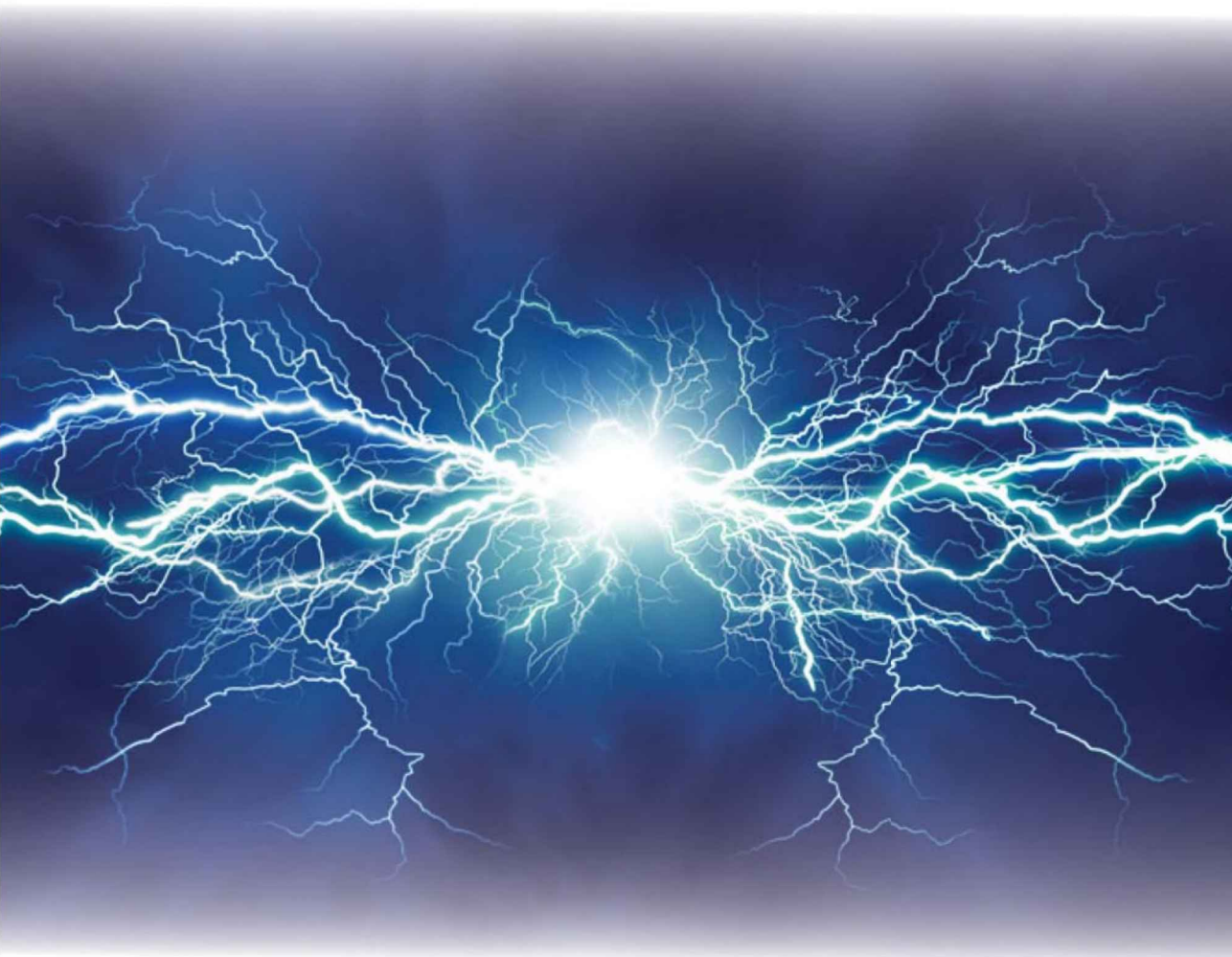


Marco Mauri, Maria Stefania Carmeli  
e Mattia Rossi

# Macchine elettriche

Modelli a regime: teoria ed esercizi



SOCIETÀ EDITRICE  
**ESCULAPIO**



Marco Mauri, Maria Stefania Carmeli  
e Mattia Rossi

# MACCHINE ELETTRICHE

MODELLI A REGIME:  
TEORIA ED ESERCIZI

ISBN 978-88-9385-088-9

Prima edizione: Settembre 2018

Responsabile produzione: Alessandro Parenti

Redazione: Carlotta Lenzi, Laura Tondelli e Laura Brugnoli

Le fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale, con esclusione quindi di strumenti di uso collettivo) possono essere effettuate, nei limiti del 15% di ciascun volume, dietro pagamento alla S.I.A.E del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633. Tali fotocopie possono essere effettuate negli esercizi commerciali convenzionati S.I.A.E. o con altre modalità indicate da S.I.A.E. Per le riproduzioni ad uso non personale (ad esempio: professionale, economico o commerciale, strumenti di studio collettivi, come dispense e simili) l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del volume.

CLEARedi - Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali Corso di Porta Romana, n. 108 - 20122 Milano

e-mail: [autorizzazioni@clearedi.org](mailto:autorizzazioni@clearedi.org) - sito: <http://www.clearedi.org>.



40131 Bologna - Via U. Terracini 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136  
[www.editrice-esculapio.it](http://www.editrice-esculapio.it)





# SOMMARIO

---

## 1 GENERALITÀ

1.1	Elettromagnetismo: fenomenologia e caratteristiche	2
1.2	Il campo elettromagnetico	4
1.3	Forma locale delle equazioni di Maxwell	8
1.4	Forma integrale delle equazioni di Maxwell	10
1.5	I potenziali elettrico e magnetico	12
1.5.1	Caso Stazionario	12
1.5.2	Caso non stazionario	13
1.6	L'approssimazione quasi stazionaria	14
1.7	Leggi di Kirchhoff	17
1.8	Vettore di Poyting, energia elettromagnetica e potenza	19
1.9	Il vettore di Slepian e gli elementi bipolari	21
1.10	Esercizi	25

## 2 I MATERIALI DELLE MACCHINE ELETTRICHE

2.1	I materiali conduttori	27
2.1.1	Perdite nei materiali conduttori	29
2.2	Materiali magnetici	29
2.2.1	Perdite nei materiali ferromagnetici	32
2.2.2	Magneti permanenti	35
2.3	I materiali isolanti	36
2.4	Valori nominali e tipologia di servizio	38
2.5	Esercizi	40

## 3 SISTEMI DI INDUTTORI

3.1	Circuiti Magnetici	41
3.2	Auto e mutue induttanze	44
3.3	Forze nei sistemi magnetici	48
3.3.1	Coenergia	50
3.4	Esercizi	53

## 4 IL TRASFORMATORE

4.1	Introduzione	55
4.2	Proprietà del trasformatore ideale	57
4.3	Modelli circuitali del trasformatore	58
	4.3.1 Induttanza di magnetizzazione	58
	4.3.2 Circuito equivalente a 5 parametri	59
4.4	Considerazioni sui parametri	62
4.5	Modello semplificato e prove	64
	4.5.1 Prova a vuoto	65
	4.5.2 Prova in corto circuito	67
4.6	Variazione di tensione	69
4.7	Trasformatori in parallelo	71
	4.7.1 Funzionamento a vuoto	71
	4.7.2 Funzionamento a carico	72
4.8	Trasformatori trifase	74
	4.8.1 Indice orario e parallelo di trasformatori trifase	76
4.9	Autotrasformatore	80
4.10	Aspetti costruttivi	81
	4.10.1 Nuclei dei trasformatori	81
	4.10.2 Avvolgimenti	84
4.11	Esercizi	87

## 5 CONVERSIONE ELETTROMECCANICA

5.1	Macchina elementare	89
5.2	Sistemi rotanti	92
5.3	Macchina a riluttanza elementare	93

## 6 LA MACCHINA IN CORRENTE CONTINUA

6.1	Macchina in corrente continua elementare	99
6.2	Macchina in CC: funzionamento da generatore	101
6.3	Macchina in CC: funzionamento da motore	103
6.4	Macchina in CC: funzionamento a regime	104
	6.4.1 Macchina CC ad eccitazione indipendente	104
	6.4.2 Macchina CC ad eccitazione parallelo	108
	6.4.3 Macchina CC ad eccitazione serie	110
6.5	Motore universale	113
6.6	Reazione di indotto	114
6.7	Avvolgimenti a tamburo	116
6.8	Esercizi	119

## 7 MACCHINE ROTANTI IN CORRENTE ALTERNATA: GENERALITÀ

7.1	Elettromagneti elementari	124
	7.1.1 Calcolo delle auto e mutue induttanze	126
	7.1.2 Calcolo della coppia	129
7.2	Fasori spaziali	132
7.3	Campo magnetico rotante	133
7.4	Strutture multipolari	139
7.5	Struttura degli avvolgimenti trifase	140

## 8 LA MACCHINA SINCRONA

8.1	Macchina sincrona isotropa	144
8.2	Coppia elettromagnetica della macchina isotropa	150
8.3	Curva delle prestazioni limite dei generatori sincroni	152
8.4	Curve a V	154
8.5	Macchine sincrone anisotrope	155
8.6	Coppia elettromagnetica della macchina anisotropa	161
8.7	Esercizi	163

## 9 LA MACCHINA ASINCRONA

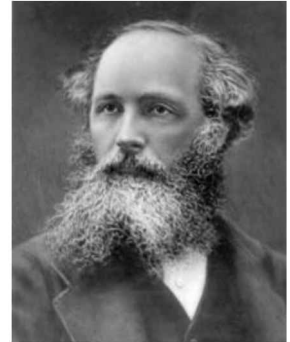
9.1	Modello trasformatorico della macchina asincrona	166
9.2	Coppia della macchina asincrona	173
9.3	Modelli ridotti	174
9.4	Prove ed individuazione dei parametri	177
	9.4.1 Prova a vuoto	177
	9.4.2 Prova a rotore bloccato	178
9.5	Caratteristica meccanica	178
	9.5.1 Coppia di avviamento	179
	9.5.2 Coppia massima	183
	9.5.3 Funzionamento da generatore	184
	9.5.4 Funzionamento come freno	185
	9.5.5 Zona di funzionamento stabile e caratteristica dinamica	186
9.6	Campi di operatività	188
	9.6.1 Diagramma circolare (tensione e frequenza costanti)	188
	9.6.2 Campo di operatività a tensione e frequenza variabili	191
9.7	Funzionamento in regime non sinusoidale	192
9.8	Motore asincrono monofase	195
9.9	Cenni costruttivi	198
9.10	Esercizi	201



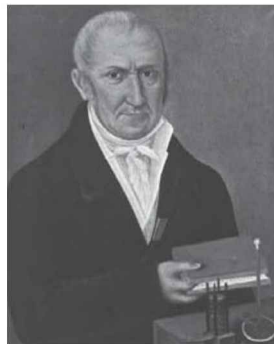
Dal 30 marzo 1800, data in cui Alessandro Volta annunciò alla Royal Society la scoperta dell'effetto elettromotore dei contatti bimetallici, al 1873 quando Maxwell presentò le famose equazioni nel "A Treatise on Electricity and Magnetism", ben poche applicazioni pratiche dell'elettricità avevano superato la soglia dei laboratori. Infatti, se la pila di Volta aveva avuto il merito di fornire una fonte di energia elettrica anche se molto limitata, mancava ancora un sistema in grado di fornire in modo agevole e ad un costo contenuto l'energia elettrica nella quantità necessaria per l'uso quotidiano e solo il telegrafo, legato all'invenzione dell'elettrocalamita, aveva cominciato a diffondersi a partire del 1850 in tutto il mondo occidentale.

Lo sviluppo dell'illuminazione elettrica alla fine dell'800 fece però tornare alla ribalta un'idea di Faraday che aveva studiato le forze che si producono su un conduttore quando è percorso da corrente elettrica ed è immerso in un campo magnetico. Nonostante

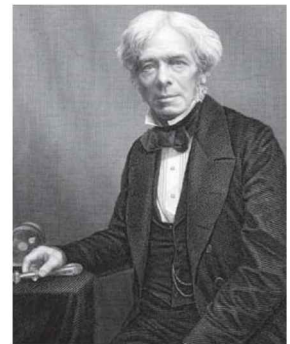
gli esordi furono decisamente difficili e i sistemi realizzati al tempo non erano abbastanza potenti per soppiantare il vapore nelle applicazioni industriali, ben presto e contro ogni pronostico dell'epoca<sup>1</sup>, l'elettricità si impose come importante sorgente di forza motrice. È quindi evidente come lo studio dei fenomeni legati alla conversione dell'energia elettrica in energia meccanica attraverso l'interazione di correnti elettriche con campi magnetici sia di fondamentale importanza.



■ James Clerk Maxwell  
(1831-1879)



■ Alessandro Volta  
(1745-1827)



■ Michael Faraday  
(1791-1867)

1 "When the Paris Exhibition [of 1878] closes, electric light will close with it and no more will be heard of it." – professor Erasmus Wilson, Oxford

Per **macchina elettrica** si intenderà quindi un **dispositivo il cui funzionamento è basato sulla legge dell'induzione o sulle azioni elettrodinamiche tra la corrente elettrica e il campo elettrico o magnetico e il cui scopo è la trasformazione dell'energia da elettrica ad elettrica o da elettrica a meccanica e viceversa**. In ragione di questo loro funzionamento tutte le macchine elettriche che si andranno ad analizzare in questo testo saranno dunque **reversibili**, ossia sarà sempre possibile invertire il senso del flusso di energia e quando un dispositivo di questo genere sarà usato per convertire energia meccanica in elettrica si parlerà di **generatore elettrico** mentre quando sarà usato per convertire energia elettrica in energia meccanica si parlerà di **motore elettrico**.

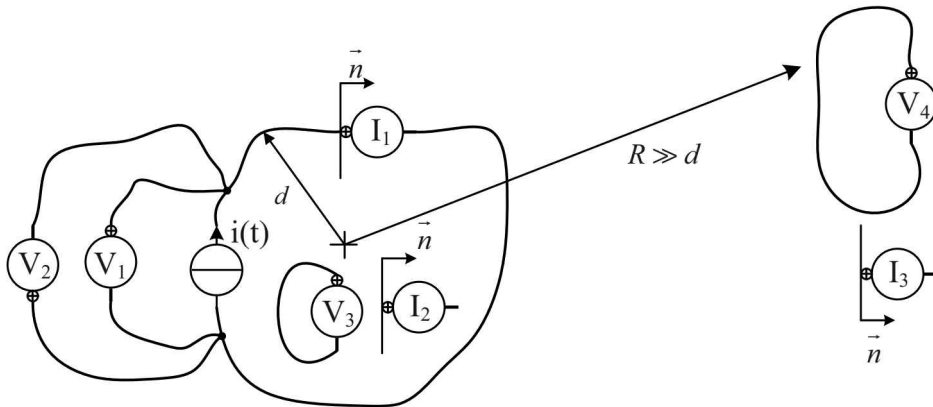
Oltre ai dispositivi di conversione elettromeccanica dell'energia, è considerato una macchina elettrica anche il **trasformatore**, nonostante sia un dispositivo che non trasforma energia meccanica in elettrica e viceversa, ma si limita a trasferire energia elettrica modificandone i parametri della potenza (tensione e corrente). La ragione di ciò è legata al fatto che i principi di funzionamento su cui si basa sono del tutto simili a quelli dei generatori e dei motori elettrici e che gli strumenti di modellazione usati per descriverne il comportamento sono la base su cui poi verranno sviluppati i modelli di tutte le altre macchine elettriche.

Invece **non si identificheranno come macchine elettriche** tutti i dispositivi in cui la conversione della potenza elettrica non coinvolge la legge dell'induzione magnetica, come ad esempio nei **convertitori elettronici** o nelle pile e batterie.

Nei capitoli successivi verranno quindi introdotti i principali modelli circuitali delle macchine elettriche nell'accezione sopra data, analizzandone principalmente il comportamento a regime. Per presentare questi modelli saranno quindi introdotti brevemente nei successivi paragrafi, alcuni concetti base delle fenomenologie elettromagnetiche.

## 1.1 ELETTRIMAGNETISMO: FENOMENOLOGIA E CARATTERISTICHE

Alcuni elementi della teoria dell'elettromagnetismo sono ormai entrati a far parte delle conoscenze comuni e al giorno d'oggi tutti riconoscono facilmente i "bipoli" (cioè elementi elettrici dotati di due morsetti) e i circuiti sia in regime stazionario, come ad esempio quelli alimentati da batterie, sia in regime alternato sinusoidale, cioè alimentati da sorgenti a frequenza industriale come quelli presenti nelle nostre case. Sono inoltre disponibili strumenti di misura che consentono di valutare con ottima precisione le grandezze **corrente (amperometri)** e **tensione (voltmetri)** che definiscono l'energetica dei componenti di questi sistemi elettro-



■ Fig. 1.1. Disposizione degli strumenti di misura

magnetici. Dai corsi di fisica è anche noto che quando le grandezze rilevate dagli strumenti di misura sono variabili con frequenze nettamente più elevate di quelle industriali allora la fenomenologia diventa molto più complessa.

Ad esempio, si supponga di collegare un generatore di corrente ad un conduttore di **resistenza (conducibilità) finita** sospeso in un mezzo di conducibilità idealmente nulla (**isolante**) e di collegare alcuni strumenti indicatori come indicato in Fig. 1.1<sup>2</sup>.

Si supponga ora di **iniettare nel conduttore una corrente costante**: in questo caso il conduttore delimita la zona dello spazio in cui la densità di corrente è diversa da 0 e gli strumenti daranno indicazioni indipendenti dal percorso dei cordoni nel caso del voltmetro e dalla estensione della superficie esploratrice nel caso dell'amperometro. Gli strumenti assumeranno i seguenti valori:

- $V_1$ ,  $V_2$  daranno indicazioni non nulle e opposte
- $I_1$  indicherà la corrente circolante nel conduttore ed è indipendente dalla posizione sul conduttore.
- $V_3$ ,  $V_4$  avranno indicazione nulla
- $I_2$ ,  $I_3$  avranno indicazione nulla

Si supponga invece che la corrente abbia un andamento alternato sinusoidale nel tempo, in tal caso la fenomenologia evidenziata dagli strumenti è completamente diversa, in particolare si ha che:

<sup>2</sup> Nel seguito del testo si riterranno già noti i concetti base dell'elettrotecnica (come tensione, corrente o resistenza) e si procederà esclusivamente ad un approfondimento degli stessi introducendo concetti e definizioni utili allo studio delle macchine elettriche

- $V_1, V_2$  non avranno più la medesima indicazione.
- $I_1$  fornisce indicazioni che dipendono dalla posizione lungo il conduttore oltre che dalla forma della superficie esploratrice.
- $I_2, I_3$  daranno indicazioni non nulle.
- $V_3, V_4$  forniscono indicazioni non nulle e dipendenti dalla superficie racchiusa dai cordoni.

In questo caso però le indicazioni dei voltmetri  $V_1, V_2, V_3$  e degli amperometri  $I_1, I_2$  posti in prossimità del dispositivo che genera il campo sono alternate sinusoidale con ampiezza che dipende dalla posizione, ma con pulsazione e fase uguali a quelle del generatore; le indicazioni degli strumenti posti a grande distanza sono anch'esse alternate sinusoidali con la stessa pulsazione del generatore, ma non sono in fase con esso. Lo sfasamento è proporzionale alla distanza  $d$  e il coefficiente di proporzionalità è  $d/c$  dove  $c$  è la velocità della luce nel mezzo in cui si svolge il fenomeno.

## 1.2 IL CAMPO ELETTROMAGNETICO

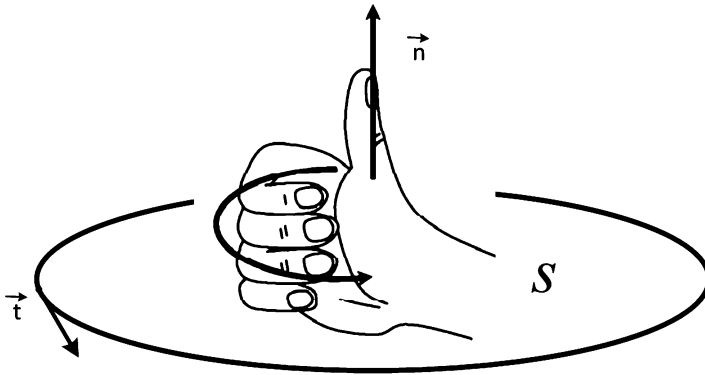
Con il nome di **campo** si intende **un particolare stato fisico di uno spazio, delimitato da un contorno assegnato, per effetto della presenza di sorgenti**. Un campo si dice **scalare** o **vettoriale** a seconda che il suo stato sia esprimibile mediante una grandezza scalare o vettoriale.

Un esempio di campo scalare è quello del volume di una stanza, delimitata da pareti ben definite, “caldo” per effetto della presenza di un termosifone: la distribuzione spaziale e temporale della temperatura descrive il campo termico.

La nozione stessa di campo implica il metodo che si intende seguire per descrivere il fenomeno oggetto di studio: lo spazio è il mezzo attraverso il quale, per continuità e contiguità, evolve il fenomeno (in questo caso la trasmissione del calore) dalla sorgente (il termosifone) verso i pozzi (le pareti che assorbono calore). Questo modo di pensare i fenomeni esclude la presenza di azioni a distanza e non considera eventuali trasformazioni di materia in energia e viceversa: tutte le grandezze utili sono continue con le loro derivate, e quanto avviene in un punto del campo è la conseguenza di azioni che si sono manifestate tra il punto e la sorgente.

Nel caso di campi vettoriali lo stato fisico è descrivibile mediante un vettore  $\vec{R}(P, t)$  funzione della posizione  $P$  e del tempo  $t$  in un riferimento inerziale. Un campo vettoriale è definito quando, nell'intorno di ogni punto  $P$  (di dimensioni così piccole da consentire la definizione delle derivate del vettore), è possibile valutare il lavoro  $dL$  lungo una linea elementare orientata e chiusa, centrata nel punto  $P$ , ed il flusso elementare  $d\phi$  del vettore  $\vec{R}$  attraverso una superficie elementare





■ Fig. 1.2. Regola del cavatappi

centrata in  $P$ . Il lavoro elementare  $dL$  è esprimibile (legge alle maglie) tramite il rotore del vettore  $\vec{R}$  utilizzando la relazione (1.1).

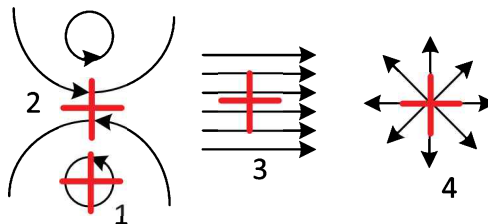
$$dL = \nabla \times \vec{R} \cdot \vec{n} dS \quad (1.1)$$

dove  $dS$  è la superficie tesa dalla linea elementare, mentre l'orientamento della linea ed il versore della normale della superficie sono legati dalla regola del cavatappi (Fig. 1.2). Il flusso  $d\phi$  si può invece calcolare mediante la reazione (1.2).

$$d\phi = \nabla \cdot \vec{R} d\tau \quad (1.2)$$

dove  $d\tau$  è il volume di spazio racchiuso da  $dS$ . Il lavoro e il flusso elementare possono essere espressi da due vettori  $\vec{R}$  e  $\vec{S}$  distinti purché sia noto il legame tra di essi. Tipicamente questo legame dipende dalla natura del mezzo in cui si svolge il campo. La struttura tipica delle equazioni che definiscono un campo vettoriale è dunque quella riportata in (1.3).

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{R} &= \vec{f}(P, t) \\ \nabla \cdot \vec{S} &= g(P, t) \\ \vec{R} &= h \vec{S} \end{aligned} \quad (1.3)$$



■ Fig.1.3 Campi con diversi valori di rotore

Un campo si dirà **rotazionale** nel caso in cui per un rotometro (una opportuna “turbina” con le pale a croce) esista una giacitura per la quale si manifesta una rotazione dello strumento. In formule significa che **il rotore del vettore che descrive il campo è diverso da 0**, infatti il rotore di un campo vettoriale è una misura della sua tendenza a ruotare attorno ad un punto. Ad esempio considerando la Fig. 1.3, i punti 1 e 2 avranno rotore diverso da 0 mentre i punti 3 e 4 rotore nullo.

Tra i campi vettoriali, **il campo elettromagnetico è quello delle forze che agiscono su una carica elementare** sia per effetto di altre cariche elettriche, fisse o in movimento, sia per effetto di azioni di origine non elettrica (meccanica, chimica, ecc.).

Per definire in modo operativo le forze in questione si ammetterà di introdurre nel campo una carica sonda  $dq$  così piccola da non alterare la situazione e se  $d\vec{F}$  è la forza che agisce su tale carica, **il campo sarà caratterizzato tramite il rapporto  $d\vec{F} / dq$  indipendente dal valore della carica  $dq$  stessa.**

Operando in tal modo e nelle ipotesi che la carica sonda occupi un volume grande rispetto alle dimensioni atomiche e molecolari (in modo da non risentire delle discontinuità dovute alla disuniforme distribuzione delle cariche di tali dimensioni e fornire così un valore medio delle forze che si manifestano nella regione occupata), è possibile individuare diverse forze.

Se le cariche che generano il campo sono fisse rispetto al riferimento inerziale, allora **il rapporto (1.4) è indipendente dal tempo e dalla velocità della sonda ed è funzione solo della posizione attuale della sonda stessa.** Il campo che soddisfa tali condizioni si dice **elettrostatico**.

$$\vec{E}_s = \frac{d\vec{F}}{dq} \quad (1.4)$$

Come caso particolare la forza dovuta ad una carica puntiforme  $Q$  è fornito dalla (1.5).

$$\vec{E}_s = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.5)$$

Dove:

$\vec{r}$  è il vettore che individua il punto P in cui si voglia valutare  $\vec{E}$  di modulo  $r$  ed è orientato da Q a P,

$\epsilon$  è la permittività del materiale in cui si svolge il campo e nel caso del vuoto vale circa  $\epsilon_0 = 8.8541878 \cdot 10^{-12}$  [F/m]

Sfruttando ora la relazione (1.6) si può scrivere la (1.7).

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = -\nabla \frac{1}{r} \quad (1.6)$$

$$\vec{E}_s = -\nabla \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = -\nabla V \quad (1.7)$$

Il campo elettrostatico si può dunque scrivere, in relazione alla particolare simmetria sferica, come gradiente cambiato di segno di una **funzione potenziale scalare**  $V$ . Come conseguenza immediata il campo in questione è **irrotazionale** poiché vale l'identità (1.8).

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = \nabla \times \nabla V = 0 \quad (1.8)$$

Dunque un rotometro costituito da una turbina con quattro cariche  $dq$  non potrà mai ruotare se immersa in un campo elettrostatico.

Quanto detto si può generalizzare nel caso di un campo generato da una distribuzione spaziale di cariche fisse di cui sia nota la densità spaziale  $\alpha(x, y, z)$  in un mezzo normale come indicato in (1.9)

$$\begin{aligned} \vec{E}_s &= -\nabla V \\ V &= \int_{\tau} \frac{\alpha}{4\pi\epsilon r} d\tau \end{aligned} \quad (1.9)$$

Se le cariche che generano il campo sono in movimento ma la sonda è fissa allora si ottiene la (1.10), ma il campo è in generale non conservativo.

$$\frac{d\vec{F}}{dq} = \vec{E} \quad (1.10)$$

Se poi la sonda è in moto con velocità  $\vec{v}$  allora si ha la (1.11).

$$\frac{d\vec{F}}{dq} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1.11)$$

Dove oltre ad  $\vec{E}$  compare una forza elettrica di origine magnetica o **forza di Lorentz** e la misura dei vettori  $d\vec{F}$  e  $\vec{v}$  consente di individuare operativamente  $\vec{E}$  e il vettore induzione elettromagnetica  $\vec{B}$ . Si noti che nel caso di sonda fissa, ma con osservatore in moto a velocità uniforme  $\vec{v}$  rispetto al precedente riferimento inerziale la sonda stessa appare dotata di velocità  $-\vec{v}$  e la forza per unità di carica sarebbe espressa da (1.12).

$$\frac{d\vec{F}}{dq} = \vec{E}' - \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1.12)$$

L'osservatore fisso rispetto al sistema inerziale e quello in movimento ripartiscono la stessa forza in modo diverso tra i due addendi<sup>3</sup>. Se la forza elementare  $d\vec{F}$  che agisce sulla sonda non è dovuta alla presenza di altre cariche fisse o in movimento, ma dall'interazione con sistemi fisici non elettrici (meccanici, chimici, ecc.) allora si parla di campo elettromotore o campo impresso.

$$\vec{E}^* = \frac{d\vec{F}}{dq} \quad (1.13)$$

Quando sono presenti contemporaneamente tutte le cause la forza elettrica totale sarà la somma dei diversi contributi, in formule:

$$\vec{E}_{tot} = \frac{d\vec{F}}{dq} = \vec{E}_s + \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} + \vec{E}^* \quad (1.14)$$

### 1.3 FORMA LOCALE DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL

Le equazioni di Maxwell consentono di descrivere il **campo elettromagnetico**  $\vec{E}$  e cioè il campo della forza elettrica che agisce sulla carica sonda fissa rispetto al riferimento inerziale e della **induzione magnetica**  $\vec{B}$  in una regione priva di campo elettromotore quando siano noti gli ingressi costituiti dalla **densità di carica**  $\rho$  e dalla **densità di corrente**  $\vec{J}$  di conduzione come indicato nelle equazioni alle derivate parziali lineari del primo ordine (1.15)

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dai legami costitutivi (1.16)

<sup>3</sup> Le relazioni sono ovviamente state calcolate per moti per cui la velocità  $v$  è molto minore della velocità della luce  $c$  ( $v/c \approx 0$ ) e si possano ritenere trascurabili i termini relativistici

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{J} &= \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)\end{aligned}\quad (1.16)$$

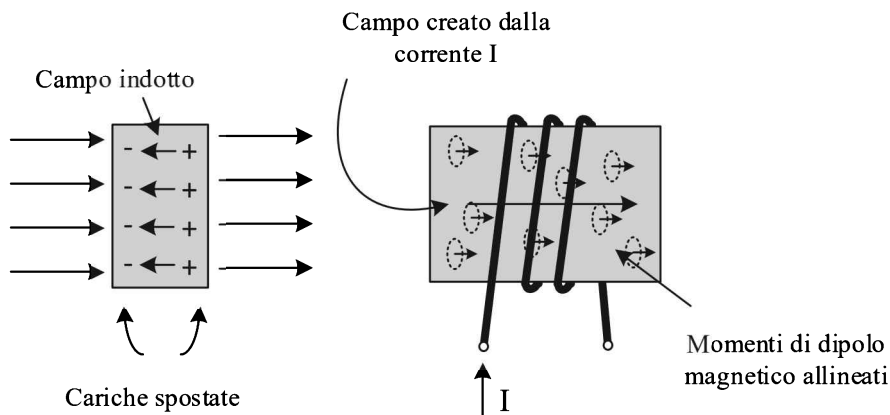
E dalla equazione che esprime la conservazione della carica elettrica (1.17).

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.17)$$

L'esperienza dimostra che le equazioni in questione sono valide nell'ambito operativo di dimensioni grandi rispetto a quelle atomiche e di frequenze minori di quelle ottiche ( $< 10^8$  [Hz]) per le quali si possono ritenere  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  costanti. In particolare:

$\epsilon$  è la **permettività dielettrica** del materiale (costante dielettrica) e nel caso del vuoto vale  $\epsilon_0 = 8.8541878176 \cdot 10^{-12}$  [C/Vm] ed esprime cosa succede in un dielettrico quando è posto in un campo esterno. In generale all'interno dei materiali dielettrici il campo interno è inferiore a quello applicato perché i dielettrici diventano "polarizzati". Le cariche positive e negative (anche se nei dielettrici a differenza dei metalli non sono libere) tendono infatti a spostarsi e mentre le cariche negative sono spostate in direzione opposta al campo le cariche positive sono spostate in direzione del campo, questo porta alla situazione rappresentata in Fig 1.4. dove il campo è ridotto all'interno del dielettrico. Questa proprietà dei materiali dielettrici è sfruttata ad esempio per aumentare la capacità e la tensione massima applicabile ai condensatori, rispetto a realizzazioni in aria.

$\mu$  è la **permeabilità magnetica** del materiale ed esprime il comportamento del materiale quando sono applicati campi magnetici esterni. A differenza dei cam-



■ Fig. 1.4 Effetto dei campi elettrici e magnetici all'interno dei materiali

pi elettrici il campo di induzione magnetica all'interno dei materiali è spesso più intenso rispetto a quello applicato. La ragione di ciò è che questi materiali si magnetizzano e il campo indotto all'interno del materiale è nella stessa direzione del campo applicato.

$\sigma$  è la **conducibilità elettrica** del materiale ed esprime la proporzionalità tra la corrente elettrica e il campo elettrico. In questo caso il comportamento può essere vario e dipende dagli elettroni liberi presenti nel materiale.

$\vec{E}$  è il **campo elettrico** nell'accezione introdotta nel precedente paragrafo come forza che agisce sull'unità di carica ( $d\vec{F} / dq$ )

$\vec{D}$  è il **campo dielettrico** (o anche vettore "spostamento") ed è legato al campo elettrico dalla permittività dielettrica. Dipendendo solo dalla carica libera, è utile definirlo in tutte le situazioni che richiedano la risoluzione del campo all'interno dei materiali dielettrici lineari.

$\vec{B}$  è il **campo di induzione magnetica** (spesso in letteratura viene indicato  $\vec{B}$  come campo magnetico invece di  $\vec{H}$  in quanto la dicitura non è strettamente standardizzata). In maniera analoga a quanto fatto per il campo elettrico si può definire  $\vec{B}$  come la forza applicata alla carica in movimento elementare. Infatti, come visto in precedenza, alla carica in movimento è applicata una forza (di Lorentz) pari a  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ .

$\vec{H}$  è il **campo magnetico**. Come  $\vec{D}$  è legato a  $\vec{E}$ , anche il campo magnetico è legato a  $\vec{B}$  attraverso un coefficiente di proporzionalità.  $\vec{H}$  può differire significativamente da  $\vec{B}$  all'interno dei materiali e non è necessariamente solenoidale. L'utilità di  $\vec{H}$  diventa evidente quando si voglia trovare il campo di induzione all'interno di un materiale magnetico lineare, in quanto  $\vec{H}$  dipende esclusivamente dalla corrente libera del sistema.

$\vec{j}$  è la **densità di corrente elettrica**.

$\rho$  è la **densità di carica**.

Ovviamente in questa forma le equazioni sono difficilmente utilizzabili per la progettazione e lo studio delle macchine elettriche. Nei prossimi capitoli si troveranno formulazioni più facilmente manipolabili per gli scopi prefissati.

## 1.4 FORMA INTEGRALE DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL

Al fine di introdurre grandezze che possano essere facilmente misurabili e confrontabili sperimentalmente conviene esprimere le equazioni precedenti in forma integrale basandosi sul teorema del rotore.

$$\int_S \nabla \times \vec{A} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_l \vec{A} \cdot \vec{t} \, dl \quad (1.18)$$

Dove la normale  $\vec{n}$  alla superficie  $S$  è orientata con la regola del cavatappi (Fig.1.2) a partire dall'orientamento della linea  $l$  su cui  $S$  si appoggia. La **legge di Ampere-Maxwell** diventa:

$$\int_S \nabla \times \vec{H} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_l \vec{H} \cdot \vec{t} \, dl = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, ds = i_c + i_s = i_{tot} \quad (1.19)$$

$$i_c = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds \quad i_s = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, ds$$

Se ora si prendono in esame le equazioni alle divergenze, si nota come la densità di corrente totale uscente (somma di una corrente di conduzione  $i_c$  e di una corrente di spostamento  $i_s$ ) da una superficie chiusa è nulla (**forma generalizzata della legge di Kirchhoff ai nodi**).

$$\nabla \cdot \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.20)$$

$$\int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, ds = \int_V \nabla \cdot \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dv = i_c + i_s = 0$$

La **legge di Faraday-Maxwell** in forma integrale assume l'espressione più familiare della **legge dell'induzione magnetica**:

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_l \vec{E} \cdot \vec{t} \, dl = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = - \frac{d\phi}{dt} \quad (1.21)$$

Nello studio dei sistemi elettrici è interessante andare ad analizzare un particolare tipo di regime indicato come **regime quasi-stazionario** che caratterizza sostanzialmente il funzionamento di quasi tutte le apparecchiature industriali di interesse per le macchine elettriche. Mentre è evidente che in regime stazionario le derivate temporali presenti nelle equazioni di Maxwell si annullano (essendo i campi costanti), si indica con l'accezione di regime quasi stazionario sistemi in cui i campi non sono strettamente stazionari, ma per i quali le variazioni nel tempo non giocano un ruolo primario. Si tratta quindi di un'approssimazione ed è perciò necessario capire quando e per quali sistemi sia lecito procedere in questo modo e come studiarli.

## 1.5 I POTENZIALI ELETTRICO E MAGNETICO

Per poter analizzare le condizioni di funzionamento in regime stazionario e quasi stazionario è necessario introdurre alcune grandezze che evidenziano meglio il funzionamento del sistema. Si considerino le equazioni fondamentali di Maxwell (1.22), l'equazione di continuità (1.23) e le relazioni costitutive (1.24) dove  $\vec{E}$  è il campo elettrico,  $\vec{D}$  il campo di induzione dielettrica,  $\vec{H}$  il campo magnetico,  $\vec{B}$  il campo di induzione magnetica,  $\vec{J}$  la densità di corrente elettrica,  $\rho$  la densità di carica,  $\varepsilon$  la permeabilità dielettrica,  $\mu$  la permeabilità magnetica,  $\sigma$  la conducibilità elettrica.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}\quad (1.23)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}\quad (1.24)$$

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*) = \vec{J}_c + \vec{J}_i \quad \rightarrow \quad \vec{J}_c = \sigma \vec{E}$$

### 1.5.1 Caso Stazionario

Nel caso stazionario tutte le derivate temporali presenti nelle equazioni di Maxwell si annullano e dunque la prima equazione diventa:

$$\nabla \times \vec{E} = 0\quad (1.25)$$

In questo caso  $\vec{E}$  è un campo vettoriale conservativo e può essere espresso come gradiente di un opportuno campo scalare  $V$ .

$$\vec{E} = -\nabla V\quad (1.26)$$

Dove il segno meno è una convenzione di carattere storico adottata nell'elettromagnetismo e non altera la sostanza. Dati due punti A e B nello spazio si definisce tensione tra i due punti la grandezza:



$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = [V(A) - V(B)] \triangleq V_{AB} = -V_{BA} \quad (1.27)$$

E dipende solo dai punti A e B e non dal percorso sulla quale viene calcolata. Il potenziale è definito a meno di una costante arbitraria che nel caso in esame viene definita imponendo che il potenziale sia nullo quando la distanza dalle sorgenti del campo tende all'infinito ( $V(\infty) = 0$ ). Per quanto riguarda il campo magnetico conviene introdurre un analogo potenziale magnetico considerando che il campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  è solenoidale (cioè il suo flusso attraverso un'arbitraria superficie chiusa è nullo,  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ). Il campo  $\vec{B}$  si può quindi esprimere attraverso il rotore di un opportuno vettore  $\vec{A}$  che viene chiamato **potenziale vettore magnetico**. Si noti che  $\vec{A}$  è definito a meno del gradiente di un campo scalare arbitrario.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.28)$$

### 1.5.2 Caso non stazionario

Anche nel caso non stazionario è sicuramente utile disporre di opportuni potenziali che derivati forniscano i campi. Per quanto riguarda il campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  continua a valere l'equazione nella divergenza e quindi il campo è ancora solenoidale e si può esprimere come:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.29)$$

Il campo elettrico  $\vec{E}$  non è più irrotazionale ma sostituendo la (1.29) nella prima equazione di Maxwell si ottiene:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (1.30)$$

Da cui:

$$\nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.31)$$

Il vettore  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  è irrotazionale e quindi si può scrivere:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \quad (1.32)$$

Dove  $\Phi$  è ancora un potenziale scalare elettrico ma è in generale diverso dal potenziale  $V$  del caso stazionario. Si noti che nel caso non stazionario in generale non ha senso definire la tensione tra due punti

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{t} dl = \int_A^B \left( -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot \vec{t} dl = \Phi(A) - \Phi(B) - \frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \vec{A} \cdot \vec{t} dl \quad (1.33)$$

In (1.33) compare oltre alla differenza di potenziale un termine addizionale che in generale dipende dal percorso in quanto il vettore  $\vec{A}$  non è conservativo ( $\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \neq 0$ )

## 1.6 L'APPROSSIMAZIONE QUASI STAZIONARIA

È evidente che, a differenza del caso stazionario in cui si possono eliminare tutte le derivate temporali, nel caso non stazionario questo non sia più possibile. Si possono però evidenziare casi molto comuni nella pratica, in cui sia possibile dividere il sistema in più parti tali che in ognuna di esse si possa trascurare la derivata temporale dell'induzione magnetica o la derivata temporale dell'induzione dielettrica. Sistemi di questo tipo sono detti **quasi-stazionari**. Nelle regioni in cui non sono significative le variazioni temporali di  $\vec{B}$  il campo elettrico risulta governato dalle relazioni (1.34), mentre analogamente nelle regioni in cui sia lecito trascurare la variazione temporale di  $\vec{D}$  il campo elettromagnetico è governato dalle relazioni (1.35).

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho(P, t) \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{E} &= -\nabla V \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Si noti che nelle (1.34) il tempo compare ancora in  $\rho(P, t)$ , ma gioca il ruolo di semplice parametro e per ogni istante di tempo è possibile trovare il valore del potenziale elettrico. Rimane ora da individuare in quali condizioni è possibile trascurare tali variazioni temporali.

Per quanto riguarda il campo di induzione dielettrica, la derivata temporale di  $\vec{D}$  compare nella seconda equazione di Maxwell (1.36) e quindi la condizione di trascurabilità diventa la (1.37).

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad (1.36)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \ll |\vec{j}| \quad (1.37)$$

Per il vettore induzione magnetica il discorso è un po' diverso perché nella prima equazione di Maxwell compaiono solo due termini ed è quindi necessario sfruttare la relazione che consente di trovare il campo elettrico attraverso i potenziali elettrico e magnetico (1.38).

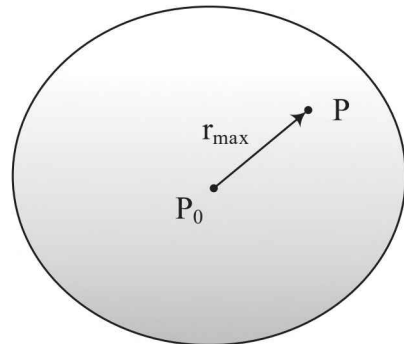
$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.38)$$

$$\left| \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right| \ll |\nabla\Phi| \quad (1.39)$$

Se vale la relazione (1.39) vuol dire che  $\vec{E} \cong -\nabla\Phi$  e il campo è irrotazionale,  $\nabla \times \vec{E} = 0$ .

Nelle relazioni (1.37) e (1.39) si noti che la possibilità di trascurare le derivate temporali non dipende solo dai moduli, ma anche dalla rapidità della loro variazione. In particolare le relazioni precedenti saranno tanto più accettabili quanto più è lecito considerare i fenomeni come lentamente variabili. Trascurare queste variazioni temporali equivale quindi a considerare che le variazioni temporali delle forze impresse si propagano istantaneamente a tutti i punti del sistema. È abbastanza ovvio che per trascurare questo tempo di ritardo, il sistema debba essere geometricamente limitato in modo da poter individuare il ritardo massimo che sussisterà all'interno del sistema.

Identificato quindi un punto P di tale sistema dove si ha il ritardo massimo accettabile, per la sfera di punti distanti dall'origine  $P_0$  che presentano il medesimo ritardo di P, valgono le relazioni (1.40) dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto (Fig.1.5).



■ Fig. 1.5. Calcolo delle condizioni limite per il regime quasi stazionario.

$$r_{max} = |P - P_0|$$

$$\Delta t_{max} = \frac{r_{max}}{c} \quad (1.40)$$

Trascurare tale ritardo vuol dire supporre che le cause che originano il campo non cambiano sensibilmente nell'intervallo  $\Delta t_{max}$  in esame come indicato in (1.41).

$$\rho(P, t + \Delta t_{max}) \approx \rho(P, t) \rightarrow |\rho(P, t + \Delta t_{max}) - \rho(P, t)| \ll |\rho(P, t)| \quad (1.41)$$

$$\bar{J}(P, t + \Delta t_{max}) \approx \bar{J}(P, t) \rightarrow |\bar{J}(P, t + \Delta t_{max}) - \bar{J}(P, t)| \ll |\bar{J}(P, t)|$$

Considerando quindi l'equazione della densità di carica in (1.41) e sviluppandola in serie è possibile ottenere la (1.42).

$$\left| \frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t} \frac{r_{max}}{c} \right| \ll |\rho(P, t)| \quad (1.42)$$

Particolarizzando la (1.42) per il caso di regime sinusoidale a pulsazione  $\omega = 2\pi f$  ( $\rho(P, t) = \rho(P) \cos(\omega t + \alpha)$ ) è possibile ottenere la condizione significativa espressa in (1.43). La medesima condizione si può ottenere utilizzando l'equazione nella densità di corrente.

$$\left| \frac{\omega r_{max}}{c} \right| \ll 1 \rightarrow r_{max} \ll \frac{c}{f} = \lambda \quad (1.43)$$

In altre parole, affinché sia verificata la condizione di quasi stazionarietà le dimensioni del sistema in esame devono essere trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda del campo che si propaga al suo interno. Si noti che per i sistemi elettromeccanici di interesse industriale le frequenze massime delle sorgenti sono dell'ordine di  $10^4 \div 10^5$  [Hz] da cui una dimensione massima del sistema pari a  $r_{max} \ll 3 \cdot 10^4 \div 3 \cdot 10^3$  [m] che è soddisfatta nella maggior parte delle applicazioni industriali.

Per sistemi di questo tipo è possibile identificare un modello a **parametri concentrati**, vale a dire un modello costituito da opportuni componenti ciascuno dei quali può ritenersi responsabile di una proprietà che in realtà appartiene a tutto il sistema nel suo complesso. Ad esempio, in un circuito elettrico in regime quasi stazionario avremo solo le regioni occupate da **bobine** in cui il campo di induzione  $\vec{B}$  assume valori considerevoli e per cui si potrà ipotizzare  $\partial \vec{B} / \partial t \neq 0$

Le bobine diventano così i componenti del sistema a cui attribuire tutta la capacità di generare induzione magnetica del circuito. In maniera analoga regioni del sistema occupate dai **condensatori** diventano le zone in cui si potrà ipotizzare  $\partial \vec{D} / \partial t \neq 0$  e quindi i condensatori diventano i componenti in cui concentrare tutti i fenomeni dielettrici posseduti dal sistema nel suo complesso.

## 1.7 LEGGI DI KIRCHHOFF

In regime quasi stazionario si possono individuare zone del sistema in cui concentrare i fenomeni elettrici e magnetici descritti in precedenza e quindi individuare zone del circuito in cui saranno trascurabili le derivate temporali delle grandezze elettriche e zone in cui saranno trascurabili le derivate delle grandezze magnetiche.

Nelle regioni in cui la densità di corrente  $\vec{J}$  è non nulla si può integrare l'equazione di continuità, ottenendo la (1.45) che viene chiamata **legge di Kirchhoff delle correnti**: “la somma algebrica delle correnti uscenti da una superficie chiusa è nulla”.



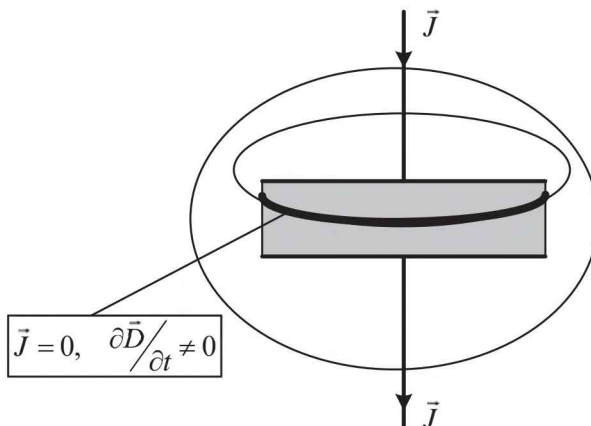
■ Gustav Robert Kirchhoff  
(1824-1887)

$$\nabla \cdot \vec{J} \cong 0 \quad (1.44)$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \sum_i I_i = 0 \quad (1.45)$$

Si osservi che la superficie di integrazione  $S$  non deve intersecare sezioni del circuito in cui  $\vec{J} = 0$ . In tal caso non è più valida la condizione (1.37) e non è più possibile procedere con le approssimazioni del regime quasi stazionario.

Dal punto di vista pratico, regioni di questo tipo si trovano all'interno dei condensatori, infatti se tra le armature di un condensatore è inserito un dielettrico perfetto, la corrente di conduzione tra le armature è nulla ed è quindi sufficiente scegliere una superficie di integrazione  $S$  che non racchiuda una sola armatura del condensatore (Fig 1.6).



■ Fig. 1.6. Superfici di integrazioni nel caso del condensatore

All'interno delle armature infatti, non vale la condizione di quasi stazionarietà e torna valida l'equazione di Maxwell che lega l'induzione dielettrica alle correnti (in questo caso nulle)  $\nabla \cdot (\partial \vec{D} / \partial t) = 0$ .

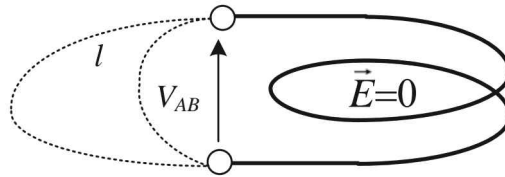
Il flusso del vettore  $\partial \vec{D} / \partial t$  attraverso una porzione di superficie inclusa nelle armature non è quindi nullo e, anche se non è una corrente in senso stretto, tale flusso equivale a una corrente (e spesso ci si riferisce a tale termine con il nome di **corrente di spostamento**). In regime quasi stazionario infatti le grandezze sono comunque tempo varianti e nel caso specifico del condensatore portano a variazioni di carica sulle armature che dal punto di vista esterno equivalgono ad una corrente che "attraversa" il condensatore.

Nelle regioni in cui invece il vettore  $\vec{E}$  è non nullo, grazie alla condizione di quasi stazionarietà, è possibile esprimere il campo come funzione di un potenziale scalare (1.46) e l'integrale di circuitazione esprime la **legge di Kirchhoff delle tensioni**: "la somma algebrica delle cadute di tensione lungo una linea chiusa è nulla".

$$\vec{E} \cong -\nabla V \neq 0 \quad (1.46)$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot \vec{t} dl = \sum_i V_i = 0 \quad (1.47)$$

In maniera analoga a quanto fatto per il caso precedente, è necessario scegliere un percorso  $l$  che non contenga regioni in cui  $\vec{E} = 0$ . Dal punto di vista pratico è sufficiente scegliere una linea che non contenga delle bobine (Fig. 1.7).



■ Fig. 1.7. Linea di integrazione nel caso di una bobina

A questo proposito si ricordi comunque che, pur essendo nullo il campo elettrico all'interno di una bobina, la caduta di tensione misurabile ai capi non è nulla. Infatti vale la relazione (1.48) tenuto conto che la variazione di potenziale elettrico è nulla ( $\vec{E} = 0$ ).

$$V_{AB} = \int_B^A \left( \nabla \Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \cdot \vec{t} dl = \frac{\partial}{\partial t} \int_B^A \vec{A} \cdot \vec{t} dl \quad (1.48)$$

La (1.48) evidenzia quindi che in un circuito variazioni di potenziale elettrico possono essere determinate anche da campi magnetici variabili (caso tipico per le macchine elettriche).

## 1.8 VETTORE DI POYTING, ENERGIA ELETTROMAGNETICA E POTENZA

In una regione in cui sia presente un campo elettromagnetico individuato dai vettori  $\vec{E}$  ed  $\vec{H}$  il vettore  $\vec{S}$  indicato in (1.49) viene chiamato **vettore di Poynting** e data una superficie chiusa  $S$ , il flusso entrante di tale vettore esprime la potenza elettromagnetica entrante nella superficie  $S$  (1.50).

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (1.49)$$

$$P_i = \int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS \quad (1.50)$$

Considerata quindi una regione di spazio in cui il mezzo presenti una conducibilità finita e sia presente un campo impresso  $\vec{E}^*$  le equazioni di Maxwell si possono scrivere come indicato in (1.51).

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{E} + \vec{E}^* &= \frac{\vec{J}}{\sigma} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Moltiplicando scalarmente la prima per  $\vec{H}$  e la seconda per  $\vec{E}$  si ottengono le equazioni (1.52).

$$\begin{aligned} \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} &= -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} &= \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Sottraendo la prima relazione alla seconda e ricordando l'identità vettoriale  $\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} = -\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$  si ottiene l'equazione (1.53).

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} &= \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) &= -\nabla \cdot \vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Ricordando la legge di Ohm  $\vec{E} = -\vec{E}^* + \vec{J}/\sigma$  si ottiene il bilancio di potenze indicato in (1.54).

$$\frac{J^2}{\sigma} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = \vec{E}^* \cdot \vec{J} \quad (1.54)$$

Integrando l'equazione precedente su un volume  $\tau$  racchiuso dalla superficie  $S$  e sfruttando il teorema della divergenza si ottiene l'equazione (1.55).

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \frac{J^2}{\sigma} d\tau + \int_{\tau} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\tau + \int_{\tau} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\tau + \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{S} d\tau &= \int_{\tau} \vec{E}^* \cdot \vec{J} d\tau \\ \int_{\tau} \frac{J^2}{\sigma} d\tau + \int_{\tau} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\tau + \int_{\tau} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\tau + \int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS &= \int_{\tau} \vec{E}^* \cdot \vec{J} d\tau \end{aligned} \quad (1.55)$$

Considerando un materiale omogeneo semplice che occupa il volume  $\tau$  caratterizzato da permittività  $\varepsilon$  e permeabilità  $\mu$ , le quantità  $W_m$  e  $W_e$  definite in (1.56), sono rispettivamente l'energia magnetica e l'energia elettrica immagazzinate nel volume  $\tau$  e se il materiale è conduttore le perdite Joule sono definite come indicato in (1.57).

$$W_m = \int_{\tau} \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} d\tau = \int_{\tau} \frac{\mu H^2}{2} d\tau = \int_{\tau} \frac{B^2}{2\mu} d\tau \quad (1.56)$$

$$W_e = \int_{\tau} \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} d\tau = \int_{\tau} \frac{\varepsilon E^2}{2} d\tau = \int_{\tau} \frac{D^2}{2\varepsilon} d\tau$$

$$P_i = \int_{\tau} \vec{J} \cdot \vec{E} d\tau = \int_{\tau} \sigma E^2 d\tau = \int_{\tau} \frac{J^2}{\sigma} d\tau \quad (1.57)$$

La relazione (1.55) si può quindi esprimere come indicato in (1.58).

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \frac{J^2}{\sigma} d\tau + \frac{d}{dt} \left( \int_{\tau} \varepsilon E dE d\tau + \int_{\tau} \mu H dH d\tau \right) + \int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS &= \int_{\tau} \vec{E}^* \cdot \vec{J} d\tau \\ P_i + \frac{d}{dt} (W_e + W_m) + P_i &= P^* \end{aligned} \quad (1.58)$$

Se ora si considera il sistema in regime quasi stazionario il campo  $\vec{E}$  è proporzionale a  $1/r^3$ , dove  $r$  è la distanza del punto considerato, e  $\vec{H}$  a  $1/r^2$  per cui il vettore di Poynting è almeno proporzionale a  $1/r^5$ . Questo comporta che la potenza  $P_i$  che attraversa la superficie  $S$  irradiata all'esterno del dominio considerato,



può diventare trascurabile rispetto gli altri termini se il dominio considerato attorno alle sorgenti è sufficientemente grande ottenendo quindi il bilancio di potenze (1.59).

$$P^* \approx P_i + \frac{d}{dt}(W_e + W_m) \quad (1.59)$$

In presenza di corpi in movimento alla (1.59) è necessario aggiungere la potenza meccanica  $P_m$  associata al lavoro per unità di tempo svolto dalle forze di origine elettromagnetica sugli organi in movimento.

$$P^* \approx P_i + \frac{d}{dt}(W_e + W_m) + P_m \quad (1.60)$$

## 1.9 IL VETTORE DI SLEPIAN E GLI ELEMENTI BIPOLARI

Si consideri un sistema caratterizzato da due sottosistemi connessi tra di loro con connessioni metalliche in cui nel primo sottosistema sia presente il campo elettromotore  $E^*$  dovuto a sistemi fisici interagenti di natura non elettrica e nel secondo non sia presente tale campo e il tutto sia sospeso in un materiale isolante (Fig. 1.8). Considerata ora la superficie  $S$  che taglia il dispositivo in due punti  $A$  e  $B$  e che isola la parte in cui non vi sia campo impresso e si scomponga il campo elettrico in due parti, una parte rotazionale  $\vec{E}_r$  ( $\nabla \times \vec{E}_r = -\partial(\nabla \times \vec{A})/\partial t = -\partial\vec{B}/\partial t$ ) e una parte irrotazionale  $\vec{E}_i$  ( $\nabla \times \vec{E}_i = 0 \rightarrow \vec{E}_i = -\nabla U$ ) come indicato in (1.61).

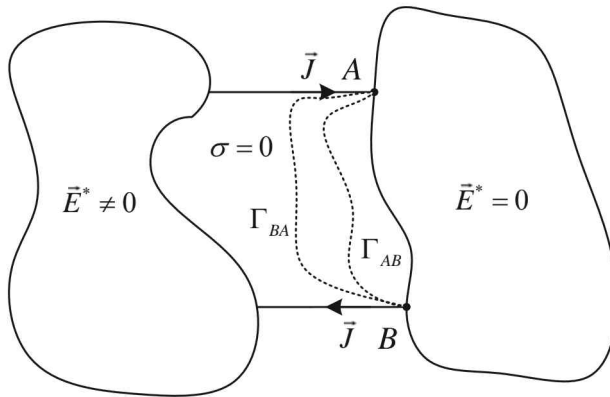
$$\vec{E} = -\nabla U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}_i + \vec{E}_r \quad (1.61)$$

Preso una linea orientata  $\Gamma_{AB}$  da  $A$  a  $B$  (con  $A$  morsetto di entrata della corrente) si definisce **tensione elettrica**  $V(A, B, \Gamma)$  l'integrale (1.62).

$$V(A, B, \Gamma) = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{E} \cdot \vec{t} \, dl \quad (1.62)$$

Si definisce **differenza di potenziale** (funzione solo degli estremi) l'integrale della sola parte irrotazionale (1.63).

$$U(A, B) = \int_A^B \vec{E}_i \cdot \vec{t} \, dl \quad (1.63)$$



■ Fig. 1.8 Il sistema analizzato.

Si definisce **forza elettromotrice** l'integrale della parte rotazionale (1.64).

$$E(A, B, \Gamma) = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{E}_r \cdot \vec{t} \, dl \quad (1.64)$$

Per cui in generale:

$$V(A, B, \Gamma) = U(A, B) + E(A, B, \Gamma) \quad (1.65)$$

Si noti che in presenza di un campo impresso  $\vec{E}^*$  la forza elettromotrice totale si calcola come indicato in (1.66).

$$E(A, B, \Gamma) = \int_{\Gamma_{AB}} \vec{E}_r \cdot \vec{t} \, dl + \int_{\Gamma_{AB}} \vec{E}^* \cdot \vec{t} \, dl \quad (1.66)$$

Se ora si considera di aggiungere alla linea  $\Gamma_{AB}$  una linea  $\Gamma_{BA}$  che chiuda il percorso, il lavoro del campo elettrico lungo la linea chiusa soddisfa le relazioni di Maxwell per cui:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{t} \, dl = \underbrace{\oint \vec{E}_i \cdot \vec{t} \, dl}_{=0} + \oint \vec{E}_r \cdot \vec{t} \, dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_r} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS \rightarrow E = -\frac{d\psi_S}{dt} \quad (1.67)$$

La relazione evidenzia come, essendo l'integrale su una linea chiusa della parte irrotazionale del campo nullo, la forza elettromotrice è pari alla derivata cambiata di segno del flusso concatenato con la superficie  $S_r$ .

Per la corrente, considerando che la corrente di conduzione sia esclusivamente presente ai morsetti A e B, si può scrivere la relazione (1.68).

$$i = 0 = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, dS = \int_{S_A} \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{S_B} \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{n} \, dS =$$

$$i = i_A - i_B + i_s = 0 \quad (1.68)$$

E nel caso si considerino campi in regime quasi stazionario ( $\partial\vec{D}/\partial t \approx 0$ ) le equazioni (1.65) e (1.68) si semplificano come indicato in (1.69).

$$\begin{aligned} i &\approx i_A - i_B = 0 \\ V(A, B, \Gamma) &\approx U_A - U_B \end{aligned} \quad (1.69)$$

Le equazioni evidenziano che un amperometro e un voltmetro ideali in regime quasi-stazionario avranno indicazioni indipendenti dalla posizione dei cordoni del voltmetro ( $\Gamma$ ) e della superficie esploratrice dell'amperometro ( $S$ ). Quando si verificano tali condizioni è possibile parlare di **bipolo** per l'elemento considerato e si possono usare le considerazioni energetiche già utilizzate con l'introduzione del vettore di Poynting. In particolare definendo il **vettore di Slepian** come indicato in (1.70) (definito in maniera analoga al vettore di Poynting, ma eliminando l'arbitrarietà del rotore).

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} + \nabla \times (U\vec{H}) \quad (1.70)$$

Scomponendo  $\vec{E}$  nella parte rotazionale e irrotazionale e ricordando l'identità vettoriale  $\nabla \times (U\vec{H}) = U\nabla \times \vec{H} + \nabla U \times \vec{H}$  si ottiene la relazione (1.71).

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \overbrace{\left( -\nabla U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}^{\vec{E}} \times \vec{H} + \nabla \times (U\vec{H}) = \\ &= \cancel{-\nabla U \times \vec{H}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \times \vec{H} + U \overbrace{\nabla \times \vec{H}}^{=\vec{j} + \partial\vec{D}/\partial t} + \cancel{\nabla U \times \vec{H}} = \\ &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \times \vec{H} + U\vec{j} + U \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.71)$$

In maniera analoga a quanto introdotto per il vettore di Poynting, il vettore di Slepian consente di determinare la potenza scambiata attraverso una superficie  $S$  del volume  $\tau$  considerato come indicato in (1.72).

$$P_i = \int_S \vec{S} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \times \vec{H} + U\vec{j} + U \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, dS \quad (1.72)$$

In regime quasi stazionario le derivate di  $\vec{A}$  e  $\vec{D}$  sono trascurabili e si possono considerare come superfici di percorrenza della corrente di conduzione i terminali metallici A e B da cui la relazione (1.73).

$$\begin{aligned} P_i &= \int_S U\vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = U_A \int_{S_A} \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{n}}_i \, dS + U_B \int_{S_B} \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = U_A i + U_B (-i) \\ P_i &= (U_A - U_B) i = U_{AB} i \end{aligned} \quad (1.73)$$

La relazione esprime quindi che in regime quasi stazionario le indicazioni del voltmetro e dell'ampmetro collegati ai morsetti del bipolo forniscono la potenza scambiata con i sistemi fisici interagenti. L'espressione globale quindi (ricordando la relazione (1.60)) nel caso di regime quasi stazionario diventa la (1.74). La potenza elettrica entrante in un bipolo si scompone in perdite joule, in variazione di energia magnetica ed elettrica e in potenza meccanica.

$$U_{AB}i = P_j + \frac{d}{dt}(W_e + W_m) + P_m \quad (1.74)$$

## 1.10 ESERCIZI

### Esercizio 1.

Quattro cariche puntiformi sono racchiuse in una superficie cilindrica  $S$ . I valori delle cariche sono  $q_1 = 5 [nC]$ ,  $q_2 = -3 [nC]$ ,  $q_3 = 4 [nC]$  e  $q_4 = -1 [nC]$ , si determini il flusso del campo elettrico attraverso la superficie  $S$ .

### Esercizio 2

Un campo vettoriale è descritto dalla seguente espressione:

$$\vec{A}(x, y) = 2 \cos(3x)\vec{i} + 6y \sin(3x)\vec{j}$$

Potrebbe essere il campo  $\vec{A}$  un campo di induzione magnetica?

### Esercizio 3

Un campo di induzione magnetica ha espressione nel tempo e della coordinata  $y$  data dalla seguente formula (dove  $\vec{k}$  è il versore associato all'asse  $z$ )

$$\vec{B}(y, t) = B_0 t \frac{y}{y_0} \vec{k}$$

Si trovi l'espressione della f.e.m. indotta in una spira quadrata di lato  $l$  giacente nel piano  $xy$  e posizionata con uno degli angoli nell'origine.

### Esercizio 4

Un filo elettrico rettilineo di raggio  $r_0$  trasporta una corrente costante  $I$  distribuita uniformemente attraverso la superficie trasversale. Si trovi l'intensità del campo di induzione magnetica in funzione della distanza radiale dal centro del filo  $r$ . Si consideri sia il caso  $r < r_0$  che  $r > r_0$ .



Per la costruzione delle macchine elettriche, nell'accezione considerata nel primo capitolo, è necessario utilizzare diversi materiali e nel seguito saranno introdotte le caratteristiche e le peculiarità di alcuni di questi. In particolare saranno analizzati i materiali che si definiscono **attivi** e cioè quelli che **sono determinanti agli effetti del funzionamento elettrico e termico delle macchine stesse**. Questi materiali si dividono in:

- **Materiali conduttori**, sede delle correnti che, interagendo con il flusso di induzione magnetica, generano le forze meccaniche e nei quali si inducono le forze elettromotrici;
- **Materiali magnetici**, che in ragione della loro permeabilità magnetica consentono di convogliare il flusso di induzione magnetica in modo opportuno;
- **Materiali isolanti**, che isolano i conduttori in tensione dalle parti magnetiche e strutturali per ovvie ragioni di sicurezza e per garantire un opportuno funzionamento alla macchina elettrica.

## 2.1 I MATERIALI CONDUTTORI

La **conducibilità** è il parametro che caratterizza l'attitudine di un materiale alla conduzione di corrente quando è sottoposto ad una tensione elettrica. In presenza di un campo di conduzione la **conducibilità**  $\sigma$  rappresenta il termine di proporzionalità esistente tra il campo elettrico  $\vec{E}$  e la densità di corrente  $\vec{J}$  secondo l'equazione (2.1).

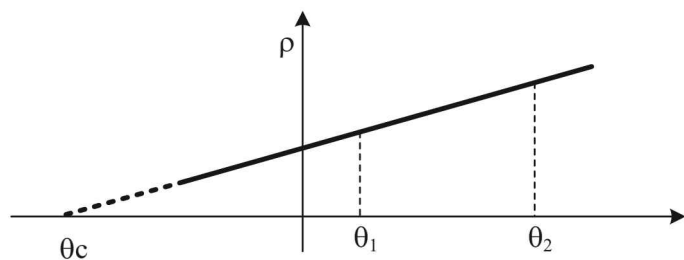
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2.1)$$

Materiale	Resistività (a 20°C) $\times 10^{-8} [\Omega m]$	Coeff. di temperatura $\times 10^{-3} [K^{-1}]$
Alluminio (99.3-99.6%)	2.82	4
Antimonio	4.2	3.6
Argento (99.88%)	1.64	3.8
Carbonio (spazzole)	20-100	
Ferro puro	9.78	6
Nichel	7.8-11	4-6
Platino	10	3.6
Rame (ricotto)	1.72	3.93
Stagno	11	4.2
Tungsteno	5.5	4.5
Bronzo	5-10	3.9
Constantana	4.9-5,1	$\approx 0$
Ottone	6-8	1-2

■ Tabella I. Caratteristiche di alcuni materiali conduttori

L'inverso della conducibilità si chiama **resistività** e si indica con  $\rho$ . Materiali buoni conduttori sono i metalli e le loro leghe per cui la resistività è variabile nell'ordine di  $10^{-4}$ - $10^{-8} [\Omega m]$ .

