  per portarlo a coincidere al meglio con il quadro precedente, ed è codificato come una coppia  $(x, y)$  corrispondente ad una *risoluzione di un pixel*. Al contrario  $M_D$  è composto dalle tre matrici  $(Y C_b C_r)$  dei valori differenza tra quelli di  $M_T$  spostato di  $V$ , ed  $M_R$ . I valori di  $V$  e di  $M_D$  relativi ai diversi macroblocchi di un quadro seguono poi due diversi percorsi di codifica, come specificato appresso.

Nel caso in cui la regione di ricerca sia estesa, i valori  $V$  possono risultare relativamente grandi; d'altra parte è probabile che macroblocchi vicini esibiscano vettori di spostamento molto simili tra loro. Per questi motivi, la sequenza dei  $V$  calcolati per macroblocchi contigui viene prima sottoposta ad un processo di codifica differenziale, e quindi i valori di differenza sono rappresentati da codeword a lunghezza variabile di Huffman. D'altra parte, le tre matrici differenza sono invece sottoposte alla stessa sequenza di operazioni dei quadri **I** (DCT, quantiz-

<sup>42</sup>Il confronto è svolto considerando i soli valori di luminanza, e la similitudine valutata come media tra i valori assoluti delle differenze di luminanza.

<sup>43</sup>l'effettiva estensione dell'area di ricerca non è oggetto di standardizzazione, mentre lo è la rappresentazione del risultato della ricerca.

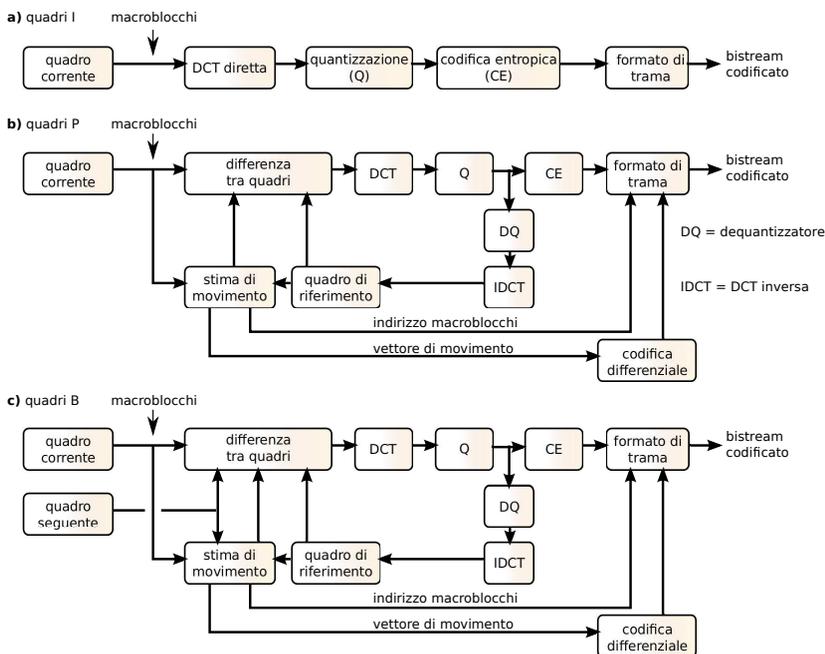


Figura 21.34: Stadi di elaborazione nella codifica di: a) quadri I; b) quadri P; c) quadri B

zazione, codifica entropica), conseguendo però un fattore di compressione più elevato, essendo il macroblocco differenza con valori quasi tutti molto piccoli.

Nel caso in cui la stima di movimento fallisca<sup>44</sup> (o a causa di una estensione di ricerca insufficiente, oppure per un reale cambio di scena), il macroblocco è codificato in modo indipendente come avviene per i quadri I.

I macroblocchi dei quadri B (vedi fig. 21.33) sono invece confrontati sia con il *precedente* quadro  $M_P$  che con il *successivo*  $M_S$ , ottenendo due possibili insiemi di matrici differenza  $M_D$  e  $M'_D$  ed associati vettori  $V_P$  e  $V_S$ ; viene inoltre calcolato un ulteriore insieme  $M''_D$  come differenza tra  $M_R$  e la media dei macroblocchi (spostati) di riferimento, e determinato infine quale delle tre possibilità fornisca il minimo errore di predizione. In base a questa scelta, si individua quale macroblocco differenza codificare, assieme ai rispettivi vettori di movimento. Nel caso prevalga la predizione basata sulla media tra macroblocchi di riferimento, il vettore di movimento complessivo può determinare un potere di risoluzione a livello di *sub-pixel*.

**Questioni realizzative** La fig. 21.34 riassume la sequenza di operazioni applicate alle tre tipologie di quadro I, P e B. Mentre nel primo caso queste seguono lo schema previsto dalla codifica JPEG, i quadri P meritano qualche commento: allo scopo di alimentare correttamente il componente di stima di movimento, il codificatore mantiene memoria del quadro di riferimento, all'inizio posto pari ad un quadro I, e quindi sostituito da una copia dell'ultimo quadro

<sup>44</sup>Viene decretato il fallimento quando anche la migliore compensazione di movimento possibile non determina una riduzione della quantità di bit, rispetto ad una codifica JPEG.



Figura 21.35: Esempio di formato trama per i macroblocchi di un bitstream video

**P**, ottenuto risommando il quadro differenza al precedente quadro di riferimento. Lo stesso schema di calcolo è svolto nel caso di quadri **B**, tenendo ora conto anche del quadro successivo.

Rimarchiamo ora il fatto che, in funzione dell'esito del processo di stima di movimento, esistono tre diverse possibilità di rappresentazione per ogni macroblocco dei quadri **P** e **B**:

- se non vi è movimento, viene trasmessa solo la sua posizione;
- se vi è movimento e si trova un riferimento abbastanza simile, sono trasmessi il vettore di movimento e le matrici differenza;
- se non si è trovato un riferimento abbastanza simile, viene effettuata una codifica *inter* come per il caso dei quadri **I**.

Ciò determina l'esigenza di disporre di formato di trama di dimensione (e velocità) variabile, come realizzato nell'esempio mostrato in fig. 21.35, in cui ad ogni macroblocco è associato un tipo (**I**, **P** o **B**), il suo indirizzo nell'ambito del quadro, il coefficiente di quantizzazione relativo ai termini della DCT, ed il vettore di movimento (se presente). Quindi si dichiara l'identità dei blocchi presenti (che potrebbero essere assenti in caso di immagini statiche), e per questi viene infine prodotta la sequenza di informazioni previste dalla codifica JPEG.

## 21.3.1 Standard video

### 21.3.1.1 H.261

È lo standard di codifica video definito da ITU-T a fine anni '80 per le applicazioni di video-telefonia su ISDN, ed anche se oggi tecnicamente superato, resta comunque un valido sistema di riferimento che consente la retro-compatibilità tra apparati<sup>45</sup>. Il suo principale limite è la necessità di produrre una velocità ridotta e vincolata a multipli di 64 kbps.

La scelta del formato di immagine è limitata a quanto mostrato in tabella<sup>46</sup>, mentre la scansione è non interallacciata e la velocità di rinfresco è di 30 quadri/secondo per CIF oppure 15 o 7.5 per QCIF. Sono usati solo quadri di tipo **I** e **P**, con un GOP di 4 (ossia 3 **P** ogni **I**), e sono usate le procedure descritte alla sezione precedente per rappresentare ogni quadro nei termini di macroblocchi composti da 16x16 pixel (4 blocchi di 8x8) di luminanza e 2 blocchi 8x8 per ogni componente di colore  $C_b, C_r$ .

Ogni macroblocco segue la tipica formattazione mostrata in fig. 21.36a; tre file di 11 macroblocchi sono poi raggruppati in una nuova struttura sintattica detta GOB (*Group of (macro)Blocks*), che si articola in un contenuto (fig. 21.36b) ed una intestazione (fig. 21.36c), in cui troviamo un *codice di inizio* scelto in modo da non poter essere presente nella sequenza di codici di Huffman che seguono, e che permette la risincronizzazione nel caso di GOB *manca*nti (vedi

<sup>45</sup>Vedi ad es. <http://www0.cs.ucl.ac.uk/teaching/GZ05/08-h261.pdf> (una presentazione di Mark Handley), o la trattazione su <http://en.wikipedia.org/wiki/H.261>.

<sup>46</sup>Il *Common Intermediate Format* è stato pensato per facilitare la compatibilità con PAL e NTSC; il *Quarter-CIF* ha una superficie di 1/4. Sono poi stati anche definiti il 4CIF e 16CIF, oltre che il SIF (352 x 240) che interopera con flussi MPEG.

