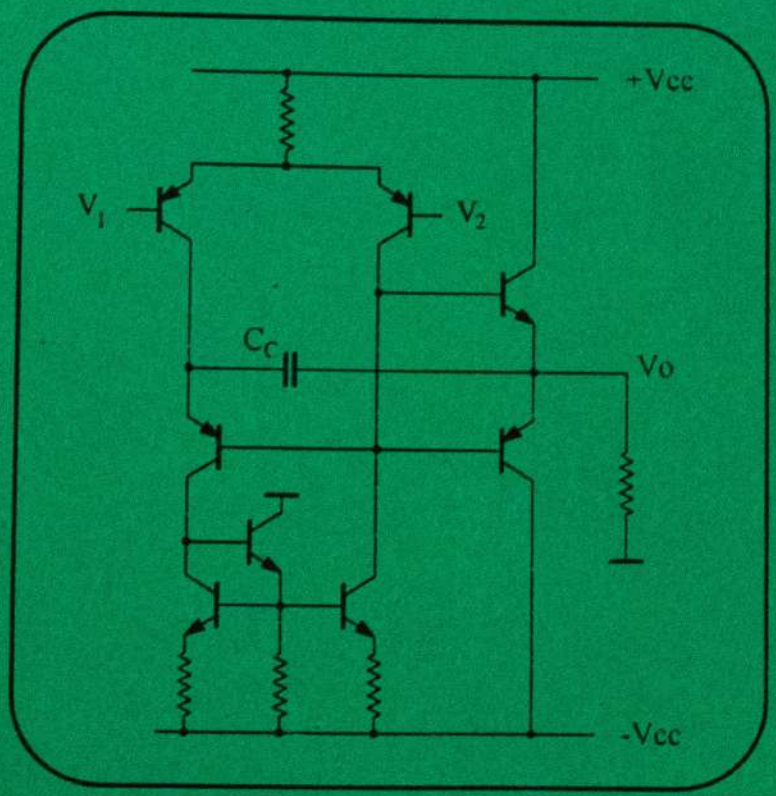
L. Rossetto

G. Spiazzi

Esercizi di

ELETTRONICA APPLICATA



EDIZIONI LIBRERIA PROGETTO PADOVA

L.Rossetto **G. Spiazzi**

Esercizi di

ELETTRONICA APPLICATA

EDIZIONI **LIBRERIA PROGETTO** PADOVA 2000

© by 2000 - Tutti i diritti riservati
Edizioni **Libreria Progetto**
Via Marzolo, 28 - **PADOVA**
Tel. 049.665585-665492

Padova, gennaio 1997

La presente raccolta di esercizi è destinata agli studenti dei corsi di Elettronica Applicata della Facoltà di Ingegneria. Essi sono ricavati principalmente dai temi d'esame dati negli ultimi anni agli studenti dei suddetti corsi. Sono stati inoltre inseriti alcuni esempi più completi che consentono una più ampia visione d'insieme.

La raccolta è suddivisa in sette capitoli rispettivamente riguardanti: **Circuiti a diodi**, **Polarizzazione di transistor**, **Circuiti amplificatori**, **Amplificatori a retroazione**, **Amplificatori operazionali**, **Esercizi "Quick"** e **Temi dell'Esame di Stato**.

Mentre è ovvio il contenuto dei primi cinque capitoli, il sesto contiene una serie di problemi che richiedono una certa *confidenza* con gli schemi proposti permettendo in questo modo una soluzione quasi immediata. Tali esercizi sono intesi alla verifica, da parte dello studente, del proprio grado di preparazione ed assimilazione della materia.

Il settimo capitolo contiene il testo ed una proposta di soluzione di alcuni temi per l'Esame di Stato recentemente proposti. Tali esercizi, di ben più ampio respiro, sono proposti agli studenti come esercitazioni di tipo progettuale.

Molte delle soluzioni riportate nel testo, forniscono anche i risultati numerici. Per altri esercizi la valutazione del risultato finale, che richiede la sola sostituzione dei valori numerici nelle equazioni date, è lasciata al lettore.

Le soluzioni qui presentate fanno riferimento al libro di testo consigliato agli studenti dei suddetti corsi (J.Millman, A.Grabel: "Microelectronics", Mc. Graw Hill, second edition) e ne utilizza convenzioni per gli schemi e formule risolutive.

Ci scusiamo fin d'ora con gli studenti che utilizzeranno questo testo per gli immancabili errori in esso contenuti, anche se è stata nostra cura eliminarne il più possibile durante la preparazione.