Per i materiali conduttori usati nelle macchine elettriche la resistività cresce con la temperatura e presenta una variazione lineare in un ampio campo di temperatura di normale funzionamento. Se si estrapola la retta che rappresenta la resistività  $\rho$  in funzione della temperatura  $\theta$  fino ad incontrare l'asse delle temperature si individua la **temperatura critica**  $\theta_c$  del materiale in corrispondenza della quale (se l'andamento fosse lineare) la resistività si annullerebbe (Fig. 2.1). Nel campo di validità dell'approssimazione lineare vale dunque l'equazione (2.2) dove  $\alpha$  prende il nome di **coefficiente di temperatura**.



$$\rho_2 = \rho_1(1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1))$$

(2.2)

■ Fig. 2.1. Resistività in funzione della temperatura



In Tabella I sono presentate alcune proprietà dei materiali conduttori. La resistenza di un conduttore può essere calcolata come indicato in (2.3) dove  $l$  è la lunghezza del conduttore e  $A$  l'area del conduttore.

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (2.3)$$

### 2.1.1 Perdite nei materiali conduttori

La potenza persa per effetto Joule per effetto della circolazione di un corrente  $i$  può essere calcolata come indicato in (2.4).

$$P = R \cdot i^2 \quad (2.4)$$

Esprimendo poi la corrente come prodotto tra la densità di corrente  $J$  e la sezione  $A$  (da cui  $I = JA$ ) si può ottenere la (2.5) dove  $V$  è il volume del materiale.

$$P = \rho \frac{l}{A} (JA)^2 = \rho J^2 V \quad (2.5)$$

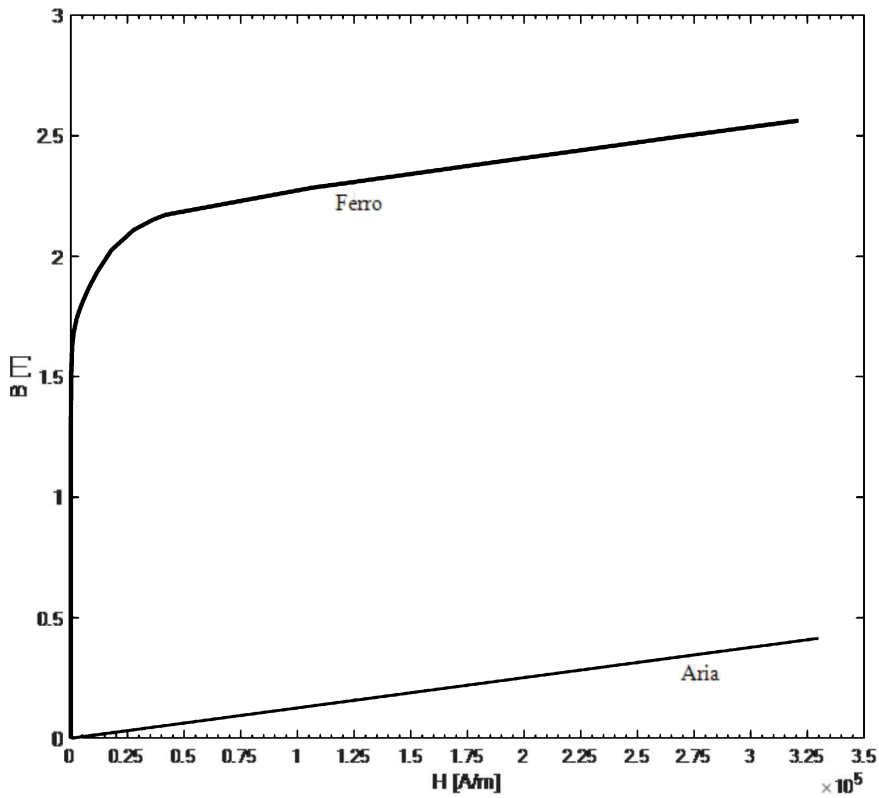
Le perdite specifiche per unità di volume si ottengono quindi dalla (2.5) dividendo per il volume  $V$ , ma spesso risulta più conveniente l'uso della perdita specifica per unità di massa come indicato in (2.6) dove  $\gamma$  è la densità del materiale.

$$P = \frac{\rho}{\gamma} J^2 \quad (2.6)$$

Esprimendo la densità di corrente in  $[A/mm^2]$  il rapporto  $\rho / \gamma$  per il rame vale circa  $2.4 [\Omega mm^4 / kg]$  e  $13 [\Omega mm^4 / kg]$  per l'alluminio. Assumendo una densità di circa  $4 [A/mm^2]$  si ottiene una perdita nel rame di circa  $40 [W/kg]$  e  $200 [W/kg]$  nell'alluminio.

## 2.2 MATERIALI MAGNETICI

L'effetto di un campo magnetico su un materiale può essere espresso analizzando il legame tra il campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  e il campo di forza magnetica (o campo magnetico)  $\vec{H}$  espresso dalla (2.7) dove il parametro  $\mu$  prende il nome di permeabilità magnetica e si misura in  $[H/m]$ .



■ Fig. 2.2. Curva di normale magnetizzazione del ferro e dell'aria in scala lineare

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.7)$$

Le caratteristiche magnetiche di un materiale dipendono dal valore assunto da  $\mu$  che solitamente viene espresso per semplicità in termini relativi rispetto la permeabilità magnetica del vuoto  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  [H/m] come indicato in (2.8)

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (2.8)$$

In maniera analoga si può definire la **suscettività magnetica** come indicato in (2.9) da cui il legame tra  $\chi_m$  e  $\mu$  (2.10).

$$\chi_m = \mu_r - 1 \quad (2.9)$$

$$\mu = \mu_0(\chi_m + 1) \quad (2.10)$$

Materiale	Suscettività	Permeabilità relativa	
Metglas		$10^6$	Ferromagnetici
Ferro (99.95%) (ricotto in H)		$2 \cdot 10^5$	
Mu-Metal		$2 \cdot 10^4 \div 5 \cdot 10^4$	
Ferro-Cobalto		$1.8 \cdot 10^4$	
Ferro (99.8%)		5000	
Ferrite (Zinco-Manganese)		640	
Ferrite (Nichel-Zinco)		$16 \div 640$	
Acciaio		100	
Nichel		$100 \div 600$	
Magneti Neodimio		1.05	
Platino		1.000265	Paramagnetici
Alluminio		1.000022	
Legno		$\sim 1$	
Aria		$\sim 1$	
Teflon		1	
Rame	$-1 \cdot 10^{-5}$	0.99999	Diamag.
Acqua	$-0.91 \cdot 10^{-5}$		
Bismuto	$-16.6 \cdot 10^{-5}$		
Superconduttori	-1		

■ Tabella II. Proprietà magnetiche di alcuni materiali

A seconda del valore di suscettività o meglio della permeabilità magnetica si possono individuare tre tipi di materiali magnetici:

- **materiali ferromagnetici** per i quali solitamente la permeabilità magnetica è molto più grande di quella del vuoto o che comunque presentano comportamenti non lineari come la capacità di rimanere magnetizzati (isteresi magnetica).
- **materiali paramagnetici** per i quali la permeabilità magnetica è lineare e poco più grande di quella del vuoto e non presentano magnetizzazione residua.



■ Fig. 2.3. Bismuto in forma cristallina artificiale e nella forma metallica.

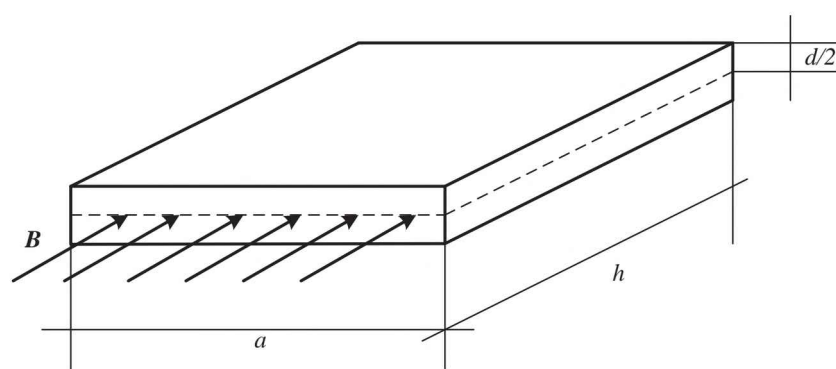
- **materiali diamagnetici** per i quali la permeabilità magnetica è lineare e poco più piccola di quella del vuoto (hanno quindi suscettività negativa).

A titolo di esempio in Fig. 2.2 sono rappresentate in forma sintetica le caratteristiche magnetiche del ferro e dell'aria. In Tabella II sono riportate le proprietà magnetiche di alcuni materiali e in Fig. 2.3 è invece mostrata una immagine del bismuto, il materiale naturale con il maggior effetto diamagnetico.

### 2.2.1 Perdite nei materiali ferromagnetici

Nei materiali ferromagnetici possiamo distinguere due principali sorgenti di perdita: le perdite per **correnti parassite** e le perdite per effetti di **isteresi magnetica**. In particolare per quanto riguarda le correnti parassite, un materiale conduttore sottoposto ad un flusso variabile è sede di forze elettromotrici indotte. Queste forze elettromotrici fanno circolare nella massa del materiale delle correnti parassite che provocano perdite indesiderate. In presenza di una struttura massiccia, tali perdite alle frequenze ordinarie sono così elevate da non consentire di raggiungere valori di induzione tecnicamente accettabili ( $> 1$  [T]) e quindi di sfruttare adeguatamente i materiali.

Per ridurre questo effetto, nel caso di strutture in materiale ferromagnetico, si procede a suddividere la struttura in un gran numero di lamierini isolati tra loro in modo da impedire lo stabilirsi di correnti parassite che interessino l'intera sezione. Per un calcolo approssimato dell'entità di queste perdite si consideri un lamierino di forma rettangolare di dimensioni  $a \times b$  e di spessore  $d \ll a$ . Tale lamierino sia interessato da un campo di induzione magnetica di intensità  $B$



in direzione indicata in Fig 2.4.

Poiché la dimensione

■ Fig. 2.4  
Lamierino  
elementare

$d$  è molto più piccola della dimensione  $a$  si può immaginare in prima approssimazione di dividere il lamierino in due e, trascurando i tratti verticali di lunghezza  $d$ , considerare una spira elementare chiusa in corto circuito formata da due conduttori di dimensione  $d/2 \times a$  e altezza  $h$ . La resistenza della spira si può calcolare come indicato in (2.11).

$$R = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{2a}{\frac{d}{2} \cdot h} = \rho \frac{4a}{dh} \quad (2.11)$$

Se si considera un'alimentazione sinusoidale la forza elettromotrice indotta nella spira si può calcolare come indicato in (2.12) da cui il valore efficace  $E$  indicato in (2.13).

$$e = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} \psi_M \sin(\omega t) = \omega \psi_M \cos(\omega t) \quad (2.12)$$

$$E = \frac{\omega \psi_M}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f B a d}{\sqrt{2}} \quad (2.13)$$

Le perdite si possono quindi calcolare come indicato in (2.14).

$$P = \frac{E^2}{R} = \frac{4\pi^2 f^2 B^2 a^2 d^2}{\underbrace{2}_{E^2}} \cdot \frac{dh}{\underbrace{4a\rho}_{1/R}} \quad (2.14)$$

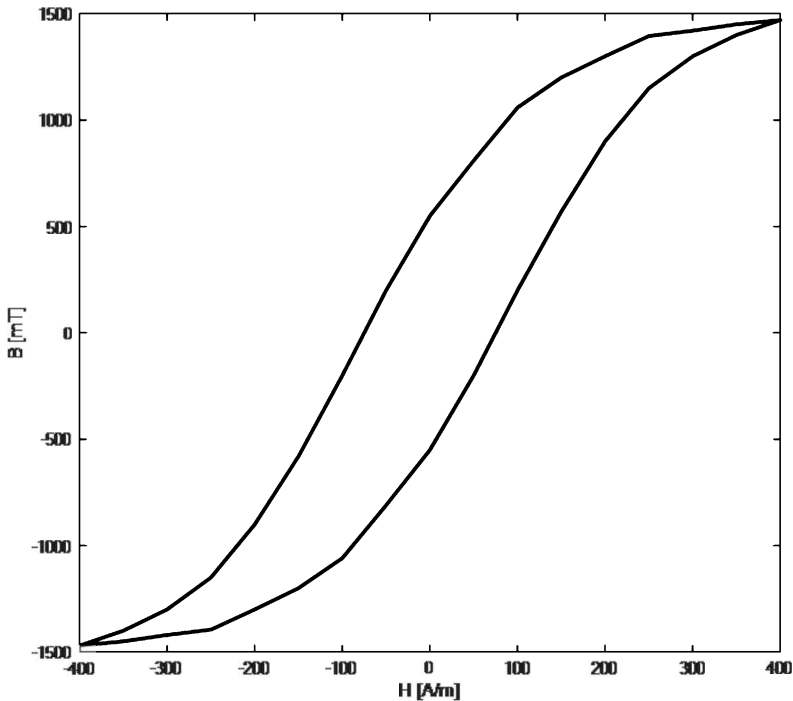
Esprimendo le perdite  $P$  individuate nella (2.14) in termini di perdite specifiche per unità di massa e indicando la massa  $m$  come prodotto della densità  $\delta$  per il volume  $V = dah$  si ottiene la (2.15).

$$P^* = \frac{P}{m} = \frac{\pi^2 f^2 B^2 d^3 ha}{2\rho} \cdot \frac{1}{\delta dah} = \frac{\pi^2}{2\rho\delta} f^2 B^2 d^2 \propto \frac{f^2 B^2 d^2}{\rho} \quad (2.15)$$

Osservando la (2.15) si può notare come le perdite per correnti parassite sono proporzionali al quadrato della frequenza, dell'induzione e dello spessore e inversamente proporzionali alla resistività del materiale. Ne segue che per ridurre le perdite si possono adottare due provvedimenti:

1. Ridurre lo spessore dei lamierini. I valori di spessore comunemente usati variano da 0.3 a 0.5 [mm].
2. Aumentare la resistività dei materiali e a questo scopo si usano leghe di Ferro-Silicio al 3 ÷ 5%.

Per quanto riguarda invece le perdite per isteresi magnetica, i materiali ferromagnetici presentano una caratteristica nel piano B-H come quella indicata in Fig. 2.5.



■ Fig. 2.5. Esempio di ciclo di isteresi

Sperimentalmente si può trovare che le perdite per isteresi si possono calcolare come indicato in (2.16) .

$$P = \alpha B^n f \quad (2.16)$$

Dove:

$\alpha$  è un coefficiente che dipende dal materiale

$f$  è la frequenza di alimentazione

$n$  è un coefficiente da determinarsi sperimentalmente. Fu introdotto da Steinmetz (da cui prende il nome di **coefficiente di Steinmetz**) e sui materiali allora a disposizione valeva 1.6, mentre attualmente vale circa 2.

Nel caso generale quindi sommando i contributi delle perdite per isteresi e correnti parassite e considerando valida l'approssimazione del coefficiente di Steinmetz uguale a 2 si ottiene la (2.17).

$$P_{fe} = (K_i f + K_{cp} f^2) B_M^2 = \alpha \cdot B_M^2 \quad [\text{W/kg}] \quad (2.17)$$

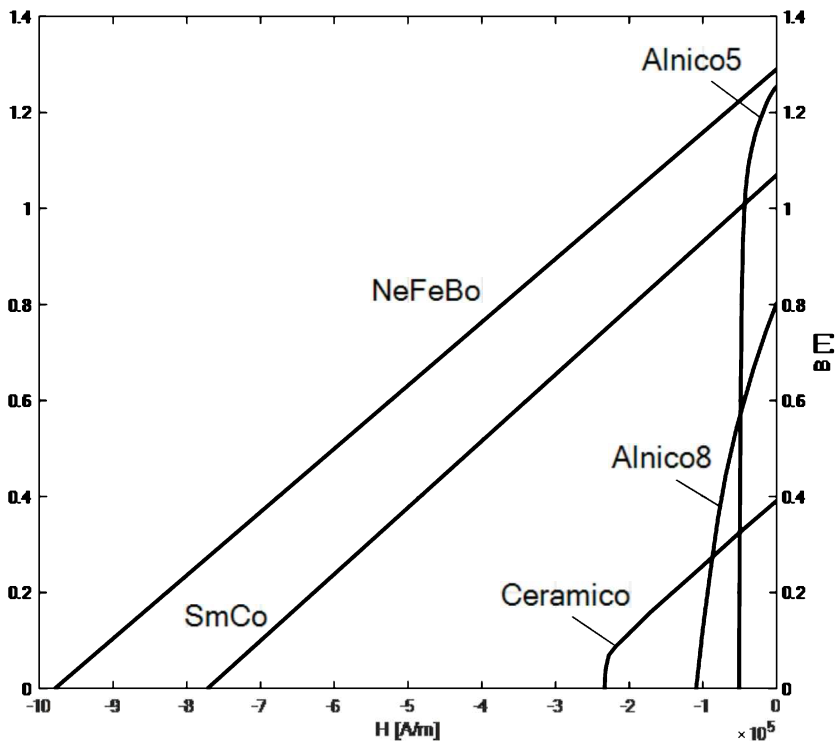
Si definisce **cifra di perdita** (2.18) del materiale ferromagnetico la **perdita specifica** per unità di massa [W/kg] di un materiale sottoposto a magnetizzazione alternata sinusoidale alla frequenza di 50 [Hz] e con induzione massima 1 [T].

$$Cp = \frac{P_{fe}}{m_{fe}} \quad (2.18)$$

Nel caso di lamiere normalmente utilizzate per le macchine elettriche tale cifra di perdita varia tra 0.5 [W/kg] per le lamiere a cristalli orientati di spessore 0.3 mm a 5 [W/kg] per le normali lamiere di spessore 1 [mm].

## 2.2.2 Magnet permanenti

I magneti permanenti (o materiali magnetici “duri” al contrario di quelli “dolci” come solitamente chiamati i materiali ferromagnetici), sono materiali caratterizzati da elevati valori di forza coercitiva e induzione residua. Le principali famiglie di materiali utilizzati a questo scopo attualmente sono: ferriti, leghe di ferro con aggiunta di Al-Ni-Co (Alluminio-Nichel-Cobalto) e Mn-Al-C, composti di terre rare (Sm-Co Samario-Cobalto, Nd-Fe-B Neodimio-Ferro-Boro). In Fig. 2.6 sono riportate le caratteristiche nel piano B-H di alcuni dei principali materiali magnetici. Si può inoltre notare come la permeabilità di questi materiali nella zona di funzionamento (la pendenza delle caratteristiche B-H) sia molto simile a quella dell’aria.



■ Fig. 2.6.  
Caratteristiche magnetiche di alcuni magneti permanenti

## 2.3 I MATERIALI ISOLANTI

I materiali isolanti presentano resistività molto elevata dell'ordine di  $10^8 \div 10^{16}$  [ $\Omega\text{m}$ ] e quindi circa  $10^{20}$  volte più elevata di quella dei materiali conduttori. I materiali di questo tipo sono caratterizzati dalla **rigidità dielettrica** che esprime il valore limite di campo elettrico (solitamente espresso in [kV/mm]) in grado di perforare il materiale isolante e di produrre la conduzione di corrente elettrica.

Materiale	Permeabilità relativa ( $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ [F/m])	Rigidità [kV/mm]
Aria secca	1.0006	3
Acqua distillata	81.07	15
Olio minerale	2.2 ÷ 2.5	8 ÷ 16
Bachelite	5.5 ÷ 8.5	10
Carta (in aria)	2	6 ÷ 15
Carta paraffinata	2.5 ÷ 4	40 ÷ 50
Gomma naturale	2.2 ÷ 2.5	20 ÷ 40
Mica	6 ÷ 8	50 ÷ 120
Vetro	6 ÷ 8	25 ÷ 100
Polietilene	2.3	50
Porcellana	4 ÷ 7	12 ÷ 30
Ossido di titanio	90 ÷ 170	5
Titanati di Ba-Sr	1000 ÷ 10000	5

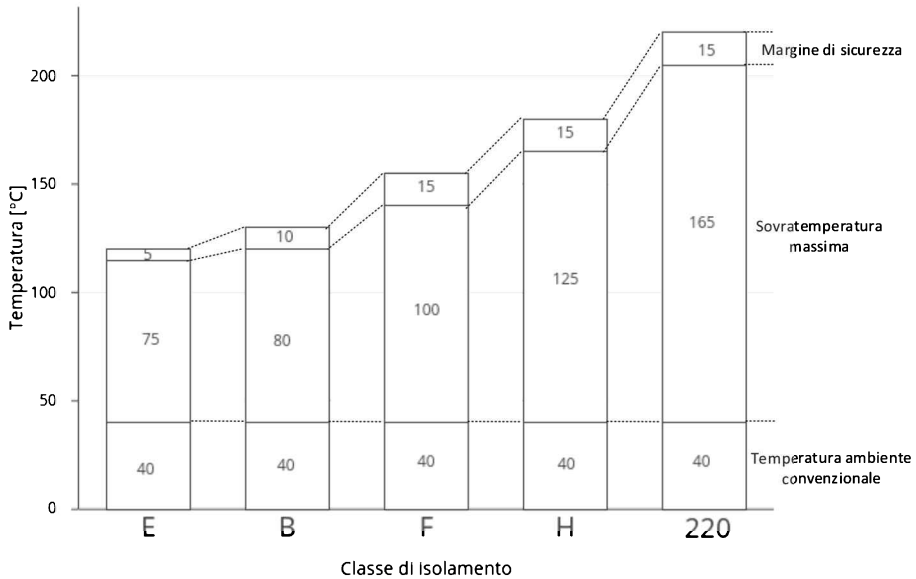
■ Tabella III. Proprietà dielettriche di alcuni materiali

I materiali isolanti costituiscono una delle parti più delicate di una macchina elettrica, perché tendono a perdere le loro proprietà sia per effetto del riscaldamento che delle sollecitazioni dielettriche. Sperimentalmente è stato evidenziato come la relazione tra la vita media probabile di un materiale isolante, cioè il tempo dopo il quale perde le sue capacità dielettriche, e la temperatura di funzionamento  $\theta$  è del tipo indicato in (2.19)

$$\frac{t_1}{t_2} = e^{k(\theta_2 - \theta_1)} \quad (2.19)$$



Sovratemperature massime



■ Fig. 2.7. Sovratemperature massime e margini di sicurezza.

Classe (CEI 15-16)	Classe (EN 60085)	Temperatura Max. [°C]
	70	90
Y	90	95
A	105	105
E	120	120
B	130	130
F	155	155
H	180	180
	200	200
	220	220
	250	>250

■ Tabella IV. Classi di isolamento

Dove  $t_1, t_2$  sono le vite medie probabili rispettivamente alle temperature  $\theta_1, \theta_2$  espresse in gradi centigradi. L'esperienza mostra che il coefficiente  $k$  per la maggior parte dei materiali isolanti usati nelle macchine elettriche è tale che un incremento di  $10^\circ \text{C}$  nella temperatura di funzionamento ( $\theta_2 - \theta_1 = 10$ ) porta a dimezzare la vita media probabile dell'isolante ( $t_1 / t_2 = 2$ ). Ne risulta quindi che fissata la vita

media probabile del macchinario elettrico (15-20 anni) sono fissate le massime temperature di funzionamento per i materiali dielettrici. Le norme elettriche (CEI EN 60085) a questo proposito classificano i materiali in classi di isolamento a seconda della massima temperatura di funzionamento ammissibile (Tabella III). In Fig. 2.7 sono riportate le sovratemperature massime e i margini di sicurezza da adottare per i vari isolamenti. Un'ulteriore attenzione deve essere posta se si considerano installazioni con temperature ambiente particolari o altitudini maggiori di 1000 [m]. In Tabella V è riportato il declassamento solitamente adottato in questi casi.

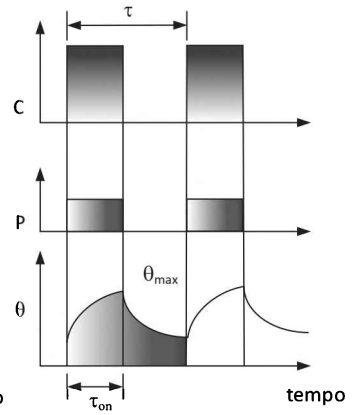
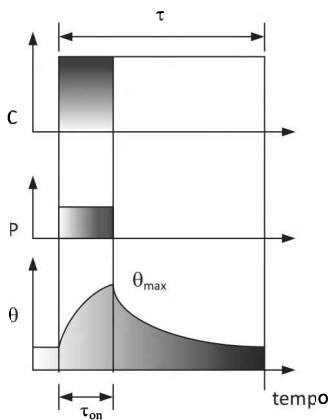
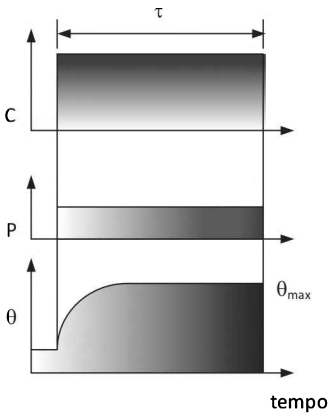
Altitudine sul livello del mare [m]		Potenze ammissibili P/Pn [%]				
		Temperatura ambiente [°C]				
		0-40	45	50	55	60
Fino a	1000	100	97	93	88	82
	1500	98	95	91	86	80
	2000	94	91	87	82	77
	2500	91	88	84	80	74
	3000	87	84	81	76	71
	3500	82	79	76	72	67
	4000	77	74	71	67	63

■ Tabella V. Declassamento della macchina a seconda della temperatura e dell'altitudine

## 2.4 VALORI NOMINALI E TIPOLOGIA DI SERVIZIO

I limiti di funzionamento che impongono i materiali presenti nelle macchine elettriche definiscono alcune condizioni di lavoro per cui il costruttore garantisce il funzionamento senza guasti della macchina stessa. Con l'introduzione di sistemi elettronici abbinati alle macchine elettriche è sicuramente diventato più difficile individuare esattamente tali condizioni limite, ma è ancora possibile fornire alcune informazioni di carattere generale.

In particolare, si definirà **valore nominale** di una grandezza (tensione, corrente, potenza, ecc.) il **valore che garantisce il funzionamento della macchina senza guasti per la vita utile** della stessa in una particolare condizione di lavoro. Solitamente tali valori nominali sono assegnati dal costruttore e fanno riferimento ad un funzionamento della macchina in **servizio continuativo** e cioè un funzionamento senza interruzioni 24h su 24 (o comunque un funzionamento che consenta il raggiungimento del regime termico). Le tipologie di servizio per le macchine elettriche sono normate nella IEC-60034-1 e vengono indicate con la lettera S seguita da un numero. Per



■ Fig. 2.8. Servizio continuativo (S1). Andamento della temperatura  $\Theta$ , potenza P e coppia C

■ Fig. 2.9. Servizio di durata limitata (S2). Andamento della temperatura  $\Theta$ , potenza P e coppia C

■ Fig. 2.10. Servizio intermittente (S3). Andamento della temperatura  $\Theta$ , potenza P e coppia C

quanto riguarda il servizio solitamente utilizzato per l'individuazione dei valori nominali delle macchine elettriche si tratta del servizio di tipo S1 (Fig.2.8). I valori delle grandezze nominali saranno quindi solitamente fissati dai limiti di rigidità dielettrica e di temperatura massima ammissibile dei materiali isolanti utilizzati nella costruzione della macchina, in quanto questi materiali presentano, nella maggioranza dei casi di interesse, i vincoli più stringenti. Le tipologie di servizio fissate dalla norma sono (per maggiori dettagli si rimanda alla norma):

- S1 - Servizio continuo
- S2 - Servizio di durata limitata
- S3 - Servizio intermittente
- S4 - Servizio intermittente periodico con avviamento che influenza il riscaldamento della macchina
- S5 - Servizio intermittente periodico con avviamento e frenatura che influenza il riscaldamento della macchina
- S6 - Servizio ininterrotto con carico intermittente
- S7 - Servizio ininterrotto con avviamento e frenatura che influenzano il riscaldamento della macchina
- S8 - Servizio ininterrotto con cambiamento periodico della velocità

## 2.5 ESERCIZI

### Esercizio 1

Una bobina di rame alla temperatura di  $25^{\circ}\text{C}$  presenta la resistenza di  $45\text{ [}\Omega\text{]}$ . Dopo un certo periodo di funzionamento se ne misura nuovamente la resistenza, ottenendo il valore di  $65\text{ [}\Omega\text{]}$ ; quale temperatura ha raggiunto la bobina?

### Esercizio 2

Si consideri un motore elettrico targato S1 (**servizio continuativo**) avente la potenza nominale  $P_n = 10\text{ [kW]}$  e un rendimento  $\eta = 87\%$  (si consideri il rendimento costante al variare della potenza erogata). La temperatura a regime termico in condizioni nominali è pari a  $200\text{ [}^{\circ}\text{C]}$ , mentre la temperatura massima tollerabile dagli isolanti è pari a  $210\text{ [}^{\circ}\text{C]}$ . La temperatura ambiente è di  $50\text{ [}^{\circ}\text{C]}$  e la costante di tempo termica della macchina è  $\tau = 1000\text{ s}$ .

Si determini la potenza erogabile in servizio S3 (servizio intermittente) con durata del ciclo  $T = 500\text{ [s]}$  e rapporto di intermittenza  $\delta = 0.5$ .

Qualsiasi macchina elettrica può essere modellata con un certo numero di circuiti magneticamente accoppiati. In questo capitolo saranno quindi presentati i metodi per modellare tali sistemi con particolare riferimento alle nozioni di base che serviranno per poi modellare le macchine elettriche. In particolare si ricaveranno le relazioni che consentiranno l'individuazione delle grandezze caratteristiche di tali sistemi attraverso opportuni circuiti equivalenti.



■ Joseph Henry  
(1797-1878)

### 3.1 CIRCUITI MAGNETICI

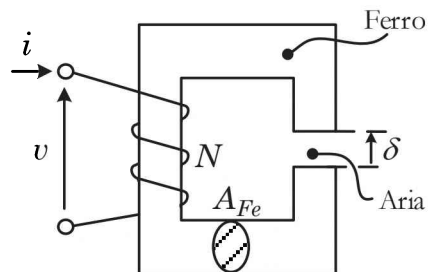
Si consideri il sistema di Fig. 3.1 e si voglia studiarne il comportamento individuando i valori del campo magnetico e del campo di induzione magnetica .

Per studiare un sistema di questo tipo è necessario fare riferimento alle equazioni di Maxwell, ma ai fini pratici diventa estremamente complesso studiare tali sistemi affidandosi esclusivamente alle equazioni in forma locale. Per questa ragione si cercherà una formulazione più semplice del problema evidenziando e separando i fenomeni principali e andando poi ad individuare un'opportuna formulazione integrale che si tradurrà (sotto opportune ipotesi) in circuiti elettrici equivalenti.

Si integrino quindi le equazioni (3.1) (3.2) usando le convenzioni indicate in Fig. 3.2. Grazie al teorema del rotore e della divergenza è possibile ottenere le equazioni (3.3) (3.4) che esprimono come il lavoro del campo magnetico  $\vec{H}$  lungo una linea chiusa è pari alla corrente abbracciata dalla linea (3.3) e che il flusso del campo di induzione  $\vec{B}$  su una superficie chiusa è nullo (3.4).

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.1)$$

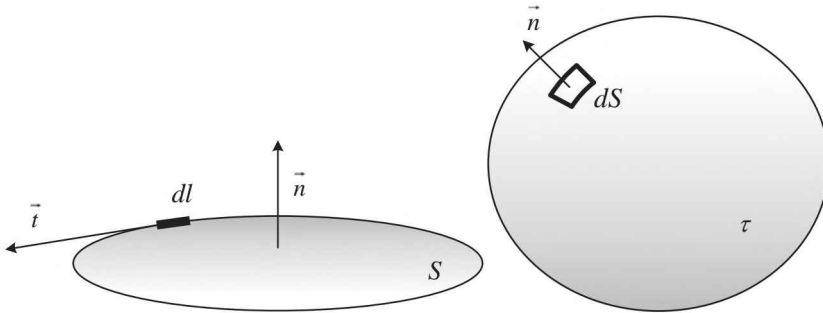
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$



■ Fig. 3.1 Sistema magnetico elementare

$$\underbrace{\int_S \nabla \times \vec{H} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_l \vec{H} \cdot \vec{t} \, dl}_{\text{teorema del rotore}} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \, dS = i_{\text{conduzione}} + i_{\text{spostamento}} \quad (3.3)$$

$$\underbrace{\int_V \nabla \cdot \vec{B} \, dV = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS}_{\text{teorema della divergenza}} = 0 \quad (3.4)$$

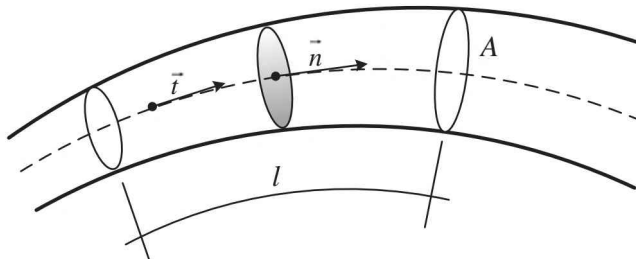


■ Fig. 3.2. Convenzioni di integrazione

Nelle ipotesi di regime quasi-stazionario è possibile, come visto, studiare i campi magnetici ed elettrici separatamente ( $\partial \vec{D} / \partial t \approx 0$ ). Integrando quindi lungo la linea mediana di un tubo di flusso filiforme (in modo che si possa ipotizzare  $\vec{B}$  e  $\mu$  uniformi) e considerando sezioni normali equipotenziali (così  $\vec{t} \equiv \vec{n}$ , Fig. 2.3) è possibile ottenere l'equazione (3.5) che rappresenta la **legge di ohm magnetica**.

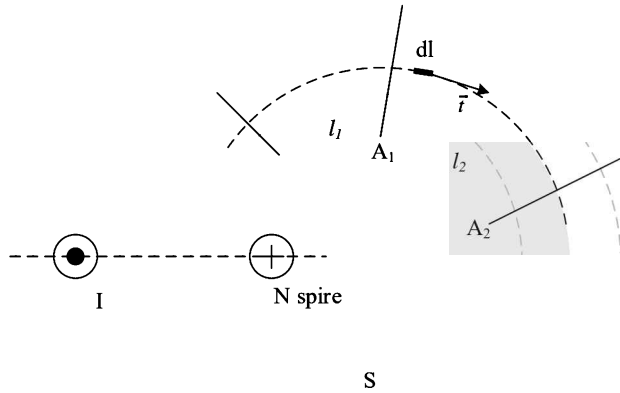
$$U = \int_l \vec{H} \cdot \vec{t} \, dl = \int_l \frac{B(l)}{\mu} \, dl = \int_l \frac{\varphi}{\mu A(l)} \, dl = \varphi \int_l \frac{1}{\mu A(l)} \, dl = \varphi \frac{l}{\mu A_{eq}} \quad (3.5)$$

$$\boxed{U = \varphi \theta} \quad \theta = \frac{l}{\mu A_{eq}}$$



■ Fig. 3.3 Linee e superfici di integrazione

Nella (3.5),  $U$  prende il nome di **tensione magnetica** e si misura in [Asp] (Ampere-spire),  $\theta$  è la **riluttanza** espressa in [ $H^{-1}$ ] (Henry<sup>-1</sup>) e  $\varphi$  è il **flusso di induzione magnetica** misurato in [Wb] (Weber). Nel caso si scriva la (3.5) considerando un tubo di flusso a sezione costante (come nel circuito elementare di Fig. 3.1 se si trascurano eventuali distorsioni) l'area equivalente  $A_{eq}$  coincide con l'area del tubo di flusso. Se ora le espressioni precedenti sono scritte considerando un tubo di flusso concatenato con un avvolgimento (Fig. 3.4) si può scrivere l'equazione (3.6) che può essere interpretata come una **legge di Kirchhoff delle tensioni magnetiche**.

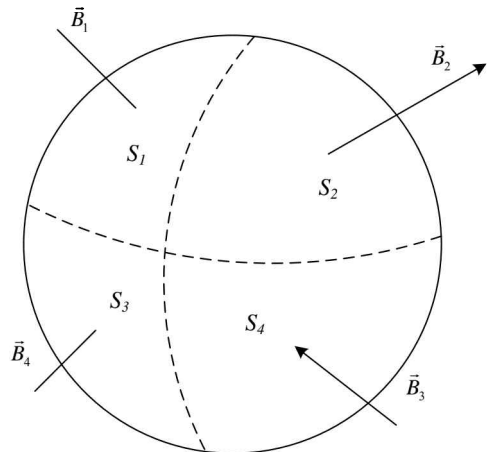


■ Fig. 3.4 Legge di Kirchhoff delle tensioni magnetiche

$$\int_l \vec{H} \cdot \vec{t} dl = \int_{l_1} \vec{H} \cdot \vec{t} dl_1 + \int_{l_2} \vec{H} \cdot \vec{t} dl_2 + \dots = U_1 + U_2 + \dots = NI \quad (3.6)$$

Si noti come a destra compaia la corrente che percorre il conduttore moltiplicata il numero di spire  $N$ , in quanto la superficie  $S$  associata alla linea di integrazione  $l$  (indicata in grigio in Fig 3.4) è attraversata  $N$  volte dalla corrente  $I$ .

Considerando ora un'opportuna superficie chiusa per il calcolo dei flussi di induzione magnetica (Fig.3.5) è possibile scrivere un'ulteriore espressione che può essere interpretata come la **legge di Kirchhoff delle correnti magnetiche** (3.7).



■ Fig. 3.5 Legge di Kirchhoff delle correnti magnetiche

$$\int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 dS + \dots = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots = 0 \quad (3.7)$$

Le equazioni ottenute, riassunte in (3.8), sono del tutto analoghe a quelle che descrivono i circuiti in regime stazionario e possono essere quindi interpretate con una rete magnetica equivalente. Nel caso del sistema in esame, tale rete equivalente assume la forma di Fig. 3.6 in cui ovviamente si sono trascurate eventuali deformazioni del campo magnetico.

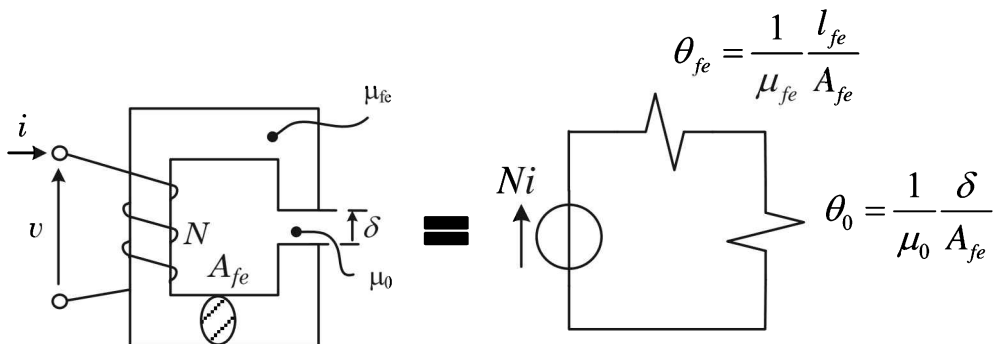
$$\begin{cases} N_1 I_1 + N_2 I_2 + \dots = U_1 + U_2 + \dots & \text{LKT} \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \dots = 0 & \text{LKC} \\ U_k = \theta_k \varphi_k & \text{L}\Omega \end{cases} \quad (3.8)$$

## 3.2 AUTO E MUTUE INDUTTANZE

Dal punto di vista dei morsetti elettrici, l'effetto di accumulo di energia nel campo magnetico può essere rappresentato attraverso il bipolo ideale **induttore** il cui parametro **induttanza** è definito dalla (3.9) dove  $\psi$  è il **flusso concatenato** con la bobina definito come  $N$  volte il flusso della singola spira essendo  $N$  il numero di spire della bobina<sup>1</sup>.

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{N\varphi}{i} \quad (3.9)$$

Nel caso ci siano più bobine interagenti tra loro, allo stesso modo, si possono definire ulteriori coefficienti di induttanza che esprimeranno le interazioni esistenti tra le stesse. Per semplicità nel seguito verrà presentato solo il caso di due bobine per poi estendere questi risultati a tre e più bobine quando si affronterà la modellazione delle macchine elettriche.



■ Fig. 3.6 Rete magnetica equivalente

1 In questa trattazione e nel seguito si considereranno sempre concatenamenti di flusso con il numero totale delle spire costituenti la bobina.



Considerando quindi il caso in cui siano presenti due bobine si possono definire quattro coefficienti: i coefficienti  $L_{11}$  e  $L_{22}$ , detti coefficienti di **auto induttanza**, che si calcolano come indicato in (3.10), alimentando la singola bobina quando non sia alimentata l'altra bobina, e i coefficienti  $L_{12}$  e  $L_{21}$ , detti coefficienti di **mutua induttanza**, che si calcolano come indicato in (3.11), alimentando la singola bobina e calcolando il flusso concatenato con l'altra bobina non alimentata.



■ Fig.3.7 Esempio di realizzazione pratica di un induttore

$$L_{11} = \left. \frac{\psi_1^*}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad L_{22} = \left. \frac{\psi_2^*}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad (3.10)$$

$$L_{12} = \left. \frac{\psi_1^*}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad L_{21} = \left. \frac{\psi_2^*}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad (3.11)$$

Con le definizioni precedenti è possibile scrivere il legame flussi-correnti come indicato in (3.12).

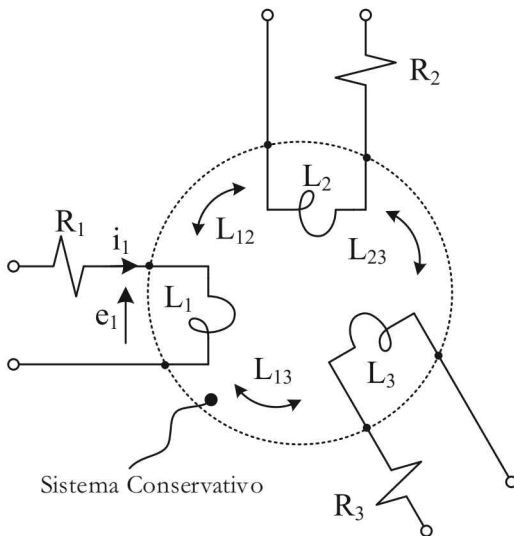
$$\begin{aligned} \psi_1 &= L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \\ \psi_2 &= L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le forze elettromotrici indotte ai capi delle bobine possono essere quindi calcolate come indicato in (3.13).

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{d}{dt}(L_{11}i_1 + L_{12}i_2) \\ e_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d}{dt}(L_{22}i_2 + L_{21}i_1) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Considerando induttori lineari-tempo invarianti, le leggi di Faraday per le due bobine possono essere scritte come indicato in (3.14).

$$\begin{aligned} e_1 &= L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \\ e_2 &= L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (3.14)$$



■ Fig. 3.8. Esempio di sottosistema di induttori conservativo. I resistori sono esterni al sistema.

meccanici nel caso di sistemi di induttori con parti mobili) **siano esterni al sistema in esame**. Tale ipotesi non è limitativa per lo studio, in quanto spesso nella definizione di modelli per uso ingegneristico, si può procedere ad una modellazione a parametri concentrati del sistema in esame, considerando il bipolo che rappresenta il fenomeno dissipativo (il resistore) “esterno” ad una parte del sistema (Fig. 3.8)

In un generico sistema, l'energia  $W$  (se esiste) è una particolare funzione di stato le cui variazioni, per definizione, uguagliano il lavoro (in qualsiasi forma) scambiato dal sistema con l'esterno. Con le convenzioni di segno normalmente assunte, un lavoro entrante nel sistema corrisponde ad aumento di energia. Considerando un sistema costituito da due induttori mutuamente accoppiati tra loro a geometria fissata, il lavoro elettrico totale entrante nel sistema (conservativo) eguaglia la variazione di energia del sistema come indicato in (3.15) essendo  $e_1$  e  $i_1$  rispettivamente le tensioni e correnti ai morsetti del primo induttore e  $e_2$ ,  $i_2$  tensione e corrente ai morsetti del secondo induttore.

$$dW = e_1 i_1 dt + e_2 i_2 dt \quad (3.15)$$

Esprimendo ora l'energia come funzione di stato nelle variabili flussi concatenati  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  è possibile ottenere la relazione (3.16), essendo  $W$  una funzione continua e derivabile.

$$dW(\psi_1, \psi_2) = \frac{\partial W}{\partial \psi_1} d\psi_1 + \frac{\partial W}{\partial \psi_2} d\psi_2 = e_1 i_1 dt + e_2 i_2 dt \quad (3.16)$$

Si ricorda che si definiscono **induttori lineari**, induttori in cui si hanno relazioni di proporzionalità tra i flussi concatenati e le correnti a geometria fissata. Tali induttori possono comunque presentare induttanze che sono funzioni non lineari delle variabili meccaniche. Pertanto la dizione **induttori lineari** fa riferimento solo alla proporzionalità tra flussi e correnti e non implica la linearità del sistema elettromeccanico.

Si consideri ora un generico sistema di induttori **conservativo**, e cioè un sistema in cui tutti i fenomeni dissipativi (sia elettrici che

Le correnti intese come funzioni dei flussi concatenati si possono quindi calcolare come indicato in (3.17).

$$i_1 = \frac{\partial W}{\partial \psi_1} \quad i_2 = \frac{\partial W}{\partial \psi_2} \quad (3.17)$$

Ricordando il legame tra flussi e correnti espresso in (3.18) e ricordando il teorema di Schwarz (3.19), derivando le espressioni (3.17) è possibile scrivere le relazioni (3.20) che evidenziano la proprietà di reciprocità delle mutue induttanze.

$$\begin{aligned} \psi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 & \rightarrow i_1 = \frac{1}{H}(L_{22}\psi_1 - L_{12}\psi_2) \\ \psi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 & \rightarrow i_2 = \frac{1}{H}(L_{11}\psi_2 - L_{21}\psi_1) \end{aligned} \quad H = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial i_1}{\partial \psi_2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \psi_1 \partial \psi_2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \psi_2 \partial \psi_1} = \frac{\partial i_2}{\partial \psi_1} \quad (3.19)$$

Teorema di Schwarz

$$\frac{\partial i_1}{\partial \psi_2} = \frac{-L_{12}}{H} = \frac{\partial i_2}{\partial \psi_1} = \frac{-L_{21}}{H} \rightarrow L_{12} = L_{21} = L_m \quad (3.20)$$

Dalle leggi di Faraday dei due induttori ( $e = d\psi/dt$ ) e utilizzando il legame tra flussi e correnti si può ricavare l'espressione (3.21).

$$\begin{aligned} dW &= \overbrace{e_1 dt}^{d\psi_1} i_1 + \overbrace{e_2 dt}^{d\psi_2} i_2 = i_1 d\psi_1 + i_2 d\psi_2 = \\ &= i_1 d(L_{11}i_1 + L_m i_2) + i_2 d(L_{22}i_2 + L_m i_1) = \\ &= L_{11}i_1 di_1 + L_{22}i_2 di_2 + L_m(i_1 di_2 + i_2 di_1) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Integrando l'espressione (3.21) come ad esempio indicato in (3.22) è possibile ottenere la formula per il calcolo dell'energia magnetica accumulata in un sistema di due induttori (3.23). Essendo l'energia funzione di stato è possibile infatti utilizzare il percorso di integrazione più comodo (in questo caso si è scelto di integrare prima  $i_2$  con  $i_1 = 0$  e poi  $i_1$ ).

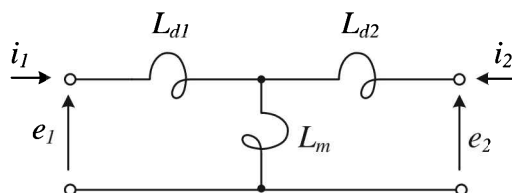
$$\begin{aligned} \int_0^{i_1} \int_0^{i_2} dW &= \int_0^{i_1} \int_0^{i_2} (L_{11}i_1 di_1 + L_{22}i_2 di_2 + L_m(i_1 di_2 + i_2 di_1)) = \\ &= \int_0^{i_1} \left( L_{11}i_1 di_1 + \frac{1}{2} L_{22}i_2^2 + L_m i_2 di_1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22}i_2^2 + L_m i_2 i_1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$W = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + L_m i_1 i_2 \quad (3.23)$$

Per quanto riguarda la rappresentazione circuitale di un sistema di due induttori, è possibile ottenere un modello utile per lo studio delle macchine elettriche manipolando le equazioni (3.14) come indicato in (3.24) ottenendo le equazioni (3.25). È quindi possibile rappresentare tali equazioni con il circuito equivalente (a T) indicato in Fig. 3.9 dove i termini  $L_{d1}$  e  $L_{d2}$  prendono il nome di **induttanze di dispersione**.

$$\begin{aligned} e_1 &= L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{di_2}{dt} \pm L_m \frac{di_1}{dt} \\ e_2 &= L_{22} \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{di_2}{dt} \pm L_m \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (3.24)$$

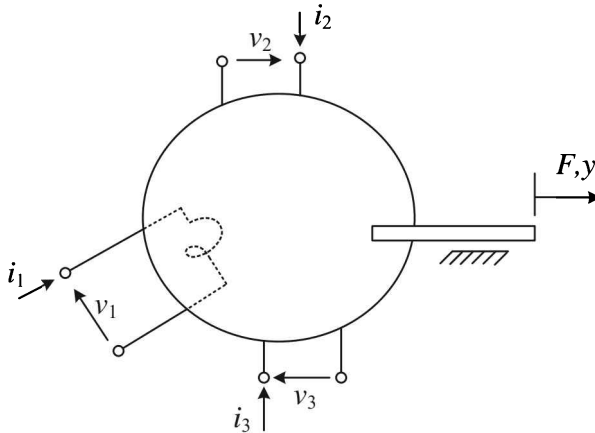
$$\begin{aligned} e_1 &= (L_{11} - L_m) \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) = L_{d1} \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) \\ e_2 &= \underbrace{(L_{22} - L_m)}_{\text{induttanza di dispersione}} \frac{di_2}{dt} + L_m \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) = L_{d2} \frac{di_2}{dt} + L_m \frac{d}{dt}(i_1 + i_2) \end{aligned} \quad (3.25)$$



■ Fig. 3.9. Circuito equivalente a T per il mutuo induttore.

### 3.3 FORZE NEI SISTEMI MAGNETICI

Si consideri un generico sistema di induttori conservativo dotato di  $n$  porte elettriche coincidenti ai morsetti degli induttori e un'unica porta meccanica attraverso la quale il sistema scambia lavoro meccanico (Fig. 3.10). Tale situazione è tipica dei sistemi elettromeccanici come ad esempio i motori elettrici dotati di  $n$  bobine (solitamente multiple di 3 per le macchine trifase) e un albero meccanico di interconnessione con altri sistemi meccanici. Per un sistema di questo tipo è dunque possibile scrivere il bilancio energetico (3.26).



■ Fig. 3.10. Generico sistema elettromeccanico.

$$dW = \delta L_e - \delta L_m = \underbrace{[i]^t [v] dt}_{\text{lavoro elettrico}} - \underbrace{F dy}_{\text{lavoro meccanico}} = [i]^t d[\psi] - F dy \quad (3.26)$$

Dove  $[i]$  è il vettore delle correnti alle porte degli induttori e  $[v]$  il vettore delle rispettive tensioni.

Esprimendo l'energia  $W$  come funzione di stato dei flussi concatenati e della variabile meccanica è possibile trovare l'espressione generale di  $dW$  (3.27).

$$dW([\psi], y) = \frac{\partial W}{\partial [\psi]} d[\psi] + \frac{\partial W}{\partial y} dy \quad (3.27)$$

Confrontando l'espressione (3.27) con la (3.26) si possono ottenere le espressioni (3.28).

$$dW = [i]^t d[\psi] - F dy = \frac{\partial W}{\partial [\psi]} d[\psi] + \frac{\partial W}{\partial y} dy \rightarrow \begin{aligned} [i]^t &= \frac{\partial W}{\partial [\psi]} \\ F &= -\frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.28)$$

La forza scambiata alla porta meccanica può essere quindi calcolata come la derivata dell'energia secondo la coordinata spaziale cambiata di segno. Si ricorda che affinché tale espressione sia valida l'energia deve essere espressa come funzione di stato dei flussi concatenati. A titolo di esempio si voglia calcolare la forza applicata alla parte mobile del sistema elementare indicato in Fig 3.11.

Si consideri ancora il sistema conservativo e, per semplicità, gli induttori lineari. L'energia magnetica del sistema in funzione del flusso concatenato assume l'espressione (3.29), dove l'induttanza può essere calcolata (trascurando le parti in

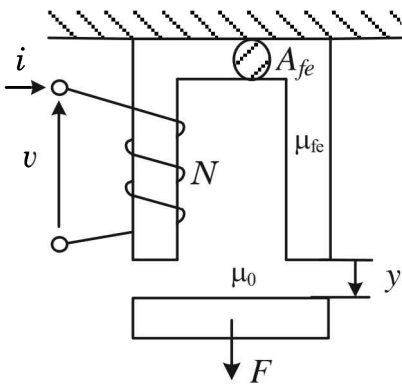
materiale ferromagnetico) come indicato in (3.30), facendo riferimento alla rete magnetica equivalente di Fig. 3.12. Si noti comunque che le parti in materiale ferromagnetico avendo dimensione fissata (si suppone il sistema rigido e indeformabile) non rientrano nel calcolo della forza. Il risultato ottenuto è quindi estendibile anche al caso il comportamento del materiale ferromagnetico fosse non lineare.

$$W = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{L} \quad (3.29)$$

$$L = \frac{N^2}{2\theta_0(y)} = \frac{N^2}{\frac{2y}{\mu_0 A}} = \frac{N^2}{2y} \mu_0 A \quad (3.30)$$

Derivando le espressioni precedenti si ottiene la (3.31) dove la forza è giustamente attrattiva come l'esperienza evidenzia.

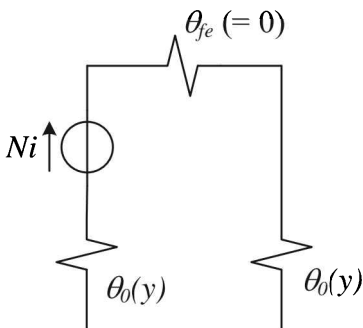
$$F = -\frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{N^2 \mu_0 A} 2y \right) = -\frac{\psi^2}{\mu_0 AN^2} = -\frac{\phi^2}{\mu_0 A} \quad (3.31)$$



■ Fig. 3.11. Sistema elettromeccanico elementare.

È possibile introdurre inoltre una **pressione magnetica**, al fine di semplificare i calcoli in sistemi di questo tipo, come la forza calcolata in precedenza diviso l'area totale interessata dal flusso di induzione magnetica considerato. Si ottiene quindi la formula generale (3.32).

$$\sigma = \frac{F}{A_{tot}} = \frac{\phi^2}{\mu_0 A} = \frac{B^2 \cancel{A}^2}{2 \cancel{A}} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (3.32)$$



■ Fig. 3.12. Rete magnetica equivalente

### 3.3.1 Coenergia

Si è visto nel paragrafo precedente come calcolare la forza nel caso sia possibile esprimere l'energia come funzione di stato dei flussi concatenati. Spesso però può essere più conveniente esprimere le

equazioni costitutive del sistema, e quindi anche l'energia, utilizzando come variabili di stato le correnti negli induttori invece che i flussi. Questo capita abbastanza spesso nelle macchine elettriche in presenza di convertitori elettronici che provvedono al controllo delle stesse imponendo le correnti alle porte elettriche. È allora utile trovare una espressione semplice per il calcolo della forza meccanica come quella ottenuta utilizzando l'energia, a partire da una opportuna funzione di stato. Per questa ragione si può introdurre una nuova funzione di stato chiamata **coenergia** definita come in (3.33) dove  $W$  è l'energia del sistema.

$$W^* = [i]^t [\psi] - W \quad (3.33)$$

La formula della coenergia può essere semplicemente ricavata osservando che a partire dalla relazione dell'incremento dell'energia (3.34), si deve ricavare una nuova relazione scegliendo come variabili indipendenti le correnti  $[i]$ . Ricordando la regola differenziale espressa in (3.35) si può elaborare la (3.34) come indicato in (3.36)<sup>2</sup>.

$$dW = [i]^t d[\psi] - Fdy \quad (3.34)$$

$$d([i]^t [\psi]) = d[i]^t [\psi] + [i]^t d[\psi] \quad (3.35)$$

$$dW = d([i]^t [\psi]) - d[i]^t [\psi] - Fdy$$

$$d([i]^t [\psi]) - dW = d[i]^t [\psi] + Fdy$$

$$d \left( \underbrace{[i]^t [\psi] - W}_{W^*} \right) = d[i]^t [\psi] + Fdy \quad (3.36)$$

$$dW^* = d[i]^t [\psi] + Fdy$$

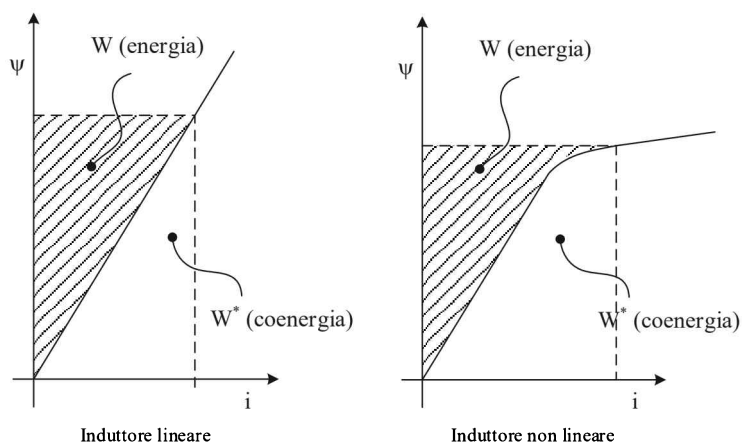
Si noti come nel caso di induttori lineari energia e coenergia coincidano e differiscano solo nel caso di induttori non lineari (Fig. 3.13).

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto nel caso dell'energia, essendo la coenergia funzione di stato è possibile scrivere il suo differenziale in funzione delle variabili di stato. Comparando le due espressioni come indicato in (3.37) si ottiene per la forza l'espressione (3.38).

$$dW^*([i]^t, y) = \frac{\partial W^*}{\partial [i]} d[i] + \frac{\partial W^*}{\partial y} dy = d[i]^t [\psi] + Fdy \quad (3.37)$$

$$F = \frac{\partial W^*}{\partial y} \quad (3.38)$$

2 Questa scrittura che rappresenta la conservazione dell'energia in termini di nuove variabili di stato è formalmente la Trasformata di Legendre della meccanica classica.



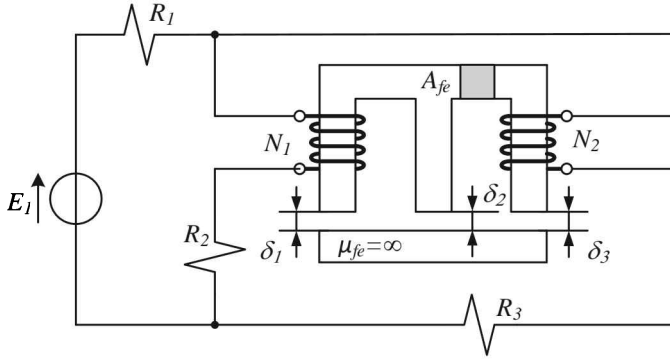
■ Fig. 3.13 Energia e Coenergia

La forza (coppia) può essere quindi ancora calcolata come derivata parziale della funzione di stato coenergia secondo la coordinata meccanica di interesse.



## 3.4 ESERCIZI

### Esercizio 1



Dato il circuito in figura funzionante in regime stazionario, sono noti:

$$E_1 = 30 \text{ [V]}$$

$$R_1 = 8 \text{ [\Omega]}, R_2 = 2 \text{ [\Omega]}, R_3 = 7 \text{ [\Omega]}$$

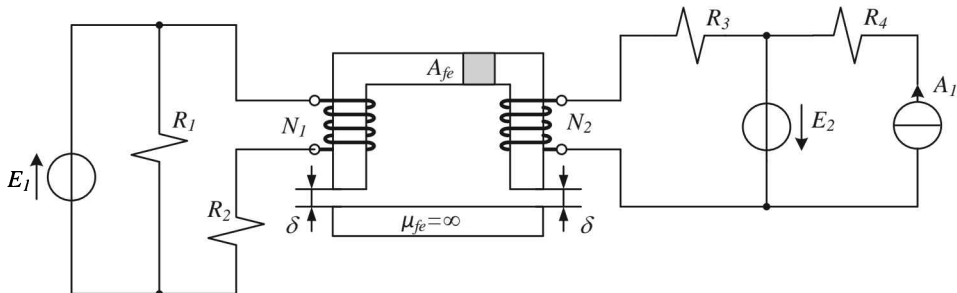
$$\delta_1 = 1 \text{ [mm]}, \delta_2 = 1.3 \text{ [mm]}, \delta_3 = 1.5 \text{ [mm]}$$

$$A_{fe} = 8 \text{ [cm}^2\text{]},$$

$$N_1 = 100, N_2 = 500$$

Si consideri la permeabilità del ferro infinita. Determinare i coefficienti di auto e mutua induttanza, la totale energia immagazzinata e la forza elettromagnetica applicata alla barra inferiore

### Esercizio 2



Dato il circuito in figura funzionante in regime stazionario, sono noti:

$$E_1 = 40 \text{ [V]}, E_2 = 30 \text{ [V]}, A_1 = 10 \text{ [A]}$$

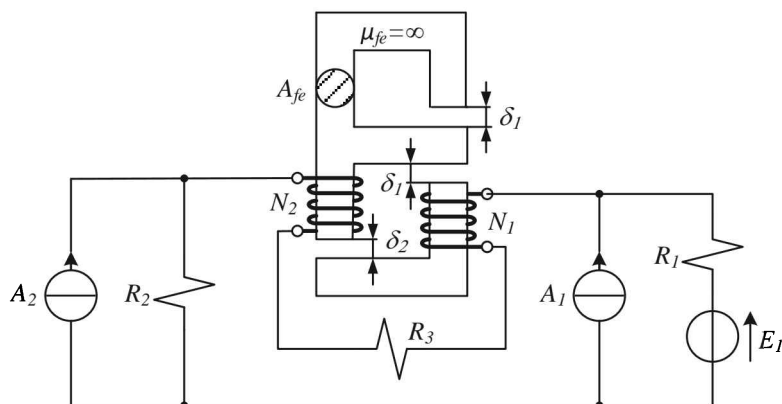
$$R_1 = 6 \text{ [\Omega]}, R_2 = 10 \text{ [\Omega]}, R_3 = 4 \text{ [\Omega]}, R_4 = 2 \text{ [\Omega]}$$

$$N_1 = 100, N_2 = 500$$

$$A_{fe} = 8 \text{ [cm}^2\text{]}, \delta = 0.8 \text{ [mm]}$$

Si consideri la permeabilità del ferro infinita. Determinare i valori di auto e mutua induttanza, l'energia magnetica immagazzinata e la forza elettromagnetica applicata sulla barra inferiore.

### Esercizio 3



Sia data la rete con ingressi stazionari indicata in figura funzionante in regime stazionario, sono noti:

$$E_1 = 30 \text{ [V]}, A_1 = 5 \text{ [A]}, A_2 = 7 \text{ [A]}$$

$$R_1 = 4 \text{ [\Omega]}, R_2 = 8 \text{ [\Omega]}, R_3 = 12 \text{ [\Omega]}$$

$$\delta_1 = 2 \text{ mm}, \delta_2 = 4 \text{ mm}$$

$$A_{fe} = 10 \text{ cm}^2$$

$$N_1 = 400, N_2 = 150$$

Determinare i coefficienti di auto e mutua induttanza e l'energia magnetica accumulata nel mutuo induttore

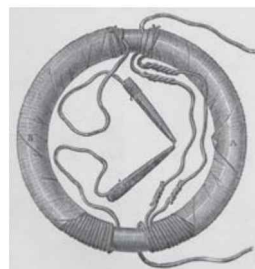
Il trasformatore è sicuramente una delle macchine elettriche che più ha contribuito alla diffusione su vasta scala dell'energia elettrica. La prima testimonianza di un dispositivo di questo tipo la si può ritrovare nel 1831 quando Faraday nel suo diario di laboratorio annotò che interrompendo il circuito elettrico in una delle due bobine avvolte attorno ad un nucleo toroidale di filo di ferro, si manifestava una corrente nell'altra bobina giungendo così alla scoperta del fenomeno dell'induzione magnetica: il magnetismo generò elettricità e l'elettricità genera magnetismo. Da questa prima esperienza si dovette però attendere il 1882 per avere il primo utilizzo tecnico effettivo del trasformatore (o "generatore secondario" come veniva indicato al tempo) per merito di L. Gaulard e J. Gibbs e solo nel 1885 alla prima realizzazione industrialmente efficace per merito della ditta Ganz di Budapest.



■ Lucien Gaulard  
(1850-1888)



■ Il primo trasformatore  
Ganz

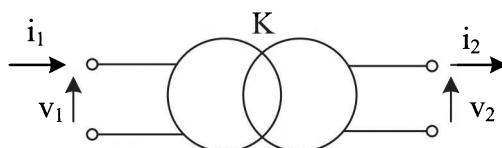


■ Il trasformatore di  
Faraday

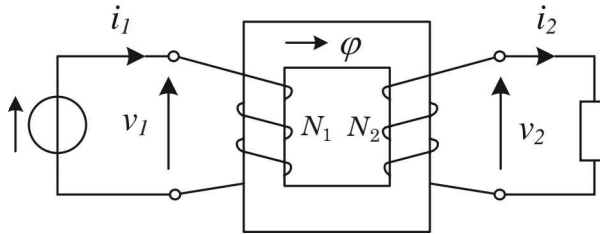
## 4.1 INTRODUZIONE

Il trasformatore è un dispositivo statico (cioè privo di parti in movimento) che serve per modificare i parametri della potenza elettrica ( $v$ ,  $i$ ) e il cui funzionamento (basandosi sul fenomeno dell'induzione magnetica) è possibile solo in regime variabile nel tempo.

Si definisce **trasformatore ideale** una macchina elettrica



■ Fig. 4.1 Il trasformatore ideale



■ Fig. 4.2 Realizzazione di un trasformatore ideale

che consente di modificare i fattori della potenza elettrica senza alterarne il prodotto. In Fig. 4.1 è riportata una rappresentazione schematica di un trasformatore ideale con le convenzioni di misura solitamente adottate.