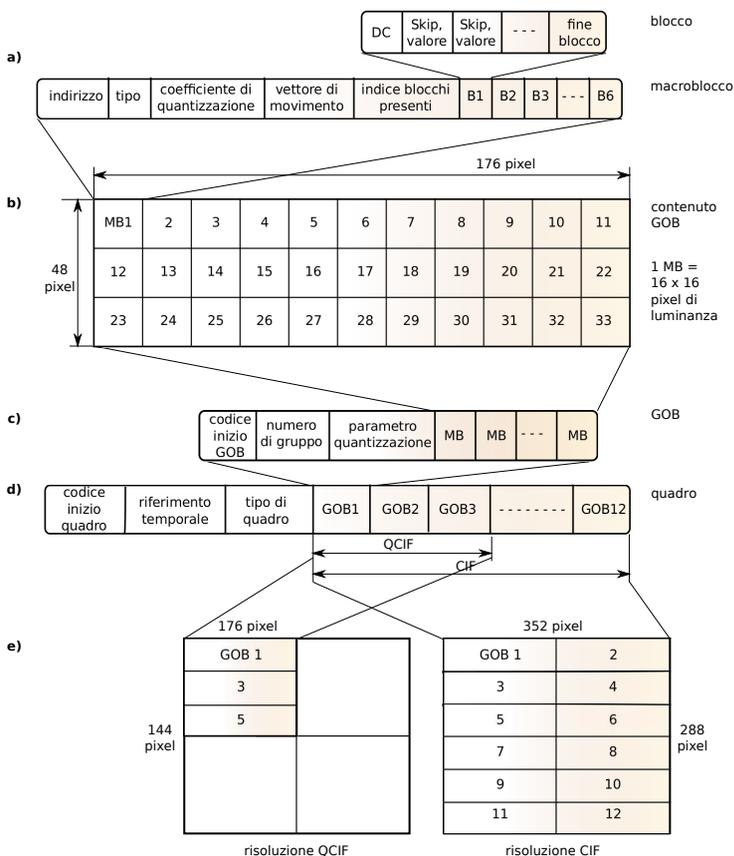


Figura 21.36: Formato codifica H.261: a) macroblocco; b) costruzione e c) formato di un GOB; d) trama di quadro; e) interoperabilità tra formati

appresso), in modo da poter tornare a riprodurre un quadro in corrispondenza del primo GOB disponibile. L'intero quadro è quindi realizzato con il formato di fig. 21.36d), in cui compare una *codice di inizio quadro*, un *riferimento temporale* necessario alla sincronizzazione con la traccia audio, e l'indicazione del tipo di quadro (**I** o **P**); a cui segue la sequenza dei GOB, in numero di 3 oppure 12 a seconda se il quadro rappresenti una immagine QCIF o CIF, in modo da permettere l'interoperabilità tra formati come mostrato in fig. 21.36e.

**Controllo di velocità** Dato che la codifica video produce una velocità di trasmissione variabile, questa può eccedere la capacità del canale a disposizione, ed un modo *drastico* per risolvere il problema è di scartare alcuni GOB. Il campo *Group number* dell'intestazione dei GOB permette quindi di collocare il nuovo GOB anche in mancanza dei suoi predecessori.

Un approccio più articolato è quello mostrato dalla figura 21.37a, che ripercorre le tappe già discusse e relative al calcolo del vettore di movimento ed alla codifica degli errori di predizione, ma pone in evidenza il campo di intervento di un componente di *controllo quantizzazione*, che variando l'entità dei coefficienti di quantizzazione della DCT, permette di ridurre e/o aumentare

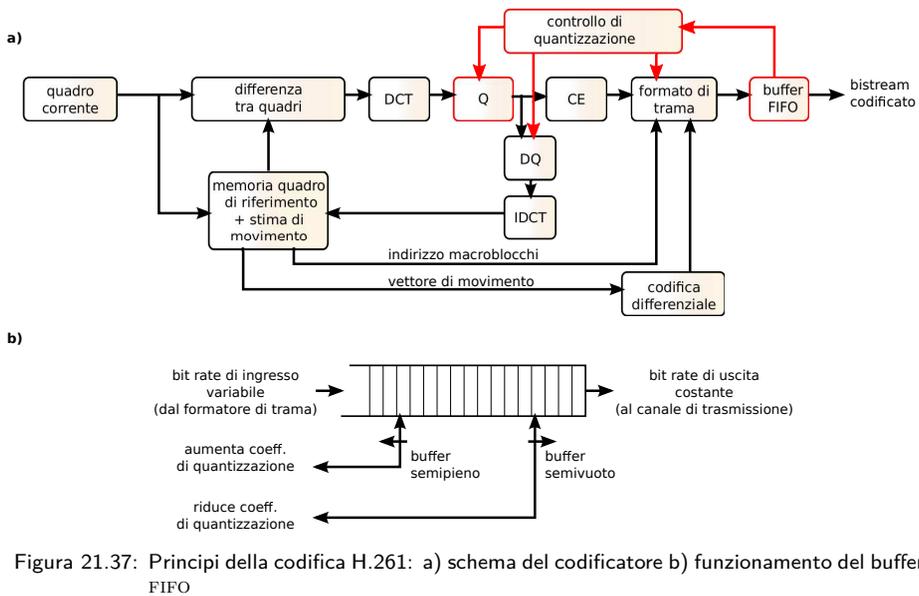


Figura 21.37: Principi della codifica H.261: a) schema del codificatore b) funzionamento del buffer FIFO

la velocità di codifica complessiva. In particolare, il controllo di quantizzazione opera in base allo stato di riempimento del *buffer FIFO*<sup>47</sup> mostrato in fig. 21.37b, alimentato dal risultato del processo di codifica e formattazione video, e da cui sono prelevati i dati da inviare a velocità costante. Nel caso in cui la velocità media di codifica ecceda quella disponibile, l'aumento della occupazione del buffer determina l'aumento del coefficiente di quantizzazione, e quindi una riduzione di qualità ma anche della velocità media di codifica; ovviamente, anche l'inverso è possibile, ossia un miglioramento di qualità mediante riduzione del coefficiente di quantizzazione, nel caso in cui la scena sia statica, e la codifica produca un basso bit rate che consente alla FIFO di svuotarsi.

Nel caso di un aumento improvviso di velocità, come anticipato si possono addirittura *scartare* alcuni GOB, mentre per i successivi si adottano coefficienti di quantizzazione ridotti, comunicati anche al lato ricevente per mezzo dell'apposito campo della intestazione GOB, come mostrato in fig. 21.36c.

### 21.3.1.2 H.263

Anche questo definito da ITU-T a partire dal 1995, nasce per risolvere i problemi di bassa qualità dell'H.261 a velocità molto ridotte, come quelle offerte dai collegamenti modem *dial-up* precedenti all'introduzione dell'ADSL, ovvero per migliorare la gestione delle possibili condizioni di errore sia sul canale *dial-up* che *wireless*. Le specifiche originarie si sono in seguito arricchite<sup>48</sup> di estensioni, favorendo l'adozione del codec da parte di altre applicazioni (inclusi i filmati di *youtube*), ed aggiungendo il supporto oltre che ai formati nativi CIF e QCIF, anche a S-QCIF,

<sup>47</sup> *First in First out*, è la disciplina di coda del primo arrivato primo servito, opposta a LIFO *Last In First Out*, realizzata come uno *stack*.

<sup>48</sup> Nel 1998 viene rilasciato l'H.263v2, noto anche come H.263+ o H.263 1998, e nel 2000 è emesso l'H.263v3 noto anche come H.263++ o H.263 2000; inoltre l'MPEG-4 Part 2 è compatibile con l'H.263, in quanto un bitstream H.263 di base viene correttamente riprodotto da un decodificatore MPEG-4.

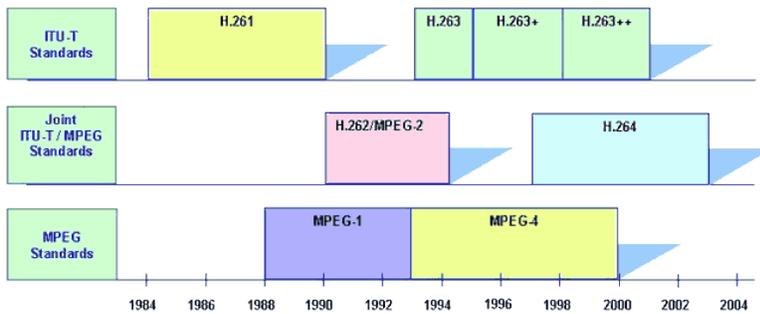


Figura 21.38: Evoluzione temporale dei formati di codifica video

4CIF, 16CIF, SIF e 4SIF. A partire dal 2003 si è formato un gruppo di lavoro congiunto tra ITU-T VCEG (*Video Coding Expert Group*) e ISO/IEC MPEG (*Moving Pictures Experts Group*), che segue la definizione del suo successore, l'H.264 detto anche AVC (*Advanced Video Coding*) o MPEG-4 *part 10*, determinando l'arresto dello sviluppo di H.263, che resta comunque (assieme all'H.261) supportato da un gran numero di applicazioni multimediali. Sebbene la struttura generale del codificatore e del bitstream ricalchi quella vista per l'H.261, sono state introdotte alcune novità significative, che tentiamo di elencare appresso.

**Tipi di quadro** In H.263 sono usati, oltre ai quadri di tipo **I** e **P**, anche quelli bidirezionali **B**, consentendo di ottenere fattori di compressione maggiori, a parità di qualità percepita.

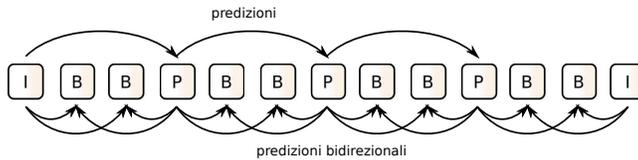
**Slice** I GOB sono ridefiniti come singole *strisce* di macroblocchi, quindi ad esempio per i formati CIF e QCIF un GOB è ora formato da 11 macroblocchi in fila, anziché 33 come avveniva per l'H.261.

**Vettori di movimento estesi** La stima di movimento dell'H.261 si arresta in corrispondenza dei bordi del quadro, per cui anche se un oggetto è solo parzialmente uscito di scena, il macroblocco corrispondente viene codificato in modalità *intra*. Al contrario H.263 permette di estendere la ricerca anche a vettori di spostamento che cadono al di fuori del quadro, alla ricerca di una corrispondenza parziale, consentendo al contempo maggiore efficienza e minor distorsione.

**Predizione avanzata** Anziché determinare il vettore di movimento in base al confronto di un intero macroblocco, i 4 blocchi 8x8 che lo costituiscono sono confrontati in modo indipendente con il quadro di riferimento, permettendo una migliore compensazione del movimento anche per l'immagine di oggetti che non solo traslano, ma si deformano. In definitiva, sono prodotti 4 diversi vettori di movimento per ogni macroblocco.