Leopoldo Rossetto

Giorgio Spiazzi

INDICE

Note tecniche ..... pag. 7

Circuiti a diodi ..... " 9

Polarizzazione di transistor ..... " 33

Circuiti amplificatori ..... " 47

Amplificatori a retroazione ..... " 105

Amplificatori operazionali ..... " 151

Esercizi "Quick" ..... " 179

Temi dell'Esame di Stato ..... " 201

Note tecniche

Nella soluzione degli esercizi è sempre utilizzato il modello a transconduttanze nel quale il valore di r_b è sempre posto a zero per non appesantire (inutilmente) i calcoli. Inoltre il valore di r_o è considerato solo in alcuni casi del calcolo della resistenza di uscita.

Per lo studente che volesse risolvere gli esercizi utilizzando il modello a parametri ibridi (h) ancora utilizzato in numerosi testi, potrà fare le seguenti sostituzioni:

$$h_{11} = h_{ie} = r_\pi; \qquad h_{12} = 0; \qquad h_{21} = h_{fe} = \beta_0 = g_m r_\pi; \qquad h_{22} = 1/r_o; \qquad h_{FE} = \beta_F.$$

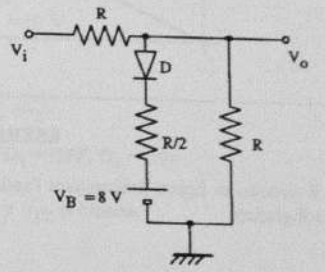
Inoltre per il calcolo di g_m è quasi sempre usata l'espressione: $g_m = \left.\frac{|I_{CQ}|}{V_T}\right|_{T=25°}$

Relativamente al calcolo delle resistenze di ingresso e di uscita negli schemi a retroazione, essi sono svolti in modo diverso rispetto a quanto riportato nel testo di riferimento. Tali calcoli seguono la teoria svolta a lezione in quanto risulta più semplice ed è facilmente applicabile a tutti i casi analizzati. Il metodo utilizzato risulta analogo a quello proposto nel testo: A.S.Sedra, K.C.Smith: "Circuiti per la microelettronica", Edizioni Ingegneria 2000.

CIRCUITI A DIODI

ESERCIZIO D.1

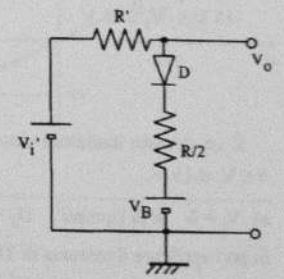
Dato il circuito di figura determinare l'andamento della tensione di uscita al variare di V_i e tracciarne il grafico.



D = ideale
R = 10 kΩ
V_B = 8 V
$0 \le V_i \le 24$ V.

SOLUZIONE

Si applica il teorema di Thevenin al partitore costituito dalle due resistenze di valore R:



risulta un circuito limitatore. Dal teorema di Thevenin si ottiene:

$$V_i' = \frac{V_i}{2} \quad \text{e} \quad R' = \frac{R}{2}$$

Si studiano separatamente i casi per $V_i = 0$ e $V_i > 0$.

$V_i = 0 \quad \Rightarrow \quad$ D = OFF.

Infatti, tale ipotesi risulta confermata da:

$$V_D = -V_B < 0 \quad \Rightarrow \quad V_o = V_i' = \frac{V_i}{2}$$

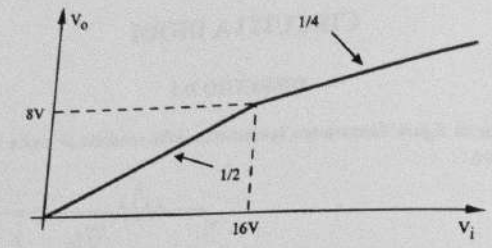
Quando V_i cresce ($V_i > 0$) è : $V_D = V_i' - V_B = \frac{V_i}{2} - V_B$;

quando $V_D = 0 \quad \Rightarrow \quad V_i = 2\,V_B$ e il diodo (ideale) entra in conduzione.

Applicando la sovrapposizione degli effetti si ottiene:

$$V_o = V_i' \frac{R/2}{R/2 + R/2} + V_B \frac{R/2}{R/2 + R/2} = \frac{V_i'}{2} + \frac{V_B}{2} = \frac{V_i}{4} + \frac{V_B}{2} = \frac{V_i}{4} + 4 \quad \text{V}$$

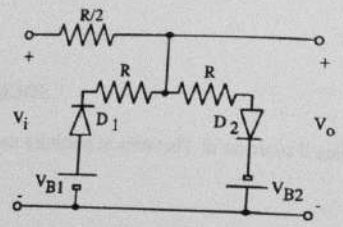
É da notare che, come doveva essere, la curva non presenta discontinuità.



ESERCIZIO D.2

Dato il circuito di figura determinare l'andamento della tensione di uscita al variare di V_i e tracciarne il grafico.