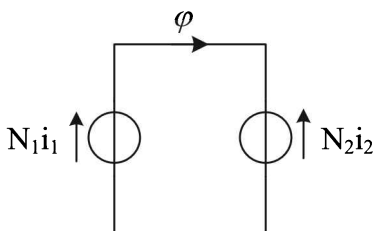
Le equazioni che governano il trasformatore ideale sono indicate in (4.1) dove  $K$  si definisce rapporto di trasformazione.

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{i_2}{i_1} = K \quad (4.1)$$

Si voglia ora realizzare fisicamente un sistema che presenti le medesime caratteristiche del trasformatore ideale e a tal fine si consideri un nucleo di materiale ferromagnetico sul quale sono avvolte due bobine e si ipotizzi di trascurare gli effetti dissipativi (sistema conservativo) e di considerare la permeabilità del ferro infinita. Si considerino le condizioni di alimentazione di Fig. 4.2 in cui un generatore di tensione ideale sia applicato ai morsetti della bobina 1 (solitamente la bobina da cui proviene l'alimentazione è detta **primaria**) e un generico carico sia applicato alla bobina 2 (**secondaria**).

Il circuito magnetico equivalente del sistema in esame si può rappresentare con la rete equivalente di Fig. 4.3. Considerando tale rete magnetica, affinché sia soddisfatta la legge della circuitazione magnetica deve valere l'equazione (4.2).

$$N_1 i_1 = N_2 i_2 \quad \frac{i_2}{i_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{K} \quad (4.2)$$



■ Fig. 4.3 Rete magnetica equivalente

Si osservi come nel circuito equivalente in esame non essendoci la presenza delle riluttanze ( $\mu_{fe} = \infty$ ) può circolare qualunque flusso. Tale flusso risulta imposto dalla tensione applicata alla bobina primaria e le leggi di Faraday consentono di ricavare il legame tra le tensioni espresso dalle equazioni indicate in (4.3).

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt} \\ v_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt} \end{aligned} \rightarrow v_2 = N_2 \frac{v_1}{N_1} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} = K \quad (4.3)$$

Indicato quindi con  $K = N_1/N_2$  il rapporto di trasformazione risulta verificato dalle (4.2) e (4.3) che il sistema in esame, in prima approssimazione, possa essere modellato come un trasformatore ideale.

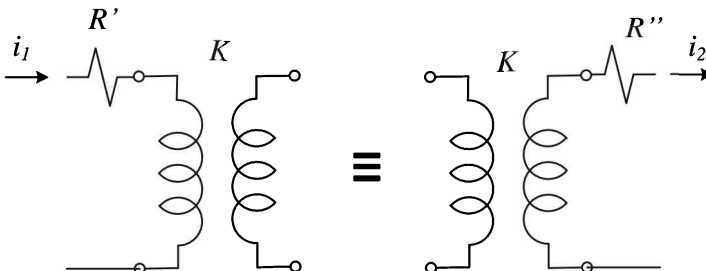
## 4.2 PROPRIETÀ DEL TRASFORMATORE IDEALE

Si consideri il circuito rappresentato in Fig. 4.4 in cui sia inserita in serie al primo avvolgimento di un trasformatore ideale una resistenza  $R'$  e si voglia trovare il valore che debba assumere una resistenza  $R''$  inserita in serie al secondo avvolgimento affinché i due circuiti siano equivalenti in termini energetici e di grandezze misurate ai morsetti esterni al sistema. Tale scelta può essere utile nello studio dei circuiti in quanto, solitamente, è possibile individuare e misurare esclusivamente le grandezze elettriche ai morsetti esterni del sistema e quindi i due circuiti proposti risulterebbero indistinguibili nella realtà, ma differenti configurazioni possono semplificare la soluzione del circuito equivalente rappresentativo del modello del sistema in esame.

Considerando dunque i due circuiti di Fig. 4.4, affinché risultino energeticamente equivalenti deve valere la (4.4).

$$P = R' i_1^2 = R'' i_2^2 \rightarrow \frac{R'}{R''} = \frac{i_2^2}{i_1^2} \quad (4.4)$$

Avendo definito il rapporto di trasformazione  $K = i_2/i_1$  è possibile trovare la relazione tra le due resistenze come indicato in (4.5).



■ Fig. 4.4 Circuiti equivalenti serie: spostamento parametri tra gli avvolgimenti

$$R'' = \frac{R'}{K^2} \quad R' = K^2 R'' \quad (4.5)$$

Analoghe proprietà valgono per induttanze connesse in serie come indicato in (4.6) e medesime relazioni si possono trovare per resistenze e induttanze collegate in parallelo.

$$\frac{L'}{L''} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = K^2 \quad (4.6)$$

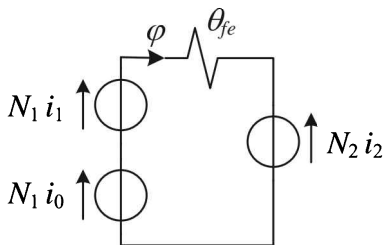
Quindi in un circuito elettrico è possibile trasferire i parametri serie e i parametri in derivazione da un avvolgimento di  $N_1$  spire a uno di  $N_2$  spire e viceversa modificando i parametri in base alle relazioni (4.5) e (4.6).

### 4.3 MODELLI CIRCUITALI DEL TRASFORMATORE

Ai fini pratici, modellare il sistema elettromagnetico che si sta analizzando come un trasformatore ideale potrebbe non essere sempre efficace. Si procederà quindi all'eliminazione di alcune non idealità in modo da identificare un modello circuitale utile ai fini ingegneristici. In particolare, la scelta modellistica sarà quella di aggiungere attorno al sistema "trasformatore ideale" resistori e induttori che terranno conto delle non idealità presenti nel materiale ferromagnetico e negli avvolgimenti.

#### 4.3.1 Induttanza di magnetizzazione

La prima non idealità di cui è necessario tenere conto è sicuramente il valore finito della permeabilità del ferro. Nella maggior parte dei casi sarà sufficiente considerare il comportamento del ferro lineare, privo di effetti di saturazione e isteresi magnetica. Sotto queste ipotesi la rete magnetica equivalente del sistema di Fig. 4.2 può essere rappresentata come in Fig. 4.5.



■ Fig. 4.5. Rete magnetica equivalente nel caso di permeabilità del ferro finita.

Il flusso circolante nella rete di Fig. 4.5 è ancora imposto dalla tensione applicata alla bobina primaria e questo fa sì che la

legge della circuitazione magnetica assuma la forma indicata in (4.7).

$$N_1 i_1 + N_1 i_0 = N_2 i_2 + \theta_{fe} \varphi \quad (4.7)$$

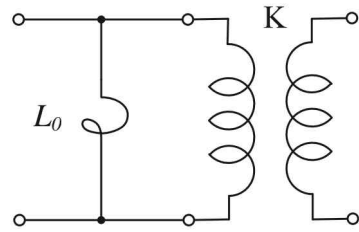
Il generatore di tensione primario deve quindi fornire una ulteriore corrente che compensi la caduta di tensione magnetica dovuta alla presenza della riluttanza del ferro percorsa dal flusso imposto dalla bobina primaria e tale corrente deve essere fornita anche in assenza di carico ( $i_2 = 0$ ). Il trasformatore quindi, anche nell'ipotesi di trascurare ogni effetto dissipativo, assorbe al primario una corrente anche quando al secondario non è collegato nessun carico. Tale corrente serve a sostenere il flusso circolante nel circuito magnetico e per questa ragione viene spesso indicata con il termine di **corrente di magnetizzazione (o magnetizzante)**.

Dal punto di vista del modello circuitale è possibile identificare una induttanza di magnetizzazione equivalente ai morsetti primari del valore indicato in (4.8), ottenendo il circuito equivalente di Fig. 4.6.

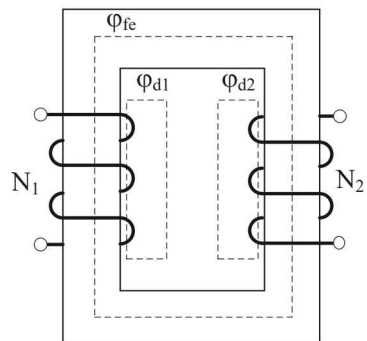
$$L_0 = \frac{N_1^2}{\theta_{fe}} \quad (4.8)$$

### 4.3.2 Circuito equivalente a 5 parametri

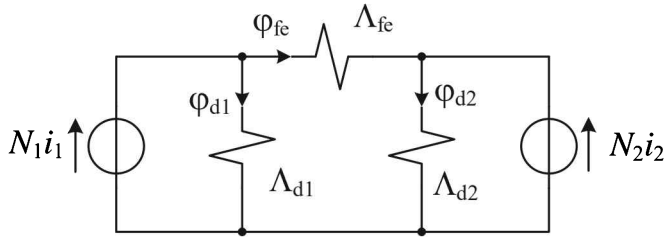
Dal punto di vista magnetico, per la modellazione del trasformatore, è opportuno tenere conto di ulteriori non idealità, in particolare è opportuno tenere in conto di flussi che non si svolgono nel nucleo di materiale ferromagnetico. Questo fenomeno risulta significativo in quanto la differenza tra la permeabilità del ferro e dell'aria (o altri materiali isolanti utilizzati nella costruzione) pur essendo molto elevata, non è tale da rendere sempre trascurabili questi effetti ai fini modellistici. Si consideri infatti che la differenza di permeabilità tra materiali paramagnetici e



■ Fig. 4.6. Circuito equivalente.



■ Fig. 4.7. Rappresentazione schematica dei tubi di flusso di un trasformatore a due avvolgimenti.



■ Fig. 4.8. Rete magnetica equivalente.

ferromagnetici è dell'ordine di  $10^3 \div 10^4$  mentre, ad esempio, la differenza di conducibilità tra materiali conduttori e isolanti è dell'ordine di  $10^{20}$  e quindi tale da rendere, ai fini pratici, assolutamente trascurabili eventuali correnti resistive presenti nei materiali isolanti.

Ai fini della modellazione si considereranno inoltre solo tubi di flusso a concatenamento totale come indicato in Fig. 4.7, dove i flussi  $\varphi_{1d}$  e  $\varphi_{2d}$  sono i flussi di dispersione che avvengono in aria e  $\varphi$  è il flusso principale del trasformatore confinato nel nucleo ferromagnetico. La rete magnetica equivalente del sistema rappresentato in Fig. 4.7 è riportata in Fig. 4.8.

Utilizzando la rete magnetica di Fig. 4.8 è possibile calcolare le induttanze come indicato in (4.9).

$$\begin{aligned} L_1 &= N_1^2 (\Lambda_{fe} + \Lambda_{\delta}) \\ L_2 &= N_2^2 (\Lambda_{fe} + \Lambda_{\delta}) \\ L_m &= N_1 N_2 \Lambda_{fe} \end{aligned} \quad \Lambda_{fe, \delta} = \frac{1}{\theta_{fe, \delta}} \quad (4.9)$$

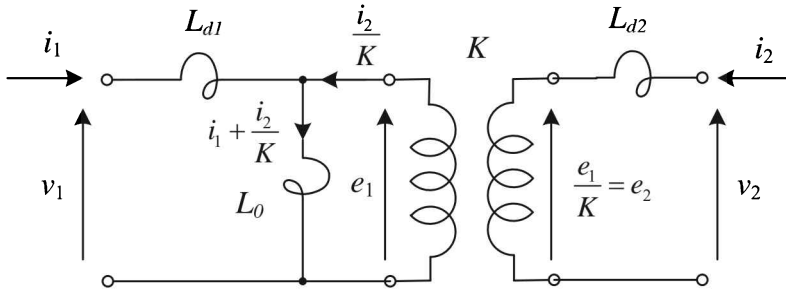
Le leggi di Faraday ai morsetti delle bobine si possono scrivere come indicato in (4.10) dove, per semplicità di scrittura, si è scelto di utilizzare anche per il secondario la medesima convenzione di misura del primario.

$$\begin{cases} v_1 = L_1 p i_1 + L_m p i_2 \\ v_2 = L_2 p i_2 + L_m p i_1 \end{cases} \quad p = \frac{d}{dt} \quad (4.10)$$

Sostituendo le definizioni di induttanza nelle relazioni precedenti si ottengono le relazioni (4.11).

$$\begin{cases} v_1 = N_1^2 (\Lambda_{fe} + \Lambda_{\delta}) p i_1 + N_1 N_2 \Lambda_{fe} p i_2 \\ v_2 = N_2^2 (\Lambda_{fe} + \Lambda_{\delta}) p i_2 + N_1 N_2 \Lambda_{fe} p i_1 \end{cases} \quad (4.11)$$





■ Fig. 4.9 Circuito equivalente.

$$\begin{cases} v_1 = N_1^2(\Lambda_{fe} + \Lambda_\delta)p i_1 + N_1 N_2 \Lambda_{fe} p i_2 \pm N_1^2 \Lambda_{fe} p i_1 \\ v_2 = N_2^2(\Lambda_{fe} + \Lambda_\delta)p i_2 + N_1 N_2 \Lambda_{fe} p i_1 \pm N_2^2 \Lambda_{fe} p i_2 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \underbrace{N_1^2 \Lambda_\delta}_{L_{d1}} p i_1 + N_1 \underbrace{\Lambda_{fe} p (N_1 i_1 + N_2 i_2)}_{p \varphi_{fe}} \\ v_2 &= \underbrace{N_2^2 \Lambda_\delta}_{L_{d2}} p i_2 + N_2 \underbrace{\Lambda_{fe} p (N_1 i_1 + N_2 i_2)}_{p \varphi_{fe}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

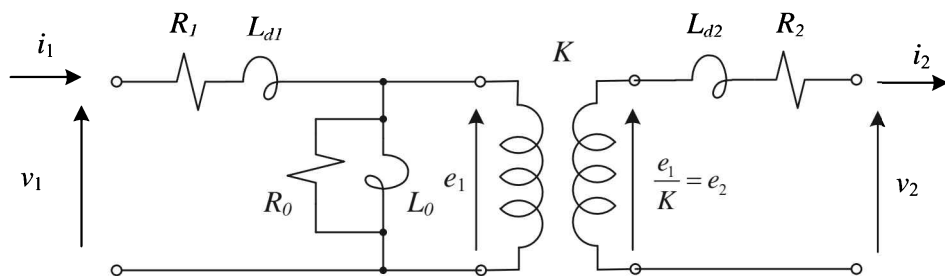
Raccogliendo opportunamente il numero di spire in modo da evidenziare il rapporto  $K = N_1 / N_2$  si possono ottenere le (4.14).

$$\begin{aligned} v_1 &= L_{d1} p i_1 + \underbrace{N_1^2 \Lambda_{fe}}_{L_0} p \left( i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2 \right) = L_{d1} p i_1 + \overbrace{L_0 p \left( i_1 + \frac{i_2}{K} \right)}^{e_1} \\ v_2 &= L_{d2} p i_2 + \frac{N_2}{N_1} N_1^2 \Lambda_{fe} p \left( i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2 \right) = L_{d2} p i_2 + \underbrace{\frac{1}{K} L_0 p \left( i_1 + \frac{i_2}{K} \right)}_{\frac{e_1}{K} = e_2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Le (4.14) si possono rappresentare con il circuito equivalente di Fig. 4.9.

Introdotta la modellazione circuitale della fenomenologia magnetica, è possibile introdurre anche degli opportuni resistori che invece modelleranno i fenomeni dissipativi del sistema.

In particolare è abbastanza immediato aggiungere i due resistori  $R_1$  e  $R_2$  in serie a  $L_{d1}$  e  $L_{d2}$  che rappresenteranno le perdite joule nelle bobine dovute alla resistenza elettrica delle stesse. Rimangono ora da modellare le perdite dovute ai fenomeni di isteresi magnetica e correnti parassite. Come calcolato nel secondo capitolo, tali perdite in regime sinusoidale, a frequenza fissata, sono proporzionali al valore massimo dell'induzione nel circuito magnetico. In regime sinusoidale, per le consi-



■ Fig. 4.10. Circuito equivalente completo.

derazioni precedentemente illustrate in questo capitolo, il valore massimo dell'induzione (essendo proporzionale al flusso) è proporzionale alla forza elettromotrice applicata alla bobina. Tale forza elettromotrice coincide sostanzialmente con la tensione ai capi dell'induttanza  $L_0$ .

$$P_{fe} = \alpha B_M^2 \equiv \psi^2 \equiv E^2 \quad (4.15)$$

Poiché il termine di proporzionalità tra la potenza e la tensione è la conduttanza (o l'inverso della resistenza) è possibile scrivere la relazione (4.15) come indicato in (4.16) e quindi ottenere il circuito completo di Fig. 4.10. Ovviamente il valore di  $R_0$  sarà da individuare con opportune analisi/prove e non rappresenta nessuna resistenza fisica presente nel sistema

$$P_{fe} = \frac{E^2}{R_0} \quad (4.16)$$

## 4.4 CONSIDERAZIONI SUI PARAMETRI

Per poter semplificare il modello ottenuto al fine di procedere a più rapidi calcoli delle condizioni di funzionamento del trasformatore e consentire una facile identificazione dei parametri attraverso opportune prove, è conveniente analizzare i valori tipici delle impedenze individuati nel paragrafo precedente in modo da procedere a semplificazioni del modello. In particolare si utilizzeranno i parametri nominali del trasformatore in termini di tensioni, corrente e potenza per caratterizzarne il funzionamento e le considerazioni presentate sono da applicarsi a trasformatori funzionanti in regime sinusoidale e a frequenza industriale.

Per un trasformatore a due avvolgimenti si avrà quindi:

- $V_{1n}$  Tensione nominale dell'avvolgimento 1
- $V_{2n}$  Tensione nominale dell'avvolgimento 2

Le tensioni nominali di entrambi gli avvolgimenti sono definite nel funzionamento a vuoto e coincidono quindi praticamente con le f.e.m.  $E_1$  ed  $E_2$ . Tra le tensioni vale dunque la relazione (4.17).

$$\frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (4.17)$$

Per quanto riguarda le correnti si avrà:

- $I_{1n}$  Corrente nominale dell'avvolgimento 1
- $I_{2n}$  Corrente nominale dell'avvolgimento 2

Le correnti nominali si otterranno dai funzionamenti in corto circuito e tra loro vale la relazione (4.18).

$$\frac{I_{2n}}{I_{1n}} = \frac{N_1}{N_2} \quad (4.18)$$

Per generalizzare la trattazione saranno individuati i valori relativi di ogni grandezza e per fare ciò conviene introdurre anche il concetto di impedenze nominali come indicato in (4.19) anche se tale valore non coincide con nessuno dei parametri individuati nella trattazione precedente.

$$Z_{1n} = \frac{V_{1n}}{I_{1n}} \quad Z_{2n} = \frac{V_{2n}}{I_{2n}} \quad (4.19)$$

La potenza nominale del trasformatore è invece definita come indicato in (4.20).

$$A_n = V_{1n} \cdot I_{1n} = V_{2n} \cdot I_{2n} \quad (4.20)$$

Considerando ora il modello completo funzionante in condizioni nominali, è possibile identificare dei valori caratteristici (in termini relativi) dei parametri di funzionamento. In particolare, definite le impedenze serie e parallelo in termini relativi come indicato in (4.21) nel funzionamento a frequenza nominale, si ottengono i valori caratteristici indicati in (4.22).

$$\begin{aligned} z_{s1} &= \frac{|R_1 + j\omega L_{d1}|}{Z_{1n}} \\ z_{s2} &= \frac{|R_2 + j\omega L_{d2}|}{Z_{2n}} \\ z_0 &= \frac{Z_0}{Z_{1n}} \quad Z_0 = \frac{R_0 \cdot j\omega L_0}{R_0 + j\omega L_0} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} z_{s1,s2} &= 0.02 \div 0.10 \\ z_0 &= 20 \div 1000 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Per quanto riguarda la potenza persa negli avvolgimenti e nel nucleo in ferro i valori tipici sono riportati in (4.23).

$$\begin{aligned} P_{cun} = R_1 I_{1n}^2 + R_2 I_{2n}^2 \quad \rightarrow \quad p_{cun} = \frac{P_{cun}}{A_n} = 0.002 \div 0.03 \\ P_{fen} = \frac{V_{1n}^2}{R_0} \quad \rightarrow \quad p_{fen} = \frac{P_{fen}}{A_n} = 0.0005 \div 0.005 \end{aligned} \quad (4.23)$$

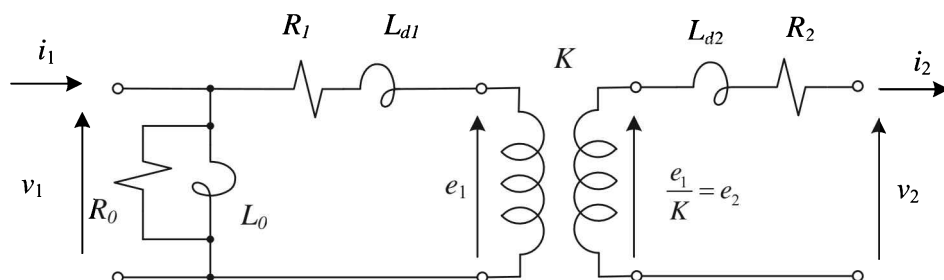
Da cui:

$$\frac{p_{cun}}{p_{fen}} = 3 \div 6 \quad (4.24)$$

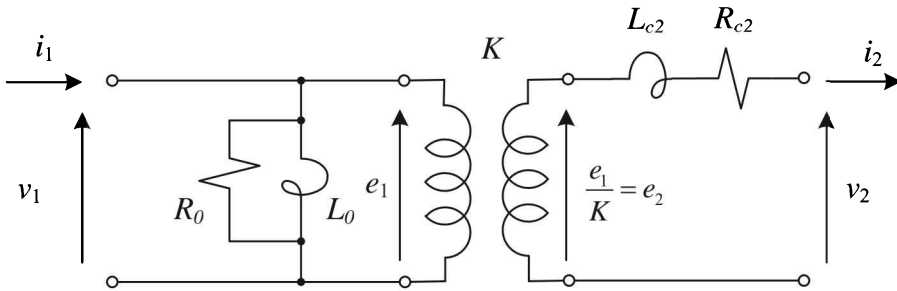
## 4.5 MODELLO SEMPLIFICATO E PROVE

Il modello ottenuto precedentemente, anche se coerente dal punto di vista della modellazione dei fenomeni coinvolti, presenta parametri non facilmente individuabili con delle prove specifiche sul sistema reale. Per consentire tale individuazione si provvede quindi ad utilizzare un modello semplificato del trasformatore.

Analizzando il circuito precedente si può evidenziare come, per costruzione, la resistenza  $R_1$  e l'induttanza  $L_{d1}$  siano piccole. Nelle realizzazioni pratiche le perdite negli avvolgimenti sono limitate così come i flussi di dispersioni. Per questa ragione è possibile ritenere sostanzialmente equivalente al circuito completo di Fig. 4.10, il circuito di Fig. 4.11 essendo molto piccola la caduta di tensione sull'impedenza primaria e quindi consentendo di spostare l'impedenza serie primaria a valle dell'impedenza trasversale mantenendo un'ottima approssimazione del modello.



■ Fig. 4.11 Spostamento a valle dell'impedenza serie.



■ Fig. 4.12 Circuito equivalente semplificato.

Lo spostamento dell'impedenza primaria a valle dell'impedenza che tiene conto dei fenomeni nel circuito magnetico consente ora di spostare tale impedenza al secondario ottenendo il circuito semplificato a 4 parametri di Fig. 4.12 dove  $L_{2c} = L_{d1} / K^2 + L_{d2}$  e  $R_{2c} = R_1 / K^2 + R_2$ . Questo modello consente di determinare facilmente i parametri attraverso opportune prove effettuate sulla macchina. In particolare possono essere effettuate due prove:

- Prova a vuoto
- Prova di corto circuito

#### 4.5.1 Prova a vuoto

Nella prova a vuoto si alimenta un avvolgimento con una tensione compresa tra il 90% e il 110% della tensione nominale lasciando l'altro avvolgimento aperto (senza carico). La scelta dell'avvolgimento da alimentare è dettata solo da ragioni pratiche (ad esempio potrebbe essere più facile alimentare l'avvolgimento a tensione nominale più bassa). Nella trattazione che segue per comodità verrà sempre considerato alimentato l'avvolgimento primario.

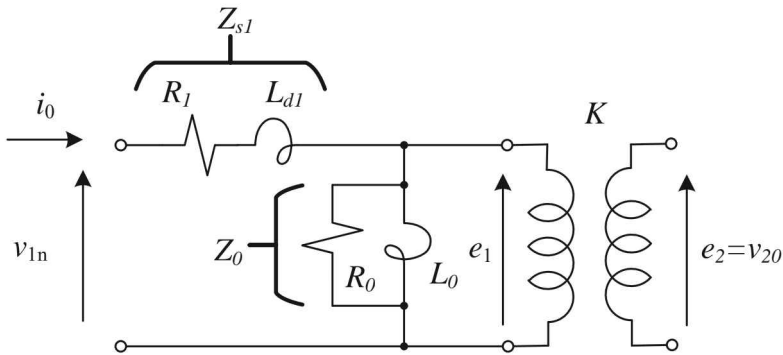
La prova a vuoto consentirà di determinare il rapporto tra le f.e.m. (rapporto di trasformazione) e i parametri dell'impedenza parallelo che modella gli effetti (accumulo e perdite) nel circuito magnetico. Alimentando infatti il circuito a tensione  $V_{1n}$  e lasciando aperto il secondo avvolgimento si ottiene il circuito di Fig 4.13.

Per le considerazioni fatte nel paragrafo precedente risulta che  $Z_{s1}$  è trascurabile rispetto a  $Z_0$ , infatti risulta che:

$$\frac{Z_{s1}}{Z_0} = \frac{z_{s1} \cdot Z_{1n}}{z_0 \cdot Z_{1n}} = \frac{z_{s1}}{z_0} = 0.002 \div 0.00001 \quad (4.25)$$

La corrente a vuoto può essere quindi calcolata tenendo conto solo di  $Z_0$ .

$$I_{0n} = \frac{V_{1n}}{Z_0} = \frac{V_{1n}}{z_0 \cdot Z_{1n}} = \frac{I_{1n}}{z_0} \quad (4.26)$$



■ Fig. 4.13 Prova a vuoto.

Dalla relazione (4.26) si può ricavare come la corrente a vuoto in valore relativo sia pari all'inverso del valore relativo dell'impedenza trasversale.

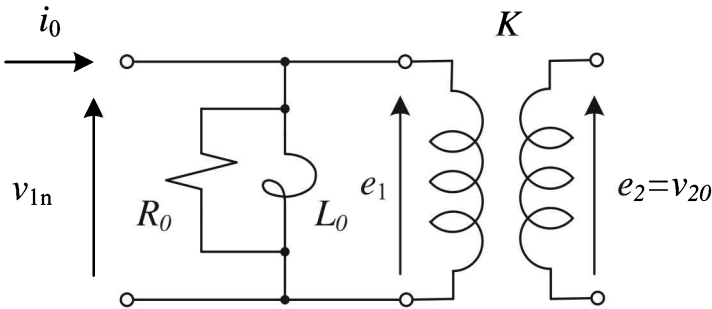
$$i_0 = \frac{1}{z_0} = 0.001 \div 0.05 \quad (4.27)$$

Si può anche dimostrare come la caduta di tensione su  $Z_{s1}$  sia assolutamente trascurabile e quindi che le tensioni a vuoto coincidano con le f.e.m. Infatti si possono scrivere le relazioni (4.28) (nel caso peggiore) che evidenziano come la caduta di tensione anche nel caso di trasformatori piccoli sia assolutamente trascurabile rispetto la tensione applicata. Nei casi industriali tale valore è solitamente pari all'1%.

$$\Delta V_{s1} = Z_{s1} \cdot I_{0n} = z_{s1} \cdot Z_{1n} \cdot i_{0n} \cdot I_{1n} = z_{s1} \cdot i_{0n} \cdot \underbrace{V_{1n}}_{Z_{1n} I_{1n}} = 0.0015 \cdot V_{1n} \quad (4.28)$$

La potenza  $P_{0n}$  assorbita dal trasformatore è dovuta alle perdite nell'avvolgimento alimentato e alle perdite nel ferro. Nell'ipotesi che le perdite negli avvolgimenti siano equamente ripartite ( $p_{cu1n} = p_{cu2n} = p_{cum} / 2$ ) si possono scrivere le (4.29) dalle quali si può dedurre come anche nel caso peggiore le perdite nell'avvolgimento alimentato incidano per meno dell'1%. È quindi evidente che nel funzionamento a vuoto si possa considerare il circuito di Fig 4.14 e ricavare i parametri dell'impedenza dalle misure effettuate.

$$\begin{aligned} P_{0n} &= P_{fen} + R_1 I_0^2 = P_{fen} \left( 1 + R_1 \frac{I_0^2}{P_{fen}} \right) = P_{fen} \left( 1 + R_1 \frac{I_0^2}{P_{fen}} \frac{I_{1n}^2}{I_{1n}^2} \right) = \\ &= P_{fen} \left( 1 + \frac{R_1 I_{1n}^2}{P_{cu1n}} \frac{1}{P_{fen}} \frac{\overbrace{i_0^2}^{\frac{I_0^2}{I_{1n}^2}}}{I_{1n}^2} \right) = P_{fen} \left( 1 + \frac{P_{cum}/2}{P_{fen}} i_0^2 \right) = \\ &= P_{fen} \left( 1 + \frac{1}{2} i_0^2 \frac{P_{cum}}{P_{fen}} \right) = (1 + 0.0075) P_{fen} \approx P_{fen} \end{aligned} \quad (4.29)$$



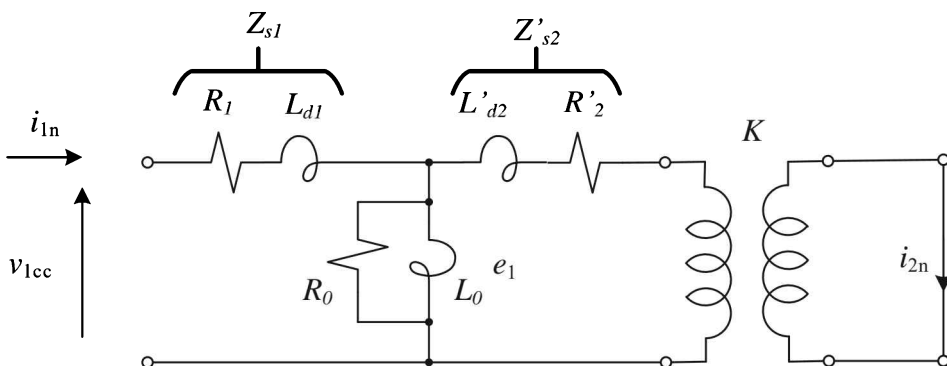
■ Fig. 4.14 Circuito equivalente semplificato per la prova a vuoto.

### 4.5.2 Prova in corto circuito

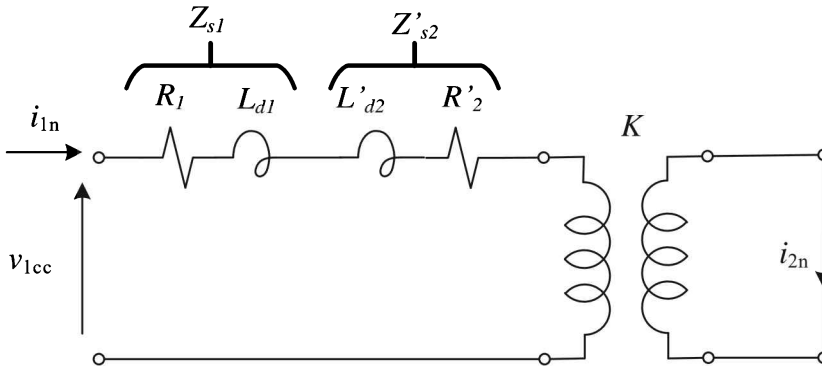
Nel funzionamento in corto circuito si alimenta uno dei due avvolgimenti a corrente nominale ponendo l'altro in corto circuito. Anche in questo caso la scelta dell'avvolgimento da alimentare è dettato solo da ragioni pratiche e si sceglie solitamente quello con corrente nominale più bassa. Con la prova in corto circuito sarà possibile valutare i parametri degli avvolgimenti e le perdite negli avvolgimenti. Anche in questo caso si dimostrerà che l'effetto dei parametri trasversali ( $Z_0$ ) sono trascurabili.

Si consideri infatti il circuito di Fig. 4.15. Essendo chiuso in corto circuito il secondo avvolgimento si ha  $v_2 = 0$  e quindi riportando l'impedenza secondaria al primario si ottiene il circuito equivalente indicato.

L'impedenza vista ai morsetti del primo avvolgimento è possibile calcolarla come indicato in (4.30), dove come già individuato in precedenza si ha che



■ Fig. 4.15 Funzionamento in corto circuito.



■ Fig. 4.16 Circuito equivalente semplificato per la prova in corto circuito

$Z_{s2} / Z_0 = 0.00001 \div 0.002$ . Si può quindi affermare che l'impedenza vista ai morsetti coincide con la somma delle due impedenze serie (4.30).

$$\bar{Z}_{c1} = \bar{Z}_{s1} + \frac{\bar{Z}_0 \bar{Z}'_{s2}}{\bar{Z}_0 + \bar{Z}'_{s2}} = \bar{Z}_{s1} + \frac{\bar{Z}'_{s2}}{1 + \underbrace{\frac{\bar{Z}'_{s2}}{\bar{Z}_0}}_{0.002}} \approx \bar{Z}_{s1} + \bar{Z}'_{s2} \quad (4.30)$$

Per quanto riguarda le tensioni di alimentazione, si ricordi che è necessario limitare, al fine di evitare rotture del sistema, la corrente al valore nominale. La tensione che è necessario applicare affinché sia rispettato questo vincolo nelle condizioni di funzionamento considerate può essere calcolata come indicato in (4.31). Per comodità si è ritenuto che  $Z_{s1} = Z_{s2} \rightarrow Z_{c1} = 2Z_{s1}$ .

$$\begin{aligned} V_{1c} &= Z_{c1} I_{1n} = 2Z_{s1} I_{1n} \\ v_c &= \frac{V_{1c}}{V_{1n}} = 2Z_{s1} \frac{I_{1n}}{V_{1n}} = 2 \frac{Z_{s1}}{Z_{1n}} = 2z_{s1} = 0.04 \div 0.20 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Quindi per far circolare la corrente nominale è necessario applicare una frazione della tensione nominale compresa tra il 4 % e il 20 %. D'altra parte, da questi valori si capisce la pericolosità di un corto circuito in condizioni di alimentazione nominali, infatti in questo caso le correnti circolanti risulterebbero da 5 a 25 volte più grandi della corrente nominale.

Per quanto riguarda il contributo delle perdite nel ferro è necessario individuare la tensione applicata all'impedenza trasversale. Avendo ritenuta valida l'ipotesi di considerare esclusivamente le due impedenze in serie con valori praticamente uguali, all'impedenza trasversale è applicata metà della tensione di alimentazione. E' quindi possibile calcolare il contributo delle perdite nel ferro come indicato in (4.32) che evidenzia come siano assolutamente trascurabili in questo funzionamento.



$$P_{fec} = \frac{\left(\frac{V_{1c}}{2}\right)^2}{R_0} = \frac{1}{4} \frac{V_{1c}^2}{R_0} \frac{V_{1n}^2}{V_{1n}^2} = \frac{1}{4} v_c^2 P_{fen} \quad (4.32)$$

$$P_{cn} = P_{cun} + P_{fec} = P_{cun} \left(1 + \frac{P_{fec}}{P_{cun}}\right) = P_{cun} \left(1 + \frac{1}{4} v_c^2 \frac{P_{fen}}{P_{cun}}\right) = (1 + 0.0001) P_{cun}$$

Potenza Nominale ( $A_n$ ) [kVA]	10	100	1000	10000	100000
Corrente a vuoto ( $i_0$ )	0.03	0.025	0.015	0.01	0.008
Tensione di corto circuito ( $v_c$ )	0.04	0.04	0.06	0.09	0.12
Perdite c.to c.to nominali ( $p_{cun}$ )	0.03	0.018	0.01	0.0065	0.003
Perdite a vuoto nominali ( $p_{fen}$ )	0.01	0.003	0.0018	0.0013	0.0008

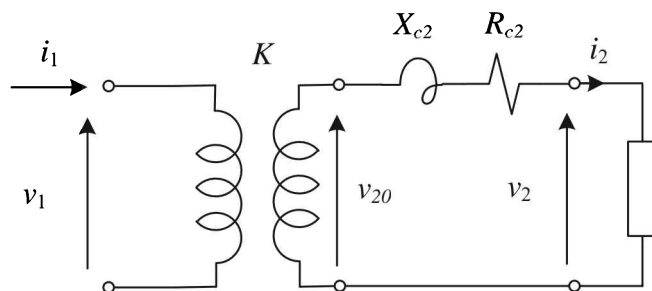
■ Tabella I. Valori relativi tipici dei parametri di un trasformatore

## 4.6 VARIAZIONE DI TENSIONE

Si definisce **variazione di tensione** la differenza numerica (non vettoriale) fra la tensione secondaria misurata a vuoto e la tensione secondaria misurata a carico supponendo di mantenere costante la tensione di alimentazione primaria (4.33). Per il calcolo di tale variazione si farà riferimento alla rete elettrica equivalente riferita all'avvolgimento secondario in cui si trascura il ramo derivato (Fig. 4.17).

$$\Delta V = |\bar{V}_{20}| - |\bar{V}_2| \quad (4.33)$$

Facendo riferimento al diagramma vettoriale di Fig 4.18, si può notare come la variazione di tensione  $\Delta V$  nel caso di carico induttivo (come nella normalità

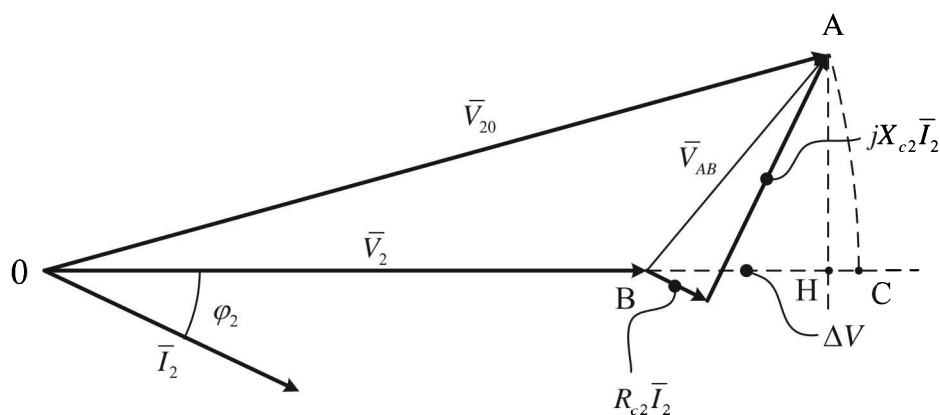


■ Fig. 4.17 Circuito equivalente per il calcolo della variazione di tensione.

dei casi industriali) coincide con il segmento CB, differenza tra il segmento CO (il punto C è ottenuto dalla rotazione del vertice A attorno all'origine O) meno il vettore BO che rappresenta la lunghezza del vettore  $\bar{V}_2$ . Se l'angolo tra tensione e corrente è piccolo (e questo solitamente è anche imposto dal gestore con l'obbligo di rifasare i carichi), il vettore CB può essere approssimato con il vettore HB, ottenuto per proiezione del segmento differenza tra le tensioni (AB).

La formula approssimata per il calcolo è dunque la (4.34), dove  $\varphi_2$  è l'angolo di sfasamento tra tensione e correnti del carico.

$$\Delta V = R_{c2} I_2 \cos \varphi_2 + X_{c2} I_2 \sin \varphi_2 \quad (4.34)$$



■ Fig. 4.18 Diagramma fasoriale per il calcolo della variazione di tensione.

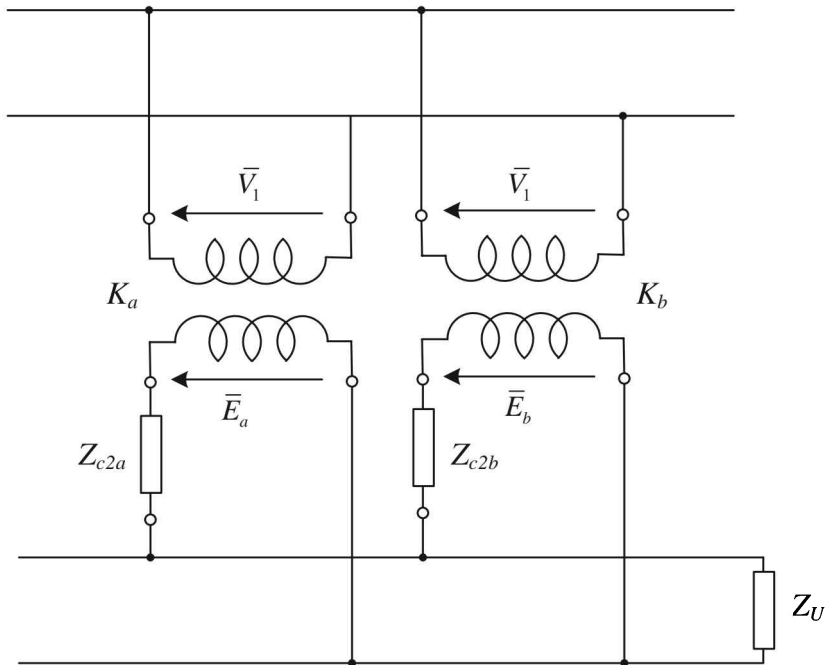
## 4.7 TRASFORMATORI IN PARALLELO

Si esamini ora il funzionamento di due trasformatori collegati in parallelo come indicato in Figura 4.19. Si studierà il funzionamento facendo riferimento al circuito equivalente secondario e trascurando il ramo derivato.

È abbastanza evidente che si possono collegare in parallelo due trasformatori che abbiano le medesime tensioni nominali primarie, in quanto se così non fosse l'alimentazione sarebbe limitata dal trasformatore con la tensione nominale più bassa non andando a sfruttare completamente uno dei due trasformatori. Per garantire un buon funzionamento dei trasformatori in parallelo è però necessario rispettare ulteriori condizioni sia a vuoto che a carico.

### 4.7.1 Funzionamento a vuoto

Per ragioni costruttive (ad esempio semplicemente perché di costruttori diversi) può accadere che siano leggermente diversi i rapporti di trasformazione  $K_a = N_{1a} / N_{2a}$  e  $K_b = N_{1b} / N_{2b}$ . Questa situazione può essere critica per il fun-



■ Fig. 4.19. Collegamento di due trasformatori in parallelo.

zionamento del sistema. Si noti infatti che anche a vuoto esiste una maglia di circolazione tra i secondari dei trasformatori. La corrente che circola è:

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{E}_a - \bar{E}_b}{\bar{Z}_{c2a} + \bar{Z}_{c2b}} = \frac{(K_a - K_b)\bar{V}_1}{\bar{Z}_{c2a} + \bar{Z}_{c2b}} \quad (4.35)$$

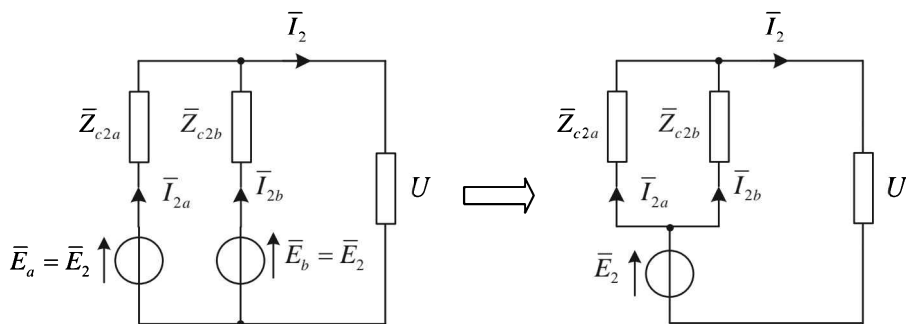
Se tale corrente è dell'ordine di qualche percento della corrente nominale dei due trasformatori potrebbe essere accettata, ma perché questo accada la differenza tra i due rapporti di trasformazione deve essere estremamente contenuta. Infatti, considerando per semplicità che i due trasformatori presentino le stesse impedenze  $Z_c$ , la corrente circolante a vuoto avrà modulo pari a quanto indicato in (4.36), dove si è espresso con  $\alpha$  il rapporto tra la differenza delle forze elettromotrici rispetto la tensione nominale secondaria di uno dei trasformatori.

$$I_0 = \frac{\Delta E}{2Z_{c2}} = \frac{\alpha V_{2n}}{2Z_{c2}} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\alpha V_{2n}}{V_c}}_{\substack{I_{2n} \\ \text{prova in cc}}} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\alpha}{v_c/V_{2n}}}_{v_c/V_{2n}} I_{2n} \quad (4.36)$$

La (4.36) evidenzia che è sufficiente una differenza percentuale tra i rapporti di trasformazione pari alla tensione di corto circuito del trasformatore per far circolare a vuoto metà della corrente nominale, dove ovviamente tale condizione non è accettabile. Bisogna quindi prestare particolare attenzione a garantire che il rapporto di trasformazione dei trasformatori collegati in parallelo sia lo stesso.

#### 4.7.2 Funzionamento a carico

L'analisi del funzionamento a carico dei trasformatori in parallelo sarà condotta nell'ipotesi di considerare i rapporti di trasformazione identici (condizione neces-



■ Fig. 4.20 Circuito equivalente di due trasformatori in parallelo.

saria per garantire un corretto funzionamento) in modo che sia nulla la corrente circolante tra i trasformatori a vuoto.

In queste condizioni è possibile modellare i circuiti secondari dei due trasformatori come indicato in Fig. 4.20

Allora è possibile scrivere le relazioni (4.37)

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{ca}\bar{I}_{2a} &= \bar{Z}_{cb}\bar{I}_{2b} \\ \bar{I}_{2a} &= I_2 \frac{\bar{Z}_{cb}}{\bar{Z}_{ca} + \bar{Z}_{cb}} \\ \bar{I}_{2b} &= I_2 \frac{\bar{Z}_{ca}}{\bar{Z}_{ca} + \bar{Z}_{cb}}\end{aligned}\tag{4.37}$$

Elaborando la prima delle equazioni (4.37) si può ottenere la relazione (4.38)

$$\frac{I_{2a}}{I_{2b}} = \frac{Z_{2b}}{Z_{2a}} \rightarrow \frac{I_{2a}}{I_{2b}} \frac{I_{2nb}}{I_{2na}} = \frac{Z_{2b}}{Z_{2a}} \frac{I_{2nb}}{I_{2na}} = \frac{V_{2cb}}{V_{2ca}} \frac{V_{2n}}{V_{2n}}\tag{4.38}$$

$$\frac{i_{2a}}{i_{2b}} = \frac{v_{2cb}}{v_{2ca}}$$

Affinché i due trasformatori siano caricati in maniera uguale e cioè erogino la stessa corrente percentuale rispetto la corrente nominale, le tensioni di corto circuito dei due trasformatori devono essere uguali.

Questa condizione non è così stringente come quella precedente dell'uguaglianza del rapporto di trasformazione, ma se non sono uguali i trasformatori non possono essere sfruttati entrambi fino a potenza nominale. Infatti, una differenza anche solo di un punto percentuale tra le due tensioni di corto circuito provoca perdite non tollerabili nell'altro trasformatore se il trasformatore con la tensione più alta funziona a potenza nominale. Si consideri ad esempio  $v_{2ca} = 0.05$  e  $v_{2cb} = 0.06$  allora  $i_{2a} / i_{2b} = 0.06 / 0.05 = 1.2$  quindi se  $i_{2b} = 1$ , cioè il trasformatore b eroga la corrente nominale, si ha  $i_{2a} = 1.2 \rightarrow I_{2a} = 1.2I_{2na}$  cioè il trasformatore a sta erogando il 20% in più della corrente nominale e le perdite diventano  $P_{cua} = (1.2)^2 P_{cuna} = 1.44P_{cuna}$  il 44% in più delle perdite nominali. Tale condizione di funzionamento non è sicuramente accettabile per la macchina nel lungo periodo. È evidente che se non si raggiungessero le condizioni nominali sulla macchina b il sistema lavora in condizioni accettabili, ma sicuramente non ottimali. Ad esempio se  $i_{2b} = 1 / 1.2 = 0.833$  si ha  $i_a = 1$  e entrambi i trasformatori sono in condizioni di funzionamento compatibili con i dati nominali. Si noti però come a fronte dell'erogazione della corrente nominale da parte del trasformatore a, il trasformatore b eroghi solo l'83% della corrente nominale. Riassumendo quindi, le condizio-

ni quindi per garantire un buon funzionamento di due trasformatori in parallelo sono:

1. Stesso rapporto di trasformazione
2. Stessa tensione di corto circuito percentuale

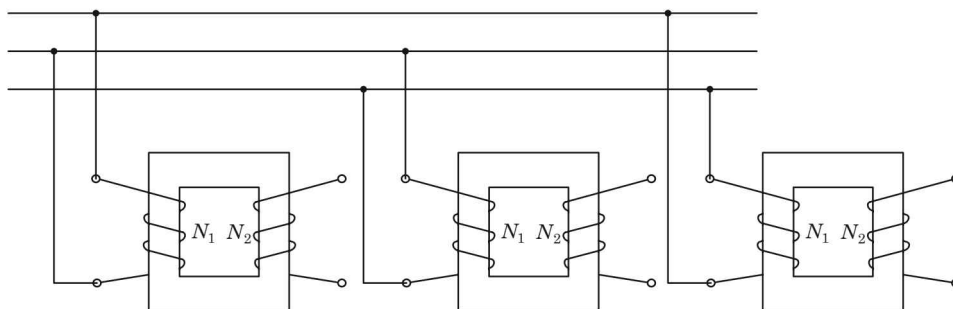
## 4.8 TRASFORMATORI TRIFASE

Si possono realizzare trasformatori trifase mediante opportuni collegamenti degli avvolgimenti di tre macchine monofasi (Fig. 4.21).

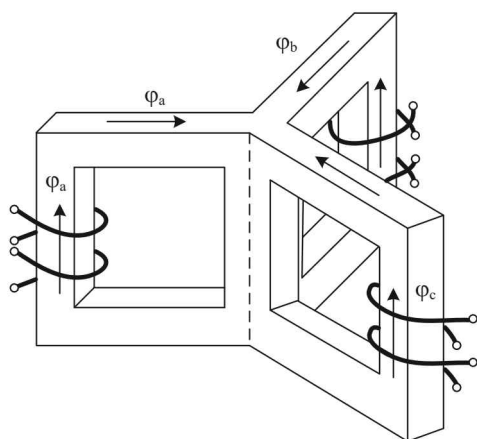
Una soluzione di questo tipo non è sicuramente la soluzione ottima in quanto non sfrutta i legami elettromagnetici esistenti tra le grandezze in un sistema trifase. Per ottenere soluzioni più compatte dal punto di vista elettromagnetico si studieranno possibili connessioni dei nuclei magnetici.

In particolare si consideri di collegare i nuclei magnetici dei tre trasformatori monofase a stella come indicato in Fig. 4.22.

In questo caso se il sistema di tensioni è simmetrico, i flussi dei tre trasforma-



■ Fig. 4.21 Collegamento di tre trasformatori monofase.

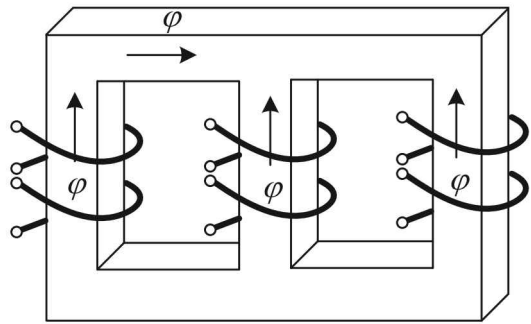


tori sono anch'essi sinusoidali e a somma nulla. Per questa ragione nella colonna centrale (comune) della struttura non circola flusso e può essere eliminata. Ovviamente una struttura di questo tipo anche senza colonna centrale è di difficile costruzione, ma rinunciando alla simmetria costruttiva si possono eliminare i gioghi della struttura centrale ottenendo la struttura a tre colonne che rappresenta

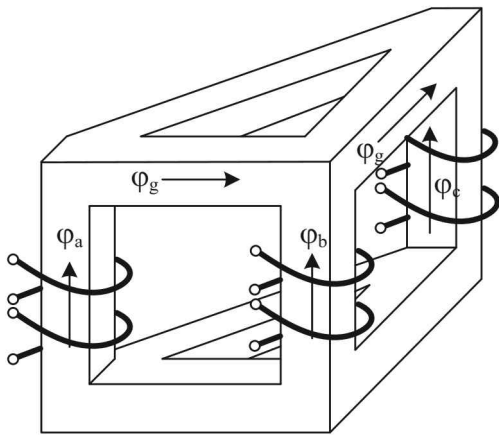
■ Fig. 4.22 Collegamento a stella dei nuclei magnetici

la struttura maggiormente usata per i trasformatori trifase (Fig. 4.23). Con tale struttura è evidente che il circuito magnetico delle colonne laterali è più lungo del circuito magnetico della colonna centrale per cui la riluttanza della colonna centrale sarà minore di quelle laterali, portando ad un possibile squilibrio del trasformatore in quanto le correnti magnetizzanti delle tre colonne sono diverse. Si noti però che tale squilibrio si può manifestare sostanzialmente solo a vuoto in quanto le correnti di magnetizzazione sono solitamente trascurabili nel funzionamento a carico.

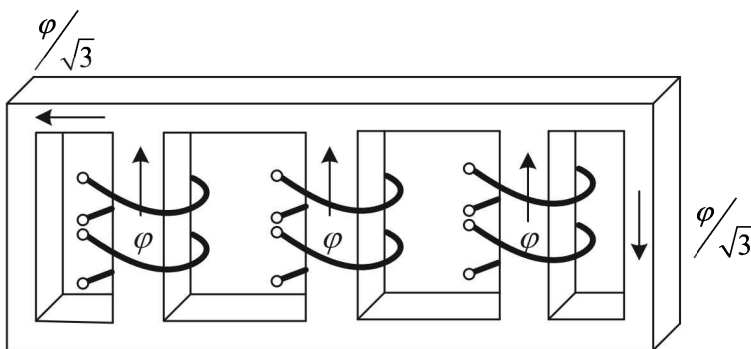
In maniera analoga si possono collegare i nuclei a triangolo (Fig. 4.24). In questo modo il flusso circolante nei gioghi  $\varphi_g$  vale  $1/\sqrt{3}$  del flusso delle colonne consentendo di diminuire opportunamente la sezione dei gioghi (la sezione dei gioghi può essere circa il 58% della sezione delle colonne). Anche in questo caso la struttura non è realizzabile facilmente nella pratica e solitamente si taglia



■ Fig. 4.23 Nucleo a 3 colonne



■ Fig. 4.24 Collegamento a triangolo dei nuclei magnetici



■ Fig. 4.25 Nucleo a 5 colonne e flussi di induzione magnetica

uno dei gioghi, si dispone la struttura in un piano e si richiude magneticamente il giogo tagliato ottenendo un nucleo magnetico a cinque colonne (sempre a scapito della simmetria del sistema e il flusso nei giochi esterni è ridotto per la maggior lunghezza del circuito magnetico) (Fig. 4.25).

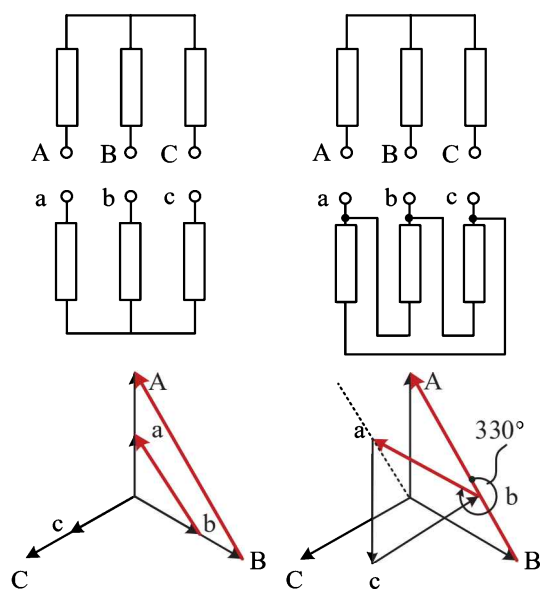
#### 4.8.1 Indice orario e parallelo di trasformatori trifase

Nel caso di alimentazione simmetrica e di carico equilibrato (nel funzionamento normale di un sistema trifase questa condizione è rispettata abbastanza frequentemente) il circuito equivalente di un trasformatore trifase può essere ridotto a quello di un trasformatore monofase per cui le condizioni per il collegamento in parallelo dei trasformatori enunciate nei paragrafi precedenti valgono anche per i trasformatori trifase.

A queste condizioni (medesimo rapporto di trasformazione, stessa tensione di corto circuito) si deve aggiungere un'ulteriore condizione riguardante lo sfasamento delle tensioni. Si considerino infatti le rappresentazioni schematiche di Fig. 4.26 in cui sono rappresentati su una stessa linea verticale gli avvolgimenti di alta tensione e bassa tensione inseriti sulla medesima colonna: tali avvolgimenti presenteranno forze elettromotrici indotte ai morsetti delle bobine in fase in quanto soggette allo stesso flusso. A fronte di diversi collegamenti dei morsetti secondari (ad es. a

stella e a triangolo), le tensioni misurate potranno quindi presentare un diverso sfasamento.

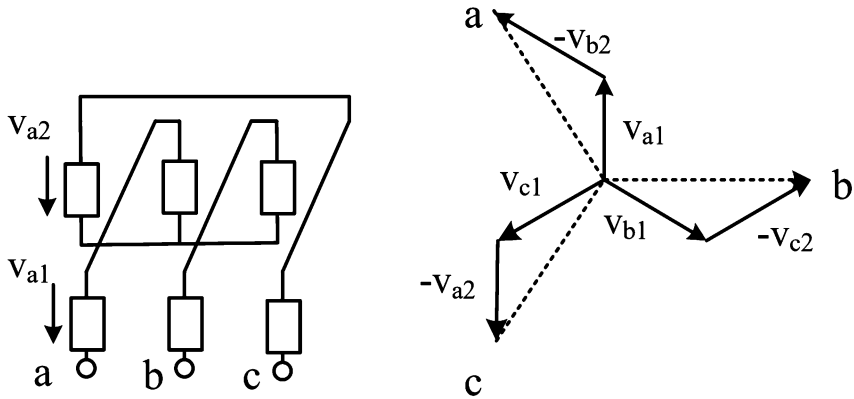
Lo **sfasamento di ritardo** esistente tra la tensione di concatenata primaria e la corrispondente tensione concatenata secondaria (inteso come multiplo di  $30^\circ$ ) prende il nome di **indice orario** (o **spostamento angolare**). Per il caso di figura quindi l'indice orario per il collegamento stella-stella è 0 e quello per il collegamento stella triangolo è 11 ( $330/30 = 11$ ). Dovendo quindi per i trasformatori trifase identificare anche il collegamento e lo sfasamento (indice orario), si procede indicando con



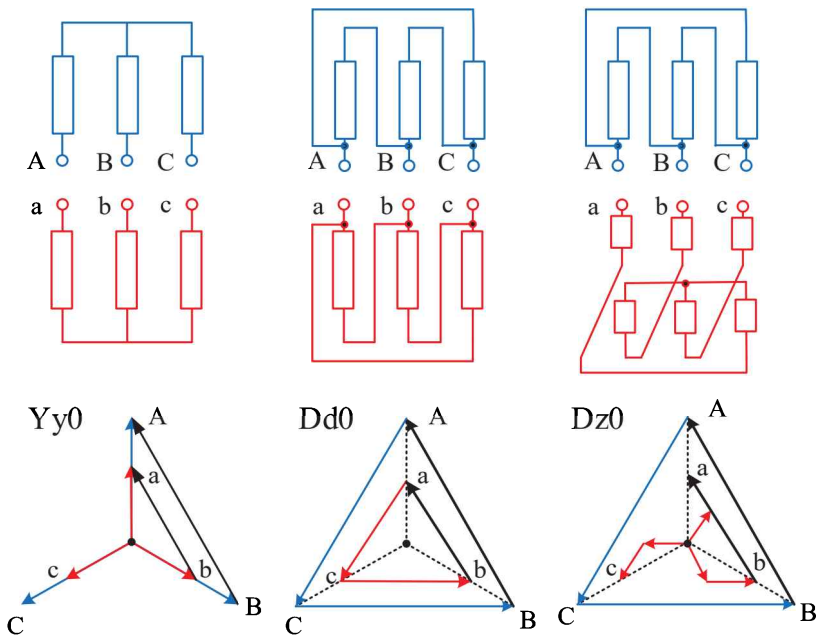
■ Fig. 4.26 Calcolo dell'indice orario



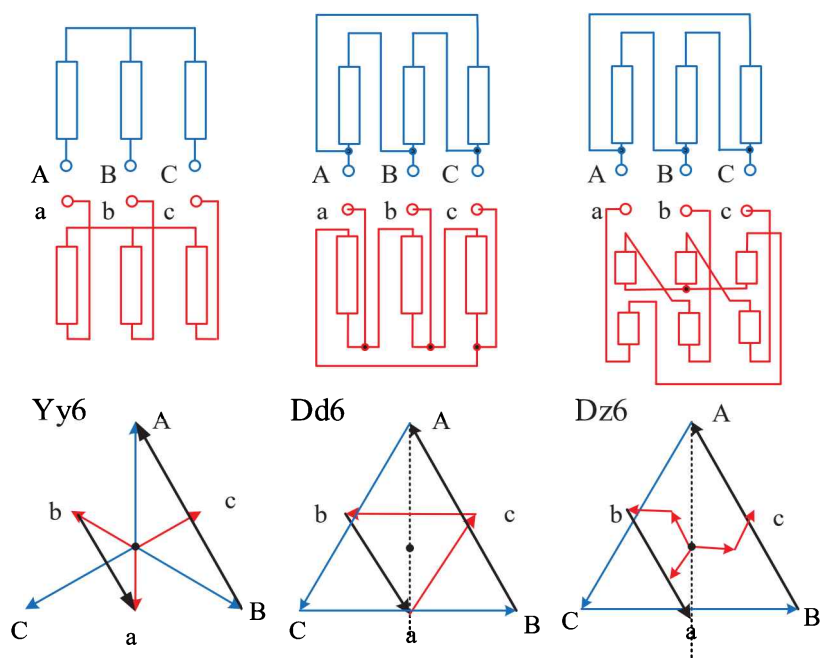
una lettera maiuscola Y o D l'avvolgimento di alta tensione rispettivamente collegato a stella (Y) e a triangolo (D) e con una lettera minuscola il rispettivo collegamento dell'avvolgimento di bassa tensione seguita poi dal numero identificativo dell'indice orario. Quindi ad esempio per i casi di figura si avrà un trasformatore Yy0 e un trasformatore Yd11.



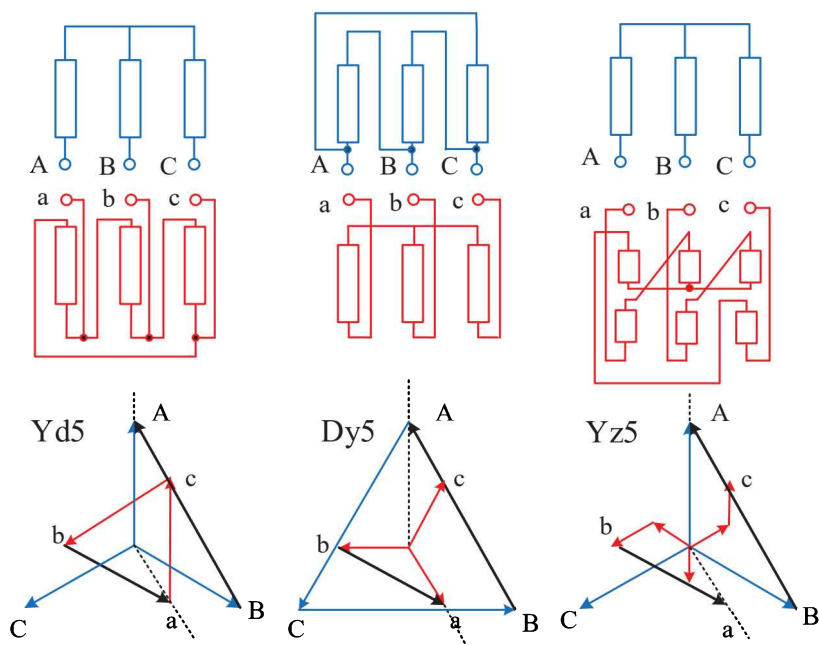
■ Fig. 4.27 Collegamento a zig-zag



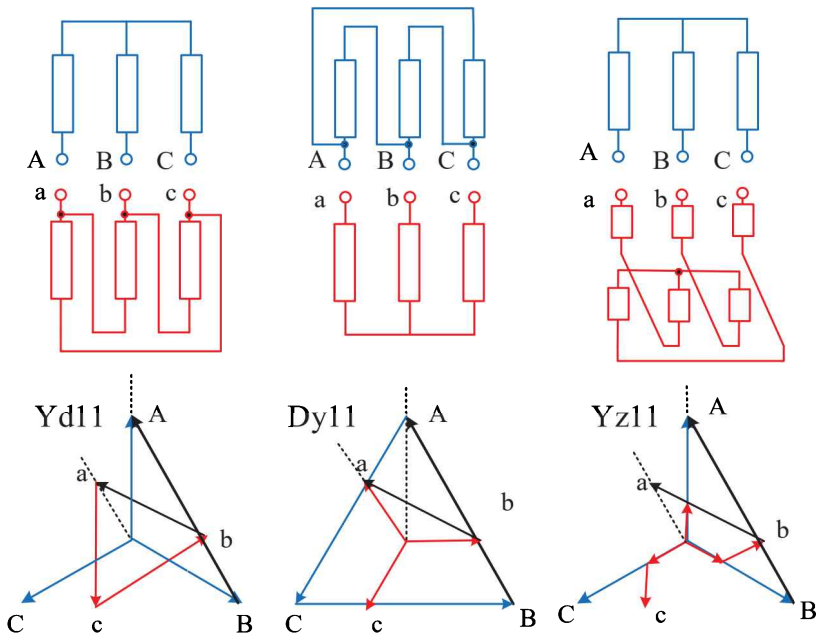
■ Fig. 4.28 Collegamenti del gruppo 0



■ Fig. 4.29 Collegamenti del gruppo 6



■ Fig. 4.30 Collegamenti del gruppo 5



■Fig. 4.31 Collegamenti del gruppo 11

A questi due tipi di avvolgimento si aggiunge un avvolgimento speciale chiamato zig-zag in cui metà dell'avvolgimento si trova su una colonna e metà sulla colonna seguente (Fig.4.27). In questo caso gli avvolgimenti sono poi collegati a stella (il collegamento a triangolo non si usa). Nel caso di collegamento a zig-zag l'avvolgimento sarà individuato dalla lettera z (il collegamento a zig-zag, se necessario, si effettua esclusivamente al secondario).

Trasformatori con collegamenti tra gli avvolgimenti diversi, ma con il medesimo indice orario formano un **gruppo**. È possibile dimostrare che i collegamenti Yy, Dd e Dz possono fornire tutti gli sfasamenti **pari** tra 0 e 11, mentre i collegamenti Yd, Dy, Yz possono dare tutti gli sfasamenti **dispari**.