**Resistenza agli errori** La presenza di un errore nella ricezione<sup>49</sup> di un GOB, oltre ad impedire la corretta riproduzione dello stesso, ostacola la riproduzione anche dei quadri successivi che

<sup>49</sup>Qualcuno potrebbe aver notato che nella definizione degli standard fin qui discussi, non sono previsti controlli di tipo *checksum* nel bitstream prodotto. D'altra parte essendo le informazioni codificate di natura auto-sincronizzante, la presenza di errori determina presto presso il ricevitore una condizione di disallineamento, e la decodifica di valori non



Esempio di sequenza di quadri MPEG-1

dipendono dai pixel presenti nel GOB, e peggio ancora l'errore finisce per estendersi anche ad altri GOB, in virtù degli effetti dell'errore sulla ricostruzione dei macroblocchi *predetti* in presenza di movimento.

Per ridurre l'estensione temporale dell'effetto dell'errore, e non dover attendere fino alla ricezione del successivo quadro **I**, si può usare il canale di ritorno presente nei collegamenti punto-punto, consentendo al decodificatore di inviare dei NACK che notificano al mittente la coppia (quadro, GOB) per la quale si è rilevato un errore. Il codificatore è quindi in grado di valutare esso stesso le conseguenze sui quadri successivi, e può provvedere a fornire una codifica *intra* per tutti i blocchi che necessitano di essere rapidamente risincronizzati.

### 21.3.1.3 MPEG-1

Il *Moving Pictures Expert Group* di iso emette una serie di standard ognuno orientato ad un particolare dominio applicativo di segnali multimediali, come

- MPEG-1 adotta un formato SIF di 352x288 pixel inteso per la *memorizzazione* audio-video a qualità VHS su CDROM, a velocità fino a 1.5 Mbps;
- MPEG-2 è orientato alla *memorizzazione e trasmissione* audio-video secondo quattro livelli di risoluzione, per ognuno dei quali diversi profili individuano tecniche alternative di codifica;
- MPEG-4 è stato inizialmente concepito per applicazioni simili a quelle dell'H.263, ma il suo uso si è successivamente esteso ad un'ampia gamma di applicazioni Internet.

Anche MPEG-1 adotta tecniche del tutto simili a quelle dell'H.261, con una scansione dell'immagine progressiva ed un sottocampionamento delle componenti di colore 4:1:1, una frequenza di quadro di 25 Hz, l'adozione di quadri di tipo **I**, **P** e **B**, la rappresentazione dei quadri in termini di macroblocchi composti da 16x16 pixel di luminanza, più due blocchi 8x8 per ciascuna componente di colore. Le principali differenze sono che

- possono essere inseriti riferimenti temporali *all'interno* di un quadro, permettendo al decodificatore di sincronizzarsi più rapidamente. L'intervallo tra due marche temporali è chiamato *slice* e comprende una sequenza orizzontale di macroblocchi, tipicamente che copre una intera riga<sup>50</sup>, o meno, ma non di più;
- l'uso dei quadri di tipo B aumenta la distanza temporale tra i quadri di tipo P ed il loro riferimento, e quindi determina una maggiore distanza coperta dalle porzioni di immagine in movimento, cosicché l'ampiezza della finestra di ricerca adottata dal componente di detezione di movimento è stata estesa.

previsti, come ad esempio la ricezione di vettori di movimento o coefficienti DCT fuori dinamica, o codeword di Huffman non valide, od un numero eccessivo di coefficienti. Per tale via, il ricevitore diviene in grado di accorgersi dell'errore che si è verificato.

<sup>50</sup>ad es., 22 macroblocchi in risoluzione CIF

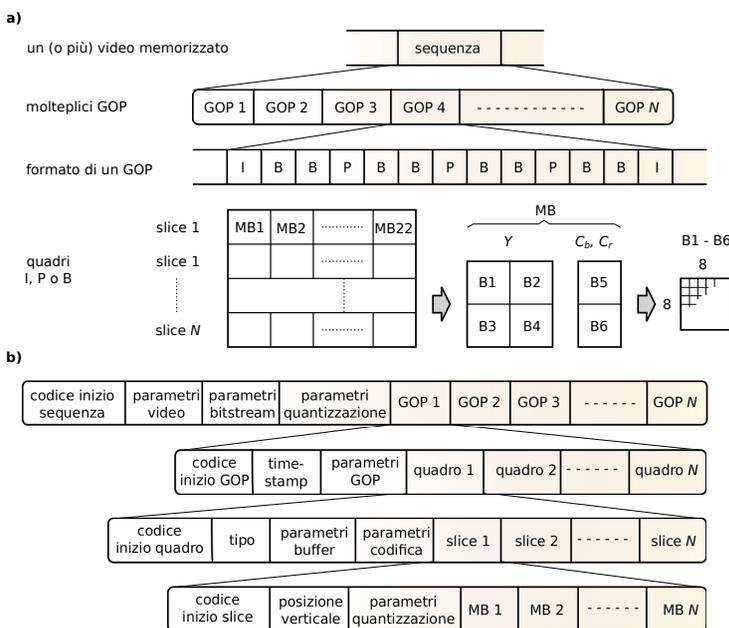


Figura 21.39: Struttura del bitstream MPEG-1: a) composizione; b) formato gerarchico

La figura 21.39a illustra la *struttura gerarchica* del bitstream risultante, secondo il quale l'intero filmato (*sequenza*) è costituito da una successione di GOP, ed ogni GOP da una sequenza di quadri, ognuno costituito da una successione di *slice* che comprendono ognuno 22 macroblocchi, ognuno con 6 blocchi. La sezione b di fig. 21.39 entra più nel dettaglio del formato del bitstream.

### 21.3.1.4 MPEG-2

Allo scopo di poter usare questo stesso standard per diversi contesti applicativi, sono stati definiti i quattro *livelli* qualitativi mostrati in tabella, e per ogni livello sono quindi definiti cinque profili (*simple, main, spatial resolution, quantization accuracy, high*) in modo da permettere lo sviluppo di nuove tecnologie. Il livello *Low* è compatibile con MPEG-1. Affrontiamo ora la descrizione di ciò che è offerto dal profilo *Main* al livello *Main* (MP@ML).

Livello	formato	bit rate (Mbps)	applicazione
MPEG-2			
Low	SIF	< 1.5	registrazione qualità VHS
Main	4:2:0	< 15	DVB - MP@ML
	4:2:2	< 20	
High 1440	4:2:0	< 60	HDTV 4/3
	4:2:2	< 80	
High	4:2:0	< 80	HDTV 16/9
	4:2:2	< 100	

**MP@ML** L'obiettivo è la diffusione televisiva DVB, con scansione interallacciata, risoluzione 720x576 a 25 quadri/secondo (PAL), sottocampionamento 4:2:0 per una velocità risultante tra i 4 ed i 15 Mbps. La principale differenza rispetto all'MPEG-1 è legata alla modalità di scan-

*TeoriadeiSegnali.it*

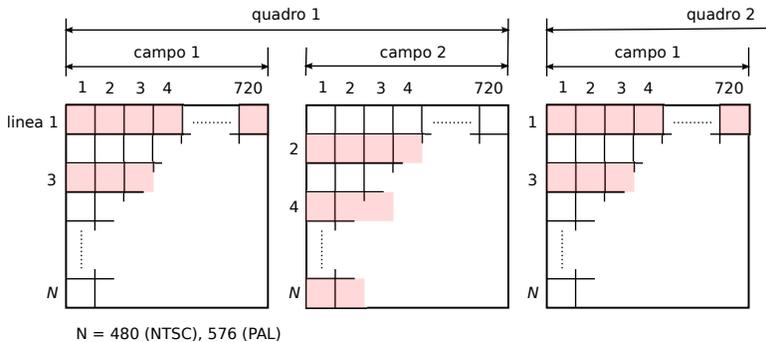


Figura 21.40: Effetto della scansione interlacciata in MPEG-2

sione *interlacciata*, in modo che come mostrato in fig. 21.40, ogni quadro è costituito da due sottoquadri (o *campi*) con le righe rispettivamente dispari e pari, ponendo la questione: come comporre i blocchi da 8x8 pixel su cui eseguire la DCT? Sono possibili due alternative:

- la *modalità campo* (fig. 21.41a) in cui i 16x16 pixel di un macroblocco sono ripartiti tenendo assieme prima le sole righe dispari del primo campo, e quindi le sole righe pari del secondo campo, oppure
- la *modalità quadro* (fig. 21.41b) in cui si usa la stessa suddivisione già vista per il caso non interlacciato, mescolando i due campi in ognuno dei blocchi.

La scelta migliore su quale tra le due modalità adottare dipende dal tipo di scena che si sta rappresentando. Se è presente molto movimento, è meglio adottare la modalità campo: essendo infatti i pixel di uno stesso blocco collezionati in un tempo pari a metà dell'intervallo di quadro (mentre nella seconda metà si collezionano i pixel della seconda serie di blocchi), si ottiene un *fotogramma meno mosso*; viceversa in presenza di una scena con poco movimento, può essere adottata la modalità quadro.

Per quanto riguarda la stima di movimento, sono ora previste tre possibilità: la *modalità campo* prevede che i campi dispari usino come riferimento i campi pari del quadro precedente, ed i campi pari quelli dispari dello stesso quadro: in tal modo l'intervallo temporale su cui è valutato il movimento è metà del periodo di quadro. Nella *modalità quadro* invece, i campi pari e dispari usano come riferimento i rispettivi campi pari e dispari del quadro precedente, ed è più idoneo nel caso di movimenti lenti. Il meglio di entrambi i modi si ottiene con la *modalità mista*, in cui sono attuati entrambi gli approcci, e viene scelto per la trasmissione quello in grado di dar luogo alla distorsione minore.

**HDTV** Sono definiti tre standard, ATV, DVB e MUSE, rispettivamente per il Nord America, l'Europa ed il Giappone, a cui si aggiunge la specifica HDTV di ITU-R relativa a studi di produzione e scambio internazionale, e che definisce un rapporto di aspetto 16/9 con 1920 colonne per 1152 righe (di cui solo 1080 visibili), con scansione interlacciata e sottocampionamento 4:2:2. ATV include le specifiche di ITU-R, oltre che un formato ridotto, sempre con aspetto 16/9 ma risoluzione 1280x720, e che adotta la codifica video MPEG-2 MP@ML e quella audio AC-3. Il DVB è basato su di un rapporto di aspetto 4/3 con 1440x1152 pixel (di cui 1080 visibili), pari cioè al doppio<sup>51</sup> della risoluzione PAL di 720x576. La codifica video è MPEG-2 SSP@H1440 (*Spatially*

<sup>51</sup>Si intende una risoluzione verticale ed orizzontale, mentre il rapporto tra le superfici è pari a 4 volte.

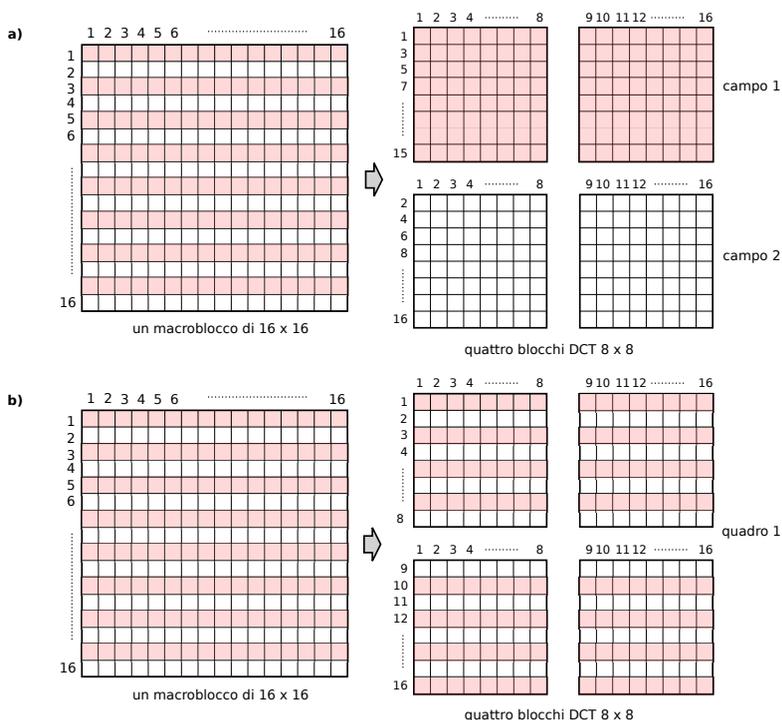


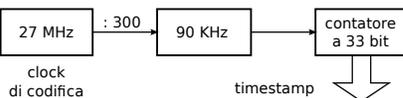
Figura 21.41: Composizione dei blocchi DCT per i quadri I di MPEG-2: a) modalità campo; b) modalità quadro

Scaleable Profile at High 1440), simile all'MP@ML, mentre la codifica audio è MPEG audio layer 2.

### 21.3.2 Contenitori

I flussi binari prodotti dai diversi codificatori (audio, video) prendono il nome di *Elementary Stream* (ES), e possono essere multiplati assieme per produrre un nuovo formato idoneo alla registrazione di un contenuto multimediale completo, eventualmente arricchito da un flusso di *dati privati*, come mostrato in fig. 21.42a per il caso di MPEG-1.

Prima di effettuare la moltiplicazione, gli ES sono suddivisi in *pacchetti* di dimensione variabile denominati *Packetized ES* (PES) in cui trova posto un *payload* contenente<sup>52</sup> il risultato della codifica (ad es. un intero quadro), preceduto da una *intestazione* contenente un codice univoco di inizio PES ed un codice che individua il tipo di payload del pacchetto (audio, video o dati). L'intestazione PES può inoltre contenere un riferimento temporale necessario alla sincronizzazione audio-video, con risoluzione 33 bit, prodotto dal clock a 90 kHz descritto in fig. 21.42 come *orologio di sistema*, e ottenuto a partire da un oscillatore a 27 MHz come mostrato alla figura a lato.



<sup>52</sup>Per un approfondimento, vedi [http://en.wikipedia.org/wiki/Packetized\\_elementary\\_stream](http://en.wikipedia.org/wiki/Packetized_elementary_stream)

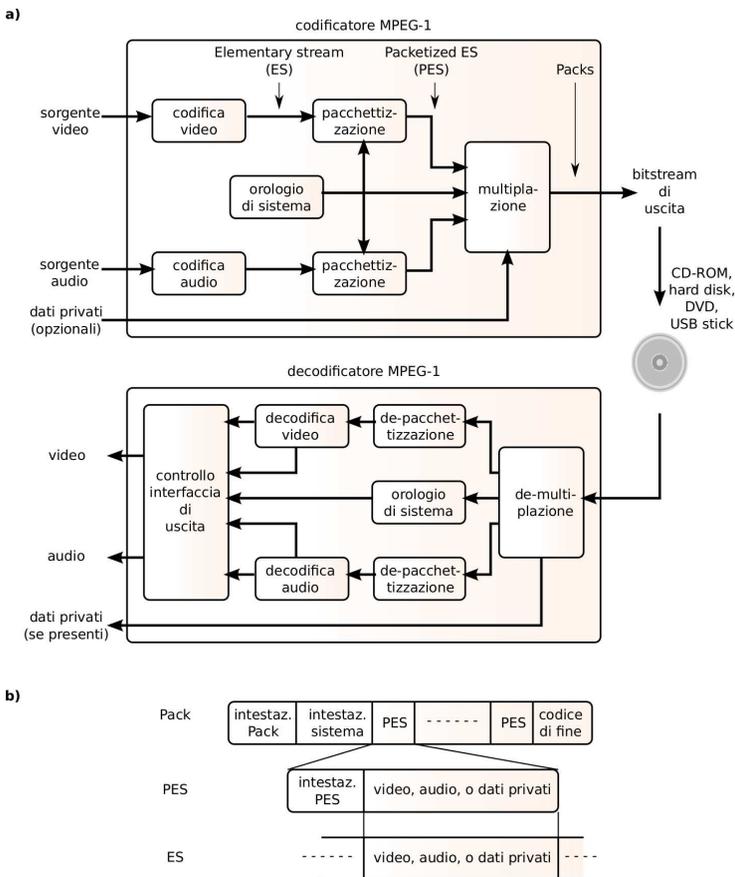


Figura 21.42: Generazione di un contenuto multimediale MPEG-1: a) co-decodificatore; b) formato del bistream di uscita

Nel momento in cui un ES è pacchettizzato, viene inserito un *presentation timestamp* (PTS) che ne individua l'istante di riproduzione; per i flussi video è inserito anche<sup>53</sup> un *decode timestamp* (DTS) perché come anticipato a pag. 632 l'ordine di trasmissione (e quindi di decodifica) può differire dall'ordinamento naturale.

I PES derivanti da diversi ES possono essere quindi inseriti in una struttura di trama detta *Pack*, che può infine essere memorizzata ai fini di una successiva riproduzione.

### 21.3.2.1 Transport Stream

Nel caso di trasmissione dei contenuti mediante un sistema broadcast, tipicamente il singolo *Program Stream* PS (equivalente a quello prima indicato come *Pack*) viene ulteriormente multiploato assieme ad altri, in modo da realizzare un *Transport Stream* (TS), come mostrato

<sup>53</sup>In realtà PTS e DTS non sono inseriti in tutti i pacchetti, ma una volta ogni tanto (con intervalli fino a 700 msec per i PS e 100 msec per i TS): il decoder rigenera infatti localmente il clock, ed i timestamp ricevuti servono a mantenerlo al passo con quello trasmesso.

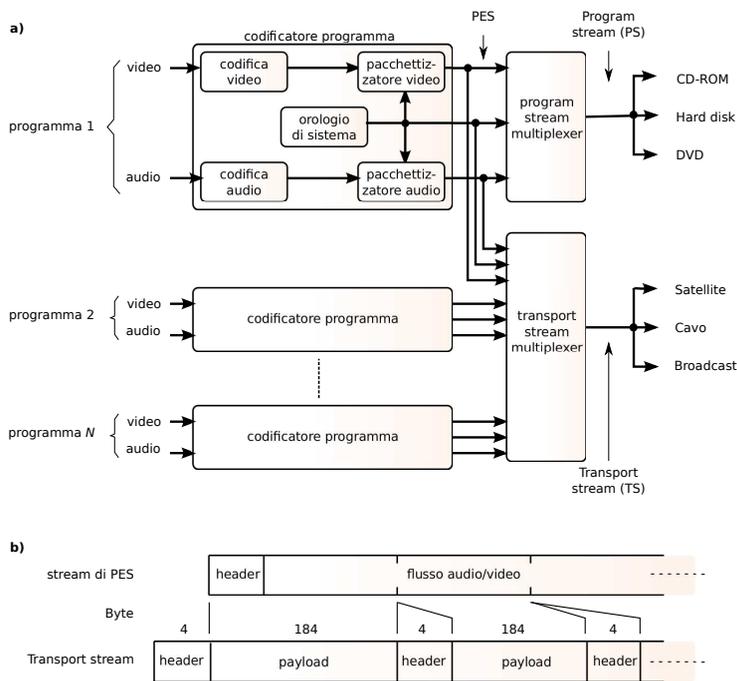


Figura 21.43: Multiplazione di programmi: a) generazione dei PS e TS; b) formato del Transport Stream

in fig. 21.43. In particolare, la parte b) della figura mostra come i PES siano ora suddivisi in segmenti di lunghezza fissa e pari a 184 byte, intestati con 4 byte, producendo una struttura di trama con pacchetti di 188 byte<sup>54</sup>; l'ultimo pacchetto del TS che origina da uno stesso PES è riempito con un byte fino a raggiungere i 188 byte. L'intestazione contiene, oltre ad un byte di inizio con pattern unico, un *Packet Identification code* (PID) di 13 bit, che identifica il PES a cui appartiene il pacchetto, permettendo al decoder di recuperare il programma a cui è interessato.