Tra gli sfasamenti pari i gruppi principali sono lo 0 (Fig. 4.28) e il 6 (Fig. 4.29) in quanto ottenibili solo modificando costruttivamente il trasformatore mentre i gruppi 4 e 8 sono riducibili allo 0 semplicemente rinominando le connessioni (cioè cambiando nome ai morsetti ad es. da abc a bca) e i gruppi 2 e 10 al 6. Analogamente per gli indici dispari avremo come gruppi principali il 5 e l'11 e gli altri riducibili a questi semplicemente con una permutazione dei morsetti (Fig 4.30-31). I gruppi 1 e 9 sono riconducibili al gruppo 5 e i gruppi 3 e 7 al gruppo 11.

Come ultima cosa si noti come proprio a causa dei possibili diversi collegamenti tra le bobine, il rapporto tra le spire delle bobine primaria e secondaria può non

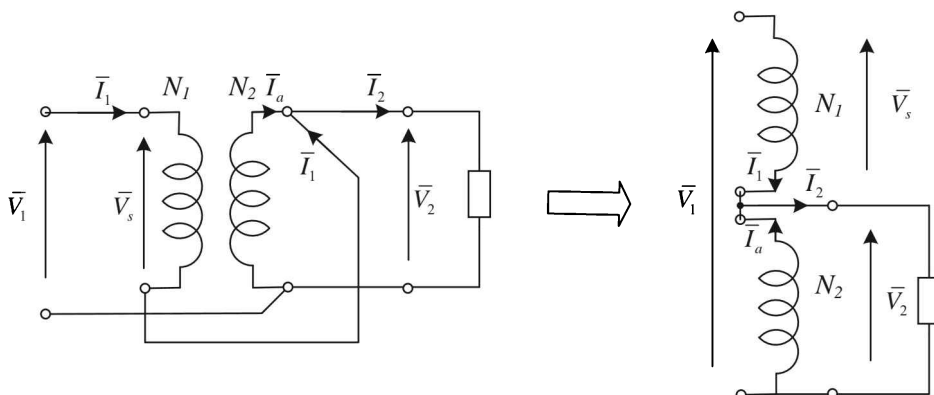
coincidere con il rapporto tra le tensioni misurabili ai morsetti del trasformatore. In particolare per un trasformatore trifase si definisce **rapporto di trasformazione** il **rapporto tra le tensioni concatenate** primaria e secondaria. In (4.39) sono riportati i legami tra il rapporto spire e il rapporto di trasformazione nel caso di trasformatori con collegamenti Yy, Yd, e Dy.

$$\begin{aligned}
 \text{Yy (o Dd)} \quad K &= \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{\sqrt{3} E_{1n}}{\sqrt{3} E_{2n}} = K_{spire} \\
 \text{Yd} \quad K &= \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{\sqrt{3} E_{1n}}{E_{2n}} = \sqrt{3} K_{spire} \\
 \text{Dy} \quad K &= \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{E_{1n}}{\sqrt{3} E_{2n}} = \frac{K_{spire}}{\sqrt{3}}
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

## 4.9 AUTOTRASFORMATORE

L'autotrasformatore è ottenuto collegando in serie l'avvolgimento primario e l'avvolgimento secondario di un trasformatore (Fig. 4.32). La tensione di alimentazione è applicata alla serie di entrambi gli avvolgimenti mentre il carico viene collegato solo al secondo avvolgimento. L'avvolgimento a cui viene collegato il carico prende il nome di **avvolgimento comune**, mentre il primo avvolgimento viene detto **avvolgimento serie**. Se si considera il funzionamento ideale si ottengono le formule (4.40)

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_1 &= \bar{V}_s + \bar{V}_2 = \frac{N_1}{N_2} \bar{V}_2 + \bar{V}_2 = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \bar{V}_2 \\
 \bar{I}_1 &= \bar{I}_2 - \bar{I}_a = \bar{I}_2 - \frac{N_1}{N_2} \bar{I}_1 \rightarrow \bar{I}_1 = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \bar{I}_2
 \end{aligned} \tag{4.40}$$



■ Fig. 4.32. Schema dell'autotrasformatore

Si noti che la potenza assorbita  $A_1 = V_1 I_1$  è uguale a quella erogata  $A_2 = V_2 I_2$  come nel normale trasformatore. Questa potenza prende il nome di **potenza passante**  $A_p = A_1 = A_2$ . A differenza del trasformatore tale potenza non coincide invece con le potenze dei singoli avvolgimenti che si ottengono moltiplicando le rispettive tensioni per le correnti.

$$\begin{aligned} A_{d1} = V_s I_1 &= \frac{N_1}{N_1 + N_2} V_1 I_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2} A_p \\ A_{d2} = V_2 I_a &= \frac{N_1}{N_1 + N_2} V_2 I_2 = \frac{N_1}{N_1 + N_2} A_p \end{aligned} \quad (4.41)$$

Le (4.41) evidenziano come le potenze dei singoli avvolgimenti siano uguali tra loro ed entrambe minori della potenza passante. Il vantaggio dell'autotrasformatore è quindi quello di poter dimensionare gli avvolgimenti per una potenza più piccola di quella che lo attraversa (**potenza di dimensionamento**  $A_d$ ). I principali svantaggi sono dovuti al collegamento tra il primario e il secondario che porta alla **mancanza di isolamento galvanico** tra i due avvolgimenti e alla necessità di isolare comunque anche l'avvolgimento di bassa tensione per la tensione primaria.

## 4.10 ASPETTI COSTRUTTIVI

In questo paragrafo saranno riportati in forma sintetica alcuni aspetti costruttivi dei trasformatori.

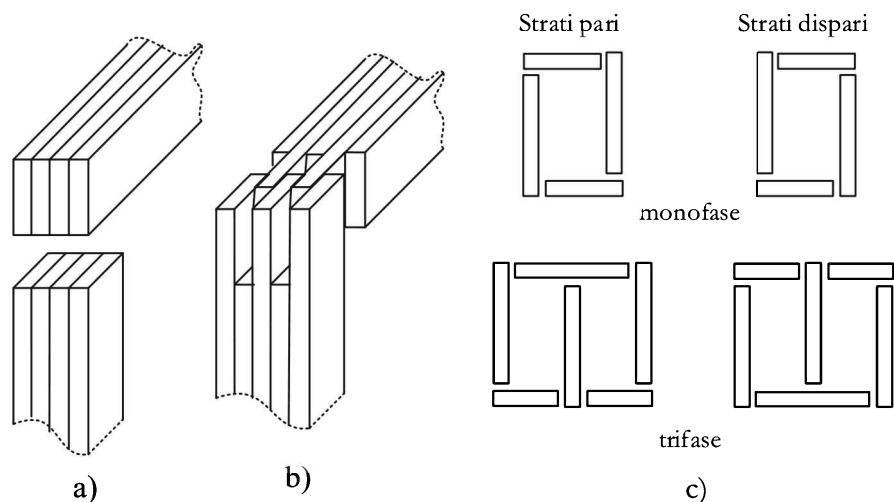
### 4.10.1 Nuclei dei trasformatori

I nuclei magnetici dei trasformatori sono ottenuti sovrapponendo vari strati di lamierini. La loro disposizione è diversa a seconda che si utilizzino:

- **lamierini ordinari** (materiale isotropo);
- **lamierini a cristalli orientati** (materiale anisotropo).

Nel caso si utilizzino lamierini ordinari si possono avere due tipologie di giunto (Fig.4.33):

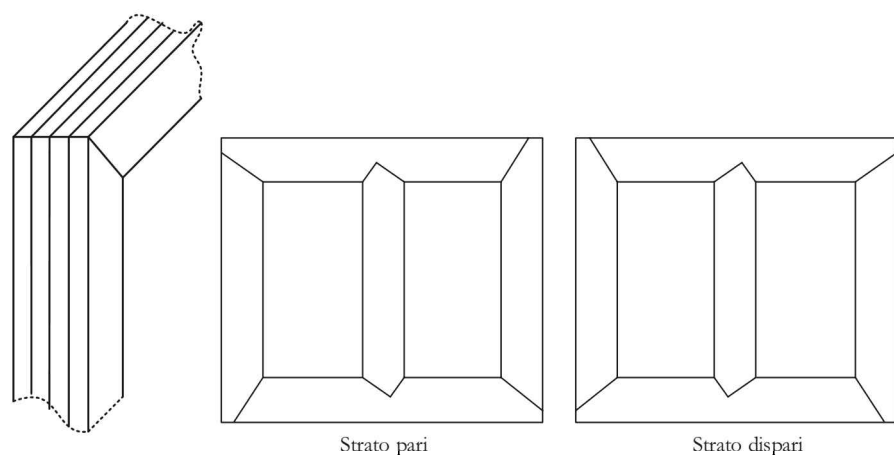
- **giunti affacciati**
- **giunti intercalati**



■ Fig 4.33 a) Giunti affacciati; b) Giunti intercalati; c) Disposizione lamierini nel caso di giunti intercalati

I **giunti affacciati** si ottengono serrando tra loro due pacchi di lamierini distinti separati da uno strato isolante. Questi giunti sono molto più facili da realizzare, ma presentano alcune difficoltà nel serraggio (necessitano di tiranti e legature) e presentano un circuito magnetico con una riluttanza maggiore rispetto ad altre soluzioni in quanto il traferro equivalente per ogni giunto è di circa 0.1 [mm].

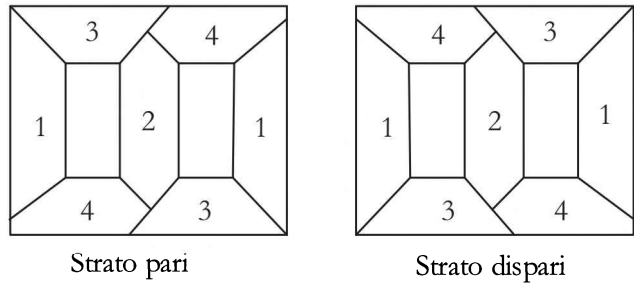
I **giunti intercalati** si ottengono alternando vari strati di lamierini tra loro e presentano maggiori difficoltà nella realizzazione e tempi più lunghi di montaggio. La struttura finale risulta però meccanicamente più robusta e con minore riluttanza



■ Fig 4.34. giunto affacciato con angolo 45° e giunti intercalati con angoli 35° e 55°

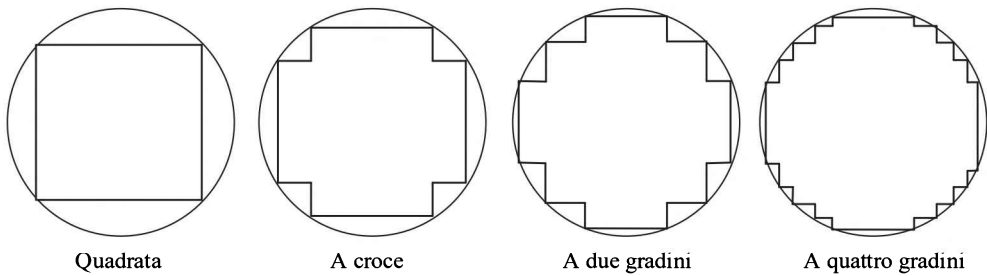
rispetto quella a giunti affacciati in quanto il traferro equivalente per ciascun giunto è circa 0.03 [mm].

Nel caso in cui si utilizzino lamierini a cristalli orientati (materiale anisotropo), non si possono avere gioghi a 90° per evitare le maggiori perdite dovute alla diversità di direzione tra flusso ed orientamento dei cristalli. Si hanno quindi:



■ Fig 4.35. Giunti intercalati a 45° con il metodo Step lap

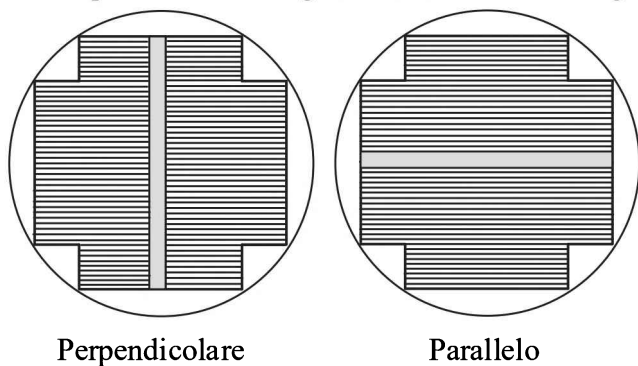
- **giunti affacciati** con angoli di 45°
- **giunti intercalati** con angoli di 35° e 55° o con angoli di 45° con il metodo **step-lap** (Fig. 4.34-35)



■ Fig. 4.36. Esempio di forme del nucleo

Per quanto riguarda la forma delle colonne nei trasformatori di piccola potenza la forma delle colonne è solitamente quadrata o rettangolare e i conduttori vengono avvolti attorno alle colonne, con l'interposizione di uno strato isolante. In questo modo solitamente le bobine hanno la stessa forma delle colonne del nucleo.

Nei trasformatori di potenza più elevata, invece gli avvolgimenti sono di forma circolare in modo da assicu-



■ Fig.4.37 Esempi di canali di raffreddamento

rare una migliore resistenza agli sforzi elettrodinamici e rendere minima la lunghezza della spira media (e quindi la quantità utilizzata di materiale conduttore).

In questo caso, poiché anche le colonne sono ottenute tramite sovrapposizione di lamierini, si cerca di approssimare la loro forma ad una circonferenza utilizzando una struttura a gradini (Fig. 4.36).

Nei trasformatori di elevata dimensione vengono anche praticati canali di raffreddamento all'interno delle colonne distanziando opportunamente i pacchi di lamierini in modo da garantire la circolazione del fluido refrigerante. I canali possono essere realizzati paralleli ai lamierini, più semplici anche se meno efficaci, o perpendicolari ai lamierini, più efficaci ma di costruzione più complessa e costosa (Fig. 4.37).

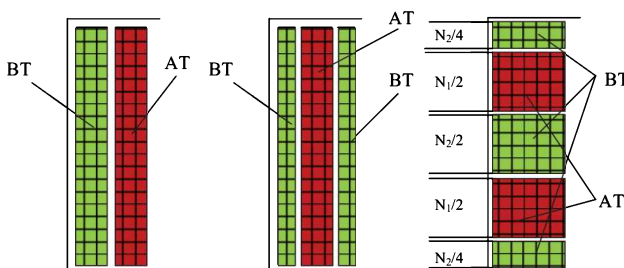
#### 4.10.2 Avvolgimenti

Per quanto riguarda gli avvolgimenti del trasformatore valgono le seguenti considerazioni:

- L'avvolgimento di alta tensione (AT) sarà formato da più spire di sezione minore (perché percorse da corrente minore) ed in genere, per tale avvolgimento si usano conduttori a filo oppure a piattina che consentono un riempimento ottimale dello spazio.
- L'avvolgimento di bassa tensione (BT) sarà formato da meno spire di sezione maggiore (perché percorse da corrente maggiore) e in genere i conduttori usati sono a piattina e per strutture ad elevata corrente possono anche presentare una struttura "a nastro" (poche spire di grande sezione).

La disposizione degli avvolgimenti di bassa tensione e di alta tensione attorno alle colonne del nucleo è determinata da vari fattori:

- garantire il migliore accoppiamento magnetico tra i due avvolgimenti. L'accoppiamento ideale si ottiene



■ Fig. 4.38 Avvolgimenti concentrico, biconcentrico simmetrico e alternato simmetrico

ponendo i due avvolgimenti uno dentro l'altro in modo che gran parte del flusso magnetico si concateni con entrambi gli avvolgimenti;

- necessità di isolamento tra avvolgimenti e nucleo magnetico e tra gli avvolgimenti stessi;



- necessità di raffreddamento. Nei trasformatori di elevata potenza, occorre prevedere dei canali di raffreddamento verticali, paralleli alla colonna, per consentire la circolazione del fluido refrigerante al fine di smaltire il calore prodotto dalle perdite nel nucleo e nei conduttori.

Si possono quindi distinguere due tipi principali di avvolgimenti (Fig. 4.38):

- Avvolgimenti concentrici. Che possono essere semplici, biconcentrici simmetrici, biconcentrici asimmetrici.
- Avvolgimenti alternati. Che possono essere simmetrici e asimmetrici.

La configurazione di gran lunga più usata è quella concentrica con la BT contro il nucleo. Gli avvolgimenti biconcentrici sono usati in macchine di grande potenza e ad alta tensione, dove un elevato grado di dispersione rende difficile far scendere la tensione di corto circuito ai valori desiderati. Gli avvolgimenti alternati sono usati in macchine di piccole potenza, o quando si voglia accedere con facilità ai due avvolgimenti. Al fine di ridurre al minimo le sollecitazioni assiali negli avvolgimen-



■ Fig.4.39 Esempio di trasformatore trifase di piccola potenza in aria



■ Fig. 4.40 Esempio di trasformatore trifase a tre colonne in olio (con contenitore e senza contenitore) (da wiki-commons).

ti, causate dagli sforzi elettrodinamici prodotti da eventuali correnti di corto circuito, è necessario che gli avvolgimenti BT ed AT abbiano la stessa altezza e siano per quanto possibile centrati fra loro. Tale disposizione consente anche di minimizzare la reattanza di dispersione e quindi la tensione di corto circuito del trasformatore.

## 4.11 ESERCIZI

### Esercizio 1

Ad un trasformatore monofase di potenza nominale  $A_n = 70$  [kVA] e rapporto di trasformazione  $K = V_{1n} / V_{20} = 500$  [V] / 10000 [V],  $f_n = 50$  [Hz] a è connesso un carico che assorbe a  $V_2 = 8000$  [V],  $I_2 = 5$  [A] a  $\cos \varphi_2 = 0.8$  in ritardo. La prova di corto circuito e la prova a vuoto hanno fornito i seguenti risultati:

Prova di corto circuito:  $P_{cc} \% = 5\%$   $\cos \varphi_{cc} = 0.5$

Prova a vuoto:  $P_0 \% = 0.4\%$   $\cos \varphi_0 = 0.2$

Si determinino la tensione di alimentazione primaria  $V_1$ , la corrente primaria  $I_1$  e il  $\cos \varphi_1$

### Esercizio 2

Un trasformatore monofase di potenza nominale  $A_n = 80$  [kVA] e rapporto di trasformazione  $K = V_{1n} / V_{20} = 2000$  [V] / 500 [V],  $f_n = 50$  [Hz] alimentato a tensione e a frequenza nominali assorbe  $I_1 = 10$  [A] a  $\cos \varphi_1 = 0.5$  in ritardo. La prova di corto circuito e la prova a vuoto hanno fornito i seguenti risultati:

Prova di corto circuito:  $v_{cc} \% = 10 \%$   $\cos \varphi_{cc} = 0.6$

Prova a vuoto:  $I_0 \% = 10 \%$   $\cos \varphi_0 = 0.2$

Si determinino la tensione  $V_2$ , la corrente  $I_2$  e il  $\cos \varphi_2$  del carico.

### Esercizio 3

Due trasformatori monofasi A e B sono collegati in parallelo ed alimentano un carico che assorbe una corrente di  $I_2 = 150$  [A] con fattore di potenza  $\cos \varphi_2 = 0.8$  in ritardo.

Dei due trasformatori alimentati alla tensione nominale di 1000 [V] e alla frequenza nominale  $f = 50$  [Hz] si conoscono i seguenti dati:

Trasformatore A:

$$A_n = 30 \text{ [kVA]} \quad K = 4$$

$$P_{fe} = 1/2 P_c \quad V_{cc} \% = 5 \% \quad \cos \varphi_{cc} = 0.5$$

Trasformatore B:

$$A_n = 15 \text{ [kVA]} \quad K = 4$$

$$P_{fe} = 2/3 P_c \quad V_{cc} \% = 5 \% \quad \cos \varphi_{cc} = 0.5$$

Determinare per le condizioni di carico considerate:

- 1) la tensione  $V_2$  ai capi del carico
- 2) il carico percentuale di ciascun trasformatore
- 3) il rendimento di ciascun trasformatore e quello complessivo
- 4) la massima corrente che possono erogare i due trasformatori senza sovraccaricarsi

#### Esercizio 4

Ad un trasformatore trifase di potenza nominale  $An = 100$  [kVA] e rapporto di trasformazione  $K = V_{1n} / V_{20} = 600$  [V] / 10000 [V], connessione  $Yy$ ,  $f_n = 50$  [Hz], è connesso un carico che assorbe a tensione  $V_2 = 7$  [kV], una corrente  $I_2 = 3.5$  [A] a  $\cos \varphi_2 = 0.8$ .

La prova di corto circuito e la prova a vuoto hanno fornito i seguenti risultati:

Prova di corto circuito:  $P_{cc}\% = 5\%$ ,  $\cos \varphi_{cc} = 0.45$

Prova a vuoto:  $P_o\% = 0.4\%$ ,  $\cos \varphi_o = 0.2$

Si determinino la tensione di alimentazione  $V_1$ , la corrente  $I_1$  primaria assorbita e il  $\cos \varphi_1$

#### Esercizio 5

Ad un trasformatore trifase, alimentato alla tensione nominale e alla frequenza  $f = 50$  [Hz], è allacciato un carico trifase equilibrato ohmico induttivo che sotto la tensione  $V_2 = 960$  [V] assorbe la corrente  $I_2 = 100$  [A] con un fattore di potenza  $\cos \varphi_2 = 0.8$ . Il rapporto di trasformazione a vuoto è  $K = 15$

La prova di corto circuito e la prova a vuoto hanno fornito i seguenti risultati:

Prova a vuoto:  $I_o = 0.4$  [A]  $\cos \varphi_o = 0.15$

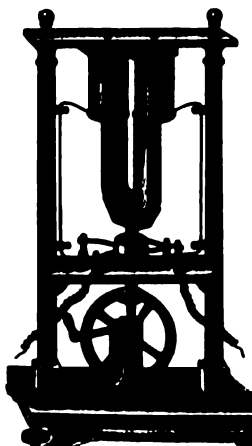
Prova di corto circuito (lato bassa tensione a corrente nominale):

$V_{cc2} = 46$  [V],  $\cos \varphi_{cc} = 0.45$   $I_{c2} = 115.8$  [A]

Determinare:

- 1) tensione, corrente, fattore di potenza primari nelle condizioni di carico riportate
- 2) la potenza e la tensione di corto circuito percentuali

Nel 1832 a Parigi un costruttore di strumenti scientifici, Hippolyte Pixii, realizzò la prima macchina elettrica rotante costituita da un magnete mosso con una manovella che interagiva con due bobine. Tale macchina metteva a disposizione ai suoi morsetti una tensione alternata e per questa ragione fu guardata con diffidenza fino all'introduzione del collettore a due lame introdotto da Ampère. Questa fu sicuramente la prima applicazione pratica delle scoperte di Faraday sulla conversione di energia meccanica in elettrica e viceversa, e ha rappresentato il primo passo verso la realizzazione delle macchine moderne. In questo capitolo saranno studiati i principi base della conversione elettromeccanica che saranno poi utilizzati nella modellazione delle macchine elettriche rotanti di cui la macchina di Pixii è stata precursore.



■ Il generatore Pixii

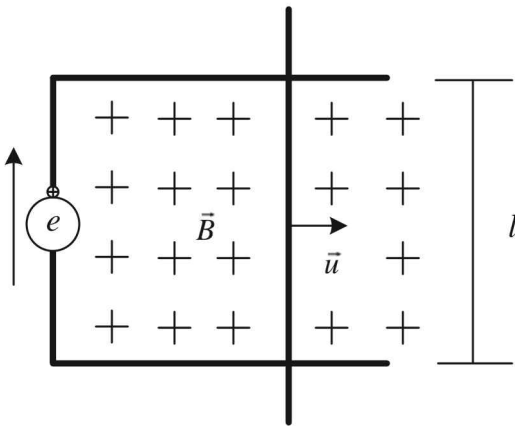


■ Hippolyte Pixii (1808-1835)

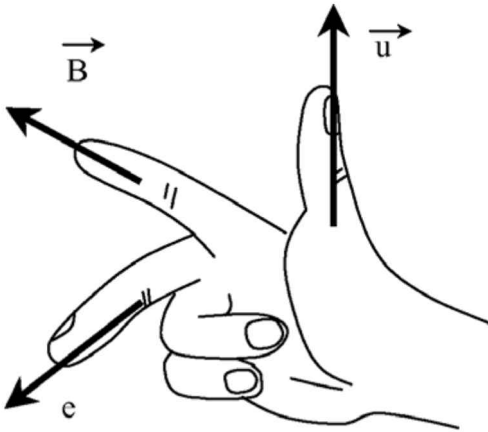
## 5.1 MACCHINA ELEMENTARE

Si consideri il sistema elementare costituito da due binari privi di attrito su cui è libera di muoversi una barretta di materiale conduttore come indicato in Fig. 5.1. La barretta sia posta in movimento ad una velocità  $\vec{u}$  e il sistema sia inserito in un campo di induzione magnetica costante  $\vec{B}$  ortogonale al piano del sistema. A chiusura della spira formata dai binari e dalla barretta sia inserito un voltmetro ideale  $e$  con le convenzioni indicate. Per il sistema in esame si può scrivere la legge di Faraday per la spira costituita dalla barretta in movimento, i binari e i cordoni del voltmetro come indicato in (5.1).

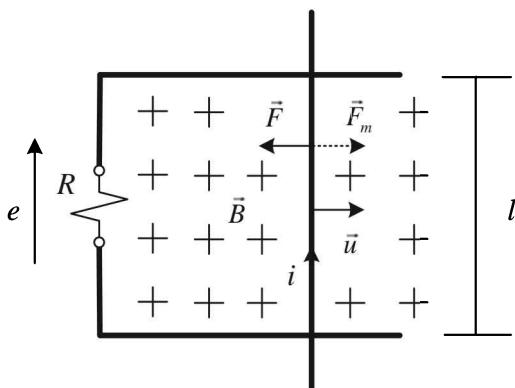
$$e = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(B \cdot A)}{dt} = B \frac{dA}{dt} = B \frac{d(x \cdot l)}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blu \quad (5.1)$$



■ Fig. 5.1. Macchina planare elementare



■ Fig. 5.2. Regola delle tre dita della mano destra



■ Fig. 5.3. Generatore elettromeccanico elementare

Nel caso in esame in cui la velocità di spostamento del conduttore è ortogonale alla direzione del campo di induzione  $\vec{B}$  il verso di misura della f.e.m. della relazione (5.1) può essere individuata con la regola delle tre dita della mano destra come mostrato in Fig. 5.2

Si ipotizzi ora di sostituire al voltmetro un resistore con resistenza  $R$  (Fig 5.3). La presenza della f.e.m. precedentemente calcolata produrrà la circolazione di una corrente  $I$  nel circuito. Nell'ipotesi che il campo  $\vec{B}$  non sia modificato dalla circolazione di questa corrente si può scrivere la relazione (5.2).

$$i = \frac{e}{R} = \frac{Blu}{R} \quad (5.2)$$

La resistenza dissiperà quindi una potenza pari a  $p = ei = Blui$ . Per il principio di conservazione dell'energia tale potenza deve provenire dal sistema meccanico che dovrà sviluppare un'opportuna forza per mantenere il sistema in movimento a velocità costante. La forza meccanica sarà uguale e contraria alla forza sviluppata dal sistema elettrico essendo il sistema a regime a velocità costante. L'espressione della forza elettromagnetica sviluppata può essere ricavata dal bilancio di potenze come indicato in (5.3).

$$p = e \cdot i = f \cdot u = Bl \cancel{\mu} i = f \cancel{\mu} \rightarrow f = Bli \quad (5.3)$$

Anche in questo caso, data l'ortogonalità delle grandezze, è possibile individuare il verso della forza elettromagnetica usando la regola delle tre dita della mano sinistra come indicato in Fig. 5.4.

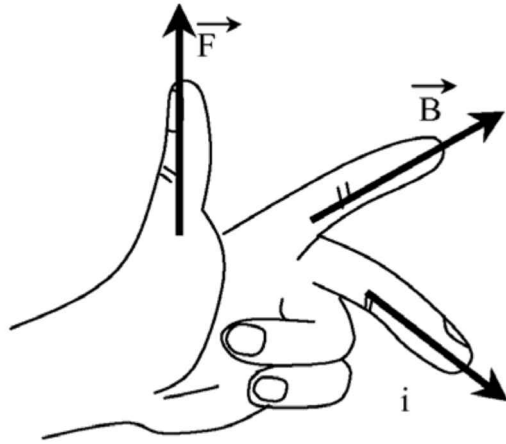
La macchina elementare individuata è quindi un generatore elettromeccanico che trasforma potenza meccanica in potenza elettrica disponibile ai morsetti del resistore e risulta perfettamente reversibile. Se si inserisce infatti un generatore ideale di corrente invece del resistore si ottiene un motore come indicato in Fig. 5.5.

Il sistema individuato è quindi un attuatore lineare ideale caratterizzato dalle relazioni (5.4).

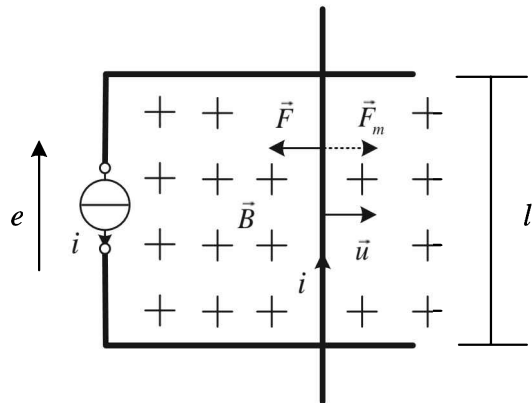
$$\begin{cases} e = Bl \cdot u = K \cdot u \\ F = Bl \cdot i = K \cdot i \end{cases} \quad (5.4)$$

Nelle relazioni (5.4) compare la costante  $K$  (costante di forza/velocità) che caratterizza l'attuatore e che dipende dall'intensità del campo esterno di induzione  $B$  (che nelle comuni macchine rotanti sarà chiamato "di eccitazione") e dalle dimensioni dell'attuatore  $l$ . Si vedrà nel seguito che relazioni simili possono descrivere anche attuatori rotanti e quindi si può introdurre l'attuatore rotante ideale caratterizzato dalle relazioni (5.5), dove  $T$  è la coppia sviluppata e  $\omega$  è la velocità angolare.

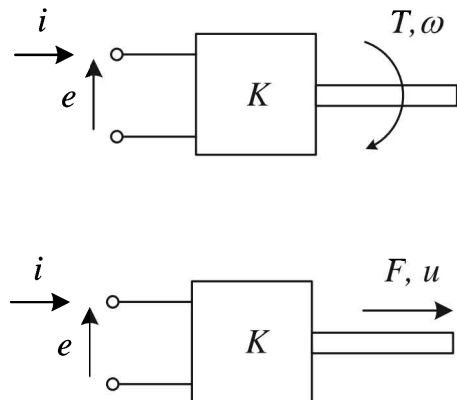
$$\begin{cases} e = K\omega \\ T = Ki \end{cases} \quad (5.5)$$



■ Fig. 5.4. Regola delle tre dita della mano sinistra



■ Fig. 5.5 Il motore elementare



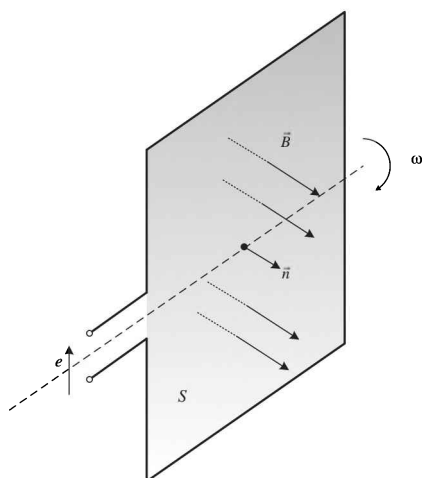
■ Fig. 5.6 Attuatori elettromeccanici ideali.

## 5.2 SISTEMI ROTANTI

Si consideri un sistema costituito da una spira rotante in un campo di induzione magnetica di intensità costante con direzione ortogonale all'asse di rotazione della spira (Fig. 5.7)

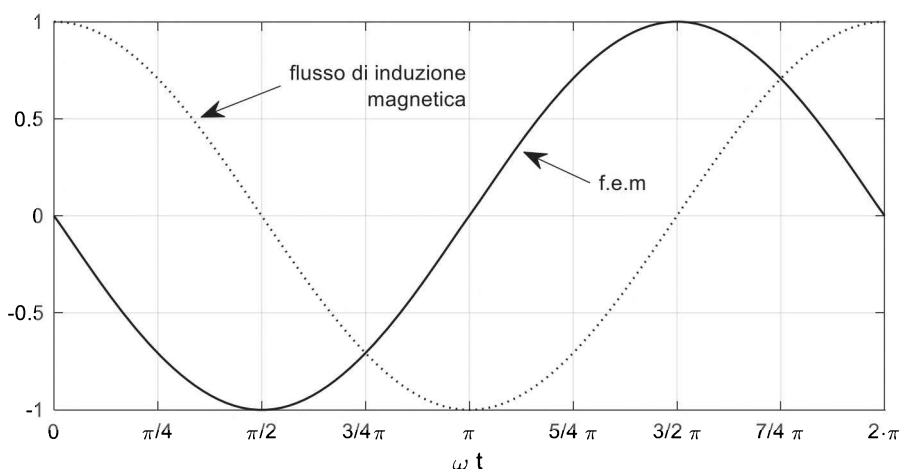
Applicando la legge di Faraday con le convenzioni di misura di Fig. 5.7, si può ottenere la relazione (5.6)

$$e = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{n}S) = \frac{d}{dt}\left(BS \cos \frac{\omega t}{\omega}\right) = -BS\omega \sin(\omega t) \quad (5.6)$$



■ Fig. 5.7. Spira rotante elementare

La f.e.m. misurata ai morsetti della spira è dunque sinusoidale con pulsazione pari alla velocità angolare di rotazione della spira e con ampiezza proporzionale all'intensità del campo di induzione in cui è immersa la spira, alle dimensioni della stessa e alla velocità di rotazione (Fig. 5.8).

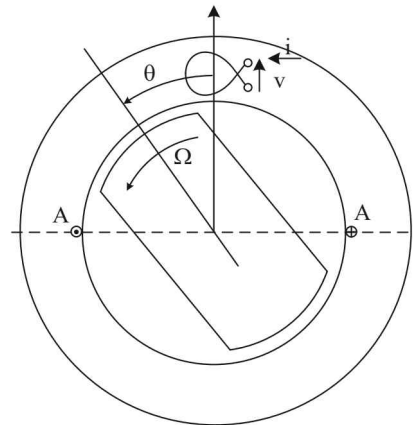


■ Fig. 5.8. Andamento della f.e.m. indotta

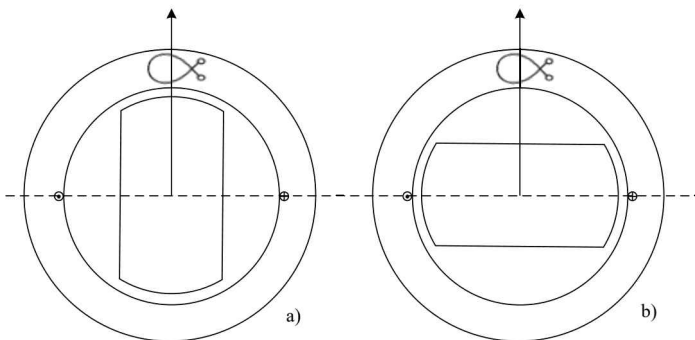


### 5.3 MACCHINA A RILUTTANZA ELEMENTARE

Si consideri la struttura di Fig. 5.9 costituita da un cilindro esterno in materiale ferromagnetico nel quale sia inserita la bobina diametrale A con asse magnetico indicato ed un rotore interno di forma anisotropa. La forma del rotore modifica il valore dell'autoinduttanza della bobina a seconda della posizione del rotore rispetto l'asse magnetico della bobina e per una rotazione completa presenterà due massimi quando il rotore si presenta allineato con la bobina e due minimi quando le zone di traferro maggiore si trovano allineate con l'asse della bobina (Fig. 5.10).



■ Fig. 5.9. Macchina a riluttanza elementare



■ Fig. 5.10. Condizioni di induttanza massima (a) e minima (b)

L'andamento effettivo dell'induttanza in funzione della posizione del rotore dipende ovviamente dalla forma del rotore, ma nell'ipotesi che sia possibile modellare efficacemente tale andamento periodico con una serie di Fourier troncata al primo termine, l'induttanza della bobina avrà l'espressione indicata in (5.7).

$$L(\theta) = L_0 + L_2 \cos(2\theta) \tag{5.7}$$

Se il rotore è posto in rotazione e la bobina è alimentata, si potrà avere quindi una variazione di energia accumulata nel sistema dovuta alla variazione di induttanza. Ricordando quanto introdotto per i sistemi magnetici, ad una variazione di energia magnetica in funzione della posizione è associata una forza/coppia elettromeccanica nel sistema. Nell'ipotesi che il materiale ferromagnetico sia lineare e

che la bobina sia alimentata da un'opportuna corrente  $i$  è possibile calcolare tale coppia utilizzando l'espressione della coenergia (5.8).

$$T = \frac{\partial W^*}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{2} L(\theta) i^2 \right) \quad (5.8)$$

Sviluppando la derivata della (5.8) tenuto conto dell'espressione (5.7), si ottiene la (5.9).

$$T = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{2} (L_0 + L_2 \cos(2\theta)) i^2 \right) = -L_2 \sin(2\theta) i^2 \quad (5.9)$$

Si può notare come l'espressione (5.9) identifichi una coppia che tende ad allineare il rotore con l'asse magnetico della bobina, nella condizione di minimo traferro (massima induttanza/minima riluttanza).

Nel caso il rotore sia posto in rotazione a velocità  $\Omega$  costante è possibile verificare che l'iniezione di una corrente sinusoidale di pulsazione  $\omega = \Omega$  nella bobina consente di ottenere una coppia media applicata al rotore, come indicato nella (5.9). Al fine di dimostrarlo si scriva l'espressione della coppia sostituendo gli andamenti del tempo dell'induttanza e della corrente come indicato in (5.10).

$$T = -L_2 \sin(2\Omega t) (\sqrt{2} I \cos(\omega t - \delta))^2 = -L_2 \sin(2\Omega t) 2I^2 \cos^2(\omega t - \delta) \quad (5.10)$$

Utilizzando le formule di Werner (5.11) per il  $\cos^2$  si può riscrivere la (5.10) come indicato nella (5.12).

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} T &= -L_2 \sin(2\Omega t) 2I^2 \left( \frac{1}{2} (\cos(2\omega t - 2\delta) + 1) \right) = \\ &= -L_2 I^2 \sin(2\Omega t) - L_2 I^2 \sin(2\Omega t) \cos(2\omega t - 2\delta) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Alla (5.12) applicando ancora le formule di Werner alla seconda parte dell'espressione si ottiene la (5.13).

$$T = -L_2 I^2 \sin(2\Omega t) + \dots \\ - \frac{1}{2} (L_2 I^2 \sin(2\Omega t + 2\omega t - 2\delta) + L_2 I^2 \sin(2\Omega t - 2\omega t + 2\delta)) \quad (5.13)$$

Il primo termine è sicuramente oscillante a valore medio nullo, mentre il secondo termine nel caso  $\Omega = \omega$  diventa:

$$-\frac{1}{2} L_2 I^2 (\sin(4\omega t - 2\delta) + \sin(2\delta)) \quad (5.14)$$

Anche in questo caso il primo termine è oscillante a valore medio nullo, mentre il secondo termine è costante. Il valore medio della coppia quindi nel caso di  $\Omega = \omega$  è indicato nella (5.15). L'espressione della coppia istantanea è invece riportata nella (5.16).

$$T_{media} = -\frac{1}{2} L_2 I^2 \sin(2\delta) \quad (5.15)$$

$$T(t) = -\frac{1}{2} L_2 I^2 (\sin 2\delta + 2 \sin(2\omega t) + \sin(4\omega t - 2\delta)) \quad (5.16)$$



Sul finire della prima metà dell'ottocento, la necessità di produrre energia elettrica in elevata quantità divenne sempre più stringente. I primi prototipi di macchine dinamo-elettiche avevano lasciato i laboratori per essere impiegati quasi esclusivamente negli impianti di illuminazione, anche se le problematiche legate a queste macchine non ne avevano ancora consentito un reale impiego industriale su vasta scala. Lo stesso commutatore a due segmenti di Ampère aveva consentito di erogare correnti “raddrizzate a mezz'onda” da queste macchine che nascevano naturalmente alternatori, ma ancora con elevate ondulazioni che provocavano campi parassiti e riscaldamenti inaccettabili per un funzionamento continuativo. Tali limitazioni caddero nel 1865 quando, dalle pagine del Nuovo Cimento, Antonio Pacinotti divulgò il principio di funzionamento della sua “macchinetta” a collettore. A questa macchina Pacinotti aveva iniziato a lavorare fin dal 1859 e l'aveva realizzata, con l'aiuto del meccanico dell'università Giuseppe Poggiali, nel 1860, come testimoniato dalle note presenti nel suo “Quaderno dei Sogni”, il quaderno degli appunti (scritti in forma di diario) delle lezioni seguite all'università.

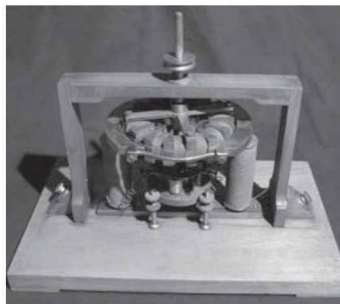
La prima produzione industriale di queste macchine la si deve però al belga Z.T. Gramme che, copiando le idee di Pacinotti e di E.W von Siemens, realizzò nel 1870 una macchina dinamo-elettica e ne iniziò la vendita a livello industriale. A



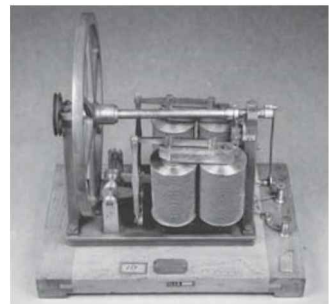
■ Antonio Pacinotti  
(1841-1912)



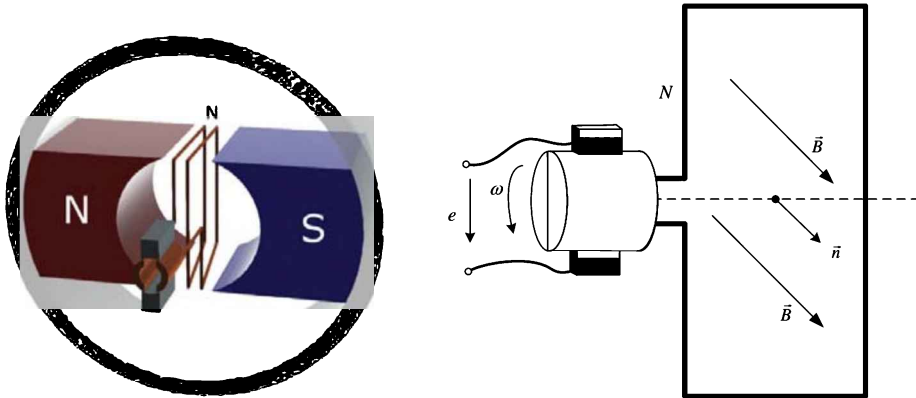
■ Una pagina del “Quaderno dei Sogni”



■ La dinamo di Pacinotti

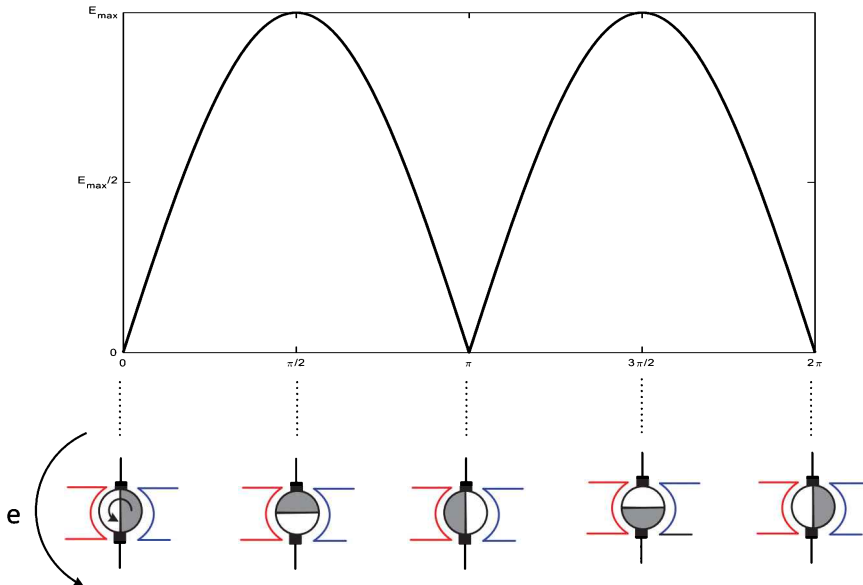


■ Macchina Dinamo-elettica



■ Fig. 6.1 Macchina in continua elementare e convenzioni di misura

Pacinotti comunque, grazie anche all'intervento di Siemens, fu riconosciuta la paternità dell'idea e gli fu assegnata la medaglia d'oro dell'Expo di Vienna del 1875. Gli anni successivi all'introduzione da parte di Gramme della dinamo ne videro il miglioramento continuo vista la necessità di produrre quantità di energia sempre crescenti grazie anche all'introduzione della lampadina ad incandescenza di T. A. Edison. L'utilizzo su vasta scala dell'energia elettrica mostrò però tutti i limiti di questa macchina e soprattutto la necessità di disporre di tensioni diverse per la produzione, il trasporto e l'utilizzazione dell'energia elettrica ne causò ben presto il declino già nell'ultimo decennio dell'800.



■ Figura 6.2 Andamento della tensione raddrizzata e posizione del collettore.

## 6.1 MACCHINA IN CORRENTE CONTINUA ELEMENTARE

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 6.1 costituito da una struttura esterna in materiale ferromagnetico sulla quale sono inserite delle bobine (o dei magneti permanenti) che generano un campo trasversale  $\vec{B}$  ad una bobina di  $N$  spire posta in aria all'interno del sistema.

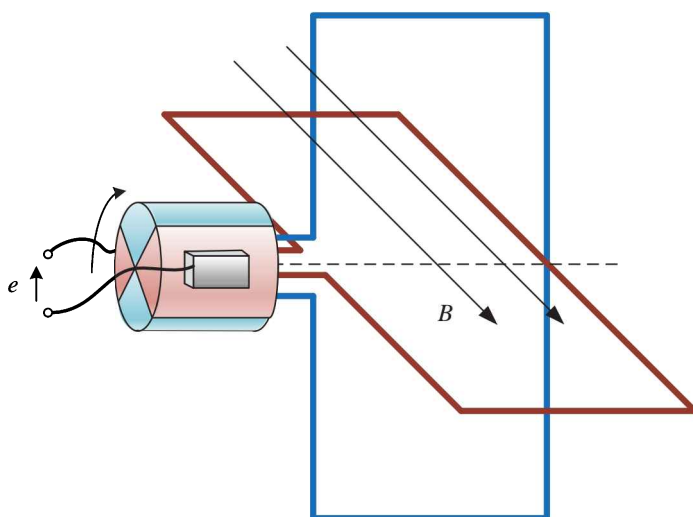
Come visto nel capitolo precedente, ponendo in rotazione la spira all'interno del campo costante, si genera una forza elettromotrice sinusoidale con valore massimo indicato in (6.1)

$$E_{max} = NBl\omega R \quad (6.1)$$

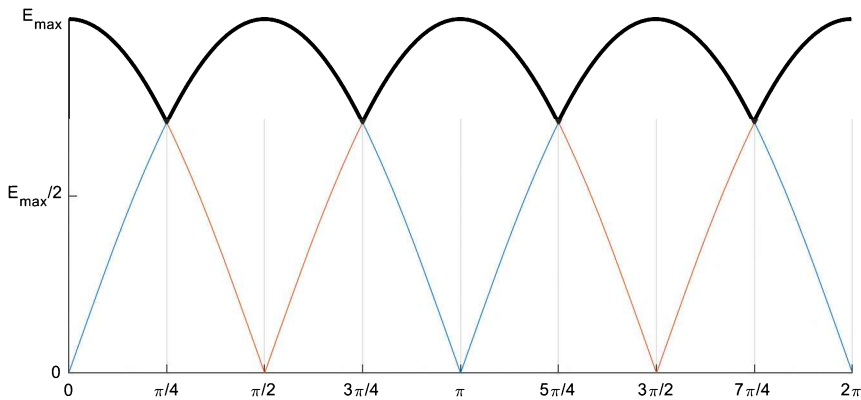
Se ora si inserisce una struttura cilindrica costituita da due parti isolate tra loro (collettore) sulle quale strisciano due spazzole fisse, è possibile ottenere una tensione raddrizzata come indicato in Fig. 6.2.

Al fine di ottenere una tensione il più possibile costante si può pensare di inserire invece di un'unica bobina costituita da  $N$  spire, una struttura costituita da  $n$  bobine sfasate di un angolo  $\alpha$  tra loro collegate sempre a un collettore che presenta  $2n$  spicchi isolati tra loro come indicato ad esempio in Fig. 6.3 dove si è creata una struttura costituita da  $n = 2$  bobine sfasate di  $\alpha = 90^\circ$ . In questo modo alle spazzole del collettore (formato da  $2n = 4$  spicchi) si può misurare la f.e.m, indicata in Fig. 6.4.

Le forze elettromotrici indotte nelle bobine saranno infatti sfasate del medesimo angolo  $\alpha$  nel tempo e il collettore e le spazzole consentiranno di estrarre solo un'opportuna porzione della f.e.m indotta. Con più alto sarà il numero di bobine con più la f.e.m misurata alle spazzole si avvicinerà ad una tensione co-



■ Fig.6.3. Struttura a più bobine in aria



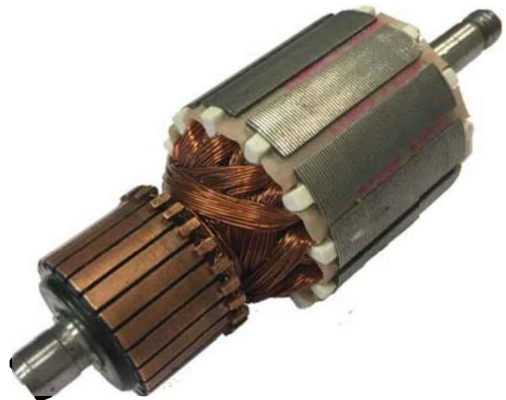
■ Fig. 6.4. F.e.m. misurata alle spazzole per la struttura con due bobine separate

stante nel tempo. Ovviamente tale soluzione è estremamente poco efficiente ai fini della conversione elettromeccanica dell'energia in quanto viene usata una sola bobina alla volta e quindi la naturale estensione sarà quella di utilizzare strutture con avvolgimenti chiusi in cui tutte le bobine sono opportunamente collegate in serie tra loro. In questo modo tutte le bobine interverranno nella conversione elettromeccanica durante tutta la rotazione

Esistono ovviamente vari modi per collegare tali bobine in serie tra loro al fine di creare un avvolgimento che consenta di sfruttare in maniera più efficiente la macchina, ma a fini didattici si presenterà il funzionamento della macchina con rotore l'avvolgimento ad anello di Pacinotti che veniva utilizzato nelle prime macchine in corrente continua, ma che oggi non è più utilizzato in quanto meno efficace di altre realizzazioni (tipicamente a tamburo a doppio strato). I principi di funzionamento che governano la macchina restano ovviamente i medesimi.



■ Fig. 6.5 Rotore con avvolgimento ad anello di Pacinotti



■ Fig. 6.6 Rotore con avvolgimento a tamburo a doppio strato



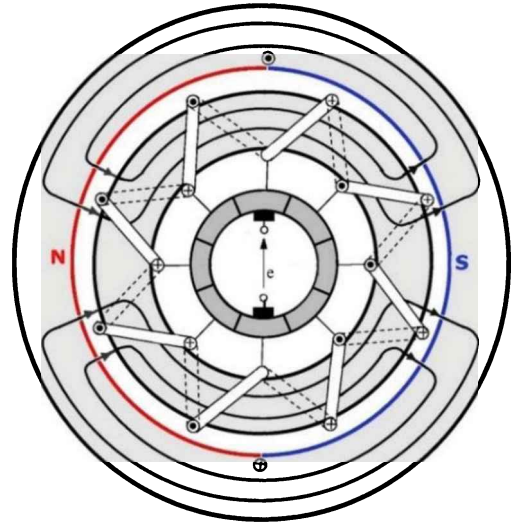
## 6.2 MACCHINA IN CC: FUNZIONAMENTO DA GENERATORE

Si consideri la macchina in corrente continua isotropa (cioè che presenta in tutte le direzioni il medesimo traferro) con rotore ad anello di Pacinotti rappresentata in Fig. 6.7. Il rotore è costituito da un cilindro su cui è avvolto un avvolgimento di  $N$  spire collegate alla struttura a collettore (analoga a quella presentata in precedenza) su cui scorrono le spazzole mentre lo statore presenta un avvolgimento diametrale per la creazione del campo di induzione principale (**eccitazione**). La struttura di rotore di una macchina in corrente continua viene anche detta **armatura**.

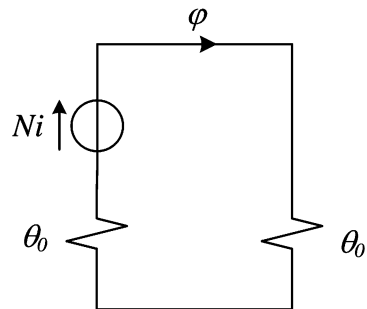
Nell'ipotesi di materiale ferromagnetico ideale ( $\mu_{fe} = \infty$ ) e considerando un tubo di flusso (l'area racchiusa tra due linee di flusso della Fig. 6.7) il circuito magnetico equivalente è rappresentato in Fig. 6.8. Dove  $\theta_0$  è la riluttanza equivalente del traferro.

Utilizzando il circuito di Fig. 6.8 è quindi possibile ricavare il flusso di induzione magnetica che si scambiano statore e rotore e da questo ricavare l'induzione al traferro. Si noti però che essendo l'area della superficie cilindrica di statore maggiore dell'area di rotore, l'induzione magnetica al traferro cresce procedendo dallo statore al rotore. Se il traferro è piccolo (come solitamente accade in tutte le macchine elettriche) si può trascurare tale variazione al traferro e considerare un campo di induzione costante al traferro con valore pari all'induzione media ottenuta considerando l'area  $A_m$  del cilindro corrispondente al punto medio del traferro.

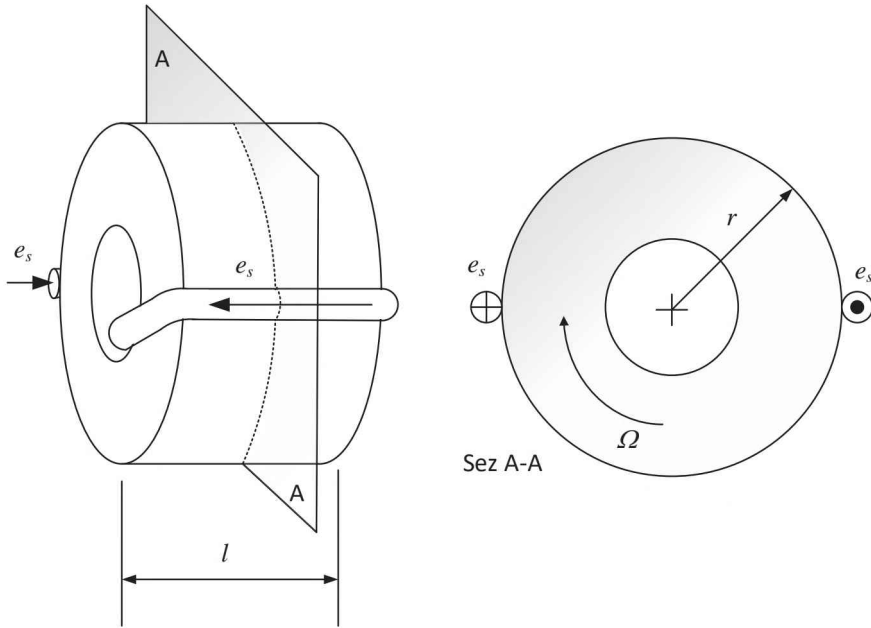
$$B_m = \frac{\varphi}{A_m} \quad (6.2)$$



■ Fig. 6.7. Rappresentazione schematica di una macchina in corrente continua isotropa con rotore ad anello di Pacinotti



■ Figura 6.8 Circuito magnetico equivalente



■ Fig. 6.9. Convenzioni di misura delle f.e.m.

Considerando tale valore di induzione al traferro ed osservando che il campo è sempre ortogonale al movimento dei conduttori di rotore, è possibile utilizzare le formule già ricavate per la macchina elementare lineare e per ogni conduttore sulla superficie di rotore si può scrivere la (6.3), il cui verso può essere individuato con la regola delle tre dita della mano destra. In Fig 5.6 è riportato il verso delle forze elettromotrici indotte nel caso di rotazione antioraria del rotore (il punto indica una direzione di misura della f.e.m. nel conduttore uscente dal piano, la croce una direzione di misura entrante nel piano, si veda Fig. 5.8).

$$e_s = B_m l \Omega r \quad (6.3)$$

In (6.3)  $\Omega$  è la velocità angolare del rotore,  $r$  il raggio medio della macchina,  $l$  la lunghezza del conduttore (in senso longitudinale, in altre parole lo spessore del cilindro di Fig. 6.9) e  $B_m$  il valore medio dell'induzione al traferro.

La tensione misurata ai morsetti delle spazzole, poiché i conduttori sono tutti collegati in serie tra loro, sarà la somma degli  $N$  conduttori che si trovano in una semicirconferenza (sotto uno dei due poli).

$$e = N e_s = N B_m l r \Omega = k \Omega \quad (6.4)$$

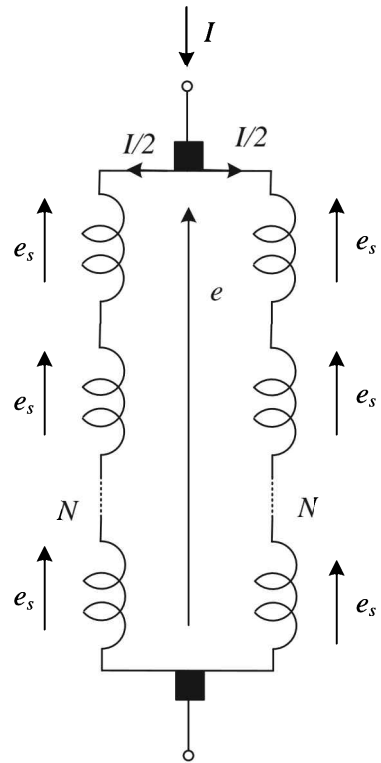
Medesimo discorso può essere fatto per i conduttori che si trovano sotto l'altro polo, con la differenza che la direzione della f.e.m. indotta sarà opposta (Fig. 6.7 e 6.9). Considerando dunque il circuito di rotore completo avremo la situazione sche-

matica riportata in Fig. 6.10, dove è possibile evidenziare che tra le spazzole è presente una f.e.m., mentre la somma delle tensioni applicate al circuito di rotore è nulla. Di conseguenza, anche se il circuito rotorico è chiuso in corto circuito, non ci sono correnti di circolazione in quanto la tensione totale applicata è nulla.

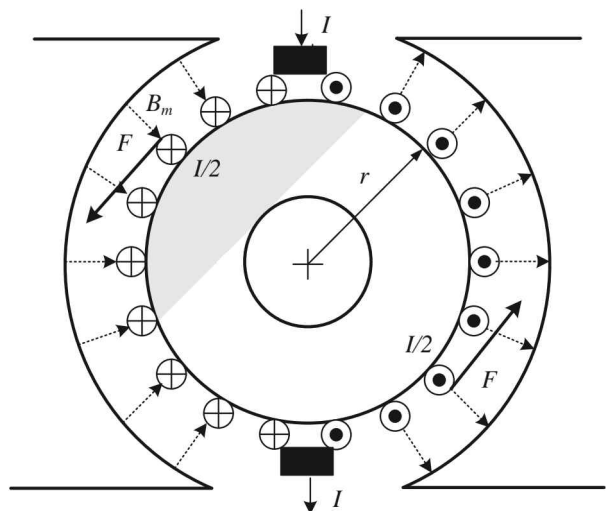
### 6.3 MACCHINA IN CC: FUNZIONAMENTO DA MOTORE

Considerando la struttura ad anello di Pacinotti presentata nel paragrafo precedente è possibile ottenere il funzionamento come motore iniettando una corrente costante nelle spazzole. La corrente iniettata vista la simmetria del circuito si divide in due parti uguali (il circuito è infatti esattamente diviso a metà dalle spazzole, si veda Fig. 6.10) e la distribuzione della corrente seguirà l'andamento di Fig. 6.11. Si può notare come i conduttori interni non siano interessati dal campo magnetico e quindi non intervengono sia nella generazione delle f.e.m. sia nella generazione di coppia.

La presenza del collettore e delle spazzole fa in modo che la distribuzione delle correnti nei conduttori che si trovano sotto i poli non cambi durante la rotazione, e per le considerazioni sull'ortogonalità del movimento e del campo di induzione è possibile calcolare la forza applicata al singolo conduttore con le formule già utilizzate per la macchina lineare e determinarne la direzione con la regola delle tre dita della mano sinistra.



■ Fig. 6.10 Rappresentazione schematica delle f.e.m. indotte



■ Figura 6.11 Distribuzione della corrente e forze

$$F = B_m l \frac{I}{2} \quad (6.5)$$

Si può quindi calcolare la coppia applicata al rotore, riconoscendo che, per simmetria, ogni conduttore che si trova sotto un polo ha un corrispondente conduttore posizionato sotto l'altro polo in modo che la coppia per due conduttori può essere calcolata come indicato in (6.6). La coppia totale applicata al rotore è quindi pari a  $N$  volte la coppia calcolata, dove  $N$  è, come nel caso precedente, il numero di conduttori che si trovano sotto un polo della macchina.

$$T_s = F \cdot 2r = B_m l \frac{I}{2} \cancel{Z} r = B_m l r I \quad (6.6)$$

$$T = N T_s = N B_m l r I = k I \quad (6.7)$$

## 6.4 MACCHINA IN CC: FUNZIONAMENTO A REGIME

Considerando dunque un funzionamento generico per la macchina in corrente continua è possibile scrivere le relazioni (6.8) che legano f.e.m. indotta, coppia velocità angolare e corrente.

$$\begin{aligned} E &= k \Omega \\ T &= k I \end{aligned} \quad \text{con} \quad k = B_m l r \quad (6.8)$$

Si può notare come la costante di proporzionalità  $k$  dipenda dall'intensità del campo di induzione  $B_m$ , e dalle dimensioni della macchina. Poiché il campo di induzione al traferro è limitato dalla necessità di non saturare il materiale ferromagnetico ( $\sim 1.2 \div 1.5$  [T]), a parità di velocità e corrente, per ottenere più coppia e tensione, è necessario aumentare le dimensioni della macchina.

Nel seguito si vedrà come tenere conto di ulteriori non idealità della macchina ricavando i modelli di regime, le caratteristiche meccaniche e le caratteristiche esterne delle varie tipologie di macchine in corrente continua.

### 6.4.1 Macchina CC ad eccitazione indipendente

La macchina in corrente continua ad eccitazione indipendente può essere rappresentata schematicamente come riportato in Figura 6.12. Il circuito di armatura a regime può essere modellato da una opportuna resistenza  $R_a$  in serie ad un generatore ideale  $E$  che rappresenta la f.e.m. indotta negli avvolgimenti di roto-

re. Il circuito di eccitazione può essere invece modellato con una resistenza  $R_e$  che rappresenta la resistenza totale delle bobine di eccitazione poste sullo statore.

Il modello elettrico può essere quindi espresso dalle relazioni (6.9), dove il coefficiente di proporzionalità tra la forza elettromotrice  $E$  e la velocità di rotazione  $\Omega$  della macchina dipende dalla corrente di eccitazione  $I_e$ .

Tale legame è funzione della caratteristica di magnetizzazione del materiale ferromagnetico, ma solitamente è possibile approssimarla in termini di semplice proporzionalità in quanto la macchina funziona in condizioni non saturate.

$$\begin{cases} V_a = E - R_a I \\ E = k(I_e)\Omega \\ V_e = R_e I_e \end{cases} \quad k(I_e) = K I_e \quad (6.9)$$

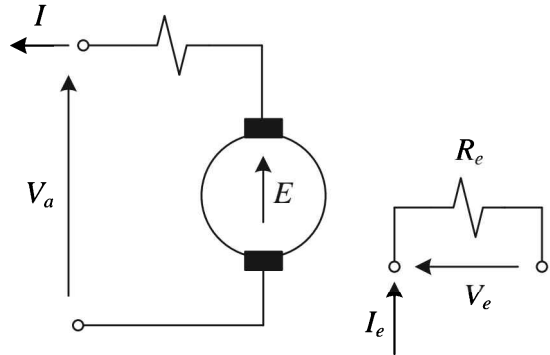
Dalle relazioni (6.9) è possibile ricavare la **caratteristica esterna** della macchina funzionante come generatore, cioè la curva che lega la tensione ai morsetti  $V_a$  con la corrente di carico  $I$  (Fig. 6.13).