Alcuni PID sono riservati, come il PID 8191 che indica assenza di payload<sup>55</sup>, ed il PID 0, che annuncia l'inserimento nel payload della *Program Association Table* (PAT), la cui ricezione permette al decoder di conoscere quali PID sono utilizzati per individuare i diversi PES (audio, video) di uno stesso programma<sup>56</sup>. Questo avviene per mezzo delle *Program Map Table* (PMT) rappresentate in fig. 21.44: ogni riga della PAT individua infatti un nuovo PID, alla ricezione del quale, viene estratta dal payload la PMT che descrive i PID dei flussi che compongono il programma. Pertanto, quando uno spettatore seleziona un programma, il decodificatore cerca

<sup>54</sup>in realtà le intestazioni dei pacchetti del TS possono essere estese e contenere più di 4 byte: in questo caso, la dimensione del payload si riduce, in modo che il totale sia ancora 188.

<sup>55</sup>Un payload vuoto è in realtà comunque riempito di 184 bytes inutili, e viene inserito da parte del multiplexatore che realizza il TS per mantenere una riserva di banda che consenta di assecondare le fluttuazioni di velocità dei tributari.

<sup>56</sup>Altri PID riservati sono l'uno, che annuncia la presenza di una *Conditional Access Table* (CAT) contenente i parametri crittografici per visualizzare contenuti a pagamento, ed il PID 18, che annuncia la presenza della *Network Information Table* (NIT), che descrive altri TS disponibili. Per approfondimenti, vedi [http://en.wikipedia.org/wiki/Program-specific\\_information](http://en.wikipedia.org/wiki/Program-specific_information).

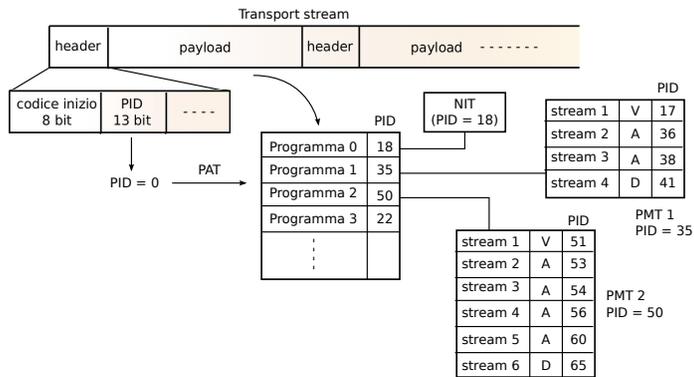


Figura 21.44: Estrazione della PAT e delle PMT dal Transport Stream

nella PAT il PID della PMT associata, e quindi inizia a prelevare i pacchetti intestati con ognuno dei PID trovati nella PMT, per ricostruire i relativi PES, sincronizzarli, ed iniziare la riproduzione.

# Bibliografia

**A.A. V.V.**, *Wikipedia, L'enciclopedia libera e collaborativa*, <http://it.wikipedia.org>

**A. Abrardo**, *Comunicazioni Radiomobili*,  
[http://www.dii.unisi.it/~abrardo/comunicazioni\\_radiomobili.pdf](http://www.dii.unisi.it/~abrardo/comunicazioni_radiomobili.pdf), URL  
consultato il 25/01/2016

**J. B. Anderson**, *Digital Transmission Engineering*, 2nd Edition, August 2005, Wiley-IEEE Press

**G. E. Agrawal**, *Coherent Optical Communications*, Third Edition, 2002 John Wiley & Sons, Inc.

**S. Barbarossa, T. Bucciereilli**, *Teoria dei Segnali*, Ingegneria 2000, Roma

**S. Benedetto, E. Biglieri**, *Teoria della Probabilità e Variabili casuali*, Quaderni di Elettronica,  
1980 Boringhieri

**C. A. Bentivoglio, A. Caldarelli**, *Tecniche e tecnologie multimediali*, 2007 EUM edizioni  
università di Macerata

**J. Bellamy**, *Digital Telephony*, 1991 John Wiley and Sons, New York

**G. Cancellieri**, *Telecomunicazioni*, 2000 Pitagora editrice - Bologna

**A. B. Carlson**, *Communication Systems*, 3<sup>rd</sup> Edition, 1986 Mc Graw Hill

**Marcello Chiodi**, *Richiami di algebra elementare delle matrici*,  
[http://dssm.unipa.it/chiodi/teaching/files/Statistica3\\_First/MLAmatrix2012.pdf](http://dssm.unipa.it/chiodi/teaching/files/Statistica3_First/MLAmatrix2012.pdf)  
URL consultato il 20/02/2016

**F. Cuomo**, *Telematica*, 2001 <http://net.infocom.uniroma1.it/tlem/lucidi/lucidi.php3>

**R. Cusani, T. Inzerilli**, *Teoria dell'Informazione e Codici*, Ed. Ingegneria 2000, 2007 Roma

**M. Decina, A. Roveri**, *Code e Traffico nelle Reti di Comunicazione*, 1991 Editrice La Goliardica  
- Roma

**M. Decina, A. Roveri**, *Introduzione alle Reti Telefoniche Analogiche e Numeriche*, 1989 Editrice  
La Goliardica - Roma

**M. G. Di Benedetto, P. Mandarini**, *Comunicazioni Elettriche*, 2000 Editrice La Goliardica -  
Roma

**G. Fedele**, *Complementi ed applicazioni di Teoria dei Segnali*, Ed. Ingegneria 2000, 1996 Roma  
*TeoriadeiSegnali.it*

- L. E. Franks**, *Signal Theory*, 1969 Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J.
- R. L. Freeman**, *Telecommunication System Engineering*, 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons
- T. T. Ha**, *Theory and Design of Digital Communication Systems*, Cambridge University Press 2011
- F. Halsall**, *Multimedia Communications*, 2001 Pearson Education Limited
- C. W. Helstrom**, *Probability and Stochastic Processes for Engineers*, 2<sup>nd</sup>, 1991 Macmillan Publishing Company
- N. S. Jayant, P. Noll**, *Digital Coding of Waveforms*, 1984 Prentice-Hall, N.J.
- D. Leon, W. Couch**, *Fondamenti di telecomunicazioni*, 2004 Apogeo
- S. Lin, D.J. Costello Jr.**, *Error Control Coding: Fundamentals and Applications*, 1983 Prentice-Hall, Englewood Cliff, N.J.
- M. Listanti, A. Roveri**, *Comunicazioni Dati*, Appunti
- M. Luise, G. M. Vitetta**, *Teoria dei segnali, seconda edizione*, 2003 McGraw-Hill
- P. Mandarini**, *Teoria dei Segnali*, 1979 Editrice La Goliardica - Roma
- A. V. Oppenheim, R. W. Shafer**, *Digital Signal Processing*, 1975 Prentice Hall, NJ
- C. D. Pagani, S. Salza**, *Analisi Matematica 1*, 2015 Zanichelli
- A. Papoulis**, *Probability, Random variables, and Stochastic Processes*, 1991 McGraw-Hill Int.Eds.
- B. Peroni**, *Comunicazioni Elettriche*, Ed. Scientifiche Siderea, 1973 Roma
- A. Perotti**, *Introduzione alle Comunicazioni Radiomobili*,  
<http://www.tlc.polito.it/~perotti/it/tcr/book.pdf>, URL consultato il 25/01/2016
- G. M. Poscetti**, *Elementi di teoria dell'informazione*, Ed. Ingegneria 2000, 1996 Roma
- J.G. Proakis, M. Salehi**, *Communication systems engineering 2<sup>nd</sup> Ed.*, 2002 Prentice-Hall
- T.S. Rappaport**, *Wireless Communications: Principles and Practice, Second Edition*, Prentice Hall, 2002
- U. Reimers**, *Digital Video Broadcasting*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2001
- F. Rocca**, *Elaborazione Numerica dei Segnali*, Edizioni CUSL Milano 1998
- A. Roveri**, *Reti di telecomunicazione*, Appunti
- M. Schwartz**, *Information Transmission, Modulation, and Noise*, 4<sup>th</sup> Edition, 1990, Mc Graw Hill
- C. Shannon, W. Weaver**, *La teoria matematica delle comunicazioni*, 1949 Univ. of Illinois, 1971 Gruppo Editoriale Fabbri

- 
- W. Stallings**, *Trasmissione Dati e Reti di Computer*, Jackson Libri 2000, titolo originale Data & Computer Communications 6<sup>th</sup> Edition, 2000 Prentice Hall
- R. Steele**, *Mobile Radio Communications* 1992 Pentech Press London, 1994 IEEE press NJ
- F. G. Stremler**, *Communication Systems*, 1990 Addison-Wesley
- A. S. Tanenbaum**, *Reti di Computer*, 1989 Gruppo Editoriale Jackson
- H. Taub, D. L. Schilling**, *Principles of Communication Systems*, 1986 Mc Graw Hill
- J. Watkinson**, *The MPEG handbook*, 2001 Focal Press



# Indice analitico

- a basso indice
  - FM, 294
- accesso multiplo, 250, 413
- ACK (*acknowledgment*), 234
- ADM (*add and drop multiplexer*), 573
- ADM ottico, 509
- ADPCM, 604
- ADSL, 510, 589
- aliasing, 79
  - temporale, 93
- AMI (*alternate mark inversion*), 206
- amplificazione ottica, 506
- analisi via sintesi, 612
- antenna, 473
- architettura protocollare, 537
- ARP (*address resolution protocol*), 551
- ARQ (*automatic repeat request*), 225
- ASCII, 247
- assorbimento
  - atmosferico, 477
  - terrestre, 475
- attenuazione
  - chilometrica (cavo), 467
  - chilometrica (fibra), 501
  - di spazio libero, 474
  - disponibile, 464, 475
  - supplementare, 464, 481, 501
- autocorrelazione, 139, 154, 612
  - all'uscita di un filtro, 175
  - per segnali periodici, 140
  - proprietà, 140
- autovalori e autovettori, 132
- AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), 214, 357
  