A corrente di eccitazione costante, la caratteristica esterna è una retta discendente il cui punto a tensione nulla rappresenta il funzionamento in corto circuito per il quale si ha:

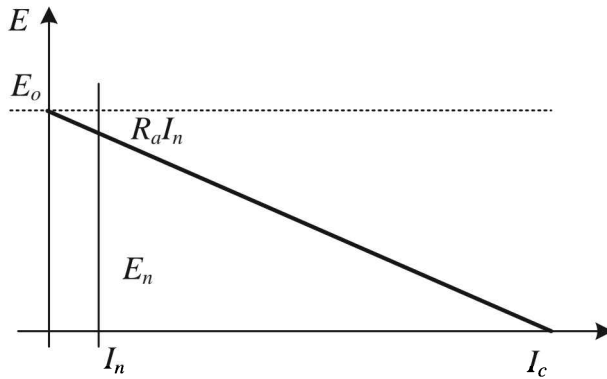
$$I_c = \frac{E_a}{R_a} \quad (6.10)$$

Se  $E_a = V_n$ , la corrente  $I_c$  solitamente assume valori tra 10 e 50 volte la corrente nominale. È quindi evidente la pericolosità di tale condizione di funzionamento per la macchina. Per il punto di funzionamento nominale invece si ha che la resistenza di armatura espressa in per unità assume i valori indicati in (6.11), dove si definisce **resistenza nominale** il rapporto  $R_n = \frac{V_n}{I_n}$  :

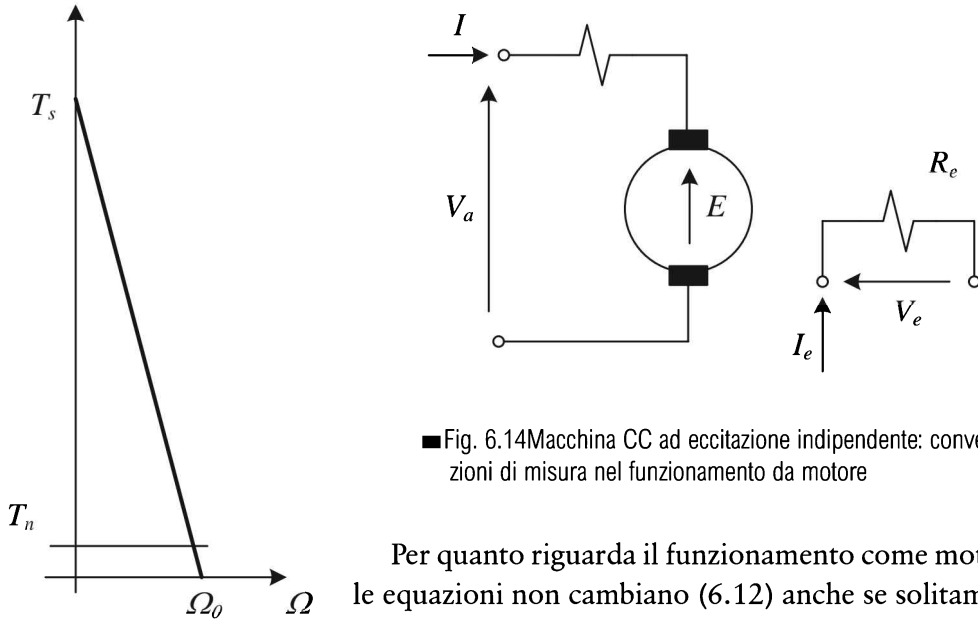
$$r_a = \frac{R_a I_n}{V_n} = \frac{R_a}{R_n} = 0.02 \div 0.10 \quad (6.11)$$



■ Figura 6.12 Rappresentazione circuitale della macchina CC ad eccitazione indipendente



■ Fig. 6.13. Caratteristica esterna della macchina ad eccitazione separata



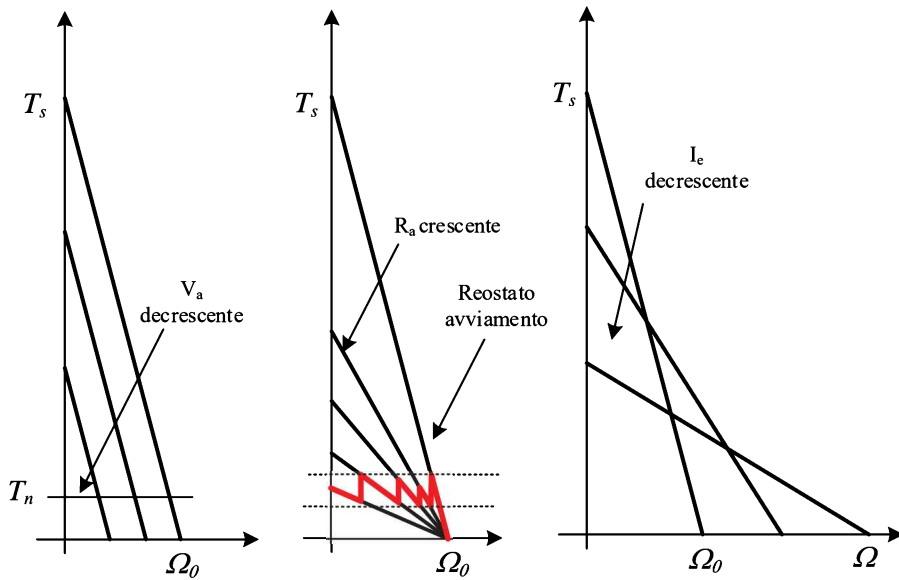
■ Fig. 6.14 Macchina CC ad eccitazione indipendente: convenzioni di misura nel funzionamento da motore

■ Figura 6.15 Caratteristica meccanica motore CC a eccitazione indipendente

Per quanto riguarda il funzionamento come motore le equazioni non cambiano (6.12) anche se solitamente si preferisce adottare le convenzioni di misura di Fig. 6.14

$$\begin{cases} V_a = E + R_a I_a \\ E = K(I_e)\Omega \\ V_e = R_e I_e \end{cases} \quad T = K(I_e)I_a \quad (6.12)$$

Nel funzionamento come motore è interessante trovare la **caratteristica meccanica**, cioè il legame tra la coppia e la velocità meccanica del motore. Nell'ipotesi che la corrente di eccitazione sia costante è possibile scrivere la corrente di armatura come indicato in (6.13).



■ Fig. 6.16. Caratteristica meccanica al variare di  $V_a$ ,  $R_a$  ed  $I_e$

$$I_a = \frac{V_a - E}{R_a} = \frac{V_a - K(I_e)\Omega}{R_a} \quad (6.13)$$

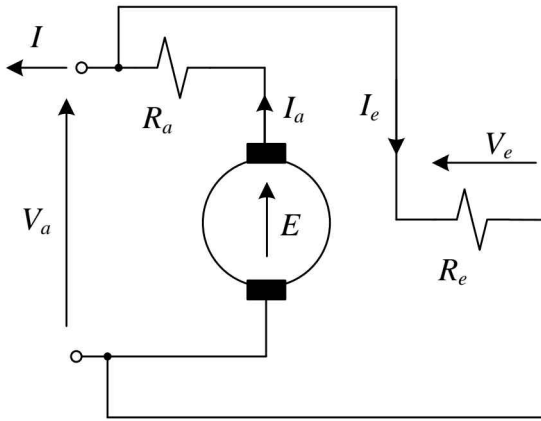
È possibile poi individuare due punti significativi della caratteristica meccanica: la **velocità a vuoto**  $\Omega_0$  ( $I_a = 0$ ) e la **coppia di spunto**  $T_s$  ( $\Omega = 0$ )

$$\begin{aligned} I_s &= \frac{V_a - K(I_e) \cdot 0}{R_a} = \frac{V_a}{R_a} & T_s &= K(I_e)I_s = K(I_e) \frac{V_a}{R_a} \\ I_a = 0 &= \frac{V_a - K(I_e)\Omega_0}{R_a} & \Omega_0 &= \frac{V_a}{K(I_e)} \end{aligned} \quad (6.14)$$

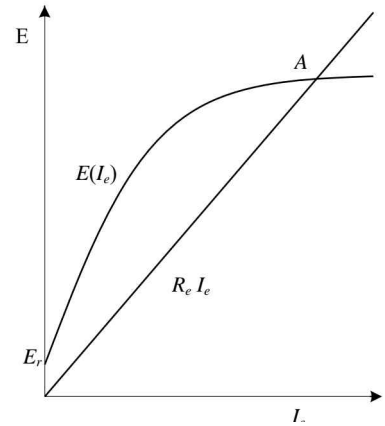
L'espressione della coppia in funzione della velocità è dunque una retta a pendenza negativa come indicato in (6.15) e riportato in Fig. 6.15.

$$T = K(I_e) \frac{V_a - K(I_e)\Omega}{R_a} = \frac{K^2(I_e)}{R_a} (\Omega_0 - \Omega) \quad (6.15)$$

Si noti che la coppia di spunto presenta le medesime problematiche del funzionamento in corto circuito da generatore e quindi solitamente l'avviamento di questi motori non può avvenire a piena tensione. La (6.15) evidenzia come la caratteristica meccanica possa essere modificata agendo su  $R_a$ ,  $V_a$  e  $I_e$ . In Fig. 6.16 sono riportate le caratteristiche meccaniche al variare di tali parametri. In particolare



■ Figura 6.17 Rappresentazione circuitale della macchina CC ad eccitazione derivata



■ Fig. 6.18 Caratteristica di magnetizzazione e punto di regime a vuoto.

la variazione di  $R_a$  può essere utilizzata per avviare la macchina con l'inserimento di opportuni reostati di avviamento. Per quanto riguarda la dipendenza da  $I_e$  si è ipotizzato un legame lineare tra  $I_e$  e  $K$  e questo è vero se il circuito magnetico non è in saturazione.

### 6.4.2 Macchina CC ad eccitazione parallelo o derivata

La macchina ad eccitazione parallelo può essere rappresentata come in Fig. 6.17. Il funzionamento a regime come motore (a tensione  $V_a$  fissata) è del tutto simile a quello del motore con eccitazione indipendente con l'unica differenza che eventuali variazioni della tensione  $V_a$  influenzano ovviamente anche la corrente di eccitazione. Per quanto riguarda il funzionamento come generatore invece le due macchine hanno un comportamento diverso e quindi si andrà ad analizzare solo il comportamento come generatore.

$$\begin{cases} V_a = E - R_a I_a \\ E = K(I_e)\Omega \\ V_e = V_a = R_e I_e \\ I = I_a - I_e \end{cases} \quad T = K(I_e)I_a \quad (6.16)$$

Prima di continuare con l'analisi del sistema, si osservi che per avere perdite modeste nel circuito di eccitazione è necessario che i valori nominali della corrente di macchina e della corrente di eccitazione siano molto diversi tra loro ed in particolare  $I_{en} \ll I_n$ . Normalmente risulta:



$$I_n / I_{en} = R_e / R_n = 100 \div 1000 \quad P_{en} / P_n = 0.001 \div 0.01 \quad (6.17)$$

### 6.4.2.1 Autoeccitazione della dinamo ad eccitazione derivata

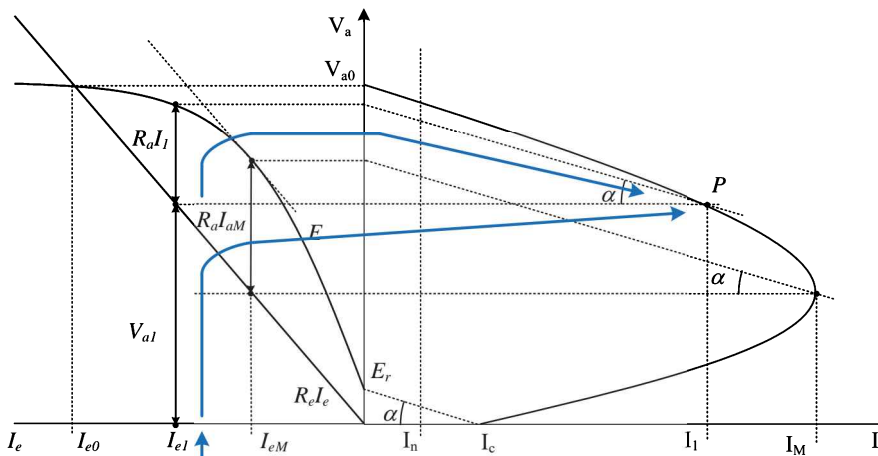
Nel caso del funzionamento come generatore delle dinamo ad eccitazione derivata è importante tenere conto delle non linearità del circuito magnetico in quanto sarà possibile avviare tali macchine (nel funzionamento da generatore) sfruttando l'induzione residua del materiale ferromagnetico.

Considerando infatti il funzionamento a vuoto ( $I = 0$ ) con macchina in rotazione a velocità  $\Omega$  fissata, il punto di funzionamento di regime della macchina è il punto di intersezione delle due caratteristiche indicate in Fig. 6.18 e in formule come indicato in (6.18).

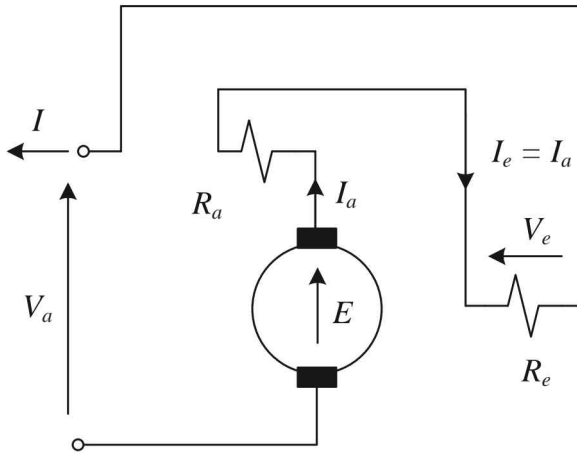
$$E(I_e) = (R_e + R_a)I_e = \left(1 + \frac{R_a}{R_e}\right)R_e I_e = \left(1 + \frac{0.1R_n}{100R_n}\right)R_e I_e \approx R_e I_e \quad (6.18)$$

L'ultima approssimazione si può trovare combinando i valori trovati di  $R_a$  e  $R_e$  rispetto  $R_n$  come indicato nelle (6.11) e (6.17). Il punto di regime è quindi individuato dall'intersezione della curva di magnetizzazione  $E(I_e)$  e dalla retta  $R_e I_e$  come indicato in Fig 6.18.

Per quanto riguarda il funzionamento a carico, la caratteristica esterna  $V_a(I)$  presenta la forma indicata in Fig. 6.19 nell'ipotesi di **velocità di rotazione costante**.



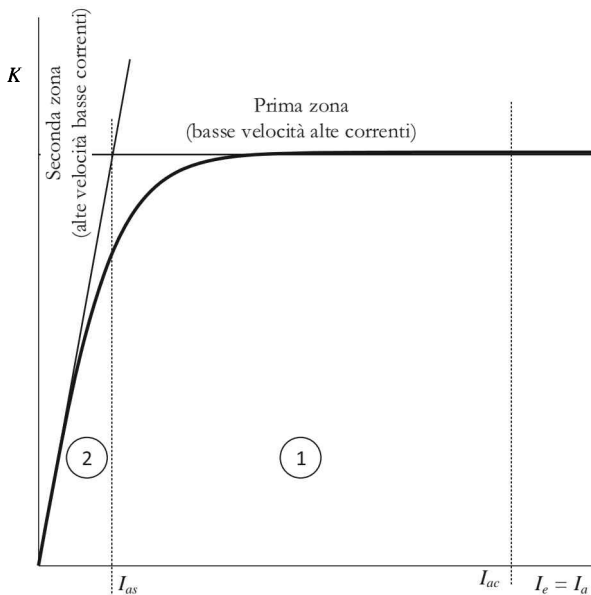
■ Fig. 6.19 Caratteristica esterna.



■ Fig. 6.20 Rappresentazione circuitale della macchina CC con eccitazione serie

eccitazione (si veda ad esempio l'individuazione del punto P partendo dall'imposizione di  $I_{e1}$ ). Si noti inoltre come la corrente di corto circuito  $I_c$  sia minore dal punto di funzionamento a corrente massima. Anche il punto di funzionamento in corto circuito è comunque solitamente un punto di funzionamento a corrente maggiore della corrente nominale della macchina.

### 6.4.3 Macchina CC ad eccitazione serie



■ Fig. 6.21 Curva di magnetizzazione approssimata ( $K(I_e)$ )

Il punto di corrente erogata massima coincide con il massimo valore di  $R_a I_a$  e quindi con il valore di corrente di eccitazione corrispondente al punto in cui la tangente alla curva  $E(I_e)$  è parallela alla caratteristica  $R_e I_e$ . Poiché  $I_a \approx I$  per costruzione il rapporto  $R_a I_a / I = \tan \alpha \approx R_a$  e quindi si può procedere anche alla determinazione della caratteristica esterna in forma grafica partendo dall'imporre una corrente di

La macchina in CC ad eccitazione serie è sostanzialmente utilizzata solo come motore in quanto, presentando l'avvolgimento di eccitazione in serie all'armatura, è possibile la generazione del campo di eccitazione solo in presenza di una circolazione di corrente e quindi non consente il funzionamento a vuoto.

Per studiarne il comportamento come motore e ricavare la caratteristica meccanica si ipotizzerà che la caratteristica di magnetizzazione pre-

senti l'andamento semplificato di Fig. 6.21: un primo tratto lineare e un secondo tratto, dopo il punto di saturazione, di valore costante. In questo modo è possibile procedere allo studio del motore suddividendolo in due zone:

1. Una prima zona ad **alte correnti e basse velocità** dove la macchina lavorerà nel tratto di curva di magnetizzazione costante
2. Una seconda zona a **basse correnti e alte velocità** dove la macchina lavorerà nel tratto di curva di magnetizzazione lineare.

Come prima osservazione si noti come in questo caso, a differenza del caso ad eccitazione parallelo, per contenere le perdite  $R_e \approx R_a$ .

Le equazioni che descrivono il funzionamento di questa macchina sono sempre quelle indicate in (6.19) che sarà necessario particolarizzare per le due zone di funzionamento di Fig. 6.21

$$\begin{cases} V_a = E + (R_a + R_e)I_a \\ E = K(I_e)\Omega \quad T = K(I_a)I_a \end{cases} \quad (6.19)$$

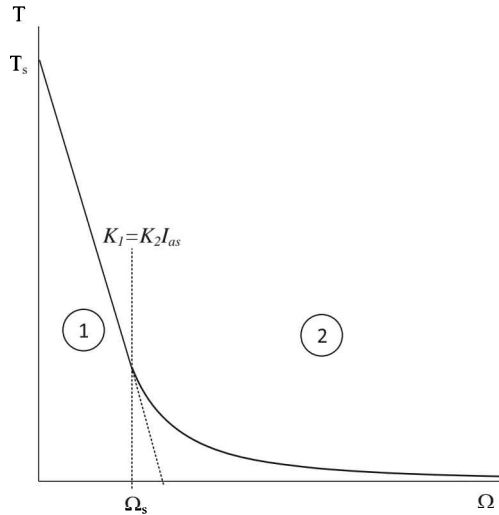
### Zona 1. Alte correnti – Basse velocità (avviamento)

In questa zona, poiché le velocità sono basse e quindi la f.e.m.  $E \approx 0$ , le correnti che circolano nella macchina sono elevate e causano la saturazione del circuito magnetico. Con buona approssimazione è possibile considerare  $K(I_e) = K_1$  costante. Le equazioni (6.19) possono essere quindi scritte come indicato in (6.20), che coincidono con quelle di una macchina ad eccitazione indipendente a corrente di eccitazione costante. La macchina a eccitazione serie all'avviamento presenta quindi tutte le problematiche già incontrate per la macchina a eccitazione indipendente (alte coppie di avviamento/alte correnti) che possono essere risolte nel medesimo modo. La caratteristica meccanica è quindi una retta con pendenza negativa (zona 1 di Fig. 6.21).

$$\begin{cases} V_a = E + (R_a + R_e)I_a \\ E = K_1\Omega \quad T = K_1I_a \end{cases} \quad (6.20)$$

### Zona 2. Basse correnti – Alte velocità

All'aumentare della velocità, crescendo il contributo di  $E$ , nell'ipotesi di tensione di armatura  $V_a$  costante, diminuiscono le correnti circolanti. Questa diminuzione fa sì che al raggiungimento di un'opportuna corrente  $I_{as}$  il circuito magnetico non sia più saturato. Da questo punto in avanti, per semplicità, si ipotizzerà lineare la dipendenza di  $K$  dalla corrente di eccitazione e cioè  $K(I_e) = K_2I_e$ . Le equazioni assumono allora la forma indicata in (6.21).



■ Fig. 6.22 Andamento della caratteristica meccanica del motore eccitazione serie

$$\begin{cases} V_a = E + (R_a + R_e)I_a \\ E = K_2 I_a \Omega \quad T = K_2 I_a I_a \end{cases} \quad (6.21)$$

Dalla prima equazione è possibile ricavare la corrente in funzione della velocità come indicato in (6.22).

$$V_a = K_2 I_a \Omega + (R_a + R_e)I_a \Rightarrow I_a = \frac{V_a}{K_2 \Omega + R_a + R_e} \quad (6.22)$$

E quindi l'espressione della coppia in funzione della velocità come indicato in (6.23) che presenta un andamento decrescente con il quadrato della velocità

$$T = K_2 I_a^2 = \frac{K_2 V_a^2}{(K_2 \Omega + R_a + R_e)^2} \quad (6.23)$$

Se dalla (6.22) si ricava la velocità in funzione della corrente come indicato in (6.24), si può notare che se  $V_a \neq 0$  e  $I_a = 0$ , la velocità tende all'infinito  $\Omega \rightarrow \infty$ . In questo caso si dice che il motore va in fuga.

$$\Omega = \frac{V_a - (R_a + R_e)I_a}{K_2 I_a} \quad (6.24)$$

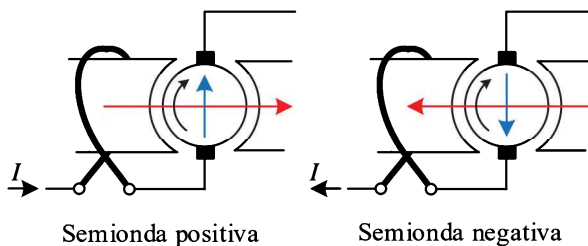
L'andamento completo della caratteristica meccanica è quindi quello indicato in Fig 6.22 dove la coppia di avviamento ha la stessa formulazione del motore a eccitazione separata (6.25).

$$T_s = \frac{V_a}{R_e + R_a} \quad (6.25)$$

## 6.5 MOTORE UNIVERSALE

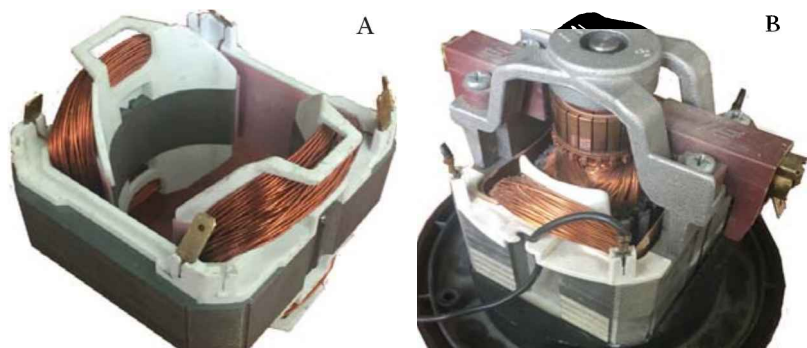
La macchina in corrente continua ad eccitazione serie funzionante come motore ha la caratteristica di poter essere utilizzata non solo in corrente continua, ma anche in corrente alternata. Al cambio di segno della corrente corrisponde infatti un cambio della direzione dei circuiti magnetici sia di statore che di rotore e quindi non cambia la direzione della coppia. L'unico inconveniente è che la coppia, pur avendo valore medio diverso da 0, è pulsante a frequenza doppia di quella di rete.

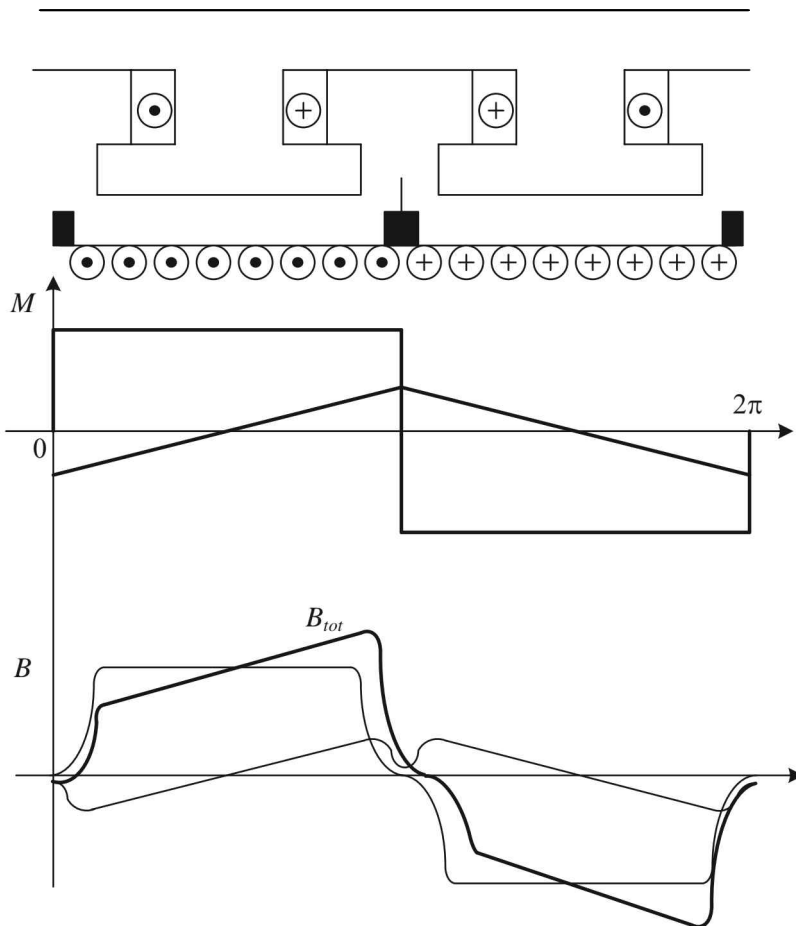
A differenza delle macchine in continua, essendo percorso anche il circuito statorico da un campo variabile nel tempo è necessario laminare anche il pacco statorico (Fig 6.24). Il motore universale presenta quindi tendenzialmente anche un'efficienza minore rispetto al corrispondente motore in continua. I motori universali trovano largo impiego negli elettrodomestici e negli utensili dove sono necessarie alte velocità di rotazione e facilità di regolazione/utilizzo come frullatori, asciugacapelli, trapani, ecc.



■ Fig 6.23 Andamento dei campi

■ Fig 6.24 Struttura di un motore in corrente continua universale a 2 poli. a) statore; b) struttura completa



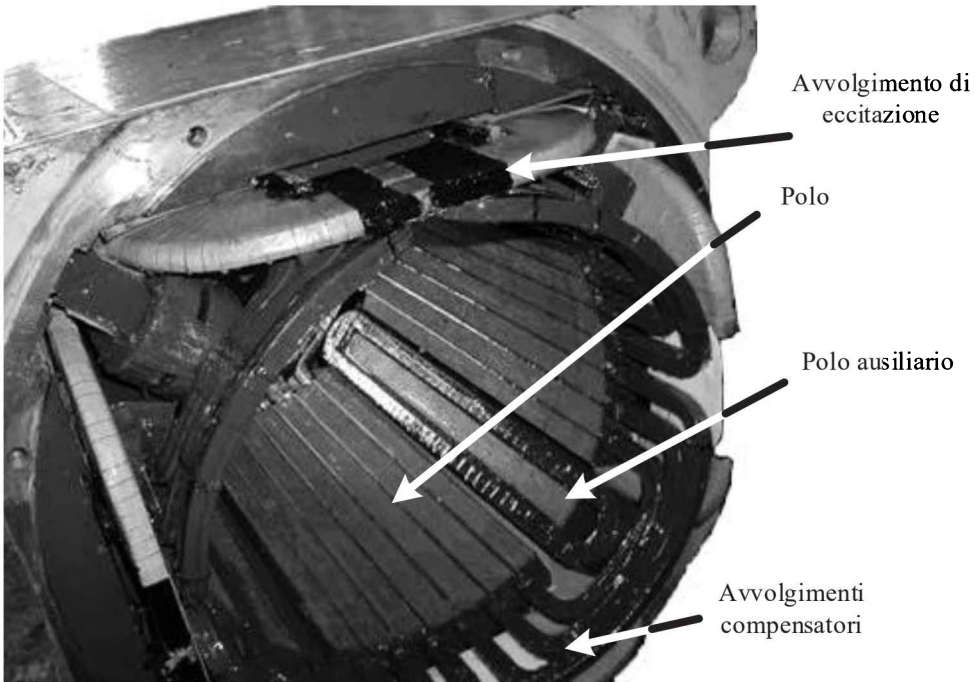
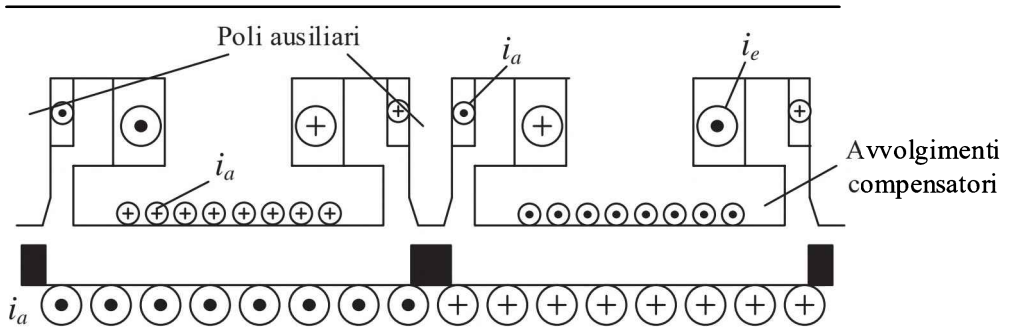


■ Fig 6.25. Reazione di indotto

## 6.6 REAZIONE DI INDOTTO

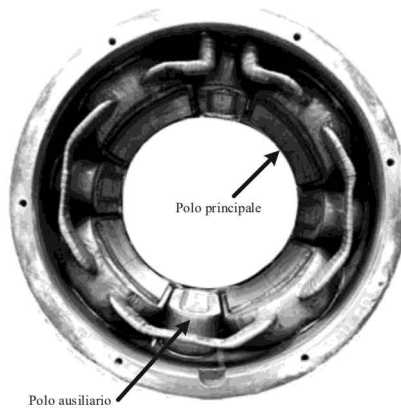
Si chiama reazione di indotto l'influenza che il campo magnetico di armatura esercita sulla distribuzione periferica al traferro dell'induzione magnetica prodotta dagli avvolgimenti di eccitazione. In Fig 6.25 sono riportati gli andamenti delle f.m.m. prodotte dall'eccitazione e dall'armatura nel caso fossero alimentate in maniera separata. La forma a triangolo della f.m.m prodotta dall'armatura è dovuto all'ipotesi che i conduttori siano uniformemente distribuiti e percorsi da  $I/2$ . Le induzioni prodotte dai due campi separatamente e l'andamento globale presentano l'andamento riportato sempre in Fig. 6.25.

Come si può notare gli effetti della reazione di indotto sono:



■ Fig. 6.26. Poli ausiliari e avvolgimenti compensatori.

1. **Distorsione della distribuzione dell'induzione.** In seguito alla distorsione si ha tipicamente una diminuzione del flusso di induzione al traferro rispetto al funzionamento a vuoto perché il circuito solitamente raggiunge il limite di saturazione in corrispondenza dei valori massimi di f.m.m.
2. **Spostamento del piano di neutro.** Si chiama piano di neutro il piano che individua il passaggio per lo 0 dell'induzione magnetica e coincide con il punto di posizionamento delle spazzole al fine di evitare problemi di commutazione. In presenza di campo di armatura il punto di passaggio per lo 0 non coincide più con il piano interpolare e ovviamente dipende dalla corrente di armatura.



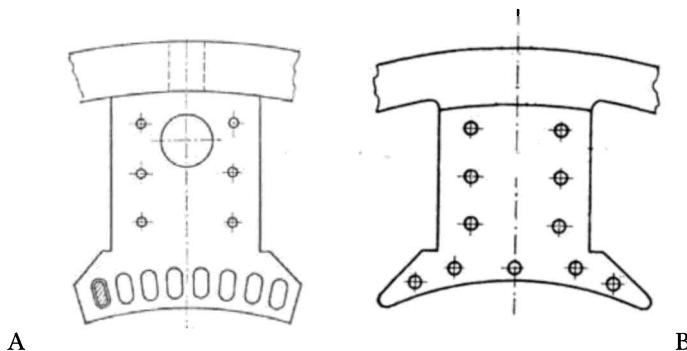
■ Fig. 6.27 Statore a 4 poli con poli ausiliari di un motore in continua

Per compensare tali effetti è necessario ricorrere ad opportuni avvolgimenti posti nei poli di eccitazione (**avvolgimenti compensatori**) o a **poli ausiliari** posti nell'asse interpolare (Fig. 6.26). Entrambi questi elementi (se presenti) devono essere percorsi dalla corrente di armatura e quindi posti in serie agli avvolgimenti rotorici.

## 6.7 AVVOLGIMENTI A TAMBURO

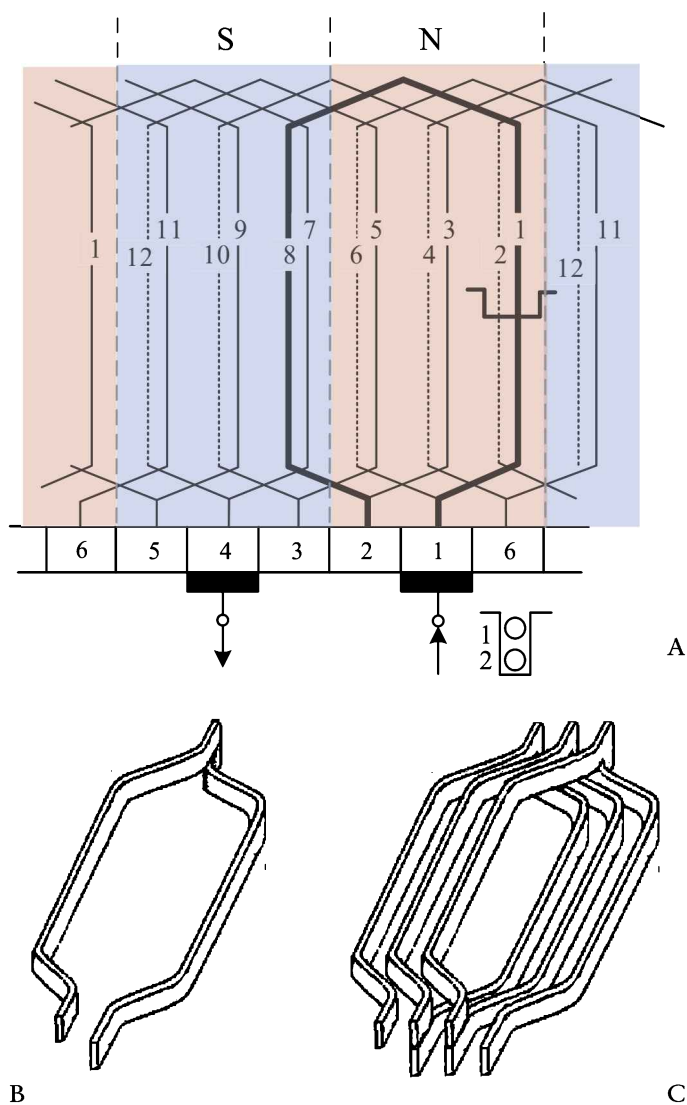
Si riportano nel seguito alcune indicazioni minimali sulla realizzazione degli avvolgimenti rotorici delle macchine in corrente continua. Come già sottolineato nei paragrafi precedenti infatti, l'avvolgimento ad anello di Pacinotti presenta alcuni difetti sostanziali.

- La parte attiva dell'avvolgimento è solo quella esterna e le connessioni interne servono solo di collegamento tra i conduttori frontali. Vi è quindi un notevole dispendio di materiale
- Il traferro risulta ampio perché l'avvolgimento non risulta disposto in cave.
- Un avvolgimento toroidale è di difficile realizzazione pratica.



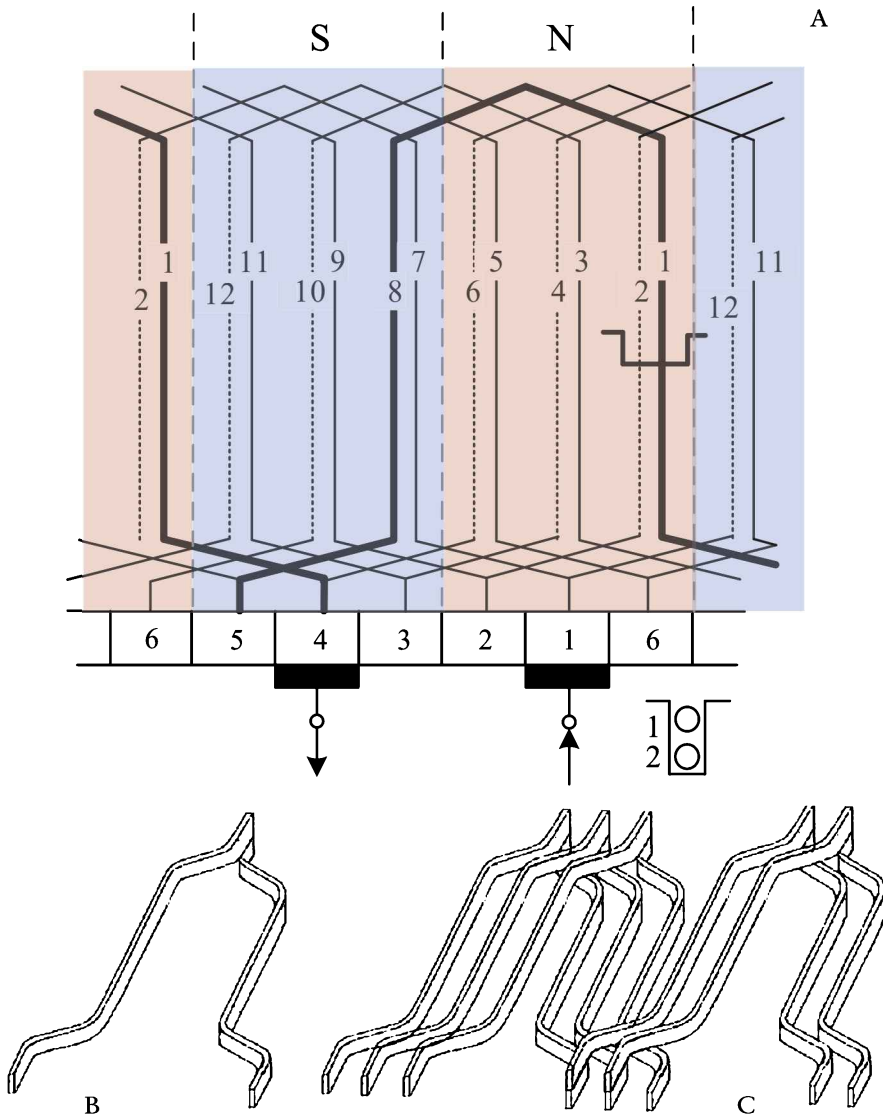
■ Fig. 6.28 Esempio di struttura dei poli principali. a) con avvolgimenti compensatori, b) senza avvolgimenti compensatori





■ Fig 6.29 Avvolgimento a tamburo embricato parallelo semplice: a) struttura; b) elemento base (a sbarre); c) realizzazione

Per superare questi difetti, la tipologia attualmente più diffusa per la realizzazione degli avvolgimenti rotorici è quella a **tamburo a doppio strato** (Fig. 6.6). Tale avvolgimento presenta solitamente due conduttori in ogni cava rotorica e le connessioni sono tutte frontali. L'avvolgimento a tamburo può essere realizzato in molti modi, ma le modalità principali per i collegamenti tra conduttori e le lamelle del collettore sono essenzialmente due: **embricato** (Fig. 6.29) e **ondulato** (Fig. 6.30). L'avvolgimento può essere realizzato con matasse o con sbarre.



■ Fig 6.30 Avvolgimento a tamburo ondulato serie: a) struttura; b) elemento base (a sbarre); c) realizzazione

## 6.8 ESERCIZI

### Esercizio 1

Sia data una macchina in corrente continua a eccitazione indipendente funzionante da motore caratterizzata dai seguenti dati:

Potenza nominale:  $P_n = 20$  [kW]

Tensione nominale di armatura:  $V_{an} = 220$  [V]

Resistenza di armatura per unità:  $r_a = 0.035$

Velocità nominale:  $\Omega_n = 1800$  [rpm]

Tensione di eccitazione nominale:  $V_{eccn} = 170$  [V]

Corrente di eccitazione nominale:  $i_{eccn} = 5$  [A]

Il motore è collegato ad un carico meccanico che richiede una coppia di carico  $T_r = 70$  [Nm] ad una velocità pari a  $\Omega_r = 1500$  [rpm]. Ipotizzando che la macchina venga eccitata con tensione pari alla nominale, determinare la tensione di armatura, la corrente di armatura, il rendimento nominale.

### Esercizio 2

Sia dato un generatore in Corrente continua ad eccitazione indipendente caratterizzato dai seguenti dati:

Potenza nominale  $P_n = 20$  [kW]

Tensione di armatura nominale  $V_{an} = 400$  [V]

Resistenza di armatura percentuale  $r_{a\%} = 2\%$

Velocità nominale  $\Omega_n = 1500$  [rpm]

Tensione di eccitazione nominale  $V_{eccn} = 200$  [V]

Corrente di eccitazione nominale  $I_{eccn} = 1$  [A]

Il generatore alimenta un carico di resistenza  $R_l$  pari a  $10$  [ $\Omega$ ] a tensione pari alla nominale  $V_l = 400$  [V]. Si determini la coppia che il motore primo deve fornire considerando la presenza di una coppia di attrito meccanica con espressione  $T_{att} = B \Omega_r$ , con  $B = 0.025$  [Nm/s], il rendimento nelle condizioni di carico specificate e il rendimento nominale. Si consideri il generatore eccitato in condizioni nominali.

### Esercizio 3

Sia dato un generatore in corrente continua a eccitazione indipendente caratterizzato dai seguenti dati:

Potenza nominale:  $P_{n\_gen} = 50$  [kW]

Tensione di armatura nominale:  $V_{an\_gen} = 500$  [V]

Resistenza di armatura percentuale:  $r_{a\%\_gen} = 2.5\%$

Velocità nominale:  $\Omega_{n\_gen} = 1500$  [rpm]

Tensione di eccitazione nominale:  $V_{eccn\_gen} = 200$  [V]

Corrente di eccitazione nominale:  $I_{eccn\_gen} = 2$  [A]

Il generatore alimenta un carico caratterizzato dai seguenti dati:  $R_l = 10$  [ $\Omega$ ] ad una tensione pari a  $V_l = 500$  [V]. Il generatore è mosso da un motore in corrente continua a eccitazione indipendente caratterizzato dai seguenti dati:

Potenza nominale:  $P_{n\_mot} = 80$  [kW]

Tensione di armatura nominale:  $V_{an\_mot} = 200$  [V]

Resistenza di armatura percentuale:  $r_{a\%\_mot} = 3\%$

Velocità nominale:  $\Omega_{n\_mot} = 1500$  [rpm]

Tensione di eccitazione nominale:  $V_{eccn\_mot} = 200$  [V]

Corrente di eccitazione nominale:  $I_{eccn\_mot} = 2.5$  [A]

Si determinino la tensione di alimentazione del motore in modo che il carico si alimenti nelle condizioni indicate e il rendimento dell'intero sistema, ipotizzando le condizioni di eccitazione del generatore e del motore nominali e la presenza di una coppia di attrito meccanica con espressione  $T_{att} = B \Omega_r$ , con  $B = 0.025$  [Nm/s]

#### Esercizio 4

Sia dato un motore in corrente continua a eccitazione indipendente caratterizzato dai seguenti dati:

Potenza nominale:  $P_{n\_mot} = 10$  [kW]

Tensione di armatura nominale:  $V_{an\_mot} = 200$  [V]

Resistenza di armatura percentuale  $r_{a\%\_mot} = 2\%$

Velocità nominale  $\Omega_{n\_mot} = 1500$  [rpm]

Tensione di eccitazione nominale  $V_{eccn\_mot} = 200$  [V]

Corrente di eccitazione nominale  $I_{eccn\_mot} = 1$  [A]

Il motore muove un carico meccanico di potenza nominale pari a  $P_l = 5$  [kW] ad una velocità pari a  $\Omega_l = 100$  [rad/s]. Il motore è alimentato da un generatore in corrente continua a eccitazione indipendente caratterizzato dai seguenti dati:

Potenza nominale:  $P_{n\_gen} = 16$  [kW]

Tensione di armatura nominale:  $V_{an\_gen} = 200$  [V]

Resistenza di armatura  $R_{a\_gen} = 100$  [m $\Omega$ ]

Velocità nominale:  $\Omega_{n\_gen} = 1500$  [rpm]

Tensione di eccitazione nominale  $V_{eccn\_gen} = 48$  [V]

Corrente di eccitazione nominale  $I_{eccn\_gen} = 5$  [A]

Si determinino la coppia e la velocità di rotazione che il motore primo accoppiato con il generatore deve avere affinché il carico meccanico sia alimentato nelle sue condizioni nominali ipotizzando la presenza di una coppia di attrito meccanico con espressione  $T_{att} = B \Omega_r$ , con  $B = 0.025$  [Nms]. Si consideri sia il motore che il generatore eccitati nelle condizioni nominali, calcolare il rendimento dell'intero sistema.



## MACCHINE ROTANTI IN CORRENTE ALTERNATA: GENERALITÀ

La diffusione dell'energia elettrica alla fine dell'ottocento grazie alla dinamo e alla lampadina ad incandescenza fece sorgere fin da subito un problema inaspettato: la necessità di indipendenza delle tensioni di generazione da quelle di trasmissione ed utilizzazione dell'energia.

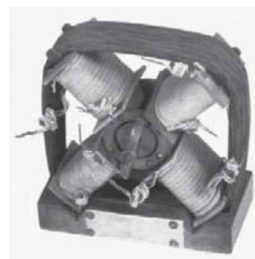
Questo perché le tensioni di generazione devono rimanere contenute ai fini di ottimizzare il dimensionamento delle macchine, quelle di utilizzazione sono limitate per motivi di sicurezza, mentre quelle di trasmissione dovrebbero essere le più alte possibile per contenere le perdite joule di linea. In corrente continua tale operazione era praticamente impossibile all'epoca se non ricorrendo a complicate configurazioni circuitali, mentre è estremamente facile in corrente alternata grazie al trasformatore come è stato sottolineato nei precedenti capitoli. La messa a punto del trasformatore e il fatto che i generatori producessero spontaneamente corrente alternata furono quindi le carte vincenti del sistema in alternata e il processo di passaggio dai sistemi in continua ai sistemi in alternata fu così rapido che le compagnie ancora impegnate nel sistema Edison in continua si trovarono, in pochi anni, a dover abbandonare completamente tale tecnologia e a dover rifinanziare gli impianti.

In questo senso, se Goulard e Gibbs ebbero il merito di costruire il primo trasformatore utilizzabile industrialmente, sicuramente una grossa spinta all'utilizzo della corrente alternata giunse dagli studi di Galileo Ferraris che, mutuando le idee dei suoi studi di ottica, arrivò alla conclusione che due campi magnetici sovrapposti di pari ampiezza e frequenza tra loro in quadratura producono gli stessi effetti di un magnete posto in rotazione.

In questo capitolo saranno introdotti i concetti base che si utilizzeranno per la modellazione delle macchine in corrente alternata e gli aspetti teorici riguardanti la generazione del campo magnetico rotante come introdotto da Galileo Ferraris.



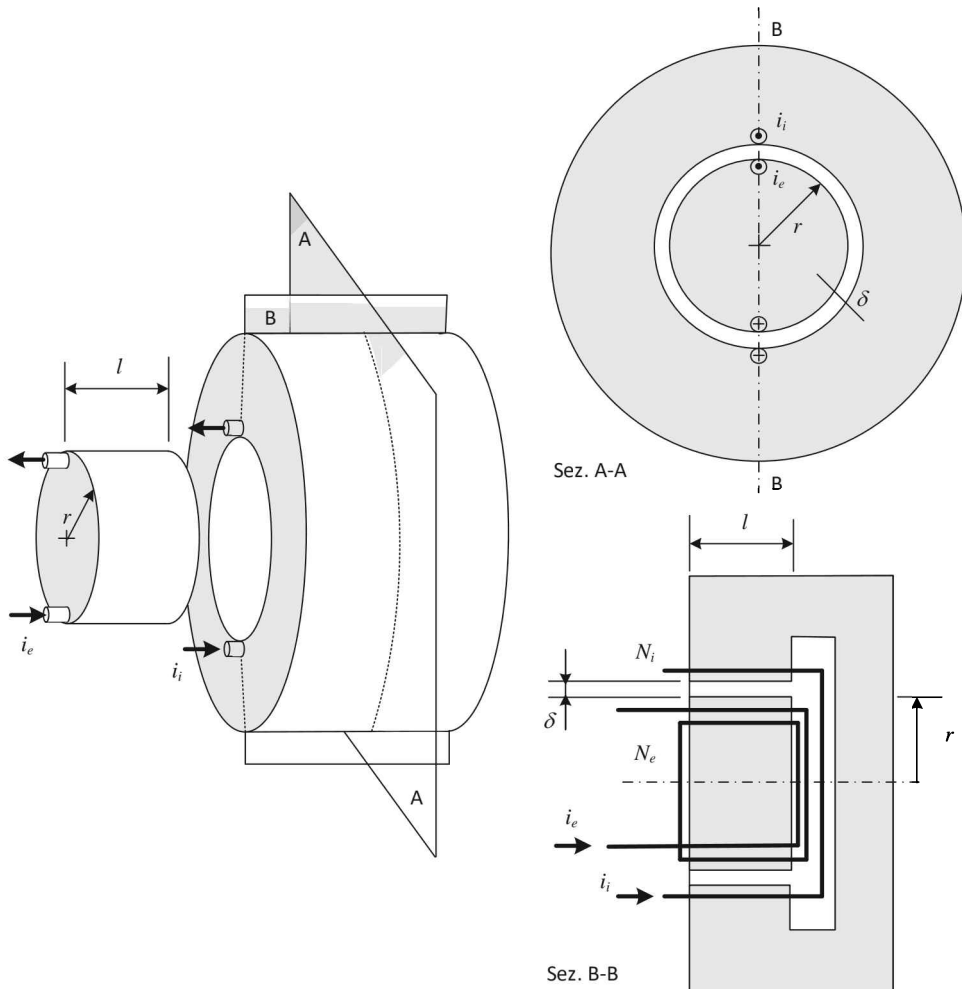
■ Galileo Ferraris  
(1847-1897)



■ Uno dei primi motori  
realizzati da G.Ferraris

## 7.1 ELETTRIMAGNETI ELEMENTARI

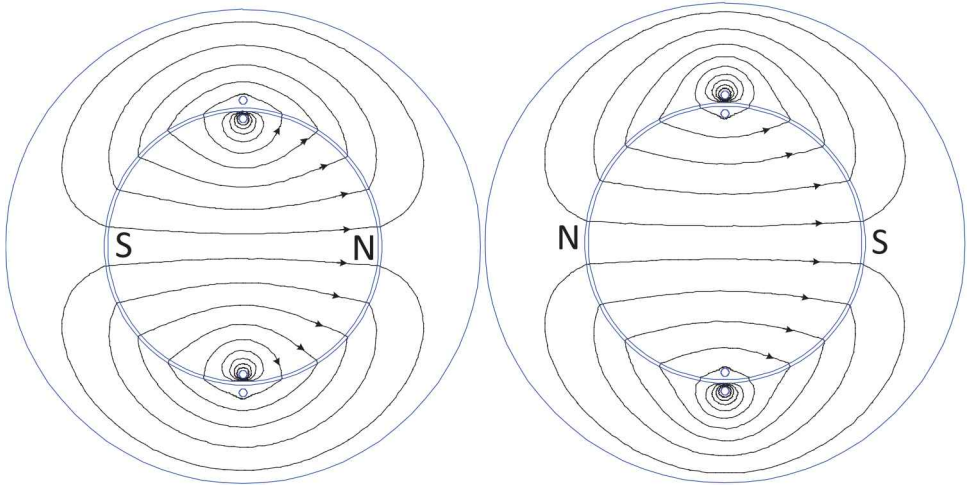
Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 7.1 costituito da una struttura esterna in materiale ferromagnetico nella quale è inserita una bobina diametrale di  $N_i$  spire percorsa da una corrente  $i_i$  e da una struttura interna sempre in materiale ferromagnetico nella quale è inserita una bobina diametrale di  $N_e$  spire percorsa da una corrente  $i_e$ . Tale struttura costituisce un **giunto elettromagnetico** in quanto consentirà di trasferire coppia dalla struttura esterna a quella interna e viceversa, utilizzando i fenomeni elettromagnetici



■ Fig. 7.1 Giunto elettromagnetico elementare



La scelta dei pedici  $i$  ed  $e$  è legata alla disposizione tipica degli avvolgimenti che si risconterà nel seguito nelle macchine elettriche trifase in cui l'avvolgimento di eccitazione (o induttore) è posto sul rotore interno alla macchina e l'avvolgimento di indotto sullo statore esterno.



■ Fig. 7.2 Andamento dei campi di induzione magnetica e poli nel caso di alimentazione della sola bobina interna e della sola bobina esterna.

Per studiare l'interazione tra il campo prodotto dalla bobina interna e quello prodotto dalla bobina esterna (Fig. 7.2) si considererà il circuito magnetico lineare e quindi si potrà procedere per sovrapposizione degli effetti. Si alimenti dunque una delle due bobine (per comodità si farà riferimento alla bobina di eccitazione interna) e si voglia calcolare il campo di induzione  $B$ .

Integrando lungo una linea di forza del campo magnetico valgono le relazioni (7.1). Nell'ipotesi di considerare la permeabilità del ferro molto elevata è possibile considerare l'approssimazione (7.2) dove l'integrale è eseguito solo al traferro (la presenza del 2 è legata al fatto che ogni linea di forza attraversa 2 volte il traferro di lunghezza  $\delta$ ).

$$\oint \vec{h} \cdot \vec{t} dl = \oint \frac{\vec{b}}{\mu} \cdot \vec{t} dl = \oint \frac{b}{\mu} dl = N_e i_e \quad (7.1)$$

$$\oint \frac{b}{\mu} dl \approx 2 \int_0^{\delta} \frac{b}{\mu_0} dl = N_e i_e \quad (7.2)$$

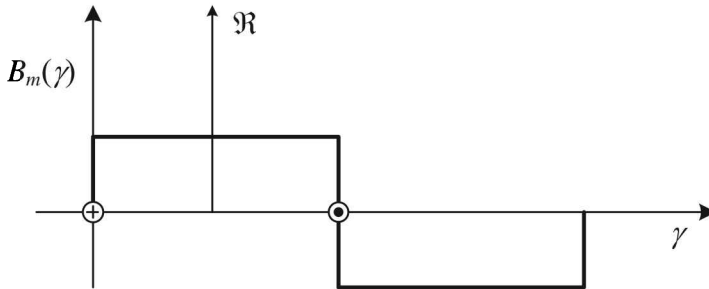
Dalla (7.2) è possibile ricavare il valore medio  $B_m$  dell'induzione come indicato nella (7.3).

$$B_m = \mu_0 \frac{N_e i_e}{2\delta} \quad (7.3)$$

Si consideri ora di voler esprimere l'andamento dell'induzione al traferro in funzione dell'angolo  $\gamma$ . Definendo un vettore  $\vec{n}$  normale diretto in direzione radiale è possibile esprimere l'andamento del vettore induzione media come indicato in (7.4).

$$\vec{b}_m = B_m(\gamma) \vec{n} \quad (7.4)$$

Dove  $B_m(\gamma)$  è una funzione a rettangoli incrociati della forma rappresentata in Fig. 7.3 dove si è indicato con  $\Re$  l'asse magnetico dell'avvolgimento (ortogonale al piano di giacitura della bobina).



■ Fig. 7.3. Andamento dell'induzione media al traferro

Nel seguito si farà riferimento esclusivamente alla prima armonica di questo campo di induzione, in quanto (come verrà poi dimostrato) è l'unica significativa per le trasformazioni energetiche. L'espressione della serie di Fourier del campo di induzione  $B_m(\gamma)$  assume quindi la forma indicata in (7.5) da cui la prima armonica (7.6) ricordando l'espressione di  $B_m$  (7.3).

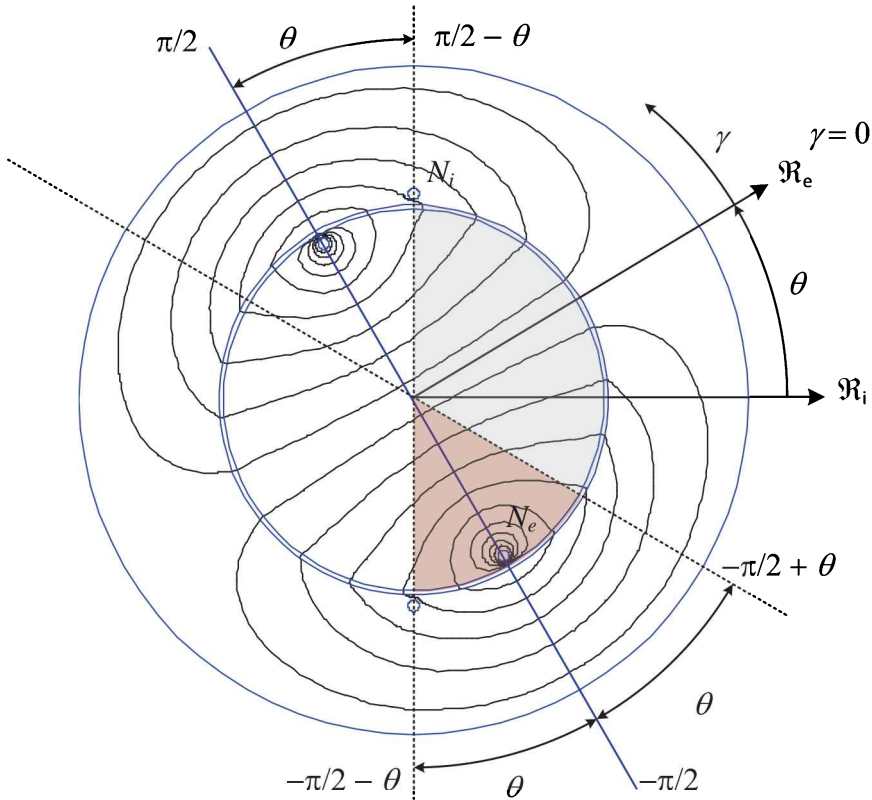
$$B_m(\gamma) = \frac{4}{\pi} B_m \left( \cos \gamma - \frac{1}{3} \cos 3\gamma + \frac{1}{5} \cos 5\gamma - \dots \right) \quad (7.5)$$

$$B(\gamma) = \frac{4}{\pi} \frac{N_e i_e}{2\delta} \mu_0 \cos \gamma \quad (7.6)$$

### 7.1.1 Calcolo delle auto e mutue induttanze

Il calcolo delle auto induttanze può essere effettuato usando la definizione come indicato in (7.7). D'altra parte per calcolare il flusso concatenato con la bobina stessa si deve procedere come indicato in (7.8), integrando tra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$  (con

riferimento al corrispettivo asse magnetico  $\mathfrak{R}$ ) la distribuzione di induzione media moltiplicata per il numero di spire. E quindi per l'avvolgimento esterno (indotto) si dovrà integrare l'induzione media  $B_i$  per il numero di spire  $N_i$ , mentre per quello interno (eccitazione), l'induzione media  $B_e$  per numero di spire  $N_e$ .



■ Fig. 7.4. Condizione di funzionamento con avvolgimento di eccitazione alimentato e sfasato di un angolo  $\theta$  rispetto all'avvolgimento di indotto

$$L_{ee} = \frac{\Psi_{ee}}{i_e} \Big|_{i_e=0} \qquad L_{ii} = \frac{\Psi_{ii}}{i_i} \Big|_{i_i=0} \qquad (7.7)$$

$$\Psi_{ee} = N_e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_e(\gamma) \underbrace{rl}_{dS} d\gamma \qquad \Psi_{ii} = N_i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_i(\gamma) rl d\gamma \qquad (7.8)$$

Sostituendo nelle (7.8) l'espressione ricavata in precedenza dell'induzione media (contributo di prima armonica) si ottengono le (7.9).

$$\begin{aligned}\psi_{ee} &= N_e \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4 N_e i_e}{\pi} \frac{1}{2\delta} \mu_0 \cos \gamma r l d\gamma = \\ &= \left[ \frac{4 N_e^2 i_e}{\pi} \frac{r l \mu_0}{2\delta} \sin \gamma \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4 N_e^2 i_e}{\pi} \frac{r l \mu_0}{\delta} [\mathcal{Z}] \quad (7.9) \\ \psi_{ii} &= \frac{4 N_i^2 i_i}{\pi} \frac{r l \mu_0}{\delta}\end{aligned}$$

Da cui l'espressione delle autoinduttanze assume la forma indicata nelle (7.10).

$$L_{ee} = \frac{4}{\pi} N_e^2 \mu_0 \frac{r l}{\delta} \quad L_{ii} = \frac{4}{\pi} N_i^2 \mu_0 \frac{r l}{\delta} \quad (7.10)$$

Per il calcolo delle mutue induttanze si ricorda che per la proprietà di reciprocità  $L_{ie} = L_{ei}$  e quindi per comodità si calcolerà la mutua induttanza tra eccitazione e indotto alimentando l'avvolgimento di eccitazione e valutandone gli effetti sull'indotto ( $L_{ie}$ ).

$$L_{ie} = \left. \frac{\psi_{ie}}{i_e} \right|_{i_i=0} = L_{ei} = \left. \frac{\psi_{ei}}{i_i} \right|_{i_e=0} \quad (7.11)$$

La configurazione di alimentazione è quindi quella rappresentata in Fig. 7.4. Poiché è alimentata la bobina di eccitazione (interna), la distribuzione di induzione al traferro (di prima armonica) coinciderà con  $B_e(\gamma)$ , con  $\gamma$  riferito all'asse  $\mathcal{R}_e$ . Tale asse risulta essere genericamente sfasato di un angolo  $\theta$  rispetto all'asse della bobina di indotto  $\mathcal{R}_i$ . Per il calcolo della mutua induttanza è quindi necessario calcolare il flusso concatenato con la bobina di indotto (esterna) che è generato dalla distribuzione di induzione  $B_e$ . Tale flusso di induzione magnetica sarà quello che attraversa la superficie rotorica della zona colorata di Fig. 7.4. In formule è possibile quindi scrivere la (7.12).

$$\psi_{ie} = N_i \int_{-\pi/2-\theta}^{\pi/2-\theta} B_e(\gamma) r l d\gamma \quad (7.12)$$

Ora, al fine di semplificare il calcolo dell'integrale, è possibile osservare che le linee di flusso di induzione comprese nell'arco tra  $-\pi/2-\theta$  e  $-\pi/2+\theta$  si richiudono attorno all'avvolgimento di eccitazione senza concatenare l'avvolgimento di indotto e quindi forniranno contributo nullo al flusso concatenato  $\psi_{ie}$ . L'integrale (7.12) può essere quindi ridotto al calcolo indicato in (7.13).

$$\psi_{ie} = N_i \int_{-\pi/2+\theta}^{\pi/2-\theta} B_e(\gamma) r l d\gamma \quad (7.13)$$

Da cui.

$$\begin{aligned}
 \psi_{ie} &= N_i \int_{-\pi/2+\theta}^{\pi/2-\theta} \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_e i_e}{2\delta} r l \cos \gamma \, d\gamma = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_i N_e i_e}{2\delta} r l [\sin \gamma]_{-\pi/2+\theta}^{\pi/2-\theta} = \\
 &= \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_i N_e i_e}{2\delta} r l \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) - \sin \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \right] = \\
 &= \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_i N_e i_e}{2\delta} r l [\cos \theta - (-\cos \theta)] = \\
 &= \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_i N_e i_e}{\delta} r l \cos \theta
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

L'induttanza assume dunque la forma indicata in (7.15).

$$L_{ie} = \frac{\psi_{ie}}{i_e} = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_i N_e}{\delta} r l \cos \theta \tag{7.15}$$

Nel caso in cui  $N_e = N_i$  le induttanze assumono la forma indicata in (7.16). Si noti come i due avvolgimenti non presentino accoppiamento magnetico quando si trovano ad un angolo relativo pari a  $\pi/2$ .

$$\begin{aligned}
 L_{ii} = L_{ee} &= \frac{4}{\pi} \mu_0 N^2 \frac{r l}{\delta} = L \\
 L_{ie} = L_{ei} &= \frac{4}{\pi} \mu_0 N^2 \frac{r l}{\delta} \cos \theta = L \cos \theta
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

### 7.1.2 Calcolo della coppia

Per il calcolo della coppia (forza) si ricorda che è possibile calcolarla, nel caso di correnti impresse in un sistema di induttori, come derivata della coenergia rispetto la coordinata meccanica di interesse come indicato in (7.17). Inoltre limitandosi al caso di induttori lineari (cioè induttori con un legame lineare tra flusso e corrente) l'energia e la coenergia coincidono come valori.

$$T = \frac{\partial W^*([i], \theta)}{\partial \theta} \tag{7.17}$$

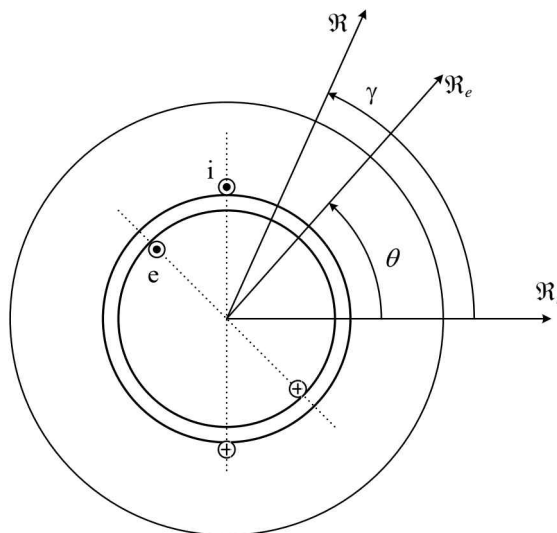
Nelle ipotesi quindi di un funzionamento non saturato del materiale ferromagnetico del sistema in esame, è possibile calcolare la coppia individuando l'energia (e quindi la coenergia) e poi derivando tale espressione rispetto la coordinata meccanica. Ricordando le espressioni ricavate nei precedenti capitoli si ha, a correnti imposte, l'espressione (7.18) della variazione infinitesima di energia (e quindi di coenergia).

$$W = \frac{1}{2} \psi i \rightarrow dW = \frac{1}{2} d\psi i = \frac{1}{2} N d\phi i \quad (7.18)$$

Considerando quindi il sistema elettromagnetico in esame è possibile calcolare l'espressione dell'energia come indicato in (7.19), ricordando le ipotesi che, essendo il traferro molto piccolo è possibile considerare in ogni punto un campo di induzione con intensità pari al valore medio e diretto radialmente. Questo consente di semplificare i conti considerando area e raggio medio al traferro e di trascurare i contributi del ferro essendo la permeabilità del circuito ferromagnetico molto più elevata di quella dell'aria.

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int \frac{1}{2} N i d\phi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} N i B_m \overbrace{r l}^{dS} d\gamma = \frac{1}{2} H^2 B_m r l \delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\gamma = \\ &= \frac{1}{2} \frac{B_m}{\mu_0} B_m 2r l \delta \left[ \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{B_m^2}{2\mu_0} 2\pi r \delta = \frac{B_m^2}{2\mu_0} V_0 \end{aligned} \quad (7.19)$$

L'energia può essere quindi calcolata come la pressione magnetica esistente al traferro per il volume del traferro  $V_0$ . Si consideri dunque la struttura di Fig. 7.5 in cui entrambe le bobine sono alimentate e sfasate di un angolo  $\theta$ . Si considerino ancora valide le ipotesi per cui sia possibile considerare solo i termini di prima armonica delle due distribuzioni di induzione e che il ferro sia lineare e con contributo trascurabile rispetto al contributo di induzione al traferro, in modo da poter sovrapporre gli effetti delle due distribuzioni di induzione.



■ Fig.7.5. Giunto elettromagnetico

L'espressione delle due distribuzioni, scelto come riferimento per  $\gamma = 0$  l'asse magnetico della bobina esterna (indotto), è riportato in (7.20).

$$\begin{aligned} B_i(\gamma) &= \frac{4}{\pi} \frac{N_i i_i}{2\delta} \mu_0 \cos(\gamma) = B_i \cos(\gamma) \\ B_e(\gamma) &= \frac{4}{\pi} \frac{N_e i_e}{2\delta} \mu_0 \cos(\gamma - \theta) = B_e \cos(\gamma - \theta) \end{aligned} \quad (7.20)$$

L'induzione totale al traferro si può quindi calcolare come somma delle due espressioni precedenti.

$$B(\gamma) = B_i(\gamma) + B_e(\gamma) = B_i \cos(\gamma) + B_e \cos(\gamma - \theta) \quad (7.21)$$

L'energia (e la coenergia) quindi possono essere calcolate come indicato in (7.22).

$$W^* = W = \int_{V_0} \frac{B(\gamma)^2}{2\mu_0} dV = \int_0^{2\pi} \frac{B(\gamma)^2}{2\mu_0} l dr d\gamma \quad (7.22)$$

Per semplificare il calcolo dell'integrale in (7.22), si ricorda che l'obiettivo di tale operazione è quello di calcolare la coppia come derivata della coenergia rispetto alla variabile  $\theta$  (spostamento meccanico) e quindi ci si limiterà ad evidenziare i termini variabili con tale variabile.

$$T = \frac{\partial W^*}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} \frac{(B_i \cos \gamma + B_e \cos(\gamma - \theta))^2}{2\mu_0} r l \delta d\gamma \quad (7.23)$$

Si può notare come al numeratore della (7.23) compaiano due termini  $\cos^2 \gamma$  integrati nell'intervallo  $[0, 2\pi]$  più il doppio prodotto. I termini  $\cos^2 \gamma$  integrati sul periodo sono costanti<sup>1</sup> ( $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi$ ) e quindi a derivata nulla. Rimane quindi da calcolare il contributo del doppio prodotto (7.24).

$$T = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} \frac{2B_i \cos \alpha B_e \cos(\gamma - \theta)}{2\mu_0} r l \delta d\gamma \quad (7.24)$$

Utilizzando le formule di Werner<sup>2</sup> per il prodotto del coseno di due angoli, è possibile manipolare l'espressione (7.24) come indicato in (7.25).

$$1 \quad \int \cos^2 x = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

$$2 \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$T = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{Z} B_e B_i \frac{1}{\cancel{Z}} (\cos(\theta) + \cos(2\gamma - \theta))}{2\mu_0} r l \delta d\gamma \quad (7.25)$$

Di nuovo il termine  $\cos 2\gamma$  integrato sul periodo ha valore costante (=0) e quindi derivata nulla. Rimane quindi da calcolare solo l'integrale indicato in (7.26)

$$T = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^{2\pi} \frac{B_e B_i \cos \theta}{2\mu_0} r l \delta d\gamma = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{B_e B_i \cos \theta}{2\mu_0} r l \delta [\gamma]_0^{2\pi} \right) \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{B_e B_i \cos \theta}{2\mu_0} \underbrace{r l \delta}_{V_0} 2\pi \right) = -\frac{B_e B_i}{2\mu_0} V_0 \sin \theta = \\ &= -\frac{\cancel{Z} \cancel{\pi} r l \cancel{\delta} \cancel{A} N_e i_e}{\cancel{Z} \mu_0 \cancel{\pi} \cancel{Z} \cancel{\delta} \cancel{\mu_0}} \frac{4 N_e i_e}{\pi \cancel{Z} \delta} \mu_0 \sin \theta = \\ &= -\frac{4}{\pi} \underbrace{\mu_0 r l \frac{N_e N_i}{\delta}}_{L_{ei}} i_e \sin \theta = -L_{ei} i_e \sin \theta \end{aligned} \quad (7.27)$$

Risolvendo l'integrale (7.26), si ottiene l'espressione (7.27) in cui è possibile evidenziare come la coppia che si sviluppa nella struttura in esame tenda ad allineare le due bobine (è infatti negativa) e sia massima quando le stesse si trovano in quadratura tra loro ( $\theta = \pi/2$ ).

## 7.2 FASORI SPAZIALI

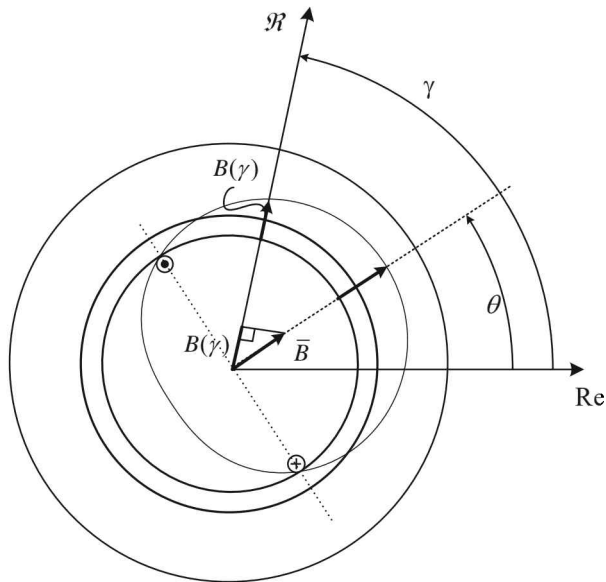
Avendo approssimato l'andamento spaziale del campo di induzione con la sua prima armonica, è possibile introdurre nello studio del sistema in esame un approccio simile a quanto viene fatto per le reti in regime alternato sinusoidale. Si consideri la funzione sinusoidale generica (7.28) funzione del tempo  $t$  e della coordinata spaziale  $\gamma$ .

$$F(t, \gamma) = f(t) \cos(\theta - \gamma) \quad (7.28)$$

È possibile rappresentare la funzione (7.28) come indicato in (7.29) dove il termine  $\bar{F}(t) = f(t)e^{j\theta}$  è il fasore spaziale rappresentativo di  $F(t, \gamma)$

$$F(t, \gamma) = \operatorname{Re}(f(t)e^{j(\theta - \gamma)}) = \operatorname{Re}(f(t)e^{j\theta}e^{-j\gamma}) = \operatorname{Re}(\bar{F}(t)e^{-j\gamma}) \quad (7.29)$$





■ Fig.7.6 Interpretazione geometrica del fasore spaziale

Nel caso del campo di induzione individuato nei paragrafi precedenti l'espressione si particolarizza come indicato in (7.31).

$$B(t, \gamma) = \frac{4}{\pi} \frac{Ni(t)}{2\delta} \mu_0 \cos(\theta - \gamma) = B_M(t) \cos(\theta - \gamma) \quad (7.30)$$

$$B(t, \gamma) = \text{Re}(B_M(t)e^{j\theta}e^{-j\gamma}) = \text{Re}(\bar{B}(t)e^{-j\gamma}) \quad (7.31)$$

Graficamente la relazione (7.31) si interpreta come indicato in Fig. 7.6: il valore del campo di induzione in una generica posizione  $\gamma$  si calcola come proiezione del fasore spaziale  $\bar{B}(t)$  (posizionato a  $\theta$ ) sul generico asse posizionato in  $\gamma$ . Nel seguito la proiezione di un fasore spaziale su un generico asse verrà indicata come indicato in (7.32).

$$\Re(\bar{B}(t)) = \text{Re}(\bar{B}(t)e^{-j\gamma}) \quad (7.32)$$

### 7.3 CAMPO MAGNETICO ROTANTE

La rappresentazione mediante fasori spaziali del campo di induzione al traferro consente anche di calcolare più velocemente gli effetti di più bobine. Tale approccio è ovviamente valido nell'ipotesi di considerare solo gli effetti al traferro (o comunque di considerare la macchina non saturata), dove è possibile calcolare l'induzione totale al traferro come indicato in (7.34).

$$\begin{aligned} B_i(t, \gamma) &= B_{Mi} \cos(\theta_i - \gamma) = \operatorname{Re}(\bar{B}_i(t)e^{-j\gamma}) \\ B_e(t, \gamma) &= B_{Me} \cos(\theta_e - \gamma) = \operatorname{Re}(\bar{B}_e(t)e^{-j\gamma}) \end{aligned} \quad (7.33)$$

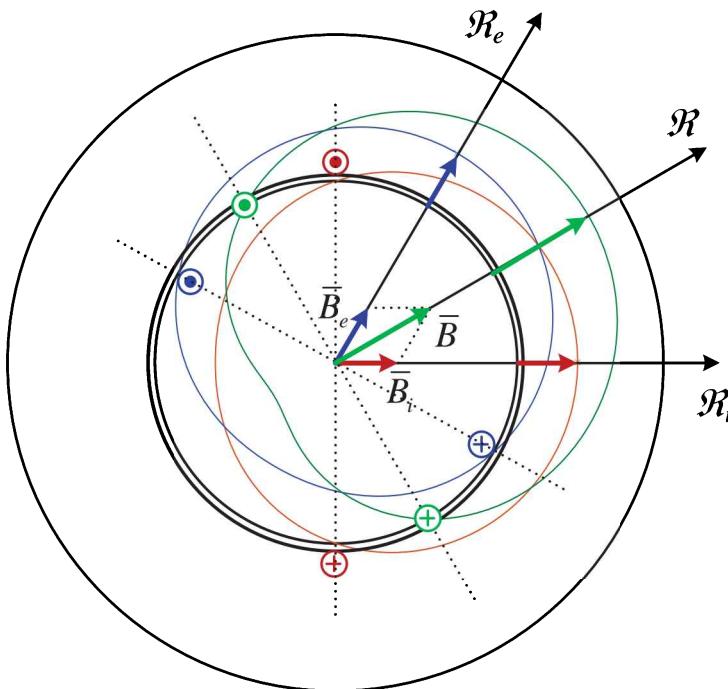
$$\begin{aligned} B(t, \gamma) &= B_i(t, \gamma) + B_e(t, \gamma) = \operatorname{Re}(\bar{B}_i(t)e^{-j\gamma}) + \operatorname{Re}(\bar{B}_e(t)e^{-j\gamma}) = \\ &= \operatorname{Re}(\bar{B}_i(t)e^{-j\gamma} + \bar{B}_e(t)e^{-j\gamma}) = \operatorname{Re}(\bar{B}(t)e^{-j\gamma}) \end{aligned} \quad (7.34)$$

La relazione tra i fasori rappresentativi dei campi di induzione è dunque la (7.35) che consente di operare rapidamente nel calcolo del campo totale.

$$\bar{B}(t) = \bar{B}_i(t) + \bar{B}_e(t) \quad (7.35)$$

La (7.35) può essere inoltre interpretata fisicamente considerando che ogni distribuzione di induzione è associata ad una bobina generatrice con asse magnetico coincidente con la posizione del fasore spaziale. Di conseguenza l'induzione somma  $\bar{B}(t)$  può anche essere interpretata anche come l'induzione prodotta da una opportuna corrente che percorre una bobina equivalente con asse magnetico coincidente con la posizione del fasore (Fig. 7.7)

Si consideri ora una struttura inserita nel cilindro esterno, costituita da tre bobine con assi magnetici sfasati tra loro di  $120^\circ$  ( $\frac{2}{3}\pi$ ) ognuna alimentata da una opportuna corrente (Fig. 7.8). Ogni bobina crea un campo di induzione al traferro come indicato nelle (7.36).



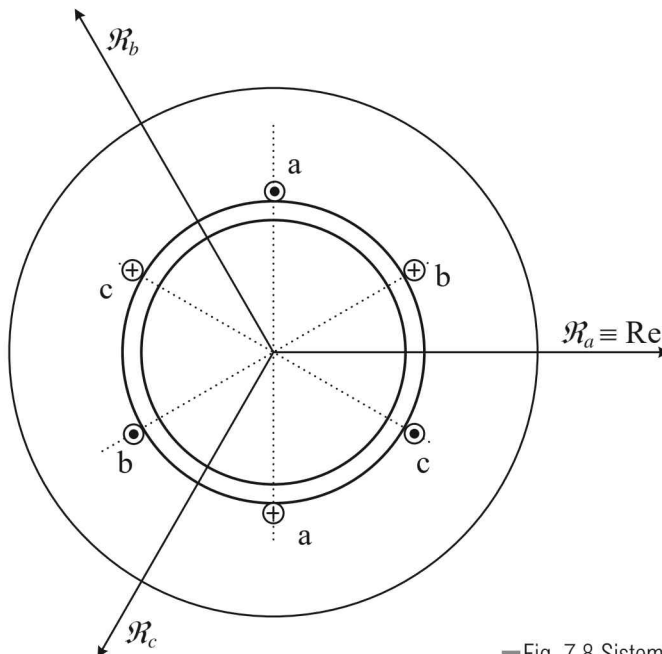
■ Fig. 7.7 Fasori induzione e bobine equivalenti

$$\begin{aligned}
 B_a(t, \gamma) &= \frac{4 N i_a}{\pi 2\delta} \mu_o \cos(\theta_a - \gamma) \\
 B_b(t, \gamma) &= \frac{4 N i_b}{\pi 2\delta} \mu_o \cos(\theta_b - \gamma) \\
 B_c(t, \gamma) &= \frac{4 N i_c}{\pi 2\delta} \mu_o \cos(\theta_c - \gamma)
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

Scelto come riferimento per l'asse reale l'asse magnetico della fase  $a$  è possibile esprimere le distribuzioni di induzioni in termine dei rispettivi fasori spaziali come indicato nelle (7.37).

$$\begin{aligned}
 B_a(t, \gamma) &= \operatorname{Re} \left( \frac{4 N}{\pi 2\delta} \mu_o i_a e^{j0} e^{-j\gamma} \right) \rightarrow \bar{B}_a = \frac{4 N}{\pi 2\delta} \mu_o i_a e^{j0} \\
 B_b(t, \gamma) &= \operatorname{Re} \left( \frac{4 N}{\pi 2\delta} \mu_o i_b e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j\gamma} \right) \rightarrow \bar{B}_b = \frac{4 N}{\pi 2\delta} \mu_o i_b e^{j\frac{2\pi}{3}} \\
 B_c(t, \gamma) &= \operatorname{Re} \left( \frac{4 N}{\pi 2\delta} \mu_o i_c e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j\gamma} \right) \rightarrow \bar{B}_c = \frac{4 N}{\pi 2\delta} \mu_o i_c e^{-j\frac{2\pi}{3}}
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Ora è possibile trovare la distribuzione totale al traferro sommando i tre fasori come indicato in (7.38) dove si è indicato con  $\alpha$  il numero complesso  $e^{j\frac{2\pi}{3}}$



■ Fig. 7.8 Sistema trifase di bobine

$$\begin{aligned}
 B(t, \gamma) &= \operatorname{Re}(\bar{B} e^{-j\gamma}) = \operatorname{Re}((\bar{B}_a + \bar{B}_b + \bar{B}_c) e^{-j\gamma}) = \\
 &= \operatorname{Re}\left(\frac{4}{\pi} \frac{N}{2\delta} \mu_0 (i_a + i_b \alpha + i_c \alpha^2) e^{-j\gamma}\right) \quad \alpha = e^{j\frac{2}{3}\pi} \quad (7.38)
 \end{aligned}$$

La relazione (7.38) è significativa in quanto si evidenzia il termine  $\bar{i}_N = i_a + i_b \alpha + i_c \alpha^2$  che prende il nome di **fasore spaziale naturale** di corrente.

Si può notare che la proiezione di tale fasore naturale sugli assi magnetici delle bobine forniscia (opportunamente scalato) il valore della corrente che le percorre. Per comodità, scegliendo l'asse reale coincidente con l'asse magnetico della bobina  $a$  si possono ottenere le (7.39).

$$\begin{aligned}
 \Re_a(\bar{i}_N) &= \operatorname{Re}(\bar{i}_N) = \operatorname{Re}\left(i_a + i_b e^{j\frac{2}{3}\pi} + i_c e^{-j\frac{2}{3}\pi}\right) = i_a + \frac{1}{2} \underbrace{(-i_b - i_c)}_{i_a} = \frac{3}{2} i_a \\
 \Re_b(\bar{i}_N) &= \operatorname{Re}(\bar{i}_N e^{-j\frac{2}{3}\pi}) = \operatorname{Re}\left(i_a e^{-j\frac{2}{3}\pi} + i_b + i_c e^{j\frac{2}{3}\pi}\right) = i_b + \frac{1}{2} \underbrace{(-i_a - i_c)}_{i_b} = \frac{3}{2} i_b \\
 \Re_c(\bar{i}_N) &= \operatorname{Re}(\bar{i}_N e^{j\frac{2}{3}\pi}) = \operatorname{Re}\left(i_a e^{j\frac{2}{3}\pi} + i_b e^{-j\frac{2}{3}\pi} + i_c\right) = i_c + \frac{1}{2} \underbrace{(-i_a - i_b)}_{i_c} = \frac{3}{2} i_c
 \end{aligned} \quad (7.39)$$

Se ora le tre correnti  $i_a, i_b, i_c$  sono una terna equilibrata di correnti a pulsazione  $\omega$ , la distribuzione di induzione sarà ancora sinusoidale, ma ruoterà a velocità  $\omega$ .

$$\begin{aligned}
 i_a &= I_M \cos(\omega t) \\
 i_b &= I_M \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 i_c &= I_M \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)
 \end{aligned} \quad (7.40)$$

Osservando la (7.38) si vede come per dimostrare questa proprietà sia sufficiente mostrare che alimentando sinusoidalmente le bobine il fasore spaziale corrente ruoti a velocità  $\omega$ . In condizioni di alimentazione equilibrate il fasore spaziale può essere calcolato come indicato in (7.41).

$$\bar{i}_N = I_M \cos(\omega t) + I_M \cos\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) e^{j\frac{2}{3}\pi} + I_M \cos\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right) e^{-j\frac{2}{3}\pi} \quad (7.41)$$

Utilizzando le formule di somma e sottrazione del coseno<sup>3</sup> è possibile ridurre la (7.41) nella forma più significativa (7.43).

$$\begin{aligned} \bar{i}_N = I_M \cos(\omega t) + \left( I_M \cos(\omega t) \cos \frac{2}{3} \pi + I_M \sin(\omega t) \sin \frac{2}{3} \pi \right) e^{j\frac{2}{3}\pi} + \\ + \left( I_M \cos(\omega t) \cos \frac{2}{3} \pi - I_M \sin(\omega t) \sin \frac{2}{3} \pi \right) e^{-j\frac{2}{3}\pi} \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\bar{i}_N = I_M \cos(\omega t) \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{2} e^{j\frac{2}{3}\pi} - \frac{1}{2} e^{-j\frac{2}{3}\pi} \right)}_{\frac{3}{2}} + I_M \sin(\omega t) \underbrace{\left( \frac{\sqrt{3}}{2} e^{j\frac{2}{3}\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-j\frac{2}{3}\pi} \right)}_{j\frac{3}{2}} \quad (7.43)$$

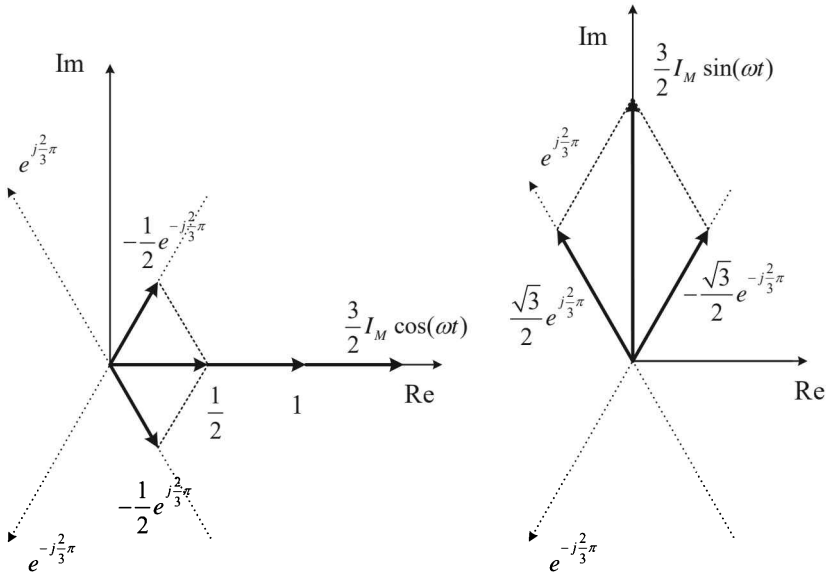
Dove i termini tra parentesi valgono rispettivamente  $\frac{3}{2}$  e  $j\frac{3}{2}$  come facilmente ricavabile in forma grafica (Fig. 7.9). Il fasore naturale presenta quindi la forma indicata in (7.44), con modulo pari a  $\frac{3}{2}I_M$  e velocità di rotazione pari a  $\omega$ .

$$\bar{i}_N = \frac{3}{2} I_M (\cos \omega t + j \sin \omega t) = \frac{3}{2} I_M e^{j\omega t} \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} B(t, \gamma) &= \operatorname{Re} \left( \frac{4}{\pi} \frac{N}{2\delta} \mu_0 \frac{3}{2} I_M (\cos \omega t + j \sin \omega t) e^{-j\gamma} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{4}{\pi} \frac{N}{2\delta} \mu_0 \frac{3}{2} I_M e^{j\omega t} e^{-j\gamma} \right) \end{aligned} \quad (7.45)$$

Rimane quindi dimostrato che la distribuzione di induzione al traferro prodotta da tre correnti sinusoidali equilibrate che percorrono tre bobine sfasate nello spazio di  $\frac{2}{3}\pi$  è una distribuzione sinusoidale con il massimo che ruota a velocità  $\omega$ . L'espressione (7.45) evidenzia anche un'ulteriore proprietà: la stessa distribuzione di induzione al traferro può essere ottenuta come sovrapposizione degli effetti di due bobine sfasate di  $\frac{\pi}{2}$  nello spazio percorse da due correnti di valore massimo  $\frac{3}{2}I_M$  sfasate di  $\frac{\pi}{2}$  nel tempo. Infatti in questa situazione si avrebbero le distribuzioni indicate in (7.46) e l'espressione finale (7.47) che coincide con la (7.45).

<sup>3</sup>  $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$   
 $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$



■ Fig. 7.9 Calcolo delle componenti reale e immaginaria del fasore naturale corrente

$$B(t, \gamma) = B_1(t, \gamma) + B_2(t, \gamma)$$

$$B_1(t, \gamma) = \operatorname{Re} \left( \frac{4}{\pi} \frac{N}{2\delta} \mu_0 \underbrace{\left( \frac{3}{2} I_M \cos \omega t \right)}_{i_1} e^{-j\gamma} \right)$$

$$B_2(t, \gamma) = \operatorname{Re} \left( \frac{4}{\pi} \frac{N}{2\delta} \mu_0 \underbrace{\left( \frac{3}{2} I_M \cos(\omega t - \pi/2) \right)}_{i_2} \underbrace{e^{j\pi/2}}_j e^{-j\gamma} \right) \quad (7.46)$$

$$= \operatorname{Re} \left( \frac{4}{\pi} \frac{N}{2\delta} \mu_0 \underbrace{\left( \frac{3}{2} I_M \sin \omega t \right)}_{i_2} j e^{-j\gamma} \right)$$

$$B(t, \gamma) = \operatorname{Re} \left( \frac{4}{\pi} \frac{N}{2\delta} \mu_0 \frac{3}{2} I_M (\cos \omega t + j \sin \omega t) e^{-j\gamma} \right) \quad (7.47)$$

La (7.45) evidenzia anche un'ulteriore proprietà significativa. Infatti la stessa distribuzione di induzione al traferro può essere ottenuta con una singola bobina posta in rotazione a velocità  $\omega$  e percorsa da corrente costante pari a  $\frac{3}{2} I_M$ .

Per comodità nel seguito si utilizzerà la **notazione razionale** per i fasori spaziali indicata in (7.48) dove  $I_M$  è il valore massimo delle correnti di fase e  $I$  il valore efficace.

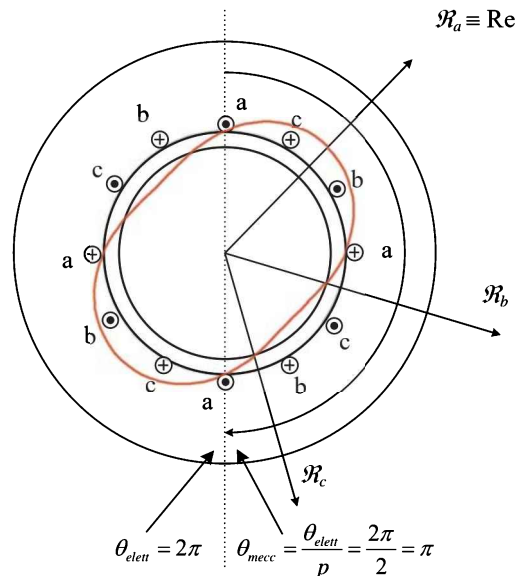
$$\bar{i} = \sqrt{\frac{2}{3}}(i_a + i_b\alpha + i_c\alpha^2) = \sqrt{\frac{3}{2}}I_M e^{j\omega t} = \sqrt{3}I e^{j\omega t} \quad (7.48)$$

In questo caso per ottenere il valore della corrente circolante nelle bobine come proiezione, sarà sufficiente moltiplicare la proiezione ancora per  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  come indicato in (7.49)

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{\frac{2}{3}}\Re_a(\bar{i}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\Re(\bar{i}) \\ i_b &= \sqrt{\frac{2}{3}}\Re_b(\bar{i}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\Re\left(\bar{i} e^{-j\frac{2}{3}\pi}\right) \\ i_c &= \sqrt{\frac{2}{3}}\Re_c(\bar{i}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\Re\left(\bar{i} e^{j\frac{2}{3}\pi}\right) \end{aligned} \quad (7.49)$$

## 7.4 STRUTTURE MULTIPOLARI

Le considerazioni fin qui fatte si riferiscono a strutture magnetiche a due poli. È però possibile replicare la struttura trifase precedente lungo la periferia della macchina ottenendo una struttura a più poli come indicato ad esempio in Fig. 7.10 dove è riportata la struttura statorica nel caso di macchina a 4 poli (2 paia poli). In questo caso i fasori definiti in precedenza descrivono il campo elettromagnetico in corrispondenza di ognuna delle  $p$  paia poli e gli angoli che compaiono nelle relazioni assumono il valore  $2\pi$  in corrispondenza dell'arco di periferia occupato dalla coppia di poli pari a  $\frac{2\pi}{p}$ .



■ Fig. 7.10 Struttura macchina a 4 poli (2 coppie polari) e andamento del campo al traferro (fase a)

Solitamente è prassi definire **angoli elettrici** gli angoli riferiti alla macchina a due poli e **angoli meccanici** gli angoli riferiti alla posizione effettiva sulla periferia della macchina. È evidente che la relazione tra i due angoli è quella indicata in (7.50).

$$\theta_{mecc} = \frac{\theta_{elett}}{p} \quad (7.50)$$

## 7.5 STRUTTURA DEGLI AVVOLGIMENTI TRIFASE



■ Fig. 7.11 Esempio di struttura statorica trifase con avvolgimenti distribuiti

Solitamente la struttura statorica delle macchine elettriche anche se funzionalmente si può rappresentare con tre bobine distinte è costituita da avvolgimenti distribuiti lungo tutta la struttura di statore come indicato in Fig 7.11

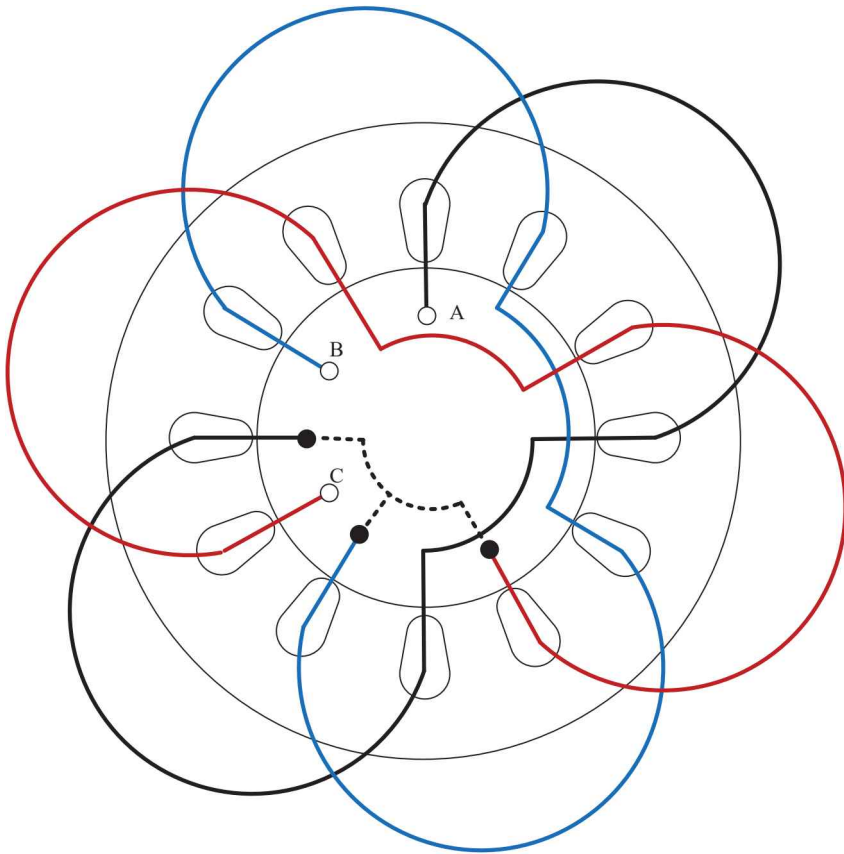
La struttura statorica presenta quindi una forma a cave in cui sono inserite opportunamente le bobine (Fig 7.12). In Fig. 7.13 è rappresentato una possibile realizzazione di un avvolgimento trifase a 4 poli, 1 cava per polo per fase.



■ Fig 7.12 Pacco lamierini statorici

Le realizzazioni degli avvolgimenti trifase possono essere estremamente varie, ma dal punto di vista dell'analisi del funzionamento e per l'identificazione dei modelli si potrà sempre far riferimento ad una struttura a 2 poli con tre bobine sfasate di  $120^\circ$  tra loro.





■ Fig. 7.13. Schema avvolgimento trifase a 4 poli 1 cava per polo per fase



I generatori elettrici nascono naturalmente come dei generatori di tensione alternata, anche se agli inizi dello sviluppo delle applicazioni elettriche, data l'abitudine alla pila di Volta, si cercò di "correggere" questo naturale comportamento insito nella legge di Faraday, dotandoli, con Ampère, di un commutatore a lamelle che aveva il compito di rendere unidirezionale la tensione ai morsetti. Inoltre, per le prime realizzazioni di illuminazione elettrica, si preferì assolutamente la continua anche se già alcuni esperimenti avevano mostrato che le lampade potevano essere tranquillamente alimentate in alternata.

Alla fine dell'ottocento quindi, le opinioni a riguardo erano discordanti tra l'uso di sistemi in alternata o l'uso di sistemi in continua. Tra gli autorevoli sostenitori dei due sistemi c'erano: Ferranti e Thompson in Inghilterra, Steinmetz, Westinghouse e Tesla negli Stati Uniti per i sistemi in alternata, e Kelvin e Hopkinson in Inghilterra e Edison negli Stati Uniti per i sistemi in continua. Le armi impiegate in quegli anni a sostegno dell'uno o dell'altro sistema furono anche le più inusuali. Ad esempio un collaboratore di Edison, dopo che gli alternatori Westinghouse furono proposti per l'alimentazione delle sedie elettriche, ricorse a tale risultato come argomento a favore della generazione continua contro la pericolosità dell'alternata.

Ben presto però la necessità di disporre di un trasporto economico in alta tensione cominciò a far prevalere l'alternata sui sistemi in continua. Tutto questo si concluse sostanzialmente nel 1891 con la realizzazione, per merito di C. Brown e M. Dobrovolsky, di un sistema trifase di generazione, trasporto (per 175 km da Lauffen a Francoforte, la più lunga distanza mai raggiunta fino ad allora) e utilizzazione



■ Charles E.L. Brown  
(1863-1924)



■ Mikhail Dolivo-Dobrovolsky  
(1862-1919)



■ Il generatore sincrono trifase di Brown-Dobrovolsky (Deutsches museum)

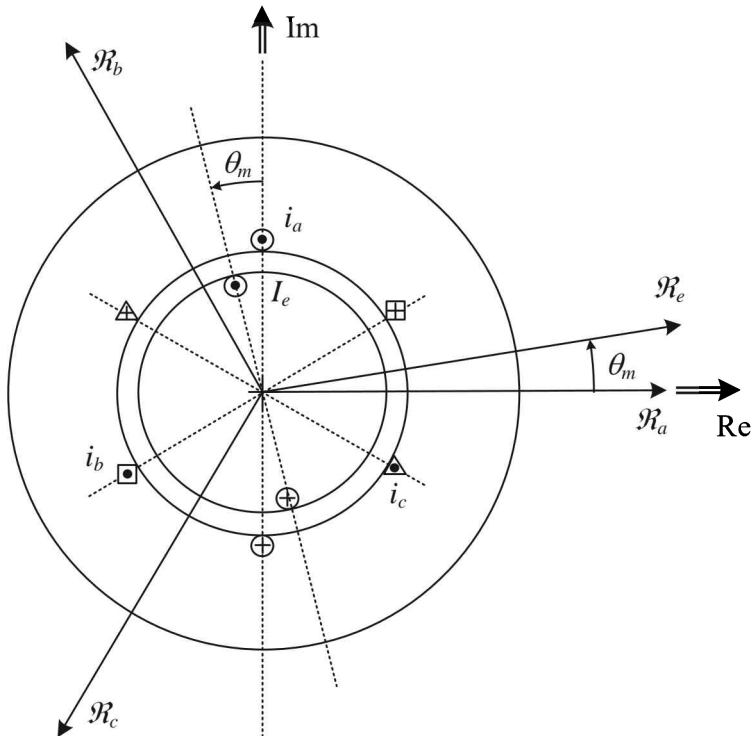
dell'energia elettrica per l'Esposizione Elettrotecnica di Francoforte che evidenziò, senza discussioni, quale fosse ormai il sistema più adatto per le applicazioni elettriche.

## 8.1 MACCHINA SINCRONA ISOTROPA

Si consideri il sistema rappresentato in Fig. 8.1 costituito da una struttura esterna statorica in materiale ferromagnetico nella quale siano inserite tre bobine diametrali di egual numero di spire e con assi magnetici ordinatamente sfasati nello spazio di  $120^\circ$ , e una struttura interna rotorica costituita da una bobina diametrale percorsa da una corrente continua  $I_e$ .

Alimentando le tre bobine di statore con tre correnti sinusoidali equilibrate si genera (come dimostrato nel Capitolo 7) un campo rotante rappresentabile con il fasore spaziale razionale di corrente indicato in (8.1), dove  $I_M$  è il valore massimo delle correnti di statore e  $\omega$  la loro pulsazione.

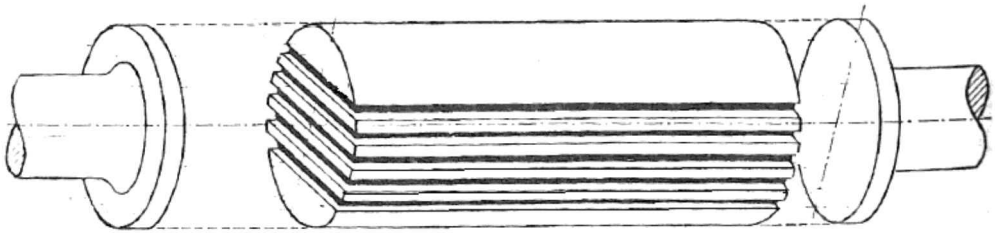
$$\bar{i}_s = \sqrt{\frac{2}{3}} (i_a + \alpha i_b + \alpha^2 i_c) = \sqrt{\frac{3}{2}} I_M e^{j\omega t} \quad (8.1)$$



■ Fig. 8.1 Struttura della macchina sincrona isotropa

È possibile analogamente definire un fasore spaziale corrente anche per la bobina rotorica come indicato in (8.2) (con riferimento all'asse reale coincidente con l'asse della bobina della fase  $a$  statorica). Definizione ottenuta ricordando che la proiezione del fasore spaziale sull'asse della bobina moltiplicata per  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  deve fornire il valore della corrente  $I_e$  (continua) circolante nella bobina. Per una generica posizione  $\theta_m$  del rotore si avrà quindi la relazione (8.2).

$$I_e = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re_e(\bar{i}_e) \rightarrow \bar{i}_e = \sqrt{\frac{3}{2}} I_e e^{j\theta_m} \quad (8.2)$$

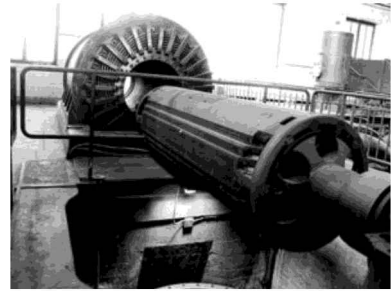


■ Fig. 8.3. Struttura di un rotore liscio (isotropo) a due poli

Le relazioni tra le tensioni di fase  $v_a, v_b, v_c$ , le rispettive correnti di fase  $i_a, i_b, i_c$  e la corrente di eccitazione  $I_e$  della macchina possono essere scritte come equazioni differenziali nel tempo, come indicato in (8.3) dove i termini induttivi statorici sono già stati portati fuori dal segno di derivazione in quanto la macchina, essendo isotropa, non cambia configurazione (e quindi valore delle induttanze) durante il funzionamento. Come sempre si considera un comportamento del ferro lineare e in prima approssimazione si ritengono trascurabili le resistenze di statore ( $R_s = 0$ ).

$$\begin{aligned} v_a &= L_{aa} \frac{di_a}{dt} + L_{ab} \frac{di_b}{dt} + L_{ac} \frac{di_c}{dt} + \frac{d}{dt} (L_{ae} i_e) \\ v_b &= L_{bb} \frac{di_b}{dt} + L_{ab} \frac{di_b}{dt} + L_{bc} \frac{di_c}{dt} + \frac{d}{dt} (L_{be} i_e) \\ v_c &= L_{cc} \frac{di_c}{dt} + L_{bc} \frac{di_b}{dt} + L_{ac} \frac{di_c}{dt} + \frac{d}{dt} (L_{ce} i_e) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Considerando le relazioni per il calcolo delle mutue induttanze tra bobine diametrali già ricavate per gli elettromagneti elementari nel giunto elettromagnetico,



■ Fig. 8.2. Turboalternatore sincrono isotropo Ganz del 1923 (da Wikimedia Commons)

trascurando i flussi che attraversano solo parzialmente il traferro e considerando il medesimo numero di spire per le bobine, è possibile ricavare le relazioni indicate in (8.4).

$$\begin{aligned} L_{aa} &= L_{bb} = L_{cc} = L \\ L_{ab} &= L_{bc} = L_{ca} = L \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{L}{2} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Per quanto riguarda invece il termine legato alla corrente di eccitazione è possibile ricavare nel medesimo modo le relazioni (8.5) considerando un sistema di riferimento con asse reale coincidente con l'asse della bobina  $a$  e uno sfasamento generico  $\theta_m$  del rotore.

$$\begin{aligned} L_{ae} &= L_f \cos\theta_m \\ L_{be} &= L_f \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) \\ L_{ce} &= L_f \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Le relazioni (8.3) assumono quindi la forma indicata in (8.6) e possono essere ulteriormente elaborate ricordando che  $i_a + i_b + i_c = 0$  ottenendo le (8.7).

$$\begin{aligned} v_a &= L \frac{di_a}{dt} + \frac{L}{2} \frac{d}{dt} \underbrace{(-i_b - i_c)}_{i_a} + \frac{d}{dt} (L_f \cos\theta_m I_e) \\ v_b &= L \frac{di_b}{dt} + \frac{L}{2} \frac{d}{dt} \underbrace{(-i_a - i_c)}_{i_b} + \frac{d}{dt} \left( L_f \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) I_e \right) \\ v_c &= L \frac{di_c}{dt} + \frac{L}{2} \frac{d}{dt} \underbrace{(-i_a - i_b)}_{i_c} + \frac{d}{dt} \left( L_f \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) I_e \right) \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{3}{2} L \frac{di_a}{dt} + \frac{d}{dt} (L_f \cos\theta_m I_e) \\ v_b &= \frac{3}{2} L \frac{di_b}{dt} + \frac{d}{dt} \left( L_f \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) I_e \right) \\ v_c &= \frac{3}{2} L \frac{di_c}{dt} + \frac{d}{dt} \left( L_f \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) I_e \right) \end{aligned} \quad (8.7)$$

Ora, moltiplicando la seconda equazione per  $\alpha$ , la terza per  $\alpha^2$  e poi sommandole tra loro moltiplicate per  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  si possono ottenere le relazioni (8.9). Definendo il **vettore spaziale razionale tensione di statore**  $\bar{v}_s$  come in dicato in (8.8), è possibile ottenere la relazione tra i fasori spaziali indicata in (8.13). I passaggi per ottenere tale relazione sono esplicitati nelle (8.9)-(8.12).

$$\bar{v}_s = \sqrt{\frac{2}{3}}(v_a + \alpha v_b + \alpha^2 v_c) \quad (8.8)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} v_a = \frac{3}{2}L \frac{di_a}{dt} + \frac{d}{dt}(L_f \cos \theta_m I_e) \\ + \\ \alpha v_b = \frac{3}{2}L \frac{di_b}{dt} \alpha + \frac{d}{dt} \left( L_f \cos \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) I_e \right) \alpha \\ + \\ \alpha^2 v_c = \frac{3}{2}L \frac{di_c}{dt} \alpha^2 + \frac{d}{dt} \left( L_f \cos \left( \theta_m + \frac{2}{3}\pi \right) I_e \right) \alpha^2 \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} \overbrace{\sqrt{\frac{2}{3}}(v_a + \alpha v_b + \alpha^2 v_c)}^{\bar{v}_s} &= \frac{3}{2}L \frac{d}{dt} \overbrace{\sqrt{\frac{2}{3}}(i_a + \alpha i_b + \alpha^2 i_c)}^{\bar{i}} + \dots \\ &\dots + L_f \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d}{dt} \left( \left( \cos \theta_m + \cos \left( \theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \alpha + \cos \left( \theta_m + \frac{2}{3}\pi \right) \alpha^2 \right) I_e \right) \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_s &= \frac{3}{2}L \frac{d}{dt} \bar{i}_s + L_f \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d}{dt} \left( \overbrace{\cos(\theta_m) - \alpha \frac{1}{2} \cos(\theta_m) - \alpha^2 \frac{1}{2} \cos(\theta_m)}^{\frac{3}{2} \cos \theta_m} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \alpha \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}} \sin(\theta_m) - \alpha^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \sin(\theta_m)}_{j \frac{3}{2} \sin \theta_m} \right) I_e \end{aligned} \quad (8.11)$$



■ Hans Behn-Eschenburg  
(1864-1938)



■ Alfred Potier (1840-  
1905)

In particolare, per il termine di accoppiamento stato-rotore si può procedere in maniera analoga a quanto fatto per la dimostrazione del campo magnetico rotante, scomponendo con le formule di somma e sottrazione i termini in coseno presenti nella (8.11) e poi sommando tra loro i coseni e i seni ottenuti fino a ricavare la relazione (8.12).

$$\bar{v}_s = \frac{3}{2}L \frac{d}{dt} \bar{i}_s + L_f \frac{d}{dt} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{3}{2} (\cos \theta_m + j \sin \theta_m) I_e \right)}_{\sqrt{\frac{3}{2}} I_e e^{j\theta_m} = \bar{i}_e} \quad (8.12)$$

Il termine  $\frac{3}{2}L$  prende il nome di **induttanza sincrona** e viene indicato con  $L_s$ . La relazione tra i fasori è quindi possibile scriverla come indicato in (8.13). Si noti come la variabilità sul termine di eccitazione sia passata dalle induttanze al fasore corrente corrispondente ottenendo una relazione a coefficienti costanti.

$$\bar{v}_s = L_s \frac{d}{dt} \bar{i}_s + L_f \frac{d}{dt} \bar{i}_e \quad (8.13)$$

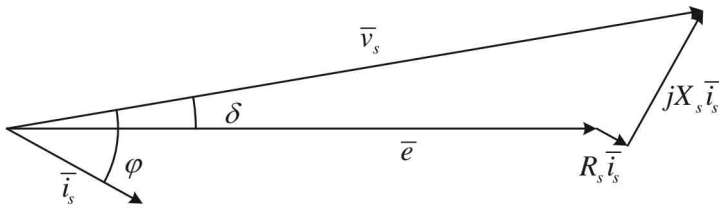
Considerando ora la macchina funzionante in condizioni di regime e con il rotore in moto a velocità angolare  $\omega$  sincrona alla pulsazione delle correnti di statore, e sfasato di un generico angolo  $\theta$  ( $\theta_m = \omega t + \theta$ ), si può ottenere l'equazione di regime (8.14), dove il termine di mutuo accoppiamento statore/rotore  $jL_f \bar{i}_e$  viene solitamente indicato come f.e.m indotta e non esplicitamente in funzione della corrente di eccitazione.

$$\bar{v}_s = j\omega L_s \bar{i}_s + j\omega L_f \bar{i}_e = jX_s \bar{i}_s + \bar{e} \quad (8.14)$$

Il diagramma fasoriale corrispondente all'equazione (8.15), riportato in Fig. 8.4, viene chiamato **costruzione della reattanza sincrona o di Behn-Eschemberg**. Per macchine isotrope, nel caso si tenesse conto della non linearità del ferro, si può ottenere una costruzione analoga che prende il nome di **diagramma o costruzione di Potier**. L'angolo  $\delta$  di Fig. 8.4 prende il nome di **angolo di carico**.

Nel seguito ci si limiterà però esclusivamente alla condizione di linearità del ferro perché risulta essere la più comune nel caso di analisi e studio delle macchine sincrone per applicazioni negli azionamenti elettrici industriali.





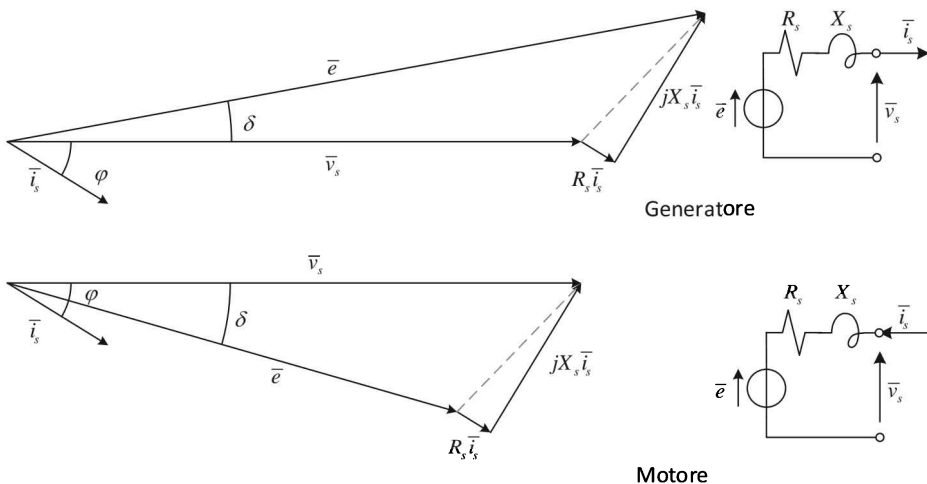
■ Fig. 8.4 Diagramma fasoriale di Behn-Eshemburg

L'equazione (8.14) può essere completata aggiungendo il termine resistivo di statore andando ad assumere la forma completa a regime

$$\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + jX_s \bar{i}_s + \bar{e} \tag{8.15}$$

Il diagramma di Fig. 8.4 può essere particolarizzato per il funzionamento da generatore e da motore considerando le convenzioni di Fig. 8.5. In Fig. 8.5 sono riportati i due diagrammi fasoriali nell'ipotesi di identica tensione  $\bar{v}_s$  applicata ai morsetti della macchina e con la medesima potenza elettrica generata (per il generatore) o assorbita (per il motore). Questa seconda condizione, essendo la tensione imposta, si traduce in un medesimo angolo di sfasamento  $\varphi$  e nella stessa corrente  $\bar{i}_s$  (a parte il verso) per entrambi i diagrammi.

Per quanto riguarda i valori tipici delle grandezze, definita l'impedenza nominale di fase come indicato in (8.16), i valori relativi tipici per  $R_s$  e  $X_s$  sono indicati in (8.17).



■ Fig. 8.5 Diagramma fasoriale di Behn-Eshemburg nel funzionamento come motore e come generatore

$$Z_n = \frac{V_n}{\sqrt{3}I_n} \quad (8.16)$$

$$x_s = \frac{X_s}{Z_n} = 1.8 \div 2.2 \quad r_s = \frac{R_s}{Z_n} = 0.002 \quad (8.17)$$

## 8.2 COPPIA ELETTROMAGNETICA DELLA MACCHINA ISOTROPA

L'espressione della coppia per la macchina sincrona isotropa può essere ricavata dal bilancio energetico utilizzando l'espressione di regime (8.15). Moltiplicando l'espressione per il fasore corrente di statore coniugato è possibile individuare i termini indicati in (8.18), dove il termine  $R_s i_s^2$  rappresenta le **perdite joule di statore** e il termine  $\bar{e} i_s$  la **potenza scambiata tra statore e rotore** e quindi la potenza meccanica della macchina.

$$P = \operatorname{Re}(\bar{v}_s \underline{i}_s) = \operatorname{Re} \left( \underbrace{R_s \bar{i}_s \underline{i}_s}_{P \text{ joule}} + \underbrace{jX_s \bar{i}_s \underline{i}_s}_{P=0 \text{ energia acc.}} + \underbrace{\bar{e} \underline{i}_s}_{P \text{ mecc.}} \right) \quad (8.18)$$

Esplicitando l'ultimo termine nelle condizioni di regime con velocità del rotore pari a  $\omega$  si ottiene l'espressione, da cui l'espressione della coppia.

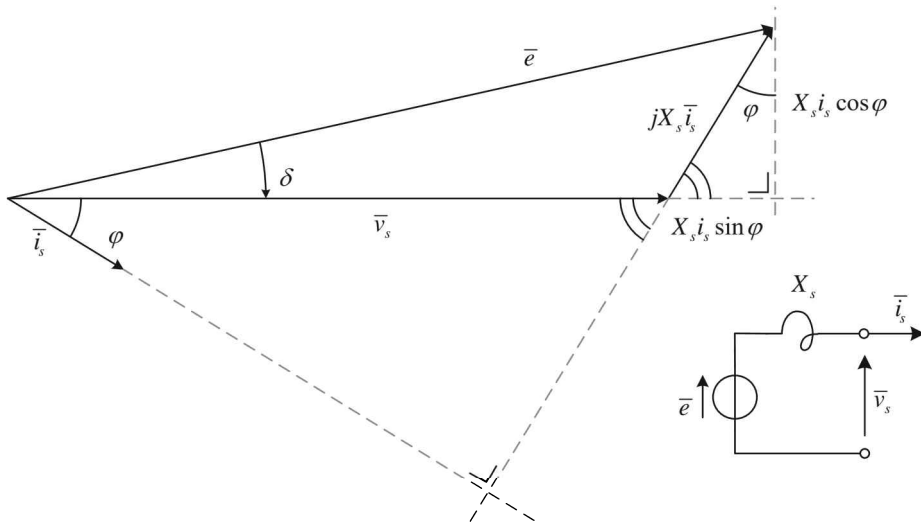
$$\begin{aligned} P_{mecc} &= \operatorname{Re}(\bar{e} \underline{i}_s) = \operatorname{Re}(j\omega L_f \bar{i}_e \underline{i}_s) = -\operatorname{Im}(\omega L_f \bar{i}_e \underline{i}_s) = \\ &= -\operatorname{Im}(\omega L_f \bar{i}_e \underline{i}_s) = -\operatorname{Im} \left( \omega L_f \sqrt{\frac{3}{2}} I_e e^{j\theta} e^{j\omega t} \sqrt{\frac{3}{2}} I_M e^{-j\omega t} \right) = \\ &= -\operatorname{Im} \left( \frac{3}{2} \omega L_f I_e I_M e^{j\theta} \right) = -\frac{3}{2} \omega L_f I_e I_M \sin \theta \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$T = \frac{P_{mecc}}{\omega} = -\frac{3}{2} L_f I_e I_M \sin(\theta) = -L_f I_e^* I_s \sin(\theta) \quad (8.20)$$

$$\bar{i}_e = \sqrt{\frac{3}{2}} I_e e^{j\theta} e^{j\omega t}$$

$$\underline{i}_s = \sqrt{\frac{3}{2}} I_M e^{j\omega t}$$

L'espressione (8.20) mostra come la macchina si comporti come un giunto elettromagnetico con i due avvolgimenti rotanti a velocità  $\omega$ , sfasati di  $\theta$  e percorsi da correnti costanti  $I_e^*$  e  $I_s$ .



■ Fig. 8.6 Diagramma fasoriale in assenza di caduta resistiva.

Trascurando ora le perdite resistive statoriche è possibile ottenere alcune espressioni significative della potenza e della coppia in funzione dell'angolo di carico  $\delta$ .

Considerando il diagramma di Fig. 8.6 in cui si è trascurata la caduta resistiva è possibile scrivere le relazioni (8.21) dove  $V_s$  è il modulo del fasore spaziale tensione di statore  $\bar{v}_s$  ed  $E$  il modulo del fasore spaziale forza elettromotrice  $\bar{e}$ .

$$\begin{aligned} X_s I_s \cos \varphi &= E \sin \delta \\ X_s I_s \sin \varphi &= E \cos \delta - V_s \end{aligned} \quad (8.21)$$

Dalle relazioni (8.21) si possono quindi ricavare le relazioni (8.22).

$$\begin{aligned} P = V_s I_s \cos \varphi &\rightarrow P = \frac{V_s E \sin \delta}{X_s} \\ Q = V_s I_s \sin \varphi &\rightarrow Q = V_s \frac{E \cos \delta - V_s}{X_s} \end{aligned} \quad (8.22)$$

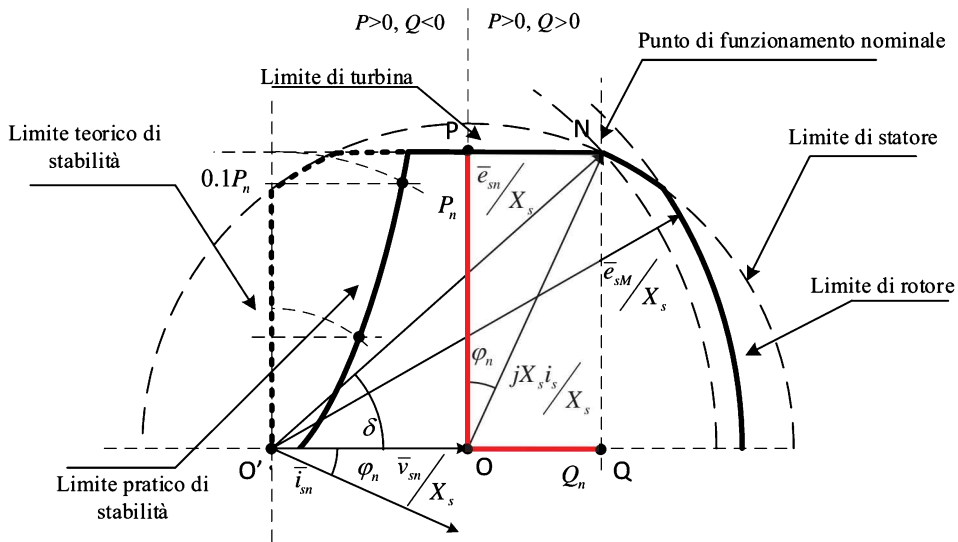
Avendo trascurate le perdite joule statoriche la potenza meccanica coincide con la potenza attiva assorbita e quindi la coppia della macchina può essere calcolata anche com e indicato in (8.23).

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{V_s E \sin \delta}{\omega X_s} \quad (8.23)$$

### 8.3 CURVA DELLE PRESTAZIONI LIMITE DEI GENERATORI SINCRONI

La macchina sincrona funziona prevalentemente come generatore e quindi è interessante analizzarne il funzionamento di regime individuando le condizioni limite. Si consideri il diagramma di Fig.8.7 dove il punto N sul diagramma individua il punto di funzionamento nominale. Per il tracciamento del diagramma si sono trascurate le cadute resistive e si è adottata la convenzione di misura dei generatori. Analizzando il diagramma si può individuare che:

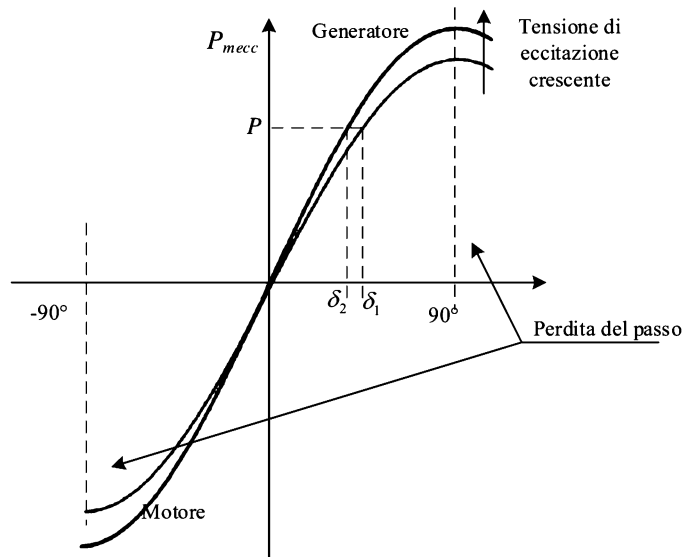
- Il segmento  $OP = X_s i_s \cos \varphi$  è un segmento proporzionale alla **potenza attiva** erogata in una particolare condizione di funzionamento
- Il segmento  $OQ = X_s i_s \sin \varphi$  è un segmento proporzionale alla **potenza reattiva** erogata in una particolare condizione di funzionamento.
- La circonferenza con centro in O e raggio  $ON = X_s i_{sn}$  rappresenta i punti di funzionamento a corrente nominale e quindi a potenza nominale. Poiché la corrente  $i_{sn}$  è la massima ammessa in servizio continuativo la circonferenza rappresenta il punti di funzionamento al limite termico degli avvolgimenti di statore (**limite di statore**).
- Le circonferenze centrate in O' rappresentano invece i punti di funzionamento a f.e.m.  $E$  indotta nello statore costante, che (trascurando effetti di saturazione del ferro) sono punti a **corrente di eccitazione costante**. Solitamente per il circuito di eccitazione si considera una corrente massima di eccitazione applicabile in maniera continuativa maggiore della corrente di eccitazione necessaria per mantenere la macchina in condizioni nominali. ( $I_{em} > I_{en}$ ). La circonferenza centrata in O' con raggio  $e_{sM}$  rappresenta quindi i punti di funzionamento al limite termico degli avvolgimenti di eccitazione (**limite di rotore**).
- Il punto di potenza nominale individua anche la massima potenza attiva erogabile in maniera continuativa dalla turbina in quanto coincide con la potenza meccanica entrante nel sistema. La retta passante per N e parallela a  $\bar{v}_s$  rappresenta quindi il limite di potenza di turbina del sistema. Ovviamente il generatore può erogare una potenza apparente maggiore.
- Per quanto riguarda il limite in sottoeccitazione ( $Q < 0$ , secondo quadrante e corrente in anticipo rispetto alla tensione), ricordando che la potenza generata ha l'espressione indicata in (8.22) e dipende dal seno dell'angolo di carico, si ha che in condizioni di regime la potenza generata coincide con la potenza meccanica,



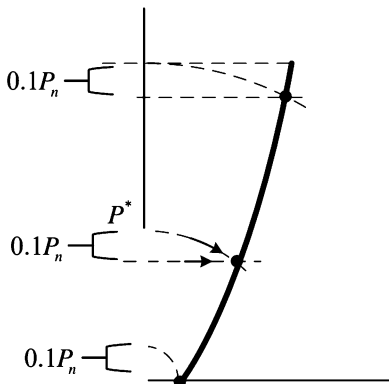
■ Fig. 8.7 Curve di prestazione limite del generatore sincrono

tale uguaglianza vale fino a che l'angolo di carico  $\delta \leq \pi/2$ , dopo tale punto la potenza generata diminuisce e quindi non si può far fronte ad aumenti del carico e la macchina **perde il passo** (il rotore non ruota più sincrono al campo magnetico di statore) come indicato nella curva di Fig.8.8 che prende il nome di **caratteristica pseudomeccanica**. Solitamente l'angolo di carico corrispondente alle

condizioni di funzionamento nominali di una macchina isotropa è intorno ai  $50^\circ$ . Si può inoltre osservare come, a parità di potenza erogata  $P$  (a tensione costante), un eventuale aumento di eccitazione migliora la stabilità del sistema riducendo l'angolo  $\delta$ . Il limite teorico di funzionamento (**limite di stabilità**) è quindi la retta perpendicolare a  $\bar{v}_s$  e



■ Fig. 8.8 Limite di stabilità (caratteristica pseudomeccanica)



■ Fig. 8.9 Modalità di costruzione curva limite di stabilità

passante per  $O'$ . Solitamente tale limite non viene raggiunto e si definisce una curva pratica per il limite di stabilità per far fronte ad improvvise variazioni del carico senza rischiare di perdere il passo. In Fig. 8.9 è rappresentata la modalità grafica per ottenere tale curva ipotizzando un sovraccarico tollerabile del 10%: i punti limite sono individuati dall'intersezione della circonferenza di raggio proporzionale alla potenza attiva erogabile e la retta che individua il sovraccarico tollerabile.

### 8.4 CURVE A V

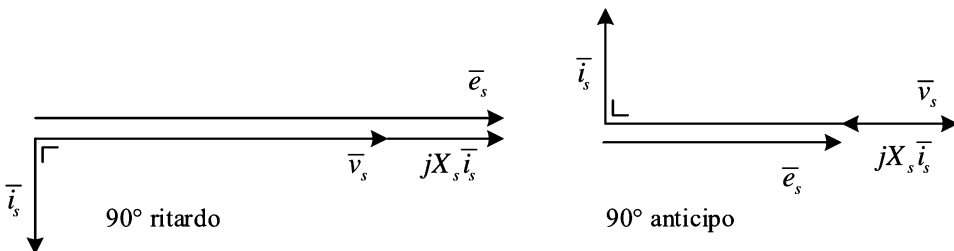
Le curve a V rappresentano in forma grafica il legame esistente tra la corrente di statore della macchina e la corrente di eccitazione a tensione statorica e potenza attiva costante (erogata nel caso di generatore, assorbita nel caso di motore).

Limitandosi al caso di macchina isotropa funzionante come generatore, il caso più semplice da individuare è quello a potenza attiva  $P$  nulla ( $\cos \varphi = 0$ ,  $\varphi = \pm 90^\circ$ ).

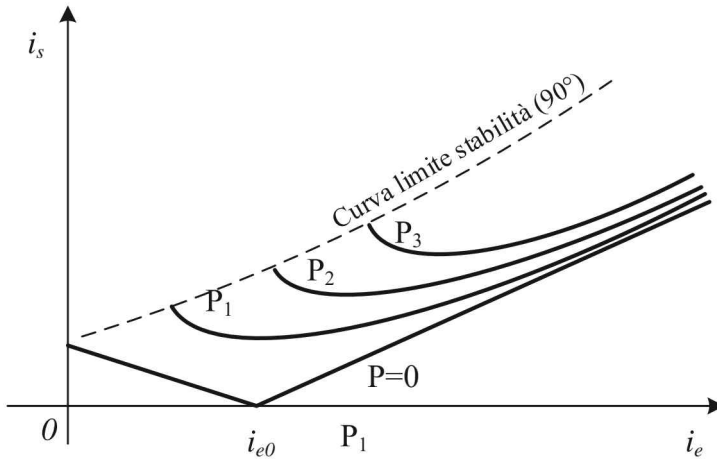
In questo caso essendo la corrente sfasata di  $90^\circ$  in anticipo o ritardo (Fig. 8.10), le relazioni tra i moduli delle grandezze possono essere scritte come indicato in (8.24) e il grafico nel piano corrente di statore ( $I_s$ ) – corrente di eccitazione ( $I_e$ ) è rappresentato da due tratti rettilinei che si incontrano nel punto di funzionamento a vuoto ( $I_s = 0$ ).

$$\begin{aligned}
 E_s &= V_s + X_s I_s = KI_e \rightarrow I_s = \frac{KI_e - V_s}{X_s} \\
 E_s &= V_s - X_s I_s = KI_e \rightarrow I_s = \frac{V_s - KI_e}{X_s}
 \end{aligned}
 \tag{8.24}$$

Fissato il valore di potenza attiva le curve assumono la forma indicata in Fig. 8.11, dove il limite superiore è il limite di stabilità della macchina.



■ Fig. 8.10 Diagrammi fasoriali a tensione costante per potenza attiva nulla

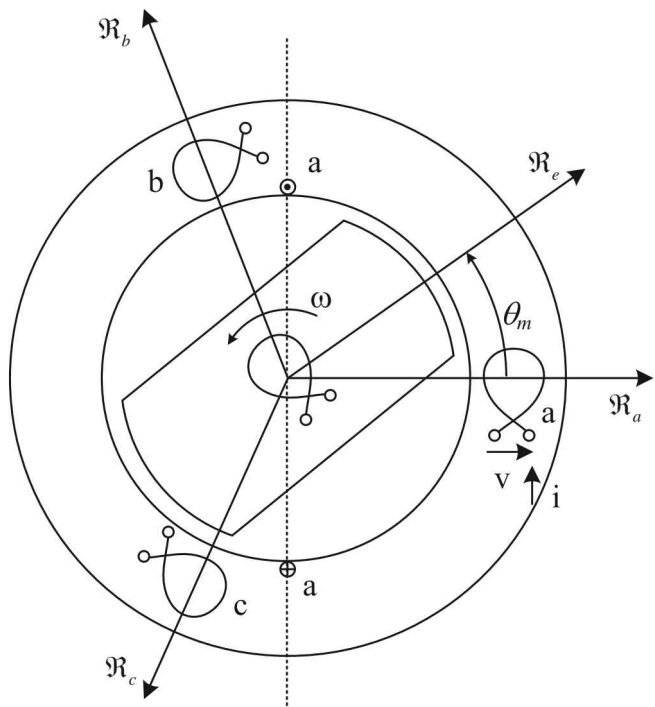


■ Fig. 8.11 Curve a V della macchina sincrona isotropa

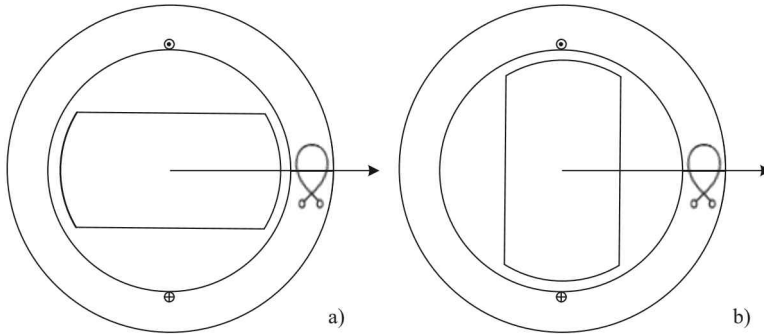
## 8.5 MACCHINE SINCRONE ANISOTROPE

Si consideri una macchina con la struttura rotorica che presenta un traferro maggiore in una direzione come indicato in forma schematica in Fig. 8.12. Come già introdotto nel Capitolo 5 per le autoinduttanze è possibile ipotizzare un andamento periodico del tipo indicato in (8.25) (analogamente per le altre fasi). Si ipotizzi infatti che sia possibile approssimare l'andamento in serie di Fourier limitandosi alla prima armonica.

$$L_{aa} = L_o + L_m \cos 2\theta \tag{8.25}$$



■ Fig. 8.12. Macchina sincrona anisotropa



■ Fig. 8.13. Condizioni di autoinduttanza (a) massima (traferro minimo) e (b) minima (traferro massimo)

Per le mutue induttanze si possono considerare le condizioni di massima e minima induttanza indicate in Fig 8.13 e Fig 8.14.