- back-off, 192
- banda
  - di coerenza, 489
  - di guardia, 252
  - di rumore, 302
  - larghezza di, 150, 252
  - laterale doppia, 272
  - laterale ridotta, 275
  - laterale unica, 265, 274
- base ortonormale, 44
- baud, 200
- Bayes (teorema di), 103
- Bessel
  - funzione di, 289
  - funzione modificata di, 309
- bit, 334
  - di start e di stop, 240
  - stuffing, 243, 572
- Boltzman (costante di), 196
- BPSK (*bi-phase shift keying*), 377
- BRAS (*broadband remote access server*), 590
- BRI (*basic rate interface*), 587
- broadcast
  - dominio di, 554
  - Ethernet, 551
  - FM, 596
  - trasmissione, 250
- BSC (*binary symmetric channel*), 351
- buffer, 537
  - FIFO, 637
  
- cambio di scala, 17
- cammini multipli, 419, 476, 478, 484, 490
- campionamento, 7
  - del colore, 623
  - dell'impulso, 61
  - filtro adattato, 163
  - in frequenza, 92
  - PCM, 569
  - precisione, 208
  - restituzione D/A, 80
  - spaziale, 619
  - teorema del, 77
- canale
  - AWGN, 357
  - equivalente, 324

- numerico, 5
  - trasmissione su, 199
- perfetto, 183, 187
- radiomobile, 492
- simmetrico binario, 351
- telefonico, 251
- variante nel tempo, 490
- virtuale, 535
- canali televisivi, 511
- capacità di canale
  - continuo, 357
  - discreto, 355
  - OFDM, 406
  - simmetrico binario, 356
- cardinale
  - interpolazione, 77
  - seno, 78
- Carson (regola di), 291
- CAS (*channel associated signaling*), 570
- causalità, 23
- cavo
  - coassiale, 471
  - linea aerea, 470
  - ritorto, 470
- CCS (*common channel signaling*), 570
- CDM (*code division multiplex*), 408
- CDMA (*code division multiple access*), 413
- CDN (*circuito diretto numerico*), 567
- CELP (*code excited linear prediction*), 615
- centralinista, 568
- centralino, 519
- cerchio unitario, 91
- circuito
  - commutazione di, 535
  - elettrico, 429
  - virtuale, 508, 535
- classless interdomain routing, 549
- Clos (condizione di), 583
- coda di attesa, 528
  - lunghezza media, 530
  - tempo medio, 531
- codebook, 227, 362
  - adattivo, 615
  - da quantizzazione vettoriale, 614
  - di Hamming, 365
  - di Huffman, 630
- codeword, 227, 362
- codice
  - a ripetizione, 229
  - BCH, 369
  - bipolare, 206
  - ciclico, 368
  - convoluzionale, 369
  - di Gray, 220
  - di linea, 205
  - di Reed-Solomon, 369
  - differenziale, 207
  - lineare a blocchi, 227, 363
  - Manchester, 206
  - polinomiale, 232, 368
  - sistematico, 364
- codice di canale, 361
- codifica
  - a predizione lineare (LPC), 609
  - a velocità variabile, 636
  - audio, 603
  - binaria, 337
  - di canale, 227, 350
  - di forma d'onda, 604
  - di Huffman, 340
  - di immagine, 619
  - di linea, 199, 201
  - di sorgente, 333
    - continua, 348
    - multimediale, 603
    - teorema della, 337
  - differenziale, 391
    - DPCM, 604
    - JPEG, 628
    - OFDM, 405
  - entropica (JPEG), 628
  - PCM, 85
  - per blocchi, 341
  - per sottobande, 606
  - predittiva, 345
  - psicoacustica, 616
  - run-length, 345
    - JPEG, 629
  - tasso di, 229
  - video, 630
- collegamento
  - bilancio di, 463
  - in cavo, 465
  - in diversità, 480
  - in fibra ottica, 498
  - radio, 472
  - radiomobile, 481
  - satellitare, 598
- collisione, 553
- colore
  - profondità di, 622
  - sottocampionamento del, 623
- colori
  - immagini a, 619
  - spazio dei, 621
  - TV a, 595
- commutazione
  - a divisione di spazio, 509, 583
  - a divisione di tempo, 584
  - di circuito, 535, 568
  - di lunghezza d'onda, 510
  - di pacchetto, 528, 535, 536, 567
  - principio di, 535
  - telefonica, 583
- componente continua, 141, 143
- componenti analogiche di bassa frequenza, 255
- compressione basata su dizionario, 346

- compromesso
  - banda - potenza, 8, 218, 316, 359, 380, 382, 396
  - velocità - distorsione, 7, 348
  - velocità - ritardo, 343
- congestione, 536, 537
- controllo
  - di congestione, 547
  - di errore, 547
  - di flusso, 237, 536, 547
- conversione
  - di lunghezza d'onda, 509
- convertitore D/A, 82
- convoluzione, 62
  - circolare, 96
  - con l'impulso traslato, 63
  - costruzione grafica, 63
  - discreta, 95, 176, 449
  - via DFT, 96
- correlatore, 169
  - banco di, 394
- correlazione, 136
  - coefficiente di, 169
  - di un processo ergodico, 138
- costante di propagazione, 465
- covarianza, 137
  - matrice di, 132
- CPK (*continuous phase keying*), 418
- CRC (*cyclic redundancy check*), 231
- crominanza, 621
  
- d.d.p. o *densità di probabilità*, 104
- DAC (*digital to analog converter*), 82
- datagramma, 536
- DBPSK, 391
- DCT (*discrete cosine transform*), 94, 625
- decibel, 184
- decisione
  - Bayesiana, 351
  - di massima prob. a posteriori, 352
  - di massima verosimiglianza, 351
- decodifica
  - di massima verosimiglianza, 371, 457
  - di Viterbi, 371
- delay locked loop, 420
- delta di Kronecker, 44
- demodulatore
  - a correlazione, 394
  - a discriminatore, 287, 313
  - coerente o omodina, 276
  - di inviluppo, 280
  - in fase e quadratura, 255, 279
- demodulazione
  - BLU e BLR, 280
  - del rumore, 303
  - di ampiezza, 276
  - di frequenza, 286
    - effetto soglia, 316
  - eterodina, 281
  - incoerente, 279, 397
    - di sinusoidale, 310
  - supereterodina, 282
- densità
  - di energia
    - di un rect, 69
    - spettro di, 56
  - di potenza, 141
    - del rumore demodulato FM, 314
    - di segnale AM, 272
    - di segnale FM ad alto indice, 292
    - di segnali passa-banda, 259
    - di un processo dati, 172
    - per modulazione angolare, 288
  - di probabilità, 104
    - del prodotto di v.a. indipendenti, 154
    - della somma di v.a. indep., 153
- detezione di sinusoidale, 310
- DFT (*discrete Fourier transform*), 88, 403
- diafonia, 468
- diagramma
  - a traliccio, 371
  - ad occhio, 202
    - apertura orizzontale, 212
    - in presenza di rumore, 219
  - di transizione, 370
- diffrazione, 476
- diffusione troposferica, 476
- dimensione campionaria, 128, 129
- dispersione
  - cromatica, 502, 507
  - del modo di polarizzazione, 502
  - modale, 500
  - potenza-ritardo, 488
  - temporale, 487
- distanza
  - del codice, 227, 362, 364
  - di Hamming, 227
- distorsione, 249
  - di ampiezza, 188
  - di non linearità, 191
  - di tempo di transito, 189
  - lineare, 187
    - assenza di, 187, 432
    - per segnali modulati, 329
  - non lineare, 197
    - per segnali modulati, 330
- distribuzione (funzione di), 104
- disturbi additivi (combinazione dei), 194
- diversità
  - di frequenza, 480
  - di spazio, 480, 495
  - selezione di, 495
- divisore modulo N, 296
- DLL (*delay locked loop*), 420
- DMT (*discrete multi tone*), 590
- DNS (*domain name service*), 543
- doppietto, 68

- Doppler
  - dispersione, 491
  - effetto, 491
- downlink, 600
- DPLL (*digital phase locked loop*), 241
- DSLAM (*digital subscriber line access multiplexer*), 590
- DSSS (*direct sequence spread spectrum*), 410
- DTFT (*discrete time Fourier transform*), 87
- DWDM (*dense wavelength division multiplex*), 507
- DXC (*digital cross connect*), 579
  
- Eb/No, 217
  - SNR per bit, 380
- effetto
  - Doppler, 491
  - Kerr, 502
  - near-far, 414
  - pellet, 467
  - valanga, 505
- efficienza
  - del selective repeat, 236
  - del send and wait, 234
  - dell'OFDM, 403
  - della codifica di canale, 229
  - della codifica di sorgente, 338
  - di AM-PI-PPS, 274
  - di giunzione, 526
  - spettrale, 380
- elastic store, 574
- elementary stream, 642
- energia, 14
  - di segnale limitato in banda, 80
  - mutua, 55, 139
- enfasi e de-enfasi, 318
- entropia, 335
  - a blocco, 344
  - condizionale, 354
  - condizionata, 344
  - di sorgente binaria, 336
  - di sorgente continua, 349
  - differenziale, 349
- equalizzatore
  - DFE, 456
  - LMS, 455
  - MLSD, 457
  - MMSE, 450
  - zero forcing, 448
- equalizzazione, 188, 212, 446
  - complessa, 323
  - delle componenti analogiche, 323
  - OFDM, 405
- equivocazione, 354
- erfc{ }, 215, 217
  - definizione, 108
- Erlang, 520
  - formula B, 526
  
- errore
  - controllo di, 225
  - correzione di, 227
  - detezione di, 230
  - di fase o frequenza, 278
  - di predizione, 610, 633
  - nelle trasmissioni di banda base, 213
- esponenziale, 19
  - complesso, 20
- Ethernet, 551
  - gigabit, 554
- Eulero, formule di, 30
- evento, 101
  - completamente casuale, 521
  - statisticamente indipendente, 104
  