Per la mutua induttanza  $ab$  è possibile scrivere la relazione (8.26), dove si è ipotizzato che il valore medio dipenda dal valore medio della auto induttanza ( $L_0 \cos(\theta_{ab}) = -L_0/2$ ) e le oscillazioni presentino la medesima ampiezza delle oscillazioni dell'auto induttanza.

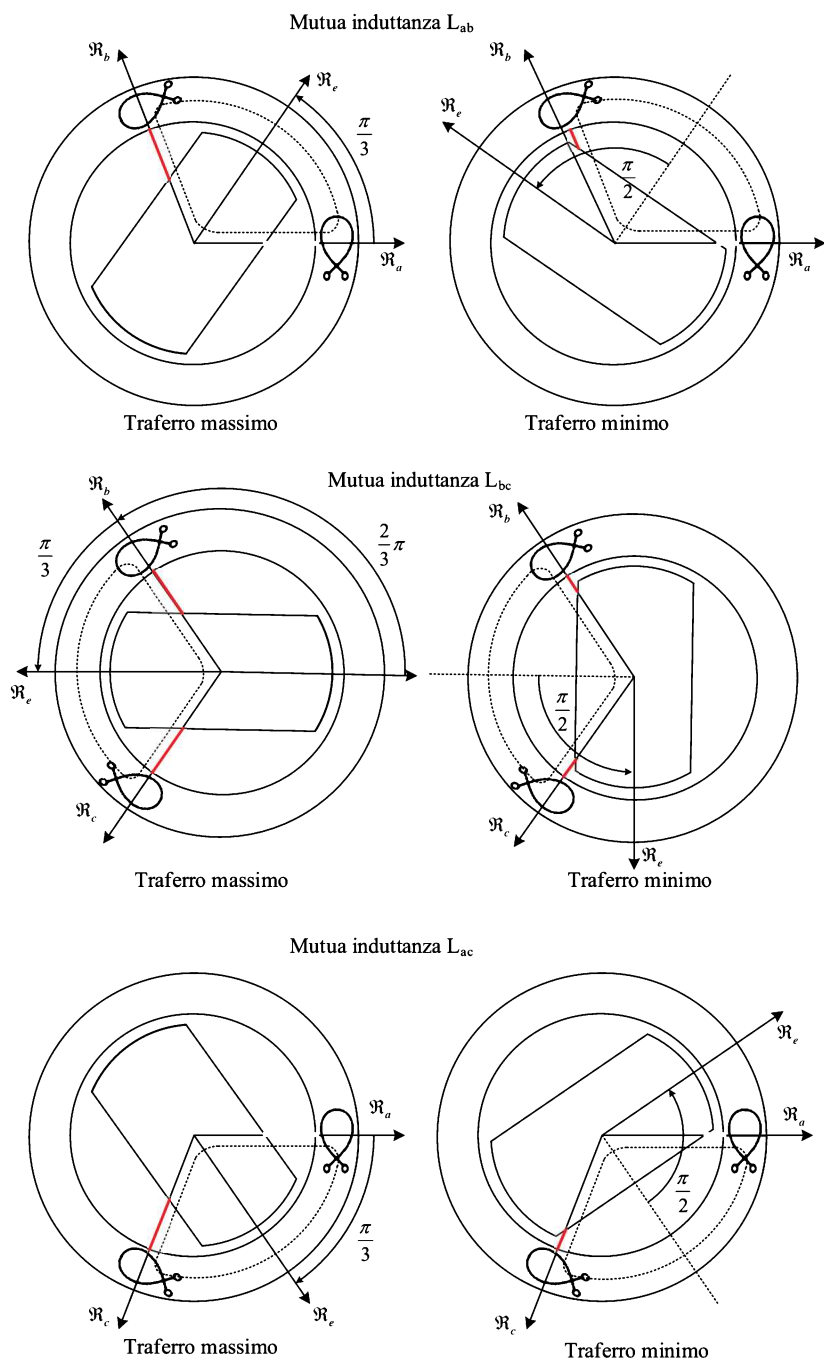
$$L_{ab} = -\frac{L_o}{2} + L_m \cos 2\left(\theta_m - \frac{\pi}{3}\right) \quad (8.26)$$

Come si può vedere dalla Fig. 8.14, le successive mutue induttanze presentano la stessa struttura sfasando di  $\pm 2/3\pi$  l'espressione precedente. Si osservi inoltre che avendo valore medio  $<0$  l'induttanza è più piccola per il traferro massimo. Riassumendo le induttanze assumono le espressioni indicate in (8.27)-(8.28).

$$\begin{aligned} L_{aa} &= L_o + L_m \cos 2\theta_m \\ L_{bb} &= L_o + L_m \cos 2\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) \\ L_{cc} &= L_o + L_m \cos 2\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} L_{ab} &= L_{ba} = -\frac{L_o}{2} + L_m \cos 2\left(\theta_m - \frac{\pi}{3}\right) \\ L_{bc} &= L_{cb} = -\frac{L_o}{2} + L_m \cos 2\left(\theta_m - \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{L_o}{2} + L_m \cos 2(\theta_m - \pi) \\ L_{ac} &= L_{ca} = -\frac{L_o}{2} + L_m \cos 2\left(\theta_m - \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{L_o}{2} + L_m \cos 2\left(\theta_m + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (8.28)$$





■ Fig.8.14 Condizione di traferro minimo e massimo per le mutue induttanze

Per determinare il modello e l'espressione delle coppie si può procedere in maniera analoga a quanto fatto per la macchina isotropa, individuando le equazioni di fase e andando poi a ottenere le corrispondenti equazioni nei fasori spaziali. Per semplicità di notazione definita la matrice  $[L]$  come in (8.29), dove le auto e mutue induttanze hanno l'espressione ottenuta in precedenza, le equazioni di macchina nelle variabili di fase si possono scrivere in forma matriciale come indicato in (8.30).

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ab} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ac} & L_{bc} & L_{cc} \end{bmatrix} \quad (8.29)$$

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \left( [L] \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_m \cos \theta \\ L_m \cos \left( \theta - \frac{2}{3} \pi \right) \\ L_m \cos \left( \theta + \frac{2}{3} \pi \right) \end{bmatrix} i_e \right) \quad (8.30)$$

Moltiplicando ora per  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  e sommando le equazioni moltiplicate rispettivamente per 1,  $\alpha$  e  $\alpha^2$ , si ottiene un'equazione analoga a quella già ricavata per la macchina sincrona isotropa.

$$\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d}{dt} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] [L] \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \right) + L_m \frac{d}{dt} \bar{i}_e \quad (8.31)$$

Il termine legato alla corrente di eccitazione e il termine resistivo possono essere ricavati con le medesime procedure (8.9)-(8.12) seguite per la macchina isotropa, rimane invece da valutare il termine legato alle correnti di statore e alla matrice delle induttanze. Per semplicità definito il vettore  $[\psi]$  come indicato in (8.32), le componenti  $\psi_a$ ,  $\psi_b$  e  $\psi_c$  assumono le espressioni indicate in (8.32), dove ricavata l'espressione (8.33) per  $\psi_a$ , si può notare che le successive sono sfasate di  $\frac{2}{3}\pi$  come indicato in (8.34)

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ab} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ac} & L_{bc} & L_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned}
 \psi_a &= L_o i_a - \overbrace{\frac{L_o}{2} i_b - \frac{L_o}{2} i_c}^{\frac{L_o}{2} i_a} + L_m \cos 2\theta_m i_a + L_m \cos 2\left(\theta_m - \frac{\pi}{3}\right) i_b + L_m \cos 2\left(\theta_m + \frac{\pi}{3}\right) i_c = \\
 &= \frac{3}{2} L_o i_a + L_m \cos 2\theta_m i_a + L_m \cos\left(2\theta_m - \frac{2\pi}{3}\right) i_b + L_m \cos\left(2\theta_m + \frac{2\pi}{3}\right) i_c
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_a &= \frac{3}{2} L_o i_a + L_m \cos 2\theta_m i_a + L_m \cos\left(2\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_b + L_m \cos\left(2\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_c \\
 \psi_b &= \frac{3}{2} L_o i_b + L_m \cos\left(2\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_a + L_m \cos\left(2\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_b + L_m \cos(2\theta_m) i_c \\
 \psi_c &= \underbrace{\frac{3}{2} L_o i_c}_{L_{so}} + L_m \cos\left(2\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_a + L_m \cos(2\theta_m) i_b + L_m \cos\left(2\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_c
 \end{aligned} \tag{8.34}$$

Rimane ora evidente dalle (8.34) come il primo termine  $\frac{3}{2}L_o$  contribuisca alla definizione di un termine costante simile per struttura alla reattanza sincrona definita in precedenza per la macchina isotropa, mentre i termini successivi possono essere trattati in maniera analoga a quanto fatto in precedenza per la componente di eccitazione considerando una corrente ( $i_a, i_b, i_c$ ) alla volta e tenendo conto che la variazione dipende da  $2\theta_m$ . Si ottengono le relazioni (8.35)-(8.38).

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + L_{so} \frac{d}{dt} \bar{i}_s + \\
 &+ \frac{d}{dt} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} [1 \quad \alpha \quad \alpha^2] \left( \begin{bmatrix} L_m \cos 2\theta_m \\ L_m \cos\left(2\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) \\ L_m \cos\left(2\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) \end{bmatrix} i_a + \begin{bmatrix} L_m \cos\left(2\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) \\ L_m \cos\left(2\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) \\ L_m \cos(2\theta_m) \end{bmatrix} i_b + \dots \right) \right] + \\
 &+ L_m \frac{d}{dt} \bar{i}_e
 \end{aligned} \tag{8.35}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_m \cos 2\theta_m \\ L_m \cos \left( 2\theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \\ L_m \cos \left( 2\theta_m + \frac{2}{3}\pi \right) \end{bmatrix} i_a = \\
& = \sqrt{\frac{2}{3}} \left( L_m \cos 2\theta_m + L_m \cos \left( 2\theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \alpha + L_m \cos \left( 2\theta_m + \frac{2}{3}\pi \right) \alpha^2 \right) i_a = \\
& = \frac{3}{2} L_m (\cos 2\theta_m + j \sin 2\theta_m) \sqrt{\frac{2}{3}} i_a = \frac{3}{2} L_m e^{j2\theta_m} \sqrt{\frac{2}{3}} i_a \quad (8.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_m \cos \left( 2\theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \\ L_m \cos \left( 2\theta_m + \frac{2}{3}\pi \right) \\ L_m \cos 2\theta_m \end{bmatrix} i_b = \frac{3}{2} L_m e^{j2\theta_m} \sqrt{\frac{2}{3}} i_b \alpha^2 \quad (8.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_m \cos \left( 2\theta_m + \frac{2}{3}\pi \right) \\ L_m \cos 2\theta_m \\ L_m \cos \left( 2\theta_m - \frac{2}{3}\pi \right) \end{bmatrix} i_c = \frac{3}{2} L_m e^{j2\theta_m} \sqrt{\frac{2}{3}} i_c \alpha \quad (8.38)
\end{aligned}$$

Riscrivendo l'equazione (8.35) raccogliendo opportunamente i termini, si ottiene l'espressione (8.39) dove compare il coniugato del fasore spaziale corrente di statore  $\underline{i}_s$ .

$$\begin{aligned}
\bar{v}_s & = R_s \bar{i}_s + L_{so} \frac{d}{dt} \bar{i}_s + \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{3}{2} L_m e^{j2\theta_m} \sqrt{\frac{2}{3}} (i_a + \alpha^2 i_b + \alpha i_c)}_{\underline{i}_s} \right) + L_f \frac{d}{dt} \bar{i}_e = \\
& = R_s \bar{i}_s + L_{so} \frac{d}{dt} \bar{i}_s + \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} L_m e^{j2\theta_m} \underline{i}_s \right) + L_f \frac{d}{dt} \bar{i}_e \quad (8.39)
\end{aligned}$$

Nell'ipotesi di studiare le condizioni di regime e quindi considerando il rotore in rotazione a velocità pari alla pulsazione delle correnti di statore e sfasato di una

posizione iniziale  $\theta_0$  ( $\theta_m = \omega t + \theta_0$ ), si ottiene l'equazione finale (8.41) che è del tutto analoga a quella trovata per la macchina sincrona isotropa.

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + j\omega L_{so} \bar{i}_s + \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} L_m e^{j2(\omega t + \theta_0)} \underbrace{I_s e^{-j\omega t}}_{\bar{i}_s} \right) + \underbrace{j\omega L_f \bar{i}_e}_{\bar{e}} = \\
 &= R_s \bar{i}_s + j\omega L_{so} \bar{i}_s + \frac{3}{2} L_m \frac{d}{dt} \left( I_s e^{j(2\omega - \omega)t + j2\theta_0} \right) + \bar{e} = \\
 &= R_s \bar{i}_s + j\omega L_{so} \bar{i}_s + j\omega \frac{3}{2} L_m \underbrace{I_s e^{j\omega t}}_{\bar{i}_s} e^{j2\theta_0} + \bar{e} = \\
 &= R_s \bar{i}_s + j\omega L_{so} \bar{i}_s + j\omega \frac{3}{2} L_m e^{j2\theta_0} \bar{i}_s + \bar{e}
 \end{aligned} \tag{8.40}$$

$$\bar{v}_s = R_s \bar{i}_s + j(X_{so} + \bar{Z}_m) \bar{i}_s + \bar{e} \quad \bar{Z}_m = \omega \frac{3}{2} L_m (\cos 2\theta_0 + j \sin 2\theta_0) \tag{8.41}$$

## 8.6 COPPIA ELETTROMAGNETICA DELLA MACCHINA ANISOTROPA

L'espressione della coppia elettromagnetica sviluppata si può ottenere in maniera analoga a quella della macchina isotropa dal bilancio energetico moltiplicando l'equazione della tensione di statore per il vettore corrente di statore coniugato  $\bar{i}_s$  come indicato in (8.42).

$$P = \text{Re}(\bar{v}_s \bar{i}_s) = \text{Re} \left( \left( R_s \bar{i}_s + L_s \frac{d}{dt} \bar{i}_s + \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} L_m e^{j2\theta_m} \bar{i}_s \right) + L_f \frac{d}{dt} \bar{i}_e \right) \bar{i}_s \right) \tag{8.42}$$

Se si considera ora una generica condizione di regime con il rotore rotante a velocità  $\Omega$  ( $\theta_m = \Omega t + \theta_0$ ) e le correnti di statore variabili nel tempo a pulsazione  $\omega$ , il bilancio energetico assume la forma (8.43).

$$P = \text{Re} \left( \underbrace{R_s \bar{i}_s^2}_{\text{P joule}} + \underbrace{j\omega L_s \bar{i}_s^2}_{\text{Re} = 0} + \underbrace{j2\Omega \frac{3}{2} L_m e^{j2\Omega t} e^{j2\theta_0} \bar{i}_s \bar{i}_s - j\omega \frac{3}{2} L_m e^{j2\Omega t} e^{j2\theta_0} \bar{i}_s \bar{i}_s}_{\text{contributo di anisotropia}} + \underbrace{j\Omega L_f \bar{i}_e \bar{i}_s}_{\text{contributo ecc}} \right) \tag{8.43}$$

Analizzando ora esclusivamente il contributo dovuto all'anisotropia (in quanto è facile osservare che il contributo di eccitazione è identico a quanto ricavato per la

macchina isotropa), si ottiene, nel caso in cui la velocità meccanica coincida con la velocità del campo magnetico di statore  $\Omega = \omega$ , l'espressione (8.44).

$$T = -\text{Im}(\omega L_f \bar{i}_e i_s) = -\omega L_f I_e^* I_s \sin \theta_0 \quad (8.44)$$

Il contributo dovuto all'anisotropia della macchina può essere ulteriormente elaborato considerando che  $i_s i_s = I_s e^{-j\omega t} I_s e^{-j\omega t} = I_s^2 e^{-j2\omega t}$  come indicato in (8.45).

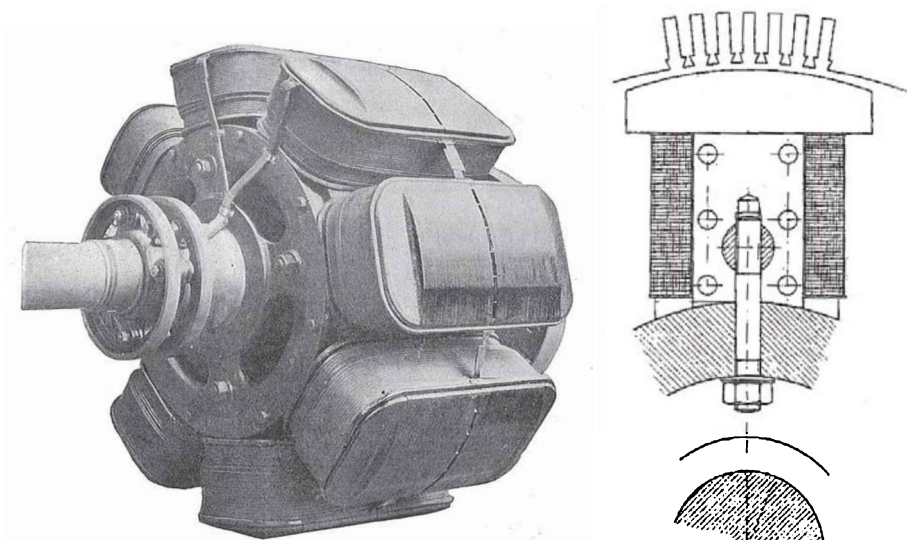
$$\begin{aligned} j2\Omega \frac{3}{2} L_m e^{j2\Omega t} e^{j2\theta_0} I_s^2 e^{-j2\omega t} - j\omega \frac{3}{2} L_m e^{j2\Omega t} e^{j2\theta_0} I_s^2 e^{-j2\omega t} &= \\ = j2\Omega \frac{3}{2} L_m I_s^2 e^{j2\theta_0} e^{j(2\Omega-2\omega)t} - j\omega \frac{3}{2} L_m I_s^2 e^{j2\theta_0} e^{j(2\Omega-2\omega)t} & \end{aligned} \quad (8.45)$$

Considerando di nuovo le condizioni di funzionamento a regime con  $\theta_m = \omega t + \theta$  si può ottenere l'espressione completa della potenza (8.46).

$$P = \text{Re} \left( \underbrace{R_s i_s^2}_{\text{P joule}} + \underbrace{j\omega L_s i_s^2}_{\text{Re} = 0} + \underbrace{j\omega \frac{3}{2} L_m I_s^2 e^{j2\theta_0}}_{\text{contributo di anisotropia}} + \underbrace{j\omega L_f \bar{i}_e i_s}_{\text{contributo ecc}} \right) \quad (8.46)$$

La coppia assume quindi l'espressione (8.47)

$$T = \frac{\text{Re} \left( j\omega \frac{3}{2} L_m I_s^2 e^{j2\theta_0} + j\omega L_f \bar{i}_e i_s \right)}{\omega} = -\text{Im} \left( \frac{3}{2} L_m \frac{3}{2} \underbrace{I_M^2}_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} I_M\right)^2} e^{j2\theta_0} + \frac{3}{2} L_f I_e I_M e^{j\theta_0} \right) \quad (8.47)$$



■ Fig. 8.15 Struttura di rotore di macchina sincrona anisotropa

Come si può notare, nel caso di funzionamento con il rotore in rotazione alla medesima velocità del campo magnetico di statore, la coppia presenta due contributi: un contributo legato alla presenza della corrente di eccitazione come per la macchina isotropa e un contributo che dipende solo dall'anisotropia della macchina e che è presente anche in assenza dell'eccitazione (per  $I_e = 0$ ).

## 8.7 ESERCIZI

### Esercizio 1

Sia dato un generatore sincrono isotropo caratterizzato dai seguenti dati:

Potenza nominale:  $A_n = 55$  kVA

Fattore di potenza nominale  $\cos \varphi_n = 0.9$

Tensione nominale  $V_n = 380$  V

Reattanza sincrona  $\% x_{s\%} = 180\%$

Tensione di eccitazione nominale  $V_{eccn} = 200$  V

Corrente di eccitazione nominale  $I_{eccn} = 5$  A

Frequenza nominale  $f_n = 50$  Hz.

Il generatore alimenta un carico caratterizzato dai seguenti dati:

$R_l = 4$   $\Omega$

$L_l = 10$  mH

Si calcoli la tensione di eccitazione necessaria ad alimentare il carico dato a tensione pari alla tensione nominale  $V_n$ , il rendimento e l'angolo di carico  $\delta$ . Si trascuri la resistenza statorica nei calcoli.

### Esercizio 2

Sia dato un generatore sincrono isotropo caratterizzato dai seguenti dati:

Potenza nominale  $A_n = 30$  kVA

Fattore di potenza nominale  $\cos \varphi_n = 0.8$

Tensione nominale  $V_n = 380$  V

Reattanza sincrona  $\% x_{s\%} = 160\%$

Tensione di eccitazione nominale  $V_{eccn} = 200$  V

Corrente di eccitazione nominale  $I_{eccn} = 2.5$  A

Rendimento nominale  $\eta = 0.91$

Frequenza nominale  $f_n = 50$  Hz

Il generatore alimenta un carico caratterizzato dai seguenti dati:

potenza  $P_l = 15$  kW

tensione  $V_1 = V_n$

$\cos\varphi_1 = 1$

Si calcoli la tensione di eccitazione, il rendimento e l'angolo di carico  $\delta$ .

### Esercizio 3

Sia dato un generatore sincrono isotropo utilizzato solo per rifasare un carico (compensatore sincrono). I dati del generatore sono i seguenti:

Potenza nominale  $A_n = 100$  kVA

Fattore di potenza nominale  $\cos\varphi_n = 1$

Tensione nominale  $V_n = 380$  V

Reattanza sincrona %  $x_{s0\%} = 165\%$

Tensione di eccitazione nominale  $V_{eccn} = 200$  V

Corrente di eccitazione nominale  $I_{eccn} = 10$  A

Frequenza nominale  $f_n = 50$  Hz.

Il carico da rifasare è caratterizzato dai seguenti dati ed è alimentato alla tensione nominale pari a  $V_n = 380$  V:

$R_1 = 1 \Omega$   $X_1 = 4 \Omega$

Il carico deve essere rifasato ad un  $\cos\varphi_{rif} = 0.9$ . Determinare la tensione di eccitazione e l'angolo di carico (si trascuri la resistenza statorica  $R_s = 0$ ).

### Esercizio 4

Siano dati due generatori sincroni caratterizzati dai seguenti dati:

Generatore 1	Generatore 2
$A_{n1} = 50$ kVA	$A_{n2} = 20$ kVA
$V_{n1} = 380$ V	$V_{n2} = 380$ V
$\cos\varphi_{n1} = 0.8$	$\cos\varphi_{n2} = 1$
$R_{s1} = 0.3 \Omega$	$R_{s2} = 0 \Omega$ (trascurabile)
$V_{ecc1n} = 200$ V	$V_{ecc2n} = 200$ V
$I_{eccn1} = 5$ A	$I_{eccn2} = 2.5$ A
$x_{s10\%} = 160\%$	$x_{s20\%} = 150\%$

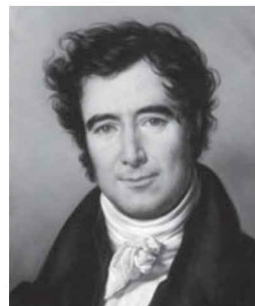
Il generatore 1 alimenta un carico caratterizzato dai seguenti dati:

$P_1 = 20$  kW  $\cos\varphi_1 = 0.7$   $V_1 = 380$  V

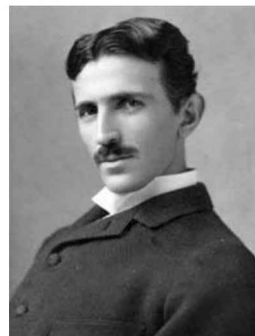
Il generatore 2, collegato in parallelo, rifasa il carico a  $\cos\varphi_{rif} = 0.9$  ed eroga una potenza attiva nulla. Calcolare la tensione di eccitazione dei due generatori e il rendimento totale.



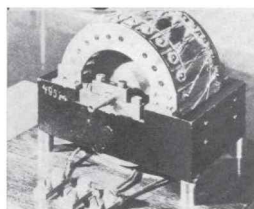
Nel 1824 F. Arago scoprì che un ago magnetico sospeso sopra un disco di rame ruota non appena il disco viene posto in rotazione: era la prima applicazione pratica dei fenomeni che avrebbero poi portato alla realizzazione della macchina asincrona. La scoperta di Arago e le successive sperimentazioni di Faraday, che interpretò correttamente il fenomeno come conseguenza delle correnti indotte nel disco, non ebbero un seguito applicativo immediato. Solo nel 1879 W. Baily, disponendo simmetricamente quattro elettromagneti fissi affacciati ad un disco girevole ed alimentandoli attraverso un opportuno commutatore meccanico con due pile esterne, riuscì a creare un campo magnetico rotante a scatti. Anche se questo può considerarsi a tutti gli effetti il primo esempio di realizzazione di un motore asincrono, non ebbe sostanzialmente nessuna applicazione pratica in quanto per produrre il moto era necessario muovere meccanicamente il commutatore. Si dovette attendere fin al 1885 per avere i primi studi della configurazione moderna del motore asincrono grazie al contributo di Galileo Ferraris che, in una serie di esperienze pubbliche con piccoli motorini sperimentali, cominciò a introdurre le basi per lo studio del campo rotante che portarono poi, tre anni dopo, alla presentazione il 18 marzo 1888, presso l'Accademia delle Scienze di Torino, di una memoria dal titolo "Rotazioni elettrodinamiche prodotte da correnti alternate". Quarantatré giorni dopo la pubblicazione della memoria di Galileo Ferraris, Nikola Tesla ottenne il brevetto per la prima



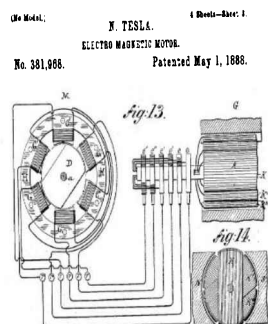
■ Francois Arago (1786-1853)



■ Nikola Tesla (1856-1943)



■ La macchina asincrona di Dobrovolsky



■ Il brevetto della macchina a campo rotante di Tesla

realizzazione pratica di un motore a campo magnetico rotante, e grazie alla collaborazione con la Westinghouse Electric presentò all'Expo di Parigi del 1889 la prima realizzazione concreta di un motore asincrono. Purtroppo la personalità di Tesla e gli interessi commerciali della Westinghouse impedirono di riconoscere la priorità di Ferraris nella spiegazione dei principi che governano il funzionamento del campo rotante (anche se Ferraris non ha mai voluto alcun compenso per lo sfruttamento industriale delle sue idee, anzi schivandole pure quando gli furono proposte) e questo portò all'inevitabile scontro processuale in cui erano coinvolte AEG e Siemens, che avevano sviluppato la tecnologia alternata trifase anche grazie alle eccezionali capacità di Mikhail Dolivo-Dobrovolsky (che introdusse l'indotto a gabbia), e Westinghouse-Tesla. La vertenza si concluse con una dura sentenza contro il croato: non solo venne chiaramente documentata la priorità degli studi del Ferraris, ma non gli si riconobbe neppure la buona fede affermando che i suoi brevetti furono depositati solo per turbare l'industria concorrente.

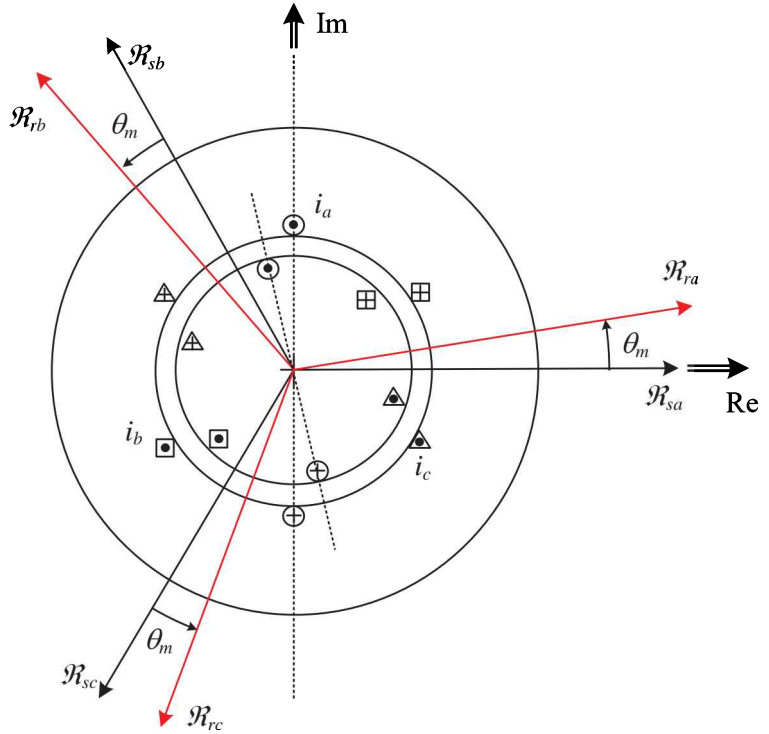
In realtà un giudizio equo a riguardo è sicuramente quello che venne fornito sulle pagine di "The Electrician" nel 1891 da A. Du Bois Reymond : "[...] Perciò secondo l'accettata regola di tali formalità considero giustificato parlare del "Principio Ferraris" e del "Motore Tesla" perché tutti coloro che sono al corrente dello stile scientifico sanno perfettamente che con questo modo di esprimersi non offro incenso all'uno disprezzando l'altro, ma voglio semplicemente dire che l'uno è stato il primo a pubblicare i principi e l'altro è stato il primo a brevettare il motore. [...]".

## 9.1 MODELLO TRASFORMATRICO DELLA MACCHINA ASINCRONA

L'idea base della macchina asincrona è di sostituire la struttura rotorica con un avvolgimento trifase (o come si vedrà con una struttura equivalente negli effetti ad un avvolgimento trifase) analogo a quello di statore. L'avvolgimento di rotore sarà poi chiuso in corto circuito. La struttura generale è dunque rappresentata in Fig. 9.1 e, come si può notare, la struttura statorica è identica a quella della macchina sincrona isotropa e quindi potrà essere trattata allo stesso modo di quanto fatto per la macchina sincrona introducendo i fasori spaziali corrente e tensione di statore come indicato in(9.1) . L'apice  $s$  sta ad indicare che tali fasori sono ricavati facendo riferimento ad un sistema di riferimento con l'asse reale coincidente con l'asse magnetico della bobina  $a$  di statore.

$$\begin{aligned}\bar{i}_s^s &= \sqrt{\frac{2}{3}}(i_{sa} + \alpha i_{sb} + a^2 i_{sc}) = \sqrt{\frac{3}{2}} I_{sM} e^{j\omega_s t} \\ \bar{v}_s^s &= \sqrt{\frac{2}{3}}(v_{sa} + \alpha v_{sb} + a^2 v_{sc}) = \sqrt{\frac{3}{2}} V_{sM} e^{j\omega_s t}\end{aligned}\quad (9.1)$$

■ Fig. 9.1. Struttura del motore asincrono isotropo



In maniera analoga, l'avvolgimento di rotore potrà essere studiato allo stesso modo introducendo i fasori spaziali corrente e tensione di rotore. In questo caso l'apice  $r$  identificherà il fatto che tali fasori sono ricavati considerando un sistema di riferimento con l'asse reale coincidente con l'asse magnetico della bobina  $a$  di rotore

$$\begin{aligned}\bar{i}_r^r &= \sqrt{\frac{2}{3}}(i_{ra} + \alpha i_{rb} + a^2 i_{rc}) = \sqrt{\frac{3}{2}} I_{rM} e^{j\omega_r t} \\ \bar{v}_r^r &= \sqrt{\frac{2}{3}}(v_{ra} + \alpha v_{rb} + a^2 v_{rc}) = \sqrt{\frac{3}{2}} V_{rM} e^{j\omega_r t}\end{aligned}\quad (9.2)$$

Si noti quindi che le espressioni (9.1)-(9.2) definiscono ognuna dei fasori spaziali su un sistema di riferimento solidale con l'avvolgimento su cui vengono calcolati. Per determinare ora le espressioni che legano tensione e corrente nel dominio dei fasori spaziali, si considerino le equazioni nelle grandezze di fase indicate in (9.3).

$$\begin{aligned}v_{sa} &= R_s i_{sa} + \frac{d}{dt} \psi_{sa} & v_{ra} &= 0 = R_r i_{ra} + \frac{d}{dt} \psi_{ra} \\ v_{sb} &= R_s i_{sb} + \frac{d}{dt} \psi_{sb} & v_{rb} &= 0 = R_r i_{rb} + \frac{d}{dt} \psi_{rb} \\ v_{sc} &= R_s i_{sc} + \frac{d}{dt} \psi_{sc} & v_{rc} &= 0 = R_r i_{rc} + \frac{d}{dt} \psi_{rc}\end{aligned}\quad (9.3)$$

Che in termini fasoriali possono essere espresse come indicato in (9.4).

$$\begin{aligned}\bar{v}_s^s &= R_s \bar{i}_s^s + \frac{d}{dt} \bar{\psi}_s^s \\ \bar{v}_r^r &= R_r \bar{i}_r^r + \frac{d}{dt} \bar{\psi}_r^r = 0\end{aligned}\quad (9.4)$$

I flussi concatenati di statore e rotore, considerando un generico sfasamento  $\theta_m$  tra gli avvolgimenti di statore e rotore, presentano le espressioni (9.5)-(9.6)

$$\begin{aligned}\psi_{sa} &= L_s i_{sa} + \overbrace{L_s \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)}^{L_{sab}} i_{sb} + L_s \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) i_{sb} + \\ &\quad + L_m \cos(\theta_m) i_{ra} + L_m \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{rb} + L_m \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{rc} \\ \psi_{sb} &= L_s \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) i_{sa} + L_s i_{sb} + L_s \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) i_{sc} + \\ &\quad + L_m \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{ra} + L_m \cos(\theta_m) i_{rb} + L_m \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{rc}\end{aligned}\quad (9.5)$$

$$\begin{aligned}\psi_{sb} &= L_s \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) i_{sa} + L_s \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) i_{sb} + L_s i_{sc} + \\ &\quad + L_m \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{ra} + L_m \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{rb} + L_m \cos(\theta_m) i_{rc} \\ \psi_{ra} &= L_r i_{sa} + L_r \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) i_{rb} + L_r \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) i_{rb} + \\ &\quad + L_m \cos(-\theta_m) i_{ra} + L_m \cos\left(-\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{rb} + L_m \cos\left(-\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{rc} \\ \psi_{rb} &= L_r \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) i_{ra} + L_r i_{rb} + L_r \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) i_{sc} + \\ &\quad + L_m \cos\left(-\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{sa} + L_m \cos(-\theta_m) i_{sb} + L_m \cos\left(-\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{sc} \\ \psi_{rb} &= L_r \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) i_{ra} + L_r \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) i_{rb} + L_r i_{rc} + \\ &\quad + L_m \cos\left(-\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{sa} + L_m \cos\left(-\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{sb} + L_m \cos(-\theta_m) i_{sc}\end{aligned}\quad (9.6)$$

Ora, moltiplicando le equazioni precedenti per 1,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$  e sommandole tra loro, in maniera analoga a quanto fatto per il sincrono, è possibile ottenere le equazioni

nei fasori sp aziali (9.7). Si noti come il secondo termine delle espressioni (9.7) esprime il mutuo accoppiamento tra statore e rotore, ma i fasori sono espressi su un sistema di riferimento che non è lo stesso del resto dell'espressione in cui si trovano.

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_s^s &= \frac{3}{2}L_s\bar{i}_s^s + \overbrace{\frac{3}{2}L_m e^{j\theta_m}\bar{i}_r^r}^{\text{termine accoppiamento}} \\ \bar{\psi}_r^r &= \frac{3}{2}L_r\bar{i}_r^r + \underbrace{\frac{3}{2}L_m e^{-j\theta_m}\bar{i}_s^s}_{\text{termine accoppiamento}}\end{aligned}\quad (9.7)$$

Analizzando ora il contributo di flusso concatenato dovuto solo ai termini di mutuo accoppiamento espresso nelle e qu azioni (9.8) e (9.9), si può procedere come fatto per la macchina sincrona, moltiplicano per  $\sqrt{2/3}$  e per  $1, \alpha, \alpha^2$  le equazioni e successivamente sommando le equazioni come i ndicato in (9.10).

$$\begin{aligned}\psi'_{sa} &= L_m \cos \theta_m i_{ra} + L_m \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{rb} + L_m \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{rc} \\ \psi'_{sb} &= L_m \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{ra} + L_m \cos \theta_m i_{rb} + L_m \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{rc} \\ \psi'_{sc} &= L_m \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{ra} + L_m \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{rb} + L_m \cos \theta_m i_{rc}\end{aligned}\quad (9.8)$$

$$\begin{aligned}\psi'_{ra} &= L_m \cos(-\theta_m) i_{sa} + L_m \cos\left(-\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{sb} + L_m \cos\left(-\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{sc} \\ \psi'_{rb} &= L_m \cos\left(-\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{sa} + L_m \cos(-\theta_m) i_{sb} + L_m \cos\left(-\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{sc} \\ \psi'_{rc} &= L_m \cos\left(-\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{sa} + L_m \cos\left(-\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{sb} + L_m \cos(-\theta_m) i_{sc}\end{aligned}\quad (9.9)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \left( \begin{aligned} &\psi'_{sa} = L_m \cos \theta_m i_{ra} + L_m \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{rb} + L_m \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{rc} \\ &+ \\ &\alpha \psi'_{sb} = \alpha L_m \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{ra} + \alpha L_m \cos \theta_m i_{rb} + \alpha L_m \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{rc} \\ &+ \\ &\alpha^2 \psi'_{sc} = \alpha^2 L_m \cos\left(\theta_m + \frac{2}{3}\pi\right) i_{ra} + \alpha^2 L_m \cos\left(\theta_m - \frac{2}{3}\pi\right) i_{rb} + \alpha^2 L_m \cos \theta_m i_{rc} \end{aligned} \right) \quad (9.10)$$

Elaborando le espressioni con le formule di somma e sottrazione dei coseni si può ottenere la relazione nei fasori spaziali (9.11) dove appunto si ritrova la definizione del fasore spaziale  $\bar{i}_r^r$  riportata in (9.2). In maniera analoga si può operare sulle equazioni rotoriche ottenendo la (9.12).

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_s^{\prime s} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{3}{2} L_m e^{j\theta_m} i_{ra} + \frac{3}{2} L_m e^{j\theta_m} \alpha i_{rb} + \frac{3}{2} L_m e^{j\theta_m} \alpha^2 i_{rc} \right) = \\ &= \frac{3}{2} L_m e^{j\theta_m} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}} (i_{ra} + \alpha i_{rb} + \alpha^2 i_{rc})}_{\bar{i}_r^r} = \frac{3}{2} L_m e^{j\theta_m} \bar{i}_r^r\end{aligned}\quad (9.11)$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_r^{\prime r} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{3}{2} L_m e^{-j\theta_m} i_{sa} + \frac{3}{2} L_m e^{-j\theta_m} \alpha i_{sb} + \frac{3}{2} L_m e^{-j\theta_m} \alpha^2 i_{sc} \right) = \\ &= \frac{3}{2} L_m e^{-j\theta_m} \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}} (i_{sa} + \alpha i_{sb} + \alpha^2 i_{sc})}_{\bar{i}_s^s} = \frac{3}{2} L_m e^{-j\theta_m} \bar{i}_s^s\end{aligned}\quad (9.12)$$

Considerando ora di alimentare lo statore a pulsazione  $\omega$ , le relazioni (9.11) - (9.12) consentono di ricavare il valore della pulsazione dei fasori rotorici  $\omega_r$  in funzione della pulsazione statorica e della posizione del rotore  $\theta_m$  com e indicato nelle(9.13).

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_s^{\prime s} = \psi_s^{\prime s} e^{j\omega t} &= \frac{3}{2} L_m e^{j\theta_m} \bar{i}_r^r = \frac{3}{2} L_m e^{j\theta_m} I_r e^{j\omega_r t} \quad \rightarrow \quad \omega = \omega_r + \theta_m \\ \bar{\psi}_r^{\prime r} = \psi_r^{\prime r} e^{j\omega_r t} &= \frac{3}{2} L_m e^{-j\theta_m} \bar{i}_s^s = \frac{3}{2} L_m e^{-j\theta_m} I_s e^{j\omega t} \quad \rightarrow \quad \omega_r = \omega - \theta_m\end{aligned}\quad (9.13)$$

Si consideri ora la macchina a regime, alimentata da una terna simmetrica di tensioni statoriche a pulsazione  $\omega$ , con gli avvolgimenti rotorici chiusi in corto circuito e con il rotore rotante a una generica pulsazione  $\omega_m$ . Le equazioni assumono la forma indicata in (9.14).

$$\begin{aligned}\bar{v}_s^s &= R_s \bar{i}_s^s + \frac{d}{dt} \bar{\psi}_s^s = R_s I_s e^{j\omega t} + \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} L_s \overbrace{I_s e^{j\omega t}}^{\bar{i}_s^s} + \frac{3}{2} L_m e^{j\omega_m t} \overbrace{I_r e^{j(\omega - \omega_m)t}}^{\bar{i}_r^r} \right) \\ \bar{v}_r^r &= 0 = R_r \bar{i}_r^r + \frac{d}{dt} \bar{\psi}_r^r = R_r I_r e^{j(\omega - \omega_m)t} + \frac{d}{dt} \left( \frac{3}{2} L_r \overbrace{I_r e^{j(\omega - \omega_m)t}}^{\bar{i}_r^r} + \frac{3}{2} L_m e^{-j\omega_m t} \overbrace{I_s e^{j\omega t}}^{\bar{i}_s^s} \right)\end{aligned}\quad (9.14)$$

Da cui:

$$\begin{aligned}\bar{v}_s^s &= R_s I_s e^{j\omega t} + j\omega \frac{3}{2} L_s I_s e^{j\omega t} + j\omega \frac{3}{2} L_m I_r e^{j\omega t} = \\ &= R_s \bar{i}_s^s + jX_s \bar{i}_s^s + jX_m \bar{i}_r^s \\ 0 &= R_r I_r e^{j(\omega - \omega_m)t} + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_r I_r e^{j(\omega - \omega_m)t} + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_m I_s e^{j(\omega - \omega_m)t}\end{aligned}\quad (9.15)$$

Come si può osservare la prima equazione presenta tutte le grandezze espresse nel sistema di riferimento statorico mentre la seconda equazione tutte le grandezze espresse nel sistema di riferimento rotorico a frequenza  $\omega - \omega_m$ .

Per semplificare lo studio della macchina a regime è preferibile ottenere un **modello circuitale isofrequenziale** ed è quindi necessario elaborare ulteriormente l'equazione rotorica al fine di riportare i fasori sul sistema di riferimento statorico e renderla isofrequenziale all'equazione statorica. Lo spostamento su assi di riferimento statorici può essere ottenuto semplicemente dividendo la seconda equazione per  $e^{-j\omega_m t}$  in quanto il rotore si trova spostato di questa quantità rispetto il sistema di riferimento statorico o tenendo quindi la (9.16).

$$\begin{aligned}0 &= \left( R_r I_r e^{j(\omega - \omega_m)t} + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_r I_r e^{j(\omega - \omega_m)t} + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_m I_s e^{j(\omega - \omega_m)t} \right) e^{j\omega_m t} = \\ &= R_r I_r e^{j\omega t} + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_r I_r e^{j\omega t} + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_m I_s e^{j\omega t} = \\ &= R_r \bar{i}_r^s + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_r \bar{i}_r^s + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s^s\end{aligned}\quad (9.16)$$

Per rendere l'equazione rotorica isofrequenziale all'equazione statorica si introduce la quantità **scorimento** definita in (9.17).

$$x = \frac{\omega - \omega_m}{\omega} \quad \rightarrow \quad \omega - \omega_m = x\omega \quad (9.17)$$

L'equazione (9.16) può essere quindi scritta come indicato in (9.18) ed essendo chiuso in corto circuito il rotore, è possibile (in tutti i casi in cui  $\omega_m < \omega$ ) dividere per  $x$  l'equazione (9.18) ottenendo l'equazione (9.19), in cui la dipendenza dalla velocità meccanica è stata trasferita al termine resistivo rendendo quindi isofrequenziale l'equazione ottenuta all'equazione di statore.

$$0 = R_r \bar{i}_r^s + jx\omega \frac{3}{2} L_r \bar{i}_r^s + jx\omega \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s^s \quad (9.18)$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{R_r}{x} \bar{i}_r^s + j\omega \frac{3}{2} L_r \bar{i}_r^s + j\omega \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s^s = \\
 &= \frac{R_r}{x} \bar{i}_r^s + jX_r \bar{i}_r^s + jX_m \bar{i}_s^s
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

Il modello della macchina è quindi possibile scriverlo come indicato in (9.20), in cui sono stati ommessi gli apici indicanti il sistema di riferimento. Infatti, salvo diversa indicazione, nel seguito i fasori spaziali si intenderanno riferiti al sistema fisso statorico.

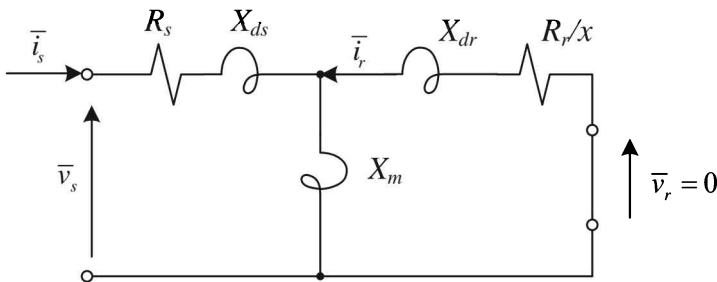
$$\begin{aligned}
 \bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + jX_s \bar{i}_s + jX_m \bar{i}_r \\
 0 &= \frac{R_r}{x} \bar{i}_r + jX_r \bar{i}_r + jX_m \bar{i}_s
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

Per ottenere una rappresentazione circuitale del modello indicato in (9.20) è sufficiente sommare e sottrarre i termini  $jX_m \bar{i}_r$  e  $jX_m \bar{i}_s$  alle rispettive equazioni ottenendo la formulazione (9.22).

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + jX_s \bar{i}_s + jX_m \bar{i}_r \pm jX_m \bar{i}_s \\
 0 &= \frac{R_r}{x} \bar{i}_r + jX_r \bar{i}_r + jX_m \bar{i}_s \pm jX_m \bar{i}_r
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + j \overbrace{(X_s - X_m)}^{X_{ds}} \bar{i}_s + jX_m (\bar{i}_r + \bar{i}_s) \\
 0 &= \frac{R_r}{x} \bar{i}_r + j \underbrace{(X_r - X_m)}_{X_{dr}} \bar{i}_r + jX_m (\bar{i}_r + \bar{i}_s)
 \end{aligned} \tag{9.22}$$

Le equazioni (9.22) possono essere interpretate con il circuito indicato in Fig 9.2, che prende il nome di **modello trasfornatorio** della macchina asincrona.



■ Fig 9.2. Modello trasfornatorio a regime della macchina asincrona



## 9.2 COPPIA DELLA MACCHINA ASINCRONA

Per determinare la coppia erogabile dalla macchina a regime è possibile scrivere un bilancio energetico considerando le equazioni statoriche e rotoriche (9.23) scritte sul sistema di riferimento di statore.

$$\begin{aligned}\bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + j\omega \frac{3}{2} L_s \bar{i}_s + j\omega \frac{3}{2} L_m \bar{i}_r \\ 0 &= R_r \bar{i}_r + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_r \bar{i}_r + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s\end{aligned}\quad (9.23)$$

Moltiplicando l'equazione statorica per  $\underline{i}_s$  (fasore coniugato della corrente statorica) e l'equazione rotorica per  $\underline{i}_r$  (fasore coniugato della corrente rotori ca) si ottengono le relazioni (9.24).

$$\begin{aligned}P &= \operatorname{Re}(\bar{v}_s \underline{i}_s) = \operatorname{Re}\left(R_s \bar{i}_s \underline{i}_s + j\omega \frac{3}{2} L_s \bar{i}_s \underline{i}_s + j\omega \frac{3}{2} L_m \bar{i}_r \underline{i}_s\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(\underbrace{R_s \bar{i}_s \underline{i}_s}_{P_{\text{joule}}} + \underbrace{j\omega \frac{3}{2} L_s \bar{i}_s \underline{i}_s}_{\operatorname{Re}=0} + j\omega \frac{3}{2} L_m \bar{i}_r \underline{i}_s\right) \\ 0 &= \operatorname{Re}\left(R_r \bar{i}_r \underline{i}_r + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_r \bar{i}_r \underline{i}_r + j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s \underline{i}_r\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(\underbrace{R_r \bar{i}_r \underline{i}_r}_{P_{\text{joule}}} + \underbrace{j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_r \bar{i}_r \underline{i}_r}_{\operatorname{Re}=0} + j\omega \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s \underline{i}_r - j\omega_m \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s \underline{i}_r\right)\end{aligned}\quad (9.24)$$

Osservando l'equazione statorica, si può notare come la potenza entrante nello statore  $\operatorname{Re}(\bar{v}_s \underline{i}_s)$  si ripartisca tra le perdite joule di statore  $R_s \bar{i}_s \underline{i}_s$  e un termine  $\operatorname{Re}(j\omega \frac{3}{2} L_m \bar{i}_r \underline{i}_s)$  che rappresenta la potenza trasmessa dallo statore al rotore. Analizzando l'espressione di rotore si può notare come compaia lo stesso termine cambiato di segno  $\operatorname{Re}(j\omega \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s \underline{i}_r) = -\operatorname{Re}(j\omega \frac{3}{2} L_m \bar{i}_r \underline{i}_s)$  e questo termine si ripartisca (la somma è infatti nulla al rotore) tra le perdite joule di rotore  $R_r \bar{i}_r \underline{i}_r$  e il termine  $\operatorname{Re}(-j\omega_m \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s \underline{i}_r)$  che, per il bilancio delle potenze, rappresenta la potenza meccanica uscente dal sistema.

L'espressione trovata della potenza meccanica però non è di agevole utilizzo e risulta più conveniente esprimere la potenza meccanica in funzione dello scorrimento. L'equazione rotorica può essere qui ndi elaborata come indicato in (9.25).

$$\begin{aligned}
 0 &= \operatorname{Re} \left( R_r i_r^2 + \underbrace{j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_r i_r^2}_{\operatorname{Re}=0} + j\omega \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s i_r - j\omega_m \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s i_r \right) = \\
 &= R_r i_r^2 + \operatorname{Re} \left( j(\omega - \omega_m) \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s i_r \right) \rightarrow \frac{R_r i_r^2}{(\omega - \omega_m)} = -\operatorname{Re} \left( j \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s i_r \right)
 \end{aligned} \tag{9.25}$$

Sostituendo la relazione trovata nell'espressione della potenza meccanica e ricordando la definizione di scorrimento  $x = (\omega - \omega_m)/\omega$  si può ottenere l'espressione (9.26).

$$\begin{aligned}
 P_{mecc} &= \operatorname{Re} \left( -j\omega_m \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s i_r \right) = -\omega_m \operatorname{Re} \left( j \frac{3}{2} L_m \bar{i}_s i_r \right) = \\
 &= \omega_m \frac{R_r i_r^2}{(\omega - \omega_m)} = (1-x) \cancel{\omega} \frac{R_r i_r^2}{x \cancel{\omega}} = \\
 &= \frac{1-x}{x} R_r i_r^2
 \end{aligned} \tag{9.26}$$

E quindi l'espressione della coppia (9.27).

$$T = \frac{P_{mecc}}{\omega_m} = \frac{\cancel{1-x} R_r i_r^2}{x \cancel{(1-x)} \omega} = \frac{R_r i_r^2}{x \omega} \tag{9.27}$$

### 9.3 MODELLI RIDOTTI

Il modello individuato della macchina asincrona espresso dalle equazioni (9.28) presenta le medesime problematiche del modello completo del trasformatore, in cui l'individuazione dei termini  $X_{ds}$  e  $X_{dr}$  è estremamente difficile solo attraverso prove ai morsetti

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + jX_{ds} \bar{i}_s + jX_m (\bar{i}_r + \bar{i}_s) \\
 0 &= \frac{R_r}{x} \bar{i}_r + jX_{dr} \bar{i}_r + jX_m (\bar{i}_r + \bar{i}_s)
 \end{aligned} \tag{9.28}$$

Nel caso della macchina ad induzione, essendo il rotore chiuso in corto circuito e quindi solitamente non accessibile, è comodo operare una trasformazione delle grandezze rotoriche al fine di semplificare il modello proposto. In particolare si introdurranno nuove variabili tali da non modificare le trasformazioni energetiche della macchina come indicato in (9.29).

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\bar{v}_r^*}{\bar{v}_r} = \frac{\bar{i}_r^*}{\bar{i}_r} = \frac{\bar{\psi}_r^*}{\bar{\psi}_r} & \bar{v}_r \bar{i}_r &= \bar{v}_r^* \bar{i}_r^* \\
 \bar{v}_r &= \frac{\bar{v}_r^*}{H} & \bar{i}_r &= H \bar{i}_r^* & \bar{\psi}_r &= \frac{\bar{\psi}_r^*}{H}
 \end{aligned}
 \tag{9.29}$$

Le equazioni e i legami flussi correnti assumono quindi la forma indicata in (9.29)-(9.31).

$$\begin{aligned}
 \bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + jX_s \bar{i}_s + jX_m \bar{i}_r & \bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + jX_s \bar{i}_s + jX_m H \bar{i}_r^* \\
 \bar{v}_r = 0 &= \frac{R_r}{x} \bar{i}_r + jX_r \bar{i}_r + jX_m \bar{i}_s & \rightarrow \frac{\bar{v}_r^*}{H} = 0 &= \frac{R_r}{x} H \bar{i}_r^* + jX_r H \bar{i}_r^* + jX_m \bar{i}_s
 \end{aligned}
 \tag{9.30}$$

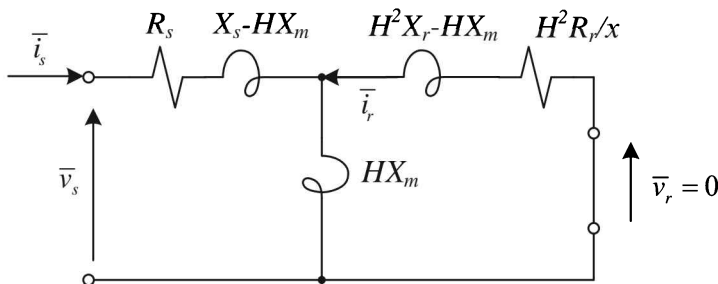
$$\begin{aligned}
 \bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + jX_s \bar{i}_s + jX_m H \bar{i}_r^* \\
 \bar{v}_r^* = 0 &= \frac{R_r}{x} H^2 \bar{i}_r^* + jX_r H^2 \bar{i}_r^* + jHX_m \bar{i}_s
 \end{aligned}
 \tag{9.31}$$

Le equazioni si possono quindi elaborare in modo analogo a quanto fatto precedentemente andando ad aggiungere  $\pm jX_m H \bar{i}_r^*$  e  $\pm jX_m H \bar{i}_s$  ottenendo le espressioni (9.32), che possono essere interpretate circuitalmente come indicato in Fig. 9.3.

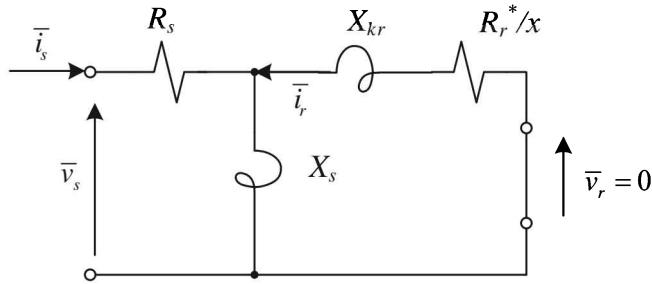
$$\begin{aligned}
 \bar{v}_s &= R_s \bar{i}_s + j(X_s - HX_m) \bar{i}_s + jHX_m (\bar{i}_r^* + \bar{i}_s) \\
 0 &= \frac{R_r}{x} H^2 \bar{i}_r^* + j(X_r H^2 - HX_m) \bar{i}_r^* + jHX_m (\bar{i}_r^* + \bar{i}_s)
 \end{aligned}
 \tag{9.32}$$

Ottenuto questo modello trasformato è possibile scegliere opportunamente il parametro  $H$  al fine di eliminare una delle due induttanze di dispersione riducendo il numero di parametri, come indicato in (9.33).

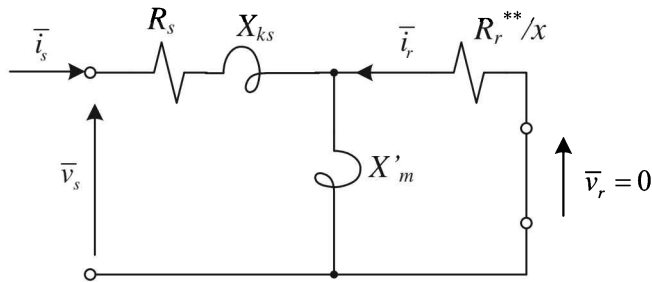
$$\begin{aligned}
 L_s - HL_m &= 0 & \rightarrow & H = \frac{L_s}{L_m} \\
 H^2 L_r - HL_m &= 0 & \rightarrow & H = \frac{L_m}{L_r}
 \end{aligned}
 \tag{9.33}$$



■ Fig. 9.3. Modello circuitale trasformato



■ Fig. 9.4 Modello a 4 parametri con induttanza di corto circuito rotorica



■ Fig. 9.5 Modelli a 4 parametri con induttanza di corto circuito statorica.

Eliminando l'induttanza di dispersione statorica si ottiene il circuito indicato in Fig. 9.4 dove il parametro  $X_{kr}$  prende il nome di **reattanza di corto circuito rotorica**. Eliminando invece l'induttanza di dispersione statorica si ottiene il circuito di Fig. 9.5 dove il parametro  $X_{ks}$  prende il nome di **reattanza di corto circuito statorica**.

$$\begin{aligned} X_{kr} &= X_s \left( \frac{X_s X_r}{X_m^2} - 1 \right) & R_r^* &= R_r \frac{X_s^2}{X_m^2} \\ X_{ks} &= X_s - \frac{X_m^2}{X_r} & R_r^{**} &= R_r \frac{X_m^2}{X_r^2} \end{aligned} \quad (9.34)$$

Nel seguito, per il calcolo delle caratteristiche a regime e per l'individuazione dei parametri della macchina si utilizzerà il modello a 4 parametri con induttanza di corto circuito rotorica.

Il modello a 4 parametri con induttanza di corto circuito statorica verrà invece utilizzato principalmente come modello di riferimento nei sistemi elettronici di controllo del motore.

## 9.4 PROVE ED INDIVIDUAZIONE DEI PARAMETRI

Poiché il modello a regime della macchina ad induzione è molto simile a quello di un trasformatore, per l'individuazione dei parametri del modello si ricorre a prove simili a quelle utilizzate nel caso del trasformatore, in particolare si effettueranno due prove:

- Prova a vuoto
- Prova a rotore bloccato (o di corto circuito)

Nel seguito si farà riferimento al modello a 4 parametri con induttanza di corto circuito rotorica. I parametri nominali solitamente riportati sulla targa di una macchina asincrona e che serviranno come riferimento per le prove sono:

- Potenza meccanica resa
- Tensione nominale (concatenata)
- Corrente nominale (assorbita allo statore)
- Frequenza nominale
- Velocità nominale

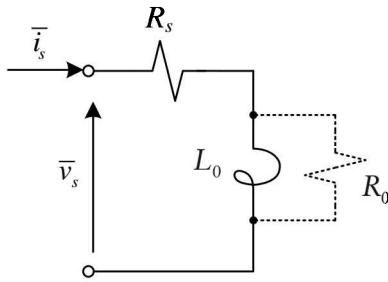
Solitamente la macchina asincrona è progettata per avere il fattore di potenza nominale  $\cos \varphi_n$  il più vicino possibile al massimo raggiungibile in tutte le condizioni di carico per la macchina (in modo da ridurre la potenza reattiva richiesta). Definita ora l'impedenza nominale  $Z_n$  come indicato in (9.35), è possibile usare tale definizione per evidenziare l'ordine di grandezza tipico dei parametri del circuito equivalente.

$$Z_n = \frac{V_n}{\sqrt{3}I_n} \quad (9.35)$$

### 9.4.1 Prova a vuoto

La prova a vuoto si effettua senza collegare il carico meccanico ed alimentando la macchina a tensione nominale. Tale prova serve per individuare i parametri trasversali del circuito equivalente della macchina. In condizione di assenza di carico meccanico la velocità di rotazione del rotore è praticamente la velocità di sincronismo, di conseguenza  $R_r/x \approx \infty$  e il circuito equivalente diventa quello indicato in Fig. 9.6 dove solitamente si considera una resistenza  $R_0$  in parallelo alla reattanza trasversale per tenere conto delle perdite nel ferro in maniera analoga a quanto fatto per il trasformatore.

Con la prova a vuoto si identificano quindi i parametri trasversali della macchina. I valori tipici sono:



■ Fig. 9.6 Circuito equivalente a vuoto

Corrente a vuoto:  $i_o = I_o/I_n = 0.20 \div 0.40$   
 Impedenza a vuoto:  $z_o = Z_o/Z_n = 2.5 \div 5$ .

Come si può notare il valore della corrente a vuoto della macchina è molto più elevato rispetto a quello del trasformatore e quindi solitamente non è possibile trascurare le perdite joule di statore ( $R_s$ ) nell'identificazione dei parametri a vuoto.

## 9.4.2 Prova a rotore bloccato

La prova a rotore bloccato viene effettuata bloccando meccanicamente il rotore della macchina ed alimentando la macchina stessa a tensione ridotta al fine di far circolare la corrente nominale della macchina evitando in questo modo possibili malfunzionamenti. Con la prova a rotore bloccato si identificheranno i parametri longitudinali della macchina trascurando (anche se in questo caso l'approssimazione è più grossolana) il contributo dei parametri trasversali.

I valori tipici delle grandezze a rotore bloccato sono:

corrente di corto circuito a rotore bloccato :  $i_{sk} = I_{sk}/I_n = 3 \div 7$

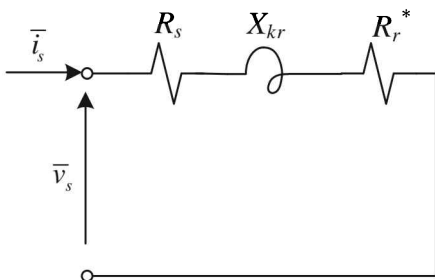
resistenza di statore :  $r_s = R_s/Z_n = 0.005 \div 0.030$

resistenza di rotore (eq. allo statore):  $r_r = R'_r/Z_n = 0.005 \div 0.030$

reattanza di corto circuito :  $x_{kr} = X_{kr}/Z_n = 0.15 \div 0.30$

## 9.5 CARATTERISTICA MECCANICA

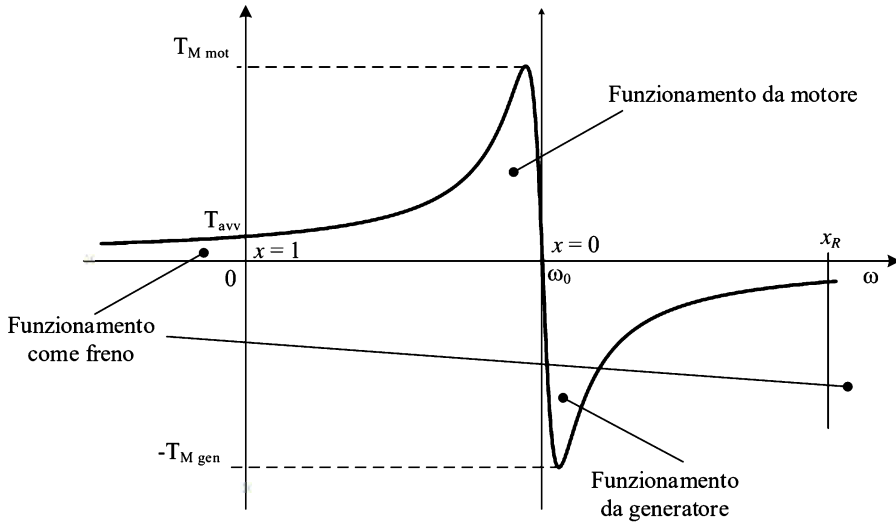
Si consideri ora il circuito semplificato di Fig. 9.3 con induttanza di corto circuito rotorica. Considerando la macchina alimentata a tensione e frequenza fissate, è



■ Fig. 9.7 Circuito equivalente in corto circuito

possibile ricavare l'espressione della coppia di regime in funzione della velocità di rotazione della macchina ovvero la caratteristica meccanica del motore. Tale caratteristica assume la forma rappresentata in Fig 9.8.

È possibile evidenziare alcune zone e punti significativi della caratteristica e come questi dipendano dalle caratteristiche della macchina.



■ Fig. 9.8 Caratteristica meccanica.

### 9.5.1 Coppia di avviamento

La coppia di avviamento è la coppia che si ottiene a velocità nulla del rotore nel funzionamento come motore e può essere ricavata imponendo lo scorrimento pari all'unità ( $x=1$ ). In questo caso, utilizzando il circuito equivalente ridotto in corto circuito (Fig. 9.7) è possibile individuare il modulo della corrente come indicato in (9.36).

$$i_{avv} \approx \frac{v_s}{\sqrt{(R_s + R_r)^2 + X_{kr}^2}} \quad (9.36)$$

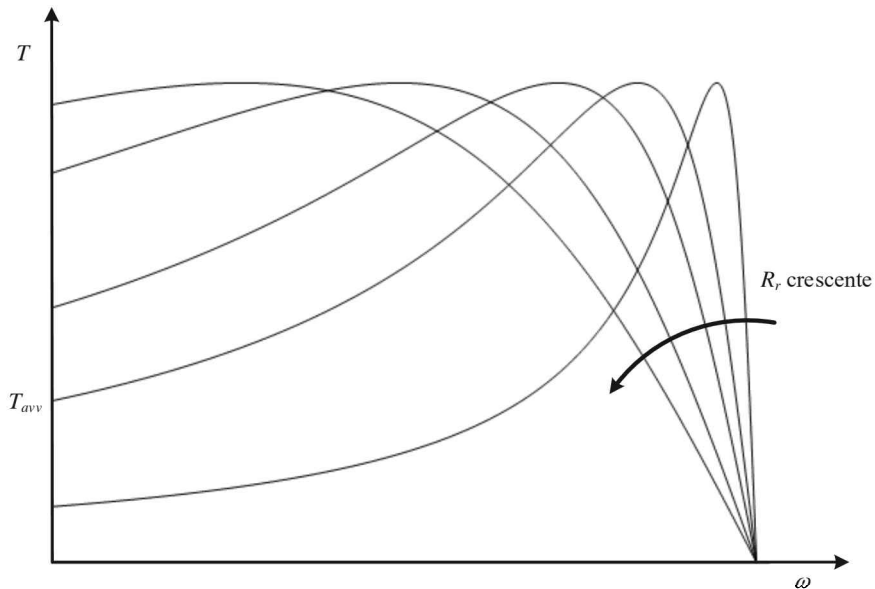
La coppia può e ssere quindi calcolata come indicato in (9.37).

$$T_{avv} = \frac{R_r i_{avv}^2}{\omega} = \frac{R_r v_s^2}{\omega ((R_s + R_r)^2 + X_{kr}^2)} \quad (9.37)$$

A frequenza industriale  $X_{kr}$  è solitamente prevalente rispetto al termine resistivo ( $X_{kr}$  è circa dieci volte più grande del termine resistivo) e quindi la coppia di avviamento può essere calcolata in forma approssimata come indicato in (9.38).

$$T_{avv} \approx \frac{v_s^2}{\omega X_{kr}^2} R_r \quad (9.38)$$

La (9.38) evidenzia come poter cambiare la coppia di avviamento è possibile agire sulla resistenza rotorica. In Fig. 9.8 è rappresentato l'andamento della caratteristica meccanica all'aumentare della resistenza rotorica.