- fading, 480, 481
  - di Rayleigh, 485
  - di Rice, 487
  - durata media, 486
  - piatto, 484
  - selettivo in frequenza, 487
  - su larga scala, 483
  - su piccola scala, 484
- fase lineare, 58, 178, 187
- fasori, 31
  - coefficienti di Fourier come, 34
- fattore di rumore, 438
  - per reti in cascata, 440
- FEC (*Forward error correction*), 225
- fenomeno aleatorio, 101
- FEXT (*far end crosstalk*), 468
- FFT (*fast Fourier transform*), 93, 403
- filtraggio, 64
  - di segnali e processi, 147
  - numerico, 95
  - passa banda, 321
  - percettivo, 613
- filtro, 22
  - a banda minima, 211
  - a coseno rialzato, 210
  - a fase lineare, 190
  - a radice di coseno rialzato, 223
  - adattato, 163, 222
  - analogico, 160
  - anti-aliasing, 79
  - di canale, 251
  - di feedback, 457
  - di Hilbert, 263
    - risposta impulsiva, 264
  - di restituzione, 79–81
  - di Wiener, 450
  - digitale o numerico, 154
  - FIR, 155, 177
  - IIR, 158, 177
  - numerico, 176
    - forma canonica, 178
    - forma diretta, 178
  - ottico, 508

- passa banda ideale, 324
- passa basso, 161
- sbiancante, 167, 611
- sintesi di un, 156, 179
- trasversale, 155
- finestra scorrevole, 238, 546
- finestratura, 67
  - della risposta impulsiva, 176
  - nella stima spettrale, 72, 146
- flag byte, 243, 569
- FM, 254, 288
- footprint, 600
- forma quadratica, 133
- formanti, 608
- Fourier
  - serie di, 32
  - troncamento, 37
  - trasformata di, 53
  - proprietà, 56
  - trasformata discreta di, 88
- frequenza
  - deviazione di, 315
  - di interarrivo, 521
  - di riga, 593
  - di servizio, 524
  - di simbolo, 200, 204
  - di taglio, 162
  - Doppler, 491
  - immagine, 283
  - istantanea, 285
- frequenze radio, 511
- Fresnel
  - ellissoidi di, 476
- Friis
  - equazione di, 475
  - formula di, 441
- FTTH, 566
- FTTx, 510
- funzione caratteristica, 110
- funzione di trasferimento, 160
- gaussiana, 107
  - bidimensionale, 308
  - multidimensionale, 119
- Gibbs, fenomeno di, 38
- GIF, 624
- GMSK, 418
- GOB (*Group of (macro)Blocks*), 635
- GOP (*group of pictures*), 631, 635
- GPRS (*general packet radio service*), 566
- gradiente
  - discesa del, 454
  - stocastico, 455
- grado di servizio, 464
- GSM, 250, 566
  - codec, 613
- guadagno
  - di potenza, 149
  - di processo, 411
  - di sistema, 464
  - disponibile, 434
- H.261, 635
- H.263, 637
- Hamming
  - codice di, 365
  - distanza di, 227
- Hartley
  - modulatore di, 275
- HDB3, 207
- HDTV, 641
- Heaviside (condizione di), 466
- Hilbert
  - filtro di, 263
  - spazio di, 42
  - trasformata di, 263
- Huffman (codifica di), 340
- ibrido telefonico, 585
- IDFT, 90
- immagazzinamento e rilancio, 536
- impedenza caratteristica, 465
- impulso
  - dati, 201
  - di Nyquist, 209
- impulso matematico, 59
- incapsulamento, 539
- incorrelazione, 138
- indice di modulazione
  - angolare, 289, 293, 316
  - di ampiezza, 273
- indice di rifrazione, 499
- indipendenza statistica, 104, 120, 137
- infiltrazione spettrale, 74
- informazione
  - misura di, 334
  - mutua media, 353
- instradamento, 535, 536
  - di lunghezza d'onda, 508, 510
- integrate and dump, 166
- intelligent network, 587
- intercorrelazione, 139
- interferenza
  - intersimbolica, 191, 202, 208, 209, 400, 418, 500
  - multiutente, 414
- interleaving, 230, 367
- intermodulazione
  - componenti analogiche di b.f., 322
  - fattore di, 193
- Internet, 541
  - indirizzi, 542
- intervallo
  - di confidenza, 126, 129
  - di predizione, 631
- intracoded frame, 631
- invarianza della risposta impulsiva, 179
- involuppo complesso, 253

- traiettorie, 383
- IP, 548
  - sottoreti, 543
- ipotesi, verifica di, 122
- ISDN, 587
- ISI, *vedi* interferenza intersimbolica 209
- istogramma, 105
- giacobiano, 119
- JPEG, 625
- Kraft, disuguaglianza di, 339
- L-ASK, 379
- L-FSK, 393
- L-PSK, 382, 386
- LAN switch, 554
- Laser, 503
- LED (*Light Emitting Diode*), 503
- Lempel-Ziv-Welsh, compressione di, 346
- Little, risultato di, 528
- livello
  - di confidenza, 126
  - di significatività, 122
- Lloyd-Max, algoritmo di, 85
- LOS (*line of sight*), 475
- LPC (*linear predictive coding*), 609
- luminanza, 621
- lunghezza d'onda, 252
  - ottica, 498
- margini
  - di Rayleigh, 485
  - di sistema, 464
- mascheramento uditivo, 616
- massima verosimiglianza
  - decisione di, 123, 163, 214
  - per sequenze, 458
  - stima di, 124
- massimo trasferimento di potenza, 432, 461
- matrice
  - definita positiva, 454
  - di controllo parità, 366
  - di covarianza, 132
  - diagonale, 133
  - generatrice, 364, 368
  - semidefinita positiva, 133
  - simmetrica, 132
- media
  - campionaria, 125
  - di insieme, 112
  - frequenza, 281
  - quadratica, 112, 114
  - temporale, 112, 113
- mezzo trasmissivo, 463
- minima energia per bit, 359
- mixer, 276, 294
- MJPEG, 630
- MMSE (*minimum mean square error*), 450
- modello two-ray ground-reflected, 479
- modem, 252
- modulazione, 58, 66, 254
  - a traliccio, 418
  - angolare, 284
  - BPSK, 377
  - coerente, 422
  - di ampiezza, 271
    - prestazioni, 304
  - FM a basso indice, 298
  - FSK incoerente, 397
  - incoerente, 423
  - L-FSK, 393
    - $\pi/4$ , 417
  - numerica, 377
  - OFDM, 398
  - OOK, 397
  - QAM, 387
  - QPSK, 382
    - sfalsata, 417
- modulazione di frequenza, 254
- momento, 106
  - centrato, 107
  - misto, 110, 136
- MP3, 617
- MPEG-1, 639
- MPEG-2, 640
- MPLP (*multi pulse linear prediction*), 613
- MSK (*minimum shift keying*), 417
- multicast, 550
- multipath, 478
- multiplazione, 567
  - a divisione di
    - codice, 408
    - frequenza, 250, 251
    - lunghezza d'onda, 506
    - tempo, 534, 567
  - add and drop, 573, 574
  - asincrona, 572
  - ottica, 509
  - schema di, 534
- NACK (*negative acknowledgment*), 234
- NEXT (*near end crosstalk*), 468
- non linearità, 295
- NRZ (*No Return to Zero*), 205
- Nyquist
  - condizioni di, 209
  - criterio di, 209
  - filtro di, 210
  - frequenza di, 210
  - impulso di, 209
  - velocità di, 77
- OAM (*Operation, Administration, Maintenance*), 576
- OFDM, 398
  - codificato, 407
  - densità di potenza, 401

- equalizzazione, 405
  - modem, 402
  - prestazioni, 423
- onda
  - diretta, 475
  - PAM, 201, 591
    - densità spettrale, 171
- OQPSK, 417
- ortogonalità
  - degli esponenziali complessi, 39
  - tra simboli sinusoidali, 422
  - tra sinc, 80, 401
- oscillatore a cristallo, 296
- oscillazione uniforme in frequenza, 176
- OTN (*optical transport network*), 510
- overlap and add, 97
- OXC (*optical cross-connects*), 509
  
- p-value, 122
- pacchetto
  - dati, 533
  - Ethernet, 552
  - fuori sequenza, 546
- palette, 622
- parità
  - bit di, 230, 240
  - matrice di controllo, 364
- Parseval, teorema di
  - per segnali di energia, 56
  - per segnali di potenza, 38
- path loss, 482
- PCM
  - G.711, 86, 603
  - struttura di trama, 568
- PDH (*plesiochronous digital hierarchy*), 572
- PDU (*protocol data unit*), 539
- percentile, 126, 127
- periodogramma, 145
- PES (*packetized elementary stream*), 642
- pitch, 607
- pixel, 619
- Plank, costante di, 196
- PLL, 277, 296
  - ricevitore a, 286, 394
- PNG, 624
- Poisson, somma di, 71
- polinomio
  - caratteristico, 132
  - generatore, 232, 368
- PON (*passive optical network*), 510
- ponte radio, 250
- POP (*point of presence*), 580
- portante
  - di colore, 594
  - intera, 273
  - parzialmente soppressa, 273
  - pilota, 408
  - ricostruzione per quadratura, 277
  - sintesi di, 296
  - soppressa, 272
- potenza, 13
  - assorbita da un bipolo, 431, 460
  - attiva, 461
  - ceduta ad un carico, 461
  - del rumore, 214
  - di picco, 273
  - di segnale, 429
  - di un coseno, 14, 40
  - di un processo, 112, 114
  - di un segnale AM, 276
  - di un segnale AM BLU, 298
  - disponibile, 432
  - entropica, 350
  - istantanea, 14, 273
  - ricevuta, 216
- POTS (*plain old telephony services*), 585
- predittore, 610
  - a lungo termine, 614
  - bidirezionale, 631
- PRI (*Primary Rate Interface*), 587
- probabilità
  - a posteriori, 103
  - assiomi, 101
  - condizionata, 102, 215
    - come verosimiglianza, 123
  - congiunta, 103
  - densità di, 104
  - di blocco, 520
  - di detezione, 312
  - di errore
    - ASK, 381
    - DBPSK, 393
    - filtro adattato, 167, 168
    - FSK, 396
    - OFDM, 423
    - OOK e FSK incoerente, 398
    - per parola, 225
    - PSK, 386
    - QAM, 390
    - QPSK, 385
    - residua, 228
    - sul bit, 221, 223
    - sul simbolo, 215, 217
  - di falso allarme, 311
  - di perdita, 311
  - di rifiuto, 524
  - di ritardo, 530, 531
  - teoremi di base, 102
  - teoria delle, 101
- processo
  - ad aleatorietà parametrica, 115
  - aleatorio, 111
  - armonico, 116, 143
  - di ingresso, 523
  - di innovazione, 614
  - di nascita e morte, 524
  - ergodico, 113
  - gaussiano, 121