■ Fig.9.9 Caratteristica meccanica con resistenza rotorica crescente.

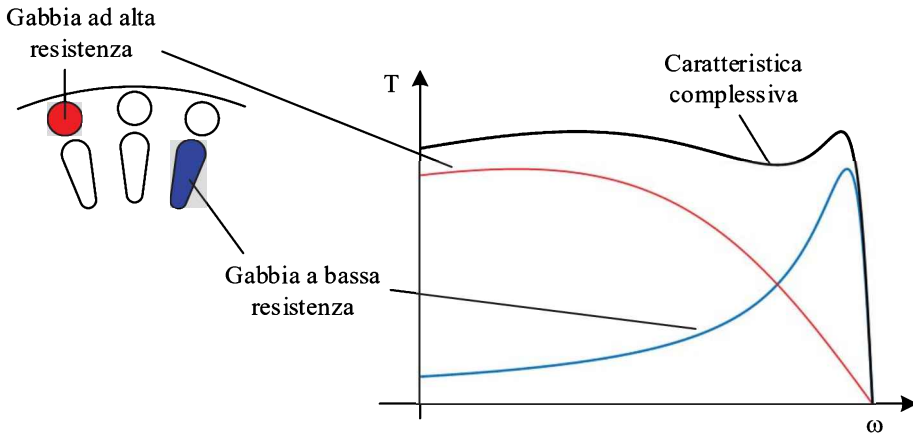
Come si può notare dalla caratteristica meccanica di Fig.9.9, la coppia di avviamento è solitamente bassa a fronte di una elevata corrente di avviamento (fino a 10 volte la corrente nominale in quanto l'impedenza di corto circuito è piccola). Questo rende problematico l'avviamento della macchina a piena tensione direttamente collegata alla rete.

Una delle soluzioni per diminuire le correnti di avviamento e aumentare la coppia, consiste nell'aumentare la resistenza del rotore. Le modalità per aumentare la resistenza possono essere diverse, in particolare se il rotore è avvolto tale aumento può essere ottenuto inserendo una resistenza aggiuntiva esterna, ma tale soluzione è costosa e sostanzialmente non più utilizzata. Un altro accorgimento consiste nello sfruttare i fenomeni di addensamento della corrente che caratterizzano il funzionamento del rotore. Come si è visto infatti la frequenza delle correnti di rotore varia dalla frequenza di alimentazione (quando il rotore è fermo) a pochi [Hz] quando il rotore ruota a velocità prossime la nominale. A frequenze elevate la corrente tende ad addensarsi sulla superficie del rotore mentre a bassa frequenza si distribuisce uniformemente sul rotore, per questa ragione si utilizzano spesso rotor a doppia gabbia o a gabbia profonda.

Nelle fasi iniziali le correnti rotoriche scorrono prevalentemente nella gabbia più esterna ad elevata resistenza, mentre all'aumentare della velocità del rotore le correnti tendono a scorrere nella gabbia più interna a bassa resistenza.

È invece possibile ridurre le correnti di avviamento riducendo la tensione di alimentazione. Tale accorgimento riduce però la coppia di avviamento e può essere

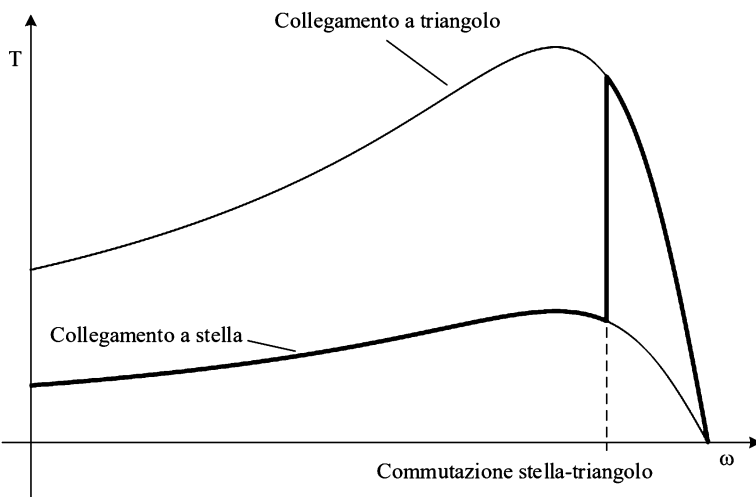




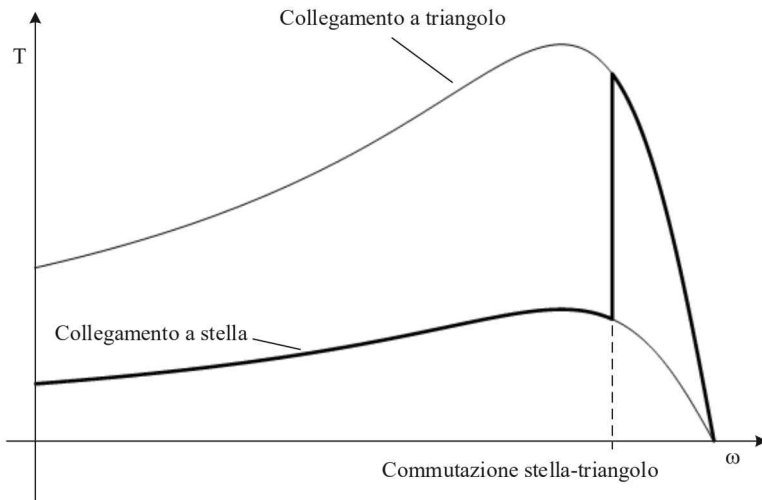
■ Fig.9.10 Rotore a doppia gabbia

utilizzato solo se la coppia resistente applicata al motore è molto bassa nelle fasi iniziali (ad esempio in sistemi di ventilazione). In questo caso si può ricorrere all'**avviamento stella – triangolo**:

- la macchina viene avviata con gli avvolgimenti connessi a stella in modo che la tensione applicata sia ridotta di  $\sqrt{3}$  volte (la coppia si riduce di un fattore 3);
- una volta raggiunta una velocità opportuna (attorno all'80-85% della velocità nominale) gli avvolgimenti vengono commutati a triangolo.



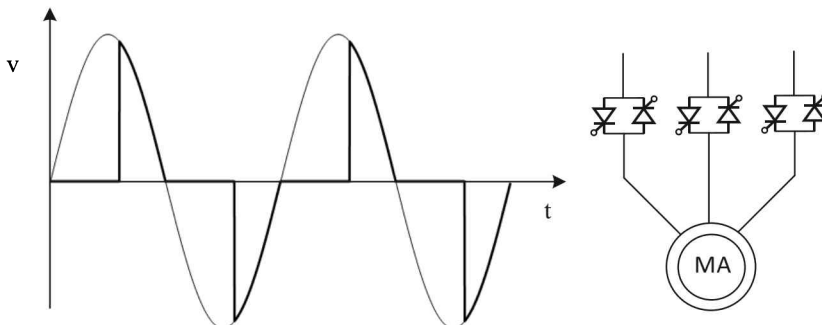
■ Fig. 9.11 Caratteristica meccanica statica per un avviamento stella-triangolo.



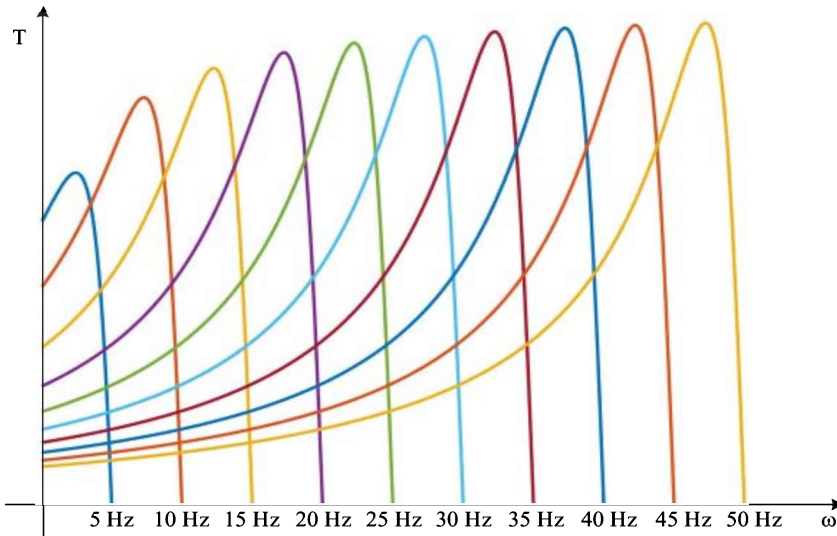
■ Fig. 9.11 Caratteristica meccanica statica per un avviamento stella-triangolo.

Al giorno d'oggi, invece dell'avviamento stella triangolo, si può ricorrere anche a avviatori elettronici che riducono la tensione di alimentazione parzializzando l'onda in ingresso (**soft-start**). Riducendo la tensione di alimentazione, la coppia di avviamento si riduce con il quadrato della tensione.

È invece possibile, disponendo di convertitori statici (**inverter**), modificare tensione e frequenza di alimentazione (mantenendo il rapporto tensione/frequenza costante ottenendo caratteristiche statiche come indicato in Fig.9.12. Questa regolazione consente di limitare le correnti di avviamento e nel contempo di aumentare la coppia di avviamento.



■ Fig.9.12 Avviamento con soft-starter



■ Fig.9.13 Caratteristiche statiche al variare di tensione e frequenza ( $V/f=\text{cost}$ )

### 9.5.2 Coppia massima

Per il calcolo della coppia massima (a tensione e frequenza fissati) si può utilizzare il principio di massimo trasferimento di potenza trascurando il contributo di resistenza statorica. Considerando il circuito di Fig.9.14 la massima potenza trasferita si ha quando è verificata la condizione (9.39).

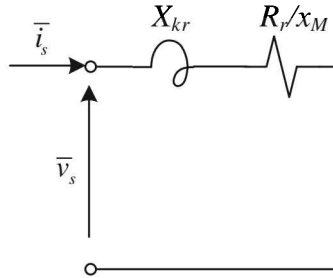
$$X_{kr} = \frac{R_r}{x_M} \rightarrow x_M = \frac{R_r}{X_{kr}} \quad (9.39)$$

La corrente massima si calcola quindi come indicato in .

$$I_M \approx \frac{v_s}{\sqrt{\left(\frac{R_r}{x_M}\right)^2 + X_{kr}^2}} = \frac{v_s}{\sqrt{X_{kr}^2 + X_{kr}^2}} = \frac{v_s}{\sqrt{2}X_{kr}} = \frac{v_s}{\sqrt{2}\omega L_{kr}} \quad (9.40)$$

Da cui la coppia massima ha l'espressione indicata in (9.41), e si può notare come sia proporzionale a  $\frac{1}{\omega^2}$ .

$$T_M \approx \frac{\frac{R_r}{x_M} I_M^2}{\omega} = \frac{X_{kr} \frac{v_s^2}{\sqrt{2}X_{kr}^2}}{\omega} = \frac{v_s^2}{\sqrt{2}\omega^2 L_{kr}} \quad (9.41)$$



■ Fig. 9.14 Circuito per il calcolo della coppia massima

### 9.5.3 Funzionamento da generatore

La macchina asincrona, come tutte le macchine elettriche può funzionare da generatore ed osservando l'espressione della coppia (9.27), appare evidente come tale condizione si verifichi quando la velocità del rotore supera la velocità del campo magnetico al traferro (scorrimento  $x < 0$ ).

In questo caso la macchina eroga potenza elettrica e assorbe potenza meccanica all'albero. Osservando la caratteristica di Fig. 9.2 si può notare come la caratteristica meccanica sia sostanzialmente simmetrica rispetto il punto di velocità di sincronismo. La coppia massima negativa nel funzionamento da generatore risulta leggermente maggiore della coppia massima nel funzionamento da motore. Infatti, non trascurando la resistenza statorica la coppia è pari a:

$$T = \frac{R_r \frac{v_s^2}{x \left( \frac{R_r}{x} + R_s \right)^2 + X_{kr}^2}}{\omega} = \frac{R_r \frac{v_s^2}{x^2 + R_s^2 + 2 \frac{R_r}{x} R_s + X_{kr}^2}}{x \omega} \quad (9.42)$$

Lo scorrimento di coppia massima si ottiene sempre con il **teorema del massimo trasferimento di potenza** imponendo l'uguaglianza (9.43)

$$\sqrt{R_s^2 + X_{kr}^2} = Z = \frac{R_r}{x_M} \rightarrow x_M = \frac{R_r}{Z} \quad (9.43)$$

Sostituendo nell'equazione e considerando che nel funzionamento come motore lo scorrimento è positivo ( $x_M > 0$ ) mentre nel funzionamento come generatore lo scorrimento è negativo ( $x_M < 0$ ), si ottengono le espressioni (9.44)

$$T_{M\text{ mot}} = \frac{\frac{R_r}{Z}}{\frac{R_r}{Z} \omega \frac{R_r^2}{Z^2} + 2 \frac{R_r}{Z} R_s + \underbrace{R_s^2 + X_{kr}^2}_{Z^2}} \frac{v_s^2}{\omega} = \frac{Z}{\omega} \frac{v_s^2}{2Z^2 + 2ZR_s} \quad (9.44)$$

$$T_{M\text{ gen}} = -\frac{Z}{\omega} \frac{v_s^2}{\underbrace{R_s^2 + X_{kr}^2}_{Z^2} + Z^2 - 2ZR_s} = -\frac{Z}{\omega} \frac{v_s^2}{2Z^2 - 2ZR_s}$$

Come si vede nel funzionamento come generatore il denominatore è poco più piccolo di quello come motore e di conseguenza la coppia massima è leggermente maggiore.

#### 9.5.4 Funzionamento come freno

Nel caso in cui la potenza meccanica e la potenza elettrica siano entrambe assorbite la macchina si comporta come freno. Tale condizione di funzionamento si verifica sia per scorrimenti positivi che negativi.

Per scorrimenti positivi è abbastanza semplice identificare questa condizione di funzionamento nel caso in cui lo scorrimento sia maggiore di 1. Ricordando infatti l'espressione della potenza meccanica riportata in (9.45), quando  $x > 1$  la potenza meccanica diventa negativa e quindi assorbita (ricordando le convenzioni di segno adottate). La potenza elettrica rimane invece positiva (e quindi anch'essa assorbita) in quanto per  $x > 1$  si ha semplicemente una riduzione del termine  $R_r/x$  e quindi un aumento delle correnti assorbite, ma nessun cambio di segno del termine di potenza.

$$P_{mecc} = \frac{1-x}{x} R_r i_r^2 \quad (9.45)$$

In questa condizione di funzionamento la macchina assorbe quindi potenza meccanica ed elettrica e queste potenze vengono dissipate per effetto joule sulle resistenze statoriche e rotoriche.

Per scorrimenti negativi si può invece osservare dalla (9.45) come la potenza meccanica sia sempre negativa (assorbita), mentre la potenza elettrica cambia di segno per s scorrimenti negativi tali per cui sia verificata la (9.46).

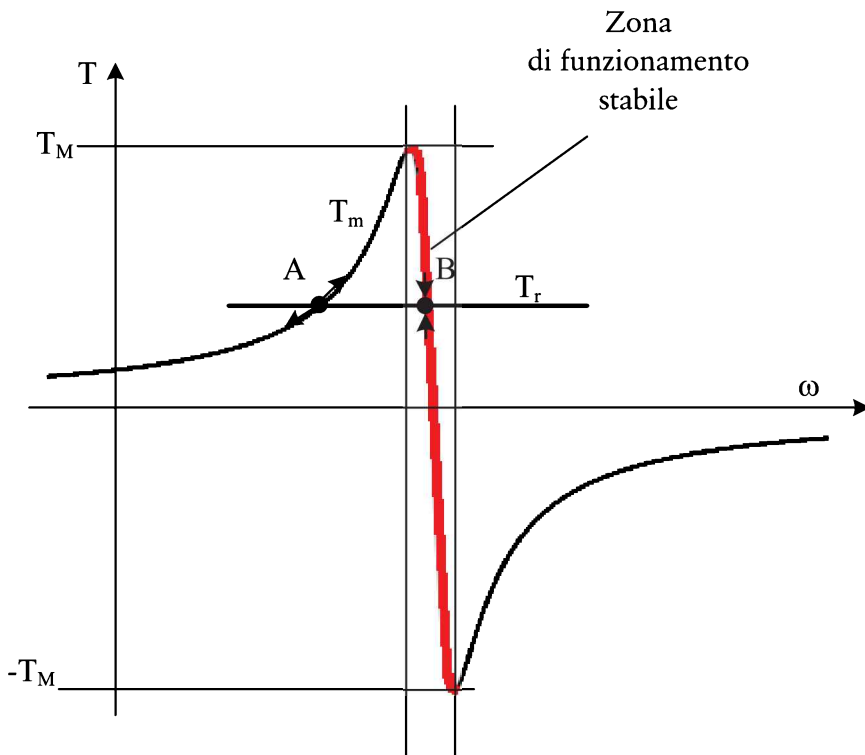
$$R_s + \frac{R_r}{x} > 0 \quad (9.46)$$

Se  $R_s \approx R_r$  (come solitamente accade) la condizione di annullamento della (9.46) è prossima al valore di scorrimento  $x \approx -1$ . Per valori minori di questo scorrimento limite ( $-1 < x < -\infty$ ) la potenza elettrica assume quindi valori positivi (il termine  $R_r / x$  rimane negativo ma diventa sempre più piccolo in modulo rispetto  $R_s$ ) e la macchina si comporta ancora come freno.

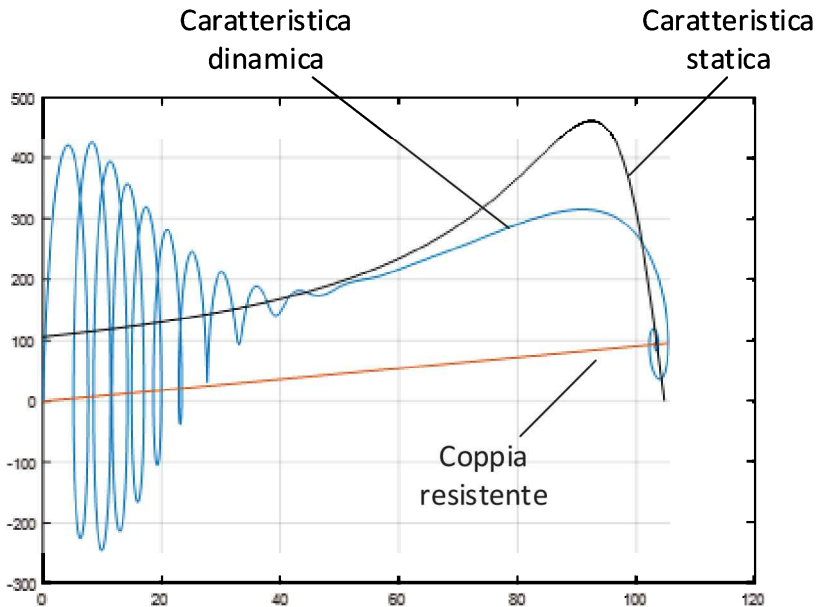
### 9.5.5 Zona di funzionamento stabile e caratteristica dinamica

Identificata la caratteristica meccanica statica è possibile evidenziare anche le zone di funzionamento ottimali per la macchina. Considerata la Fig 9.15 è infatti possibile osservare che a parità di coppia resistente  $T_r$  la macchina (come motore ma analogo discorso si può fare per il funzionamento da generatore) può lavorare in due punti distinti: il punto A a bassa velocità ed a scorrimento elevato e il punto B ad alta velocità e bassi scorrimenti.

È immediato osservare come il funzionamento nel punto B sia stabile in quanto una perturbazione della velocità a parità di coppia resistente, tenda a riportare il



■ Fig.9.15 Zona di funzionamento stabile



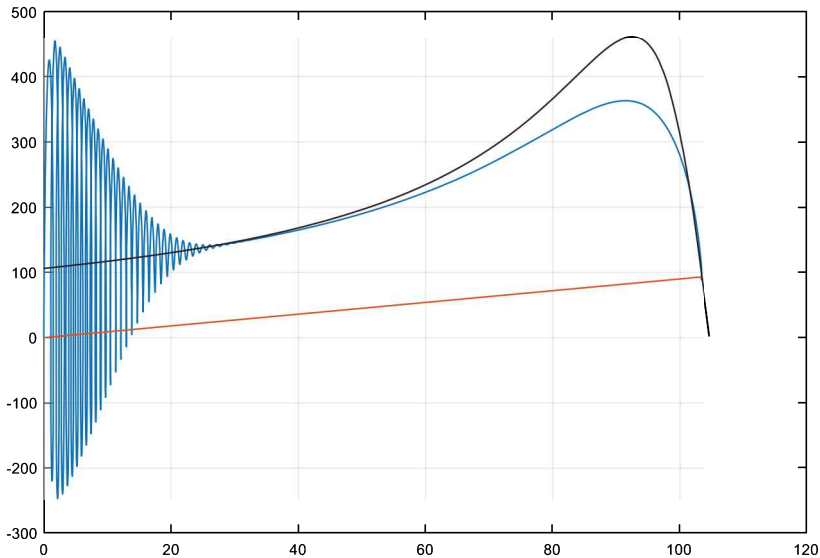
■ Fig.9.16 Esempio di caratteristica meccanica dinamica (macchina a 4 poli)

motore nel punto di partenza. Si consideri ad esempio una perturbazione che tenda a aumentare la velocità del motore: in questo caso la coppia motrice elettromagnetica diminuisce e quindi la coppia resistente frena la macchina. Viceversa una perturbazione che diminuisca la velocità porta ad un incremento della coppia motrice e quindi ad accelerare la macchina.

Nel punto A invece una perturbazione che tenda ad accelerare la macchina porta ad un incremento di coppia motrice che aumenta di conseguenza la velocità della macchina fino a portarla di nuovo nel punto di funzionamento B. Viceversa una perturbazione che riduca la velocità porta ad una analoga riduzione della coppia motrice e quindi ad un arresto della macchina.

È interessante notare inoltre come il punto di funzionamento stabile presenti tendenzialmente un'efficienza maggiore rispetto al corrispondente punto di funzionamento instabile a tensione e frequenze costanti. Infatti, presentando questo punto lo scorrimento minore, le impedenze equivalenti ( $R_s/x$ ) sono maggiori e quindi le correnti assorbite minori. Effetto questo che si traduce in minori perdite negli avvolgimenti. Il punto di funzionamento nominale della macchina è quindi sempre scelto in questa zona.

Per completezza si riporta in Fig.9.16. la caratteristica meccanica dinamica ottenuta avviando la macchina con connessione diretta da rete a tensione e frequenza costanti con una coppia resistente proporzionale alla velocità. Si può notare come



■ Fig. 9.17 Caratteristica meccanica dinamica con inerzia 5 volte maggiore della Fig. 9.15

la forma della caratteristica sia profondamente diversa da quella statica e solo per elevati valori di inerzia la caratteristica di avviamento dinamica tende a sovrapporsi con quella statica. Si ricorda quindi ancora una volta che la caratteristica proposta è una **caratteristica di regime statico**, ottenuta cioè come successione di punti una volta esauriti i transistori elettrici e meccanici.

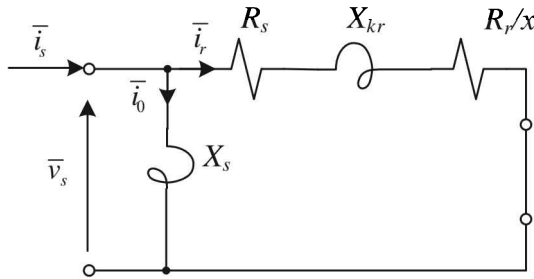
## 9.6 CAMPI DI OPERATIVITÀ

È spesso utile, per valutare il funzionamento della macchina asincrona in un sistema complesso, identificare tutti i possibili punti di funzionamento della stessa in particolari condizioni di alimentazione in modo da evidenziare eventuali criticità del sistema. In particolare si possono identificare i punti di funzionamento a tensione e frequenza imposti (diagramma circolare) e i punti di funzionamento a tensione e frequenza variabili (campo di operatività a tensione e frequenza variabile).

### 9.6.1 Diagramma circolare (tensione e frequenza costanti)

Per determinare la forma del campo di operatività a tensione e frequenza costanti (imposte dal sistema di alimentazione) e cioè i possibili valori e sfasamenti della corrente statorica al variare dello scorrimento si fa riferimento al circuito semplificato di Fig. 9.18.





■ Fig. 9.18. Circuito semplificato

Osservando il circuito si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$\bar{v}_s = \underbrace{\left( R_s + \frac{R_r}{x} \right)}_{R(x)} \bar{i}_r + jX_{kr} \bar{i}_r = R(x) \bar{i}_r + jX_{kr} \bar{i}_r \quad (9.47)$$

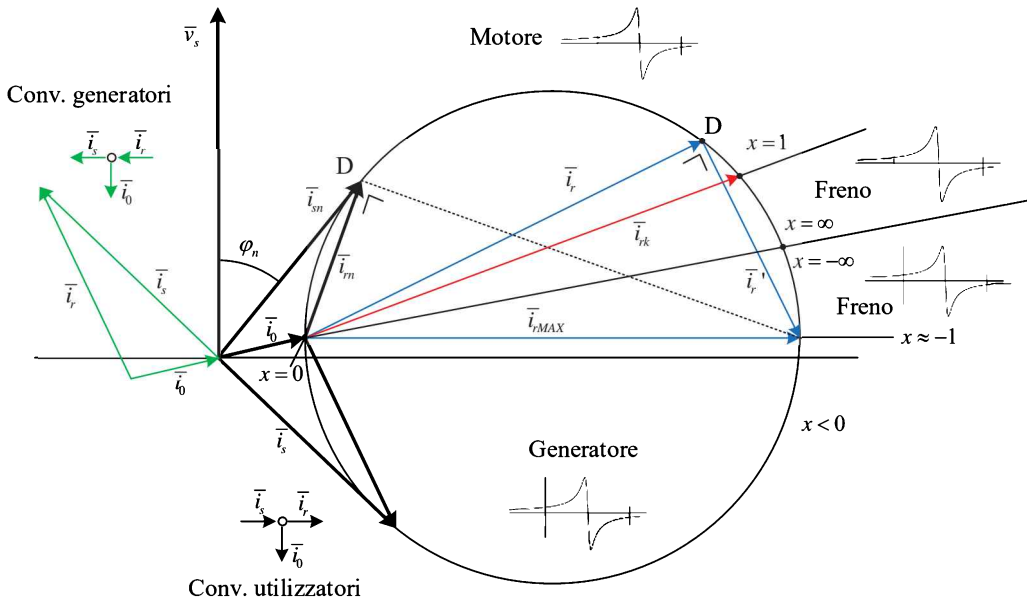
$$\bar{i}_s = \bar{i}_0 + \bar{i}_r$$

Per identificare più facilmente le posizioni assunte dal vettore corrente di statore rispetto la tensione di statore al variare dello scorrimento  $x$  conviene procedere manipolando opportunamente la prima equazione. Dividendo la prima equazione per  $jX_{kr}$  si ottiene:

$$\underbrace{\frac{v_s}{jX_{kr}}}_{\bar{i}_{rMAX}} = \underbrace{\frac{R(x)}{jX_{kr}}}_{\bar{i}_r'} \bar{i}_r + \bar{i}_r \rightarrow \bar{i}_{rMAX} = \bar{i}_r' + \bar{i}_r \quad (9.48)$$

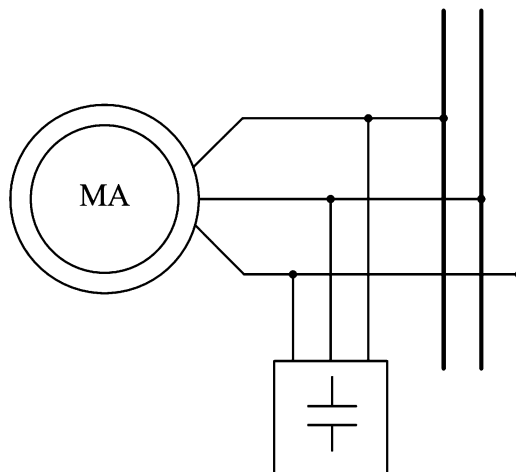
Il primo termine  $\bar{i}_{rMAX}$  è il valore massimo della corrente rotorica che si ottiene per un opportuno valore di scorrimento negativo tale per cui  $R_s + \frac{R_r}{x} = 0$  ed è ortogonale al vettore tensione di statore  $\bar{v}_s$  (come indica to in precedenza solitamente si ha  $x \approx -1$ ). Osservando la (9.48) si vede come tale corrente massima si trovi in quadratura di ritardo rispetto  $\bar{v}_s$  e che tale valore costante in tutte le condizioni di funzionamento è sempre pari alla somma della corrente effettivamente circolante nel rotore  $\bar{i}_r$  e di una corrente  $\bar{i}_r'$  (funzione dello scorrimento) sempre ortogonale a  $\bar{i}_r$ . Graficamente si può interpretare tale equazione come indicato in Fig 9.19. Il vertice D, essendo l'angolo compreso tra  $\bar{i}_r$  e  $\bar{i}_r'$  retto, descrive una circonferenza di diametro pari a  $\bar{i}_{rMAX}$  al variare delle correnti. Tale costruzione prende quindi il nome di **diagramma circolare** e rappresenta i punti di funzionamento di regime al variare dello scorrimento  $x$ .

Il valore della corrente di statore  $\bar{i}_s$  si ottiene sfruttando la seconda delle equazioni e quindi semplicemente aggiungendo  $\bar{i}_0$  (che a tensione e frequenza imposti è un fasore costante) ad  $\bar{i}_r$ .



■ Fig.9.19 Diagramma circolare

Il diagramma di Fig.9.19 evidenzia anche una particolarità della macchina asincrona nel funzionamento da generatore. Si può infatti notare come, a tensione e frequenze imposti, la corrente a vuoto sia sempre assorbita. La macchina asincrona quindi nel funzionamento come generatore deve comunque assorbire dalla rete una potenza che vada a compensare il termine di magnetizzazione. Solitamente la potenza reattiva necessaria è fornita da opportuni condensatori inseriti in parallelo ai morsetti della macchina. Si noti inoltre che la presenza delle perdite a vuoto



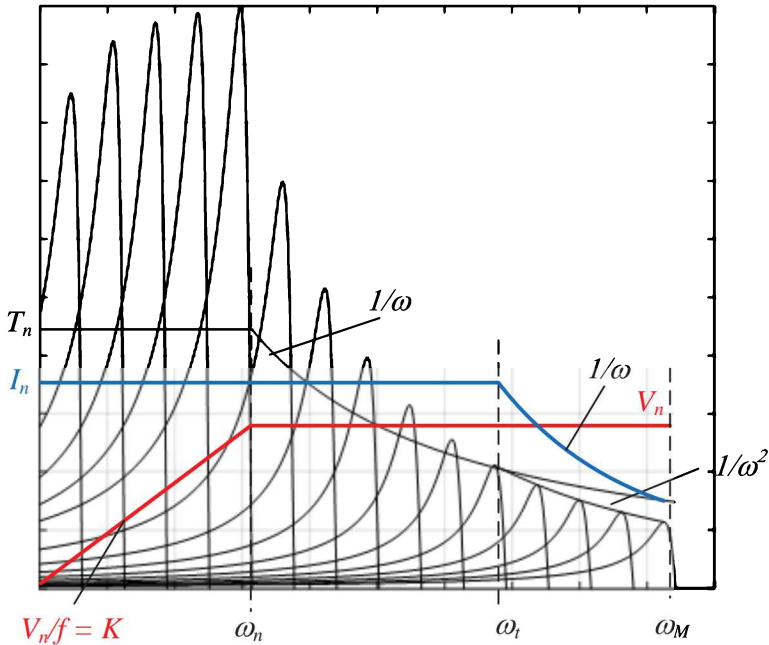
■ Fig.9.20 Funzionamento da generatore in parallelo a una rete.

determini una zona di funzionamento a scorrimenti negativi in cui la potenza generata serva esclusivamente a compensare tali perdite (tra il punto di scorrimento  $x=0$  e l'asse delle ascisse).

### 9.6.2 Campo di operatività a tensione e frequenza variabili

La possibilità di variare la tensione e la frequenza di alimentazione della macchina consente di modificare la zona di operatività della macchina. In particolare considerando un motore con un sistema di raffreddamento indipendente, si possono fare le seguenti osservazioni:

- La coppia nominale della macchina dipende sostanzialmente dalla corrente massima che può circolare nella macchina in maniera continuativa senza creare problemi termici. Come si può notare dalla Fig. 9.21. riducendo la tensione in maniera proporzionale alla frequenza di alimentazione, la coppia di avviamento aumenta e quindi diminuendo opportunamente tensione e frequenza sarà possibile avviare la macchina sostanzialmente a coppia nominale.
- È possibile alimentare la macchina a corrente nominale alzando la tensione ai morsetti in maniera proporzionale alla frequenza fino alla velocità nominale. Da questo punto in avanti, avendo raggiunto il valore nominale, la tensione deve essere mantenuta costante a fronte dell'aumento di frequenza al fine di preservare l'isolamento elettrico. Per fare questo è necessario quindi ridurre il flusso della macchina in maniera proporzionale alla frequenza (essendo  $V \approx k\omega\phi$ ). La corrente invece può essere ancora pari alla nominale in quanto l'unica limitazione in questa zona potrebbero essere le perdite joule, ma come già ipotizzato in precedenza il sistema di raffreddamento è in grado di estrarre le perdite nominali (caso abbastanza comune per motori alimentati a frequenza variabile). In questo modo la coppia erogabile diminuirà come  $1/\omega$  in quanto dipende sostanzialmente dal prodotto del flusso di magnetizzazione per la corrente. Tale zona di funzionamento si definisce **zona di deflussaggio**.
- Tale strategia può essere mantenuta fino a quando non si interseca la curva dei punti di coppia massima della macchina. È stato già dimostrato in che la coppia massima diminuisce, a tensione costante, come  $1/\omega^2$  e quindi all'aumentare della frequenza le due curve si intersecheranno a una certa velocità  $\omega_t$ . Da questo punto in avanti anche la corrente deve quindi diminuire come  $1/\omega$ .
- La pulsazione massima di funzionamento  $\omega_M$  dipenderà quindi dai limiti del sistema che potranno essere meccanici, ad esempio dovuti alla massima velocità sopportabile dai cuscinetti, o elettrici, ad esempio dovuti alla massima frequenza di commutazione dei convertitori elettronici.



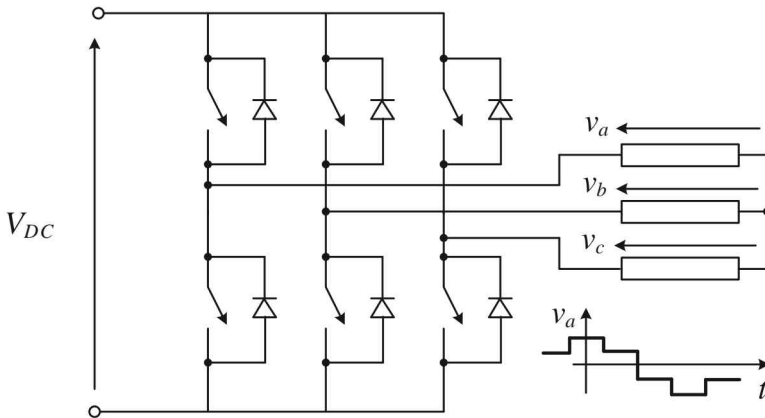
■ Fig. 9.21 Campo di operatività a tensione frequenza-variabile

## 9.7 FUNZIONAMENTO IN REGIME NON SINUSOIDALE

Come si è visto in precedenza è possibile variare la frequenza e la tensione di alimentazione della macchina asincrona al fine di ottenere caratteristiche di funzionamento come indicato in Fig. 9.22.

Solitamente tale funzionamento è ottenuto collegando la macchina ad un convertitore elettronico che imprime alla macchina una terna di tensioni non sinusoidali. Se si considera ad esempio un inverter trifase a tensione impressa comandato in onda quadra (o a sei gradini) (Fig.9.23) le tensioni applicate alla macchina presentano una forma che sviluppata in serie di Fourier porta alle relazioni (9.49).

$$\begin{aligned}
 v_a &= \frac{4 V_{DC}}{\pi} \frac{1}{2} \left[ \cos(\omega t) + \frac{1}{5} \cos 5(\omega t) + \frac{1}{7} \cos 7(\omega t) + \dots \right] \\
 v_b &= \frac{4 V_{DC}}{\pi} \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{2}{3} \pi\right) + \frac{1}{5} \cos 5\left(\omega t - \frac{2}{3} \pi\right) + \frac{1}{7} \cos 7\left(\omega t - \frac{2}{3} \pi\right) + \dots \right] \\
 v_c &= \frac{4 V_{DC}}{\pi} \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{4}{3} \pi\right) + \frac{1}{5} \cos 5\left(\omega t - \frac{4}{3} \pi\right) + \frac{1}{7} \cos 7\left(\omega t - \frac{4}{3} \pi\right) + \dots \right] \quad (9.49)
 \end{aligned}$$

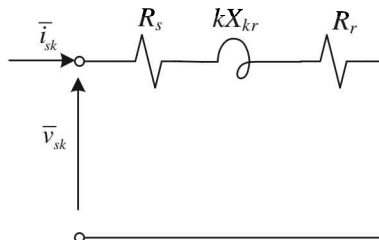


■ Fig. 9.22 Inverter trifase

Si noti come le espressioni (9.49) danno luogo a terne di tensioni alternativamente **dirette** (con la fase *b* in ritardo rispetto la fase *a*) e **inverse** (con la fase *b* in anticipo rispetto la fase *a*): terne dirette daranno luogo a fasori spaziali che ruotano in senso antiorario e terne inverse a fasori che ruoteranno in senso orario. Questa condizione di funzionamento solitamente è sintetizzata nell'elenco delle armoniche con l'indicazione di un segno positivo se la terna armonica di tensioni è diretta e negativo se inversa. Per il caso in esame si avrà quindi la sequenza di armoniche: 1, -5, 7, -11, 13, -17, 19, ...

Se la velocità di rotazione è costante, la macchina asincrona è un sistema lineare e la soluzione del funzionamento in regime deformato può essere ottenuta per sovrapposizione degli effetti applicando una terna armonica alla volta ad un opportuno circuito.

Questo è vero in quanto gli scambi energetici medi con il carico dipendono sostanzialmente dalla caratteristica meccanica del campo fondamentale. Infatti, come dimostrato in precedenza, la coppia massima ha l'espressione indicata in (9.50), e



■ Fig.9.23 Circuito equivalente per il calcolo delle armoniche di corrente

quindi ad esempio la caratteristica statica di 5<sup>a</sup> armonica ha una coppia massima che è un 1/625 della coppia massima della caratteristica meccanica statica di prima armonica.

$$T_M \approx \frac{v_s^2}{\sqrt{2}\omega^2 L_{kr}} \rightarrow T_{5M} \approx \frac{v_s^2}{\sqrt{2}\omega^2 L_{kr} 5^4} = \frac{T_{M1}}{625} \quad (9.50)$$

Questo determina che la velocità media del funzionamento a regime dipenda solo dal campo fondamentale così come la velocità di sincronismo (9.51).

$$\omega_m = (1 - x_1)\omega \quad (9.51)$$

Poiché lo scorrimento dell'armonica fondamentale nel funzionamento di regime è prossimo a 0 (cioè  $\omega_m \approx \omega$ ), gli scorrimenti delle armoniche successive alla fondamentale sono sostanzialmente prossimi a 1.

$$x_k = \frac{\omega_k - \omega_m}{\omega_k} \approx \frac{k\omega - \omega}{k\omega} \rightarrow x_5 = \frac{6}{5}, \quad x_7 = \frac{6}{7}, \quad x_{11} = \frac{12}{11}, \quad \dots \quad (9.52)$$

Ne consegue che per il calcolo delle correnti armoniche si può utilizzare il circuito semplificato di Fig.9.23 dove è stata trascurata anche la corrente del ramo derivato in quanto, non solo la tensione si riduce proporzionalmente all'ordine di armonicità, ma l'impedenza trasversale (già elevata) aumenta all'aumentare della frequenza proporzionalmente all'ordine di armonicità, per cui la corrente circolante diminuisce con il quadrato dell'ordine di armonicità ( $i_{0k} = i_0 / k^2$ ). Questo sottolinea come il campo al traferro dipenda esclusivamente dalla prima armonica e mantenga quindi, anche in questo caso, la forma sinusoidale.

È comunque rilevante sottolineare che, mentre la caratteristica meccanica (coppia media) è in pratica coincidente con quella ricavabile studiando la prima armonica, sono presenti oscillazioni dinamiche di coppia solitamente non trascurabili. Infatti, poiché come osservato in precedenza, il campo al traferro dipende esclusivamente dalla prima armonica, questo ruoterà sempre a velocità  $\omega$ . Il campo statorico ad esempio dovuto alla 5<sup>a</sup> armonica invece ruoterà in direzione opposta a velocità  $5\omega$  e analogamente quello di 7<sup>a</sup> armonica nella stessa direzione del campo al traferro a velocità  $7\omega$ . Si conclude quindi che sia la 5<sup>a</sup> che la 7<sup>a</sup> armonica genereranno oscillazioni di coppia a pulsazione  $6\omega$ , la 11<sup>a</sup> e la 13<sup>a</sup> oscillazioni a  $12\omega$  e così via.

## 9.8 MOTORE ASINCRONO MONOFASE

Nel caso del motore asincrono è possibile anche realizzare strutture monofase che sono solitamente usate in applicazioni di bassa potenza e tensione che non richiedono particolari caratteristiche di regolazione. I motori monofasi sono strutturalmente simili ai motori trifase con l'unica differenza che presentano un unico avvolgimento di statore. Schematicamente si ha quindi la situazione rappresentata in Fig. 9.24

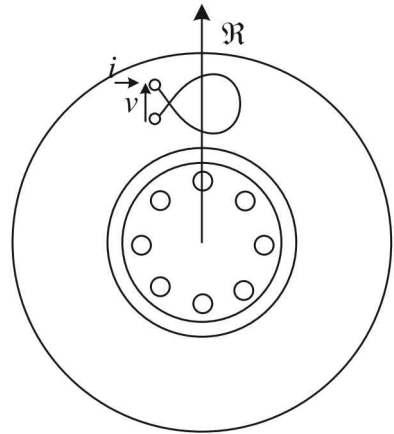
La presenza di un unico avvolgimento statorico non permette ovviamente la creazione di un campo rotante, ma viene generato un campo pulsante in posizione fissa nello spazio (coincidente con l'asse della bobina). Tale campo pulsante può essere però studiato come sovrapposizione di due campi rotanti di ampiezza pari alla metà del campo principale e controrotanti (Fig. 9.25).

Dal punto di vista dell'effetto sul rotore ognuno dei due campi agirà in maniera analoga a quanto studiato finora e quindi dal punto di vista pratico si avranno due caratteristiche meccaniche come indicato in Fig. 9.26 e la caratteristica della macchina sarà semplicemente la somma delle due.

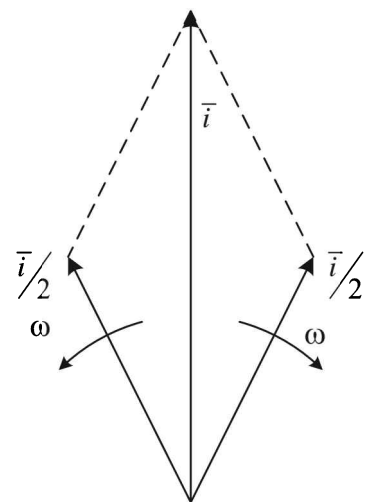
È quindi immediato notare come la coppia di avviamento di tale macchina sia nulla, anche se è sufficiente una piccola perturbazione della velocità affinché la macchina si comporti poi come una normale macchina asincrona.

Per avviare la macchina è quindi necessario ricorrere ad accorgimenti o avvolgimenti ausiliari ed in particolare si possono avere i seguenti motori monofase:

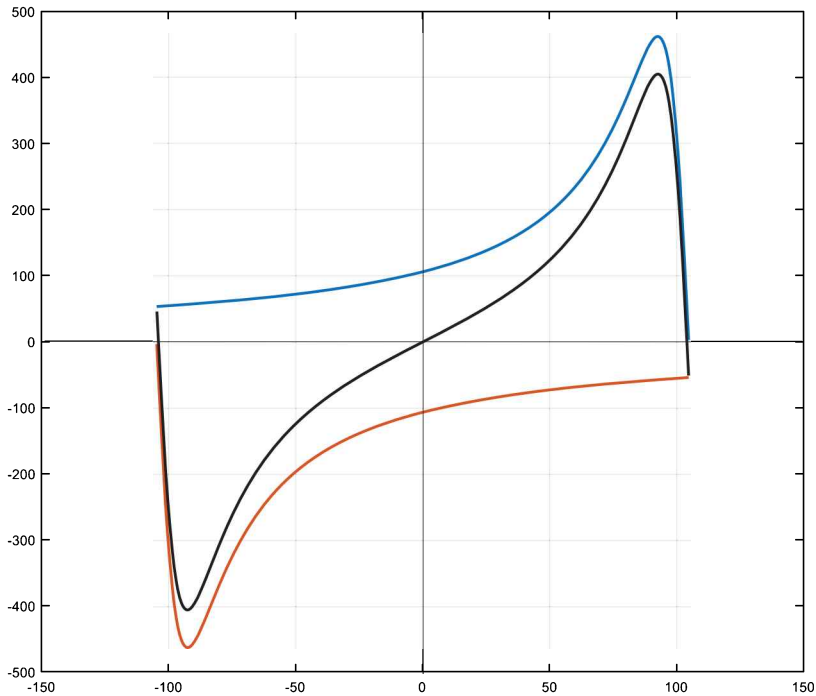
- Con avvolgimento ausiliario a resistenza
- Con avvolgimento ausiliario e condensatore
- Con avvolgimento ausiliario e condensatore a inserzione permanente



■ Fig. 9.24. Rappresentazione schematica di un motore asincrono monofase



■ Fig. 9.25 Scomposizione di un campo pulsante in campi controrotanti

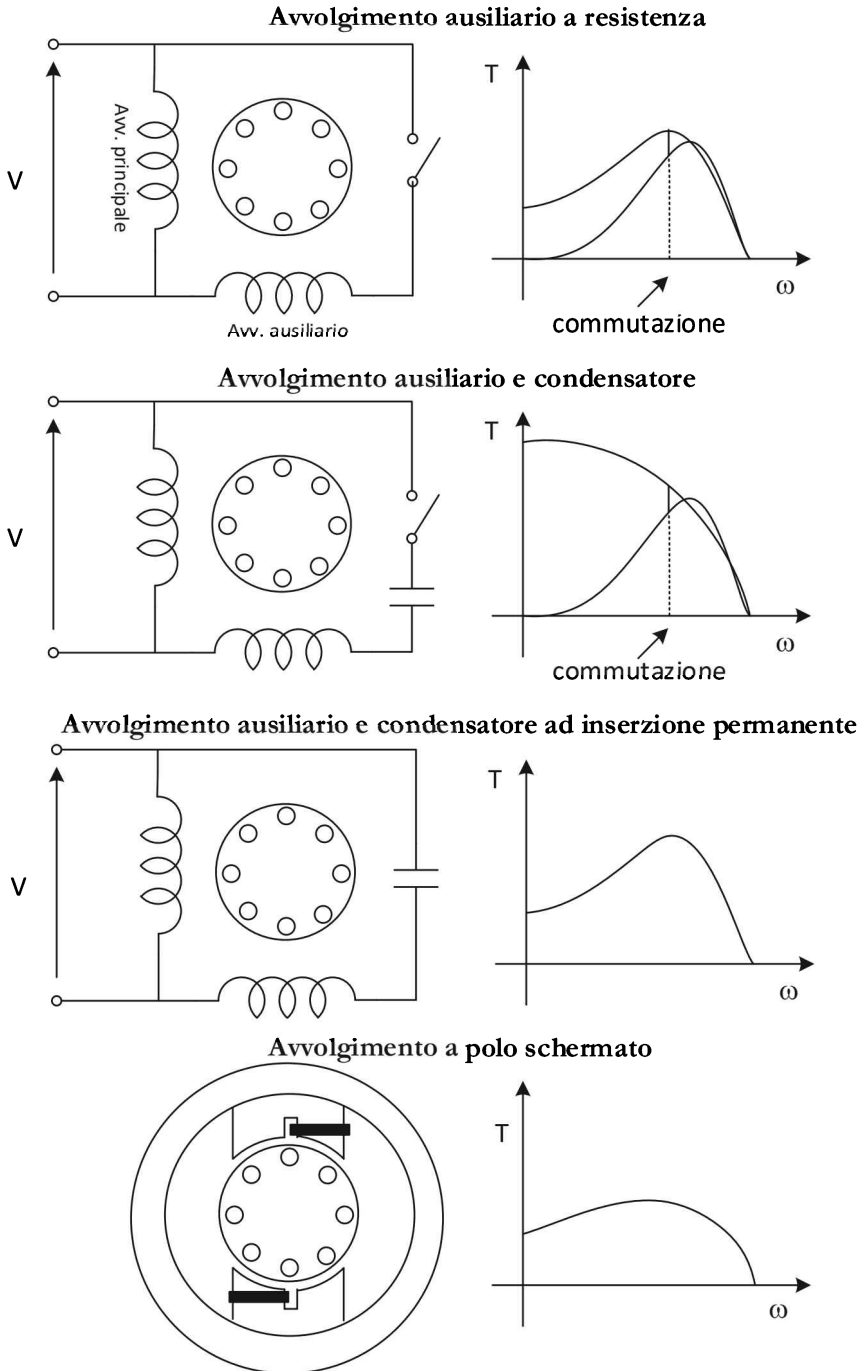


■ Fig. 9.26 Caratteristica meccanica macchina asincrona monofase.

- Con avvolgimento ausiliario a due condensatori
- A polo schermato

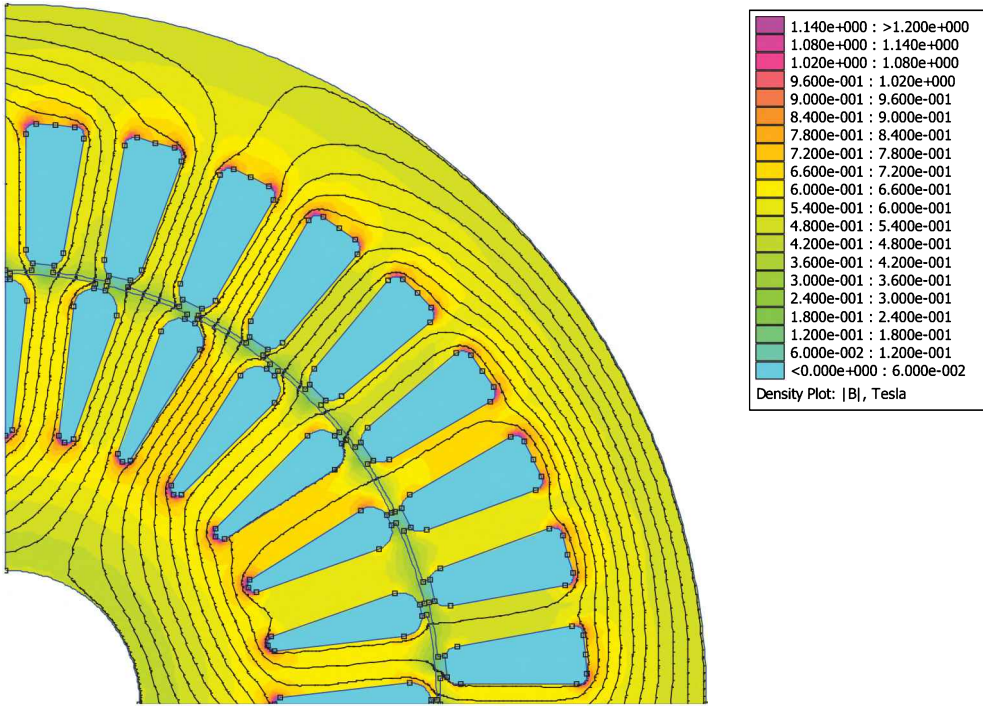
L'idea generale è di avere un ulteriore avvolgimento percorso da una corrente sfasata rispetto la corrente che percorre l'avvolgimento principale in modo da creare una macchina sostanzialmente bifase durante le fasi di avviamento. Nelle fig. 9.27 sono riportate le configurazioni adottate e le caratteristiche meccaniche di regime. Per quanto riguarda l'avvolgimento a polo schermato, la spira in corto circuito inserita sulla porzione di un polo determina uno sfasamento nel flusso in quella porzione di polo avendo come effetto quello di creare un campo rotante che si muove dalla parte non schermata a quella schermata creando una piccola coppia di spunto. Tale soluzione è adottata esclusivamente su motori molto piccoli.





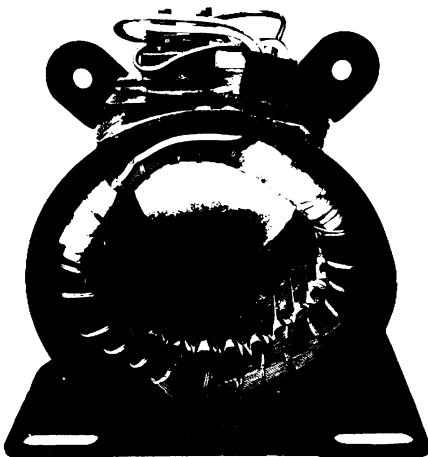
■ Fig 9.27. Sistemi di avviamento della macchina monofase

## 9.9 Cenni costruttivi



■ Fig. 9.28 Esempio andamento delle linee di flusso e dell'induzione

Lo statore e il rotore dei motori asincroni sono entrambi realizzati tramite impaccamento di lamierini di ferro-silicio in quanto entrambi sono percorsi da un flusso generato da correnti alternate.



■ Fig 9.29. Statore e rotore di una macchina asincrona a bassa tensione.

Sia lo statore che il rotore presentano in prossimità del traferro delle cave destinate a contenere gli avvolgimenti. Le cave dei motori asincroni sono generalmente di tipo chiuso o semichiuso. Le parti tra due cave sono chiamati denti e servono a convogliare il flusso (si veda la Fig. 9.28)

I lamierini sono solitamente tranciati e poi impaccati in modo da ottenere una sufficiente lunghezza attiva. Il traferro è solitamente dell'ordine di 0.3-3 [mm].

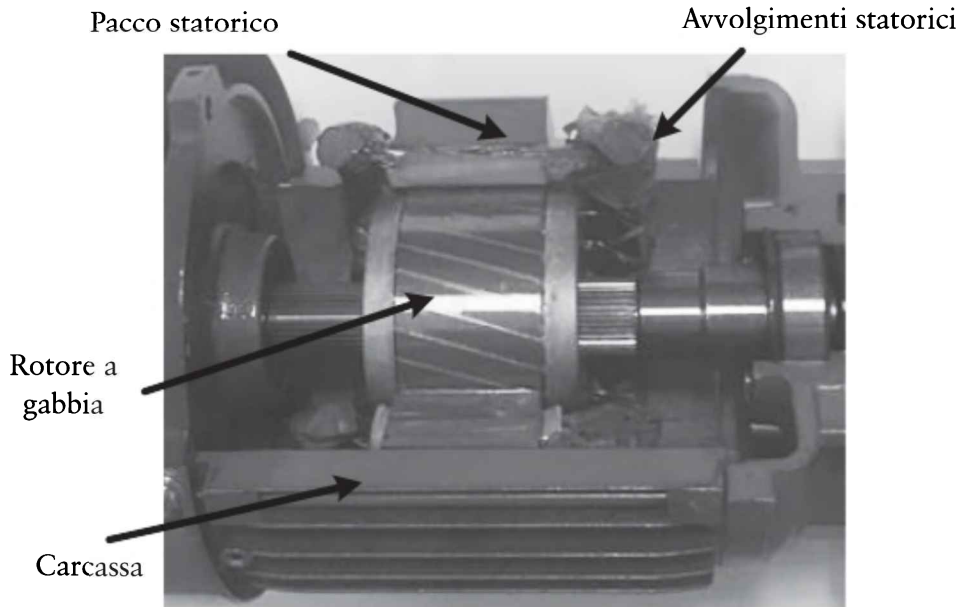
Per evitare l'impuntamento e ridurre i disturbi spesso le lamiere di rotore (e più raramente quelle di statore) vengono ruotate in modo che ciascun lamierino si presenti leggermente spostato rispetto al precedente ottenendo una struttura a cave inclinate (Fig 9.28).

Per motori di piccola-media potenza, alimentati in bassa tensione, l'avvolgimento di statore è tipicamente costituito da bobine in filo o in piattina di rame smaltato inseriti opportunamente nelle cave di statore (Fig 9.29)

Per quanto riguarda il rotore esistono due tipologie di avvolgimento: **avvolto** ed a **gabbia**.



■ Fig 9.30. Gabbia rotorica (priva di lamierini)

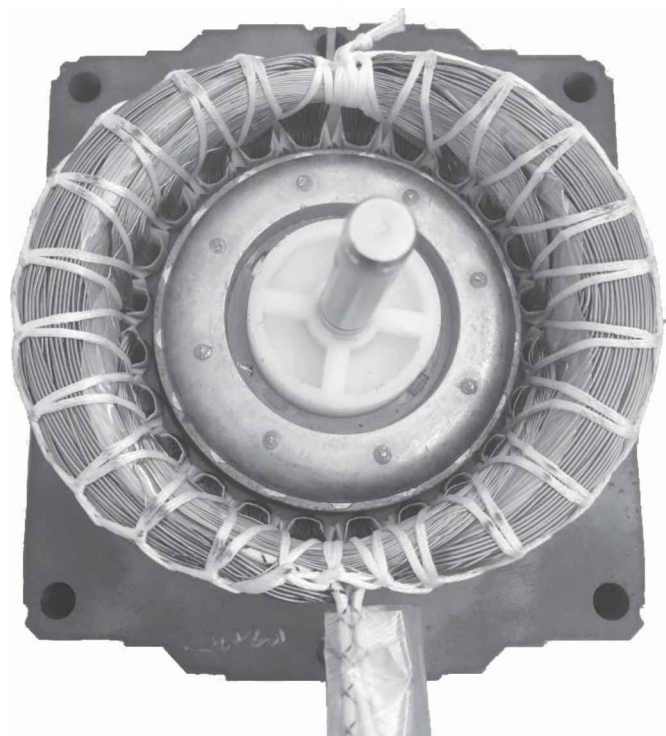


■ Fig 9.31. Struttura completa di una macchina asincrona (spaccato)

Nel caso di rotore avvolto, l'avvolgimento è un avvolgimento trifase realizzato con bobine inserite nelle cave, collegate generalmente a stella, con lo stesso numero di poli dello statore. Attualmente vengono realizzati solo motori di elevata potenza con questa tipologia di avvolgimento rotorico. Nel campo delle applicazioni industriali la tipologia di motori maggiormente impiegata è invece quella con avvolgimento rotorico a gabbia (di scoiattolo). Il nome deriva dalla forma che assumono le sbarre e gli anelli di corto circuito una volta eliminati i lamierini di sostegno del rotore (Fig 9.30). Il rotore a gabbia non ha un numero di poli proprio ma le correnti indotte nelle barre generano tanti poli quanti sono quelli di statore e quindi si presta a funzionare con qualunque numero di poli.

I rotorì a gabbia possono essere costruiti secondo due modalità principali, in particolare:

- per potenze elevate ( $>250$  [kW]) si utilizzano barre di rame inserite in cava e la richiusura elettrica è garantita da anelli frontali in rame a cui vengono saldate;
- per potenze ridotte il rotore può essere realizzato con l'immissione negli spazi delle cave di leghe di alluminio fuso in pressione (pressofusione) o eventualmente di rame anche se l'uso del rame rende la procedura energeticamente più dispendiosa (il rame fonde a  $1085$  [°C], l'alluminio a  $660$  [°C])



■ Fig 9.32. Struttura statorica e rotore a gabbia di una macchina asincrona di piccola potenza

## 9.10 ESERCIZI

### Esercizio 1

Sia dato un motore asincrono caratterizzato dai seguenti dati:

Potenza nominale:  $P_n = 5.5$  [kW]

Tensione nominale:  $V_n = 400$  [V]

Corrente nominale:  $I_n = 11.4$  [A]

Fattore di potenza nominale:  $\cos\phi_n = 0.8$

Resistenza statorica:  $R_s = 0.91$  [ $\Omega$ ]

Frequenza nominale:  $f_n = 50$  Hz

Numero di poli: 2

Risultati della prova a vuoto:  $P_o = 490$  [W]  $I_o = 6.4$  [A]

Risultati della prova a rotore bloccato:  $P_{cc} = 717$  [W]  $V_{cc} = 75$  [V]

Si calcolino i parametri del circuito equivalente della macchina trascurando le perdite per attrito e ventilazione.

### Esercizio 2

Sia dato un motore asincrono caratterizzato dai seguenti dati:

Potenza nominale:  $P_n = 7$  [kW]

Tensione nominale:  $V_n = 380$  [V]

Corrente nominale:  $I_n = 15.2$  [A]

Fattore di potenza nominale :  $\cos\phi_n = 0.897$

Resistenza statorica:  $R_s = 0.5$  [ $\Omega$ ]

Numero di coppie polari:  $p = 2$

Velocità nominale:  $\Omega_n = 1440$  [rpm]

Risultati della prova a vuoto:  $P_o = 1332$  [W]  $I_o = 36\%$

Velocità della prova a vuoto  $\omega_{r0} = 156.2$  [rad/s]

Risultati della prova a rotore bloccato:  $P_{cc} = 755$  [W]  $V_{cc} = 61$  [V]

Si considerino gli attriti proporzionali alla velocità secondo la legge:

$T_{att} = B \omega_r$  (B da determinarsi dai dati).

Determinare:

1. i parametri del circuito equivalente
2. il rendimento nominale e la coppia nominale

3. lo scorrimento nominale, lo scorrimento e la coppia di rovesciamento (coppia massima)
4. la corrente all'avviamento e la coppia all'avviamento ipotizzando di alimentare la macchina a tensione nominale
5. la velocità, la coppia, la corrente assorbita e il rendimento quando il motore muove un carico pari a 30 Nm, ipotizzando di alimentare la macchina a tensione nominale.

### Esercizio 3

Sia dato un motore asincrono caratterizzato dai seguenti dati:

Potenza nominale  $P_n=200$  [kW]

Tensione nominale:  $V_n= 380$  [V]

Fattore di potenza nominale  $\cos\phi_n=0.8$

Resistenza statorica  $R_s=10$  [m $\Omega$ ]

Numero di coppie polari  $p=4$

Potenza di assorbita durante la prova a rotore bloccato

(potenza di corto-circuito):  $P_{cc}=7$  [kW]

Fattore di potenza di corto circuito:  $\cos\phi_{cc}=0.40$

Potenza assorbita durante la prova a vuoto:  $P_0= 5$  [kW]

Corrente assorbita durante la prova a vuoto:  $I_0=90$  [A].

Si considerino nulle le perdite per attrito e ventilazione. Il motore è alimentato alla tensione nominale pari a  $V_{in}= 380$  [V]. Si determinino i parametri del motore asincrono, lo scorrimento del motore quando questo sviluppi una coppia pari a  $C_1=910$  [Nm] e il rendimento totale del sistema. Si utilizzi l'approssimazione lineare della caratteristica meccanica del motore asincrono.



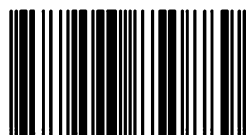
In questo testo sono raccolti i principali elementi della teoria delle macchine elettriche con particolare riferimento ai modelli a regime delle stesse. Il testo partendo da una breve introduzione delle leggi dell'elettromagnetismo e delle proprietà dei materiali elettrici, sviluppa i modelli di regime delle principali macchine elettriche: trasformatore, macchina in corrente continua, macchina sincrona e macchina asincrona. Per le macchine elettriche rotanti trifase verrà utilizzato un approccio modellistico basato sui fasori spaziali razionali.

MARIA STEFANIA CARMELI – consegue la laurea ed il dottorato di ricerca in ingegneria Elettrica presso il dipartimento di Elettrotecnica del Politecnico di Milano. dal 2002 è ricercatrice nel settore “convertitori, Macchine ed azionamenti Elettrici” al Politecnico di Milano. la sua attività di ricerca è rivolta prevalentemente alla modellistica delle macchine elettriche e agli azionamenti elettrici con particolare attenzione ai sistemi di generazione distribuita. svolge la sua attività didattica nell’ambito delle Facoltà di ingegneria Elettrica, ingegneria Meccanica ed ingegneria dell’automazione presso il Politecnico di Milano, dove è titolare del corso di Modellistica delle Macchine e degli impianti Elettrici e del corso di Principi di ingegneria Elettrica. tiene inoltre seminari ed esercitazioni per il corso di dottorato in ingegneria Elettrica e per il corso di Macchine Elettriche e Azionamenti.

MARCO MAURI – consegue la laurea ed il dottorato di ricerca in ingegneria Elettrica presso il dipartimento di Elettrotecnica del Politecnico di Milano. Dal 2002 è ricercatore nel settore “convertitori, Macchine ed azionamenti Elettrici” al Politecnico di Milano. La sua attività di ricerca è rivolta prevalentemente allo sviluppo di convertitori elettronici, al controllo delle macchine elettriche e alla modellistica degli azionamenti. Svolge la sua attività didattica nell’ambito delle lauree di ingegneria dell’automazione e Meccanica presso il Politecnico di Milano, dove è titolare dei corsi di Macchine Elettriche e Azionamenti e di Principi di ingegneria Elettrica.

MATTIA ROSSI – consegue la laurea in ingegneria dell’automazione presso il dipartimento di Elettronica, Informazione e Bioingegneria del Politecnico di Milano. Dal 2016 frequenta il corso di dottorato in ingegneria elettrica nell’ambito “Convertitori, Macchine ed Azionamenti Elettrici” al Politecnico di Milano. La sua attività di ricerca è rivolta al controllo di convertitori elettronici ed azionamenti, in particolare allo sviluppo di differenti tecniche predittive (MPC). Svolge la sua attività di assistente alla didattica nell’ambito delle lauree di ingegneria dell’Automazione e Elettrica presso il Politecnico di Milano.

ISBN 978-88-9385-088-9



22,00 euro



[www.editrice-esculapio.it](http://www.editrice-esculapio.it)