- gaussiano (demodulazione), 303
- gaussiano bianco limitato in banda, 144, 268
- in banda traslata, 266
- prodotto, 153
- somma, 152
- stazionario, 113
  - in senso lato, 113
- prodotto
  - banda-lunghezza, 503
  - di processi, 153
  - Hermitiano, 132
  - scalare, 44
- propagazione
  - condizioni di, 475
  - luminosa, 499
- prove ripetute, 520
- pseudo-noise (sequenza), 409
- PSTN, 585
- punto-multipunto, 250
- punto-punto, 250
  
- QAM, 387
- QPSK, 382, 384
- quantizzazione, 7, 83
  - a rampa lineare, 82
  - adattiva, 605
  - della DCT, 627
  - logaritmica, 85
  - sensibilità, 178
  - SNR di, 84
  - uniforme, 83
  - vettoriale, 614
  
- Rayleigh
  - fading di, 485
  - variabile aleatoria, 308
- regola del prefisso, 339
- RELP, 612
- rete
  - ATM, 556
  - di accesso, 566
  - di trasporto, 580
  - in fibra ottica, 579
    - anello, 582
    - protezione, 580
  - ottica, 508
    - di trasporto, 510
    - passiva, 510
    - sincrona, 574
    - plesiocrona, 568
    - telefonica, 565
    - topologia, 578
- reti
  - due porte, 432
  - ingegneria delle, 519
- rettangolo, 19
- RGB (*Red, Green e Blue*), 621
- ribaltamento dell'asse dei tempi, 17
  
- ricevitore
  - multi-antenna, 495
  - omodina, 276
  - ottimo, 222
  - Rake, 497
- ridondanza, 6
  - ciclica, 232
  - delle fibre ottiche, 580
  - di diversità, 480
  - di sorgente binaria, 336
  - nella codifica di canale, 227, 350, 361
  - OFDM, 403, 407
- riflessione ionosferica, 477
- ringback, 586
- ripetitore, 445
- riscontro, 546
- risoluzione
  - spaziale, 596
  - spetttrale, 74, 146
- risonanza, 608
- risposta
  - di fase, 178
  - impulsiva, 61, 63
  - in frequenza, 23, 65
- ritardo, 151
- roll-off, coefficiente di, 210
- round trip time, 238
- routing, 508, 535, 549, 582
- RPE-LTP, 613
- rumore
  - additivo, 200
  - bianco limitato in banda, 213
  - dopo demodulazione FM, 313
  - nei ripetitori, 443
  - nelle reti due porte, 436
- RZ (*Return to Zero*), 206
  
- s-video, 596
- sample and hold, 80
- saturazione, 192
  - della d.d.p., 110
- SCART, 596
- scattering, diagramma di, 136
- Schwartz, disuguaglianza di, 43, 46
- SDH, 574
  - dispositivi, 579
  - trama, 575
- SDU (*service data unit*), 539
- segnalazione
  - a canale comune, 570
  - antipodale, 168
  - associata al canale, 570
  - ortogonale, 168
- segnale
  - a banda stretta, 326
  - a durata limitata, 15
  - analitico, 258
  - dati, 199, 201
  - generazione, 204

- limitato in banda, 207
  - processo di, 116, 144
- di cromaticità, 595
- di energia, 14
- di potenza, 13
- impulsivo, 15
- modulato, 253
- modulato (filtraggio), 321
- passa-banda, 259
- periodico, 13
  - rettangolare, 35
- utile, 183
- video composito, 596, 622
- vocale, 607, 608
- selective repeat, 236
- send and wait, 234
- seno cardinale, 19
- sensibilità
  - del ricevitore, 463
  - e velocità nelle f.o., 505
- sequenza
  - numero di, 239
- serie trigonometrica, 35
- sfarfallamento, 593
- shadowing, 483
- Shannon
  - primo teorema di, 337
  - secondo teorema di, 355
- Shannon-Hartley
  - legge di, 358
  - limite di, 396
- signaling system n. 7, 587
- simmetria Hermitiana
  - dell'autocorrelazione, 141
  - della serie di Fourier, 33
  - della trasformata di Fourier, 56
  - per un passabanda, 329
- sinc
  - definizione, 19
  - ortogonalità, 80
- sincronizzazione, 420
  - della cromaticità, 596
  - di bit, 243
  - di bit e di parola, 240
  - di carattere, 242
  - di centrale, 571
  - di portante, 276
  - di rete, 573
  - di sequenza PN, 420
  - di simbolo, 241
  - di trama, 241
- sindrome, 366
- sintesi
  - di frequenza, 296
- sinusoide, 18
- sistema
  - a coda
    - finita, 530
    - infinita, 529
  - autonomo, 550
  - di servizio
    - orientato al ritardo, 528
    - orientato alla perdita, 523
  - lineare e permanente, 22
- Snell, legge di, 499
- SNR, 2, 217, 301
  - di quantizzazione, 84
  - di riferimento, 304, 380
  - dopo demodulazione AM, 305
  - dopo demodulazione FM, 315
  - nei ripetitori, 444
  - per disturbi indipendenti, 195
- soft decision decoding, 367
- soglie di decisione, 214
- somma
  - di controllo, 231
  - di processi, 152
  - di v.a. indipendenti, 110, 153
- sondaggio, 129
- SONET, 574
- sonogramma, 609
- sorgente
  - con memoria, 343
  - continua con memoria, 350
  - Markoviana, 344
  - senza memoria, 334
- sottocampionamento, 99
- sovracampionamento, 80
- spazio
  - campione, 101
  - dei colori, 621
  - dei segnali, 40
  - normato, 41
- spettro di potenza
  - per segnali dati, 201
  - per segnali periodici, 39
- spread spectrum, 408
  - frequency hopping, 416
  - sequenza diretta, 410
- Stabilità, 23
- stabilità, 178
- statistica, 122
  - del secondo ordine, 135
- stima
  - della varianza, 606
  - di autocorrelazione, 154, 610
  - di forma d'onda, 131
  - di intervallo, 126
  - di movimento, 632
  - di parametro, 123
  - di periodo, 611
  - spettrale, 145
    - LPC, 611
- STM-1, 575
- stratificazione ISO-OSI, 538
- subnetting, 549
- sviluppo in frazioni parziali, 179
- SYN, 242

- tasso di codifica, 362  
 TCM (*Trellis coded modulation*), 418  
 TCP, 545  
 temperatura  
   di antenna, 601  
   di sistema, 437  
 tempo  
   di coerenza, 492  
   di guardia, 400  
   di ritardo di gruppo, 328, 332  
 teorema  
   centrale del limite, 108  
   del campionamento, 77  
   di Wiener, 141  
 teoria dell'informazione, 333  
 three way handshake, 546  
 traffico  
   a valanga, 527  
   dolce, 520  
   intensità media, 524  
   offerto, 520  
   smaltito, 526  
 transponder, 599  
 transport stream, 643  
 trasformata  
   di Fourier, 53  
   discreta coseno, 625  
   zeta, 91, 176  
 trasformata di  
   costante, 60  
   derivata, 67  
   integrale, 68  
   segnale periodico, 60, 70  
   sequenze, 87  
   un gradino, 75  
   un rettangolo, 54  
   un sinc, 57  
   un treno di impulsi, 70  
   un triangolo, 68  
 trasformazione bilineare, 180  
 traslazione  
   in frequenza, 58  
   nel tempo, 57  
 traslazione temporale, 16  
 trasmissione  
   a circuito, 565  
   asincrona, 240  
   dati (in banda base), 199  
   dati (reti per), 533  
   FM broadcast, 596  
   multilivello, 203  
   numerica, 5  
   numerica (dimensionamento), 221  
   sincrona, 241  
   televisiva, 593  
 treno  
   di impulsi, 69, 78  
   di impulsi rettangolari, 81  
 triangolo, 19  
 TSI (*Time Slot Interchanger*), 584  
 UDP, 547  
 UNICODE, 247  
 uplink, 598  
 valore  
   atteso, 106, 112  
   efficace, 14, 114  
   medio, 112  
 valore medio, 12  
 variabile aleatoria, 104  
   di Bernoulli, 520  
   di Poisson, 521  
   di Rayleigh, 308  
   di Rice, 309  
   di Student, 127  
   dicotomica, 129  
   esponenziale negativa, 522  
   gaussiana, 107, 214  
   multidimensionale, 119, 308  
   indipendenti e identicamente distribuite, 108  
   multivariata, 109  
   trasformazioni di, 116  
   uniforme, 107  
 varianza, 107, 114  
   campionaria, 125  
 VCO (*voltage controlled oscillator*), 277, 286  
 verifica di ipotesi statistica, 351  
 verosimiglianza  
   funzione di, 123  
   rapporto di, 351  
 VGA (*Video Graphics Array*), 619  
 virtual container, 577  
 Viterbi, algoritmo (o decodifica) di, 371  
 VLAN (*virtual LAN*), 554  
 VPN (*virtual private network*), 567  
 WDM (*wavelength division multiplex*), 506  
 Weaver, modulatore di, 275  
 Wiener (teorema di), 141  
 Wiener-Hopf (equazioni di), 451  
 Yule-Walker (equazioni di), 611