$V_{B1} = 5$ V
$V_{B2} = 5$ V
$R = 5$ kΩ
D_1 e D_2 diodi ideali
$-15\text{ V} \le V_i \le 15$ V

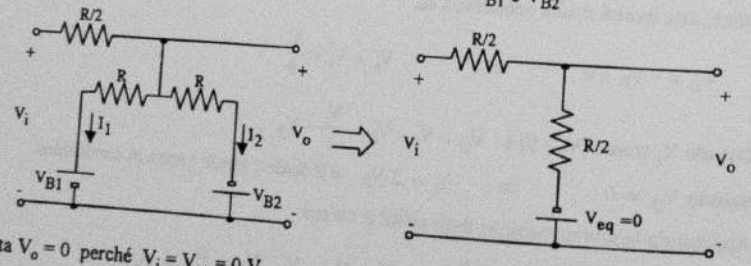


SOLUZIONE

É un circuito limitatore simmetrico. Può perciò essere analizzato solo nell'intervallo positivo $0 \le V_i \le 15$ V.

a) $V_i = 0$ si fa l'ipotesi $D_1 = D_2 = ON$ quindi si sostituiscono con due cortocircuiti.

Si può applicare il teorema di Thevenin ai due rami contenenti V_{B1} e V_{B2}



Risulta $V_o = 0$ perché $V_i = V_{eq} = 0$ V.

Si calcolano le correnti nei diodi:

$$I_1 = -\frac{V_{B1} - V_o}{R} = -0.5\,\text{mA} < 0 \quad \Rightarrow \quad I_{D1} = -I_1 = 0.5\text{ mA} > 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 = ON$$

$$I_2 = \frac{V_{B2} + V_o}{R} = 0.5\,\text{mA} \quad \Rightarrow I_{D2} = I_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad D_2 = ON$$

L'ipotesi è verificata.

b) $V_i > 0$; $\quad I_1 = -\frac{V_{B1}}{R} + \frac{V_i}{2R} = -I_{D1}$

D_1 si spegne quando $I_{D1} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_i = 2V_{B1} = 10$ V.

D_2 rimane acceso perchè V_o e I_2 aumentano

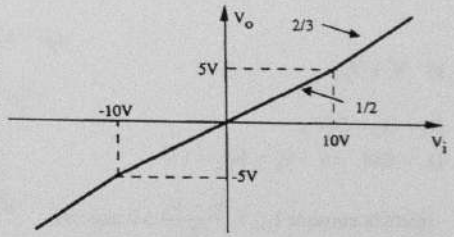
Per $0 \le V_i \le 10$ V $\quad \Rightarrow \quad V_o = \frac{V_i}{2}$

c) $V_i > 2V_{B1}$ La corrente su D_1 si annulla: $D_1 = OFF$, $D_2 = ON$.

Applicando la sovrapposizione degli effetti a V_i e V_{B2} si ottiene

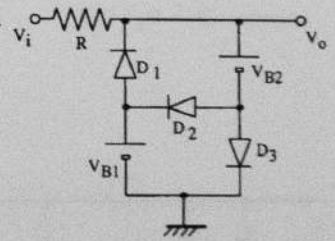
$$V_o = V_i \frac{R}{R/2 + R} - V_{B2} \frac{R/2}{R + R/2} = \frac{2}{3} V_i - \frac{V_{B2}}{3}$$

L'individuazione del punto di spezzamento risultava più facile partendo da $V_i = 15$ V anziché da $V_i = 0$ V. In questo caso ci si accorgeva subito che D_1 era spento ed entrava in conduzione quando $V_o < V_{B1}$.



ESERCIZIO D.3

Dato il circuito di figura determinare l'andamento della tensione di uscita al variare di V_i e tracciarne il grafico.



$V_{B1} = 3$ V
$V_{B2} = 5$ V
$-10\text{ V} \le V_i \le 10$ V
Diodi ideali

SOLUZIONE

Lo studio si suddivide in vari casi facendo, di volta in volta, opportune ipotesi sullo stato dei diodi.

a) $V_i < V_{B1} \quad \Rightarrow \quad D_1 = ON \quad \Rightarrow \quad D_2 = D_3 = OFF \quad V_o = V_{B1} = 3$ V

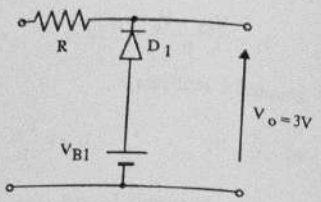
In questa situazione la corrente su D_1 risulta

$I_{D1} = \frac{V_{B1} - V_i}{R} > 0$; la tensione su D_2 risulta

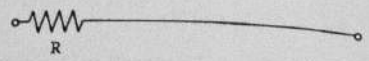
$V_{D2} = -V_{B2} < 0$ e la tensione su D_3 risulta

$V_{D3} = V_{B1} - V_{B2} < 0$

confermando l'ipotesi sullo stato dei diodi.



b) $V_{B1} \le V_i \le V_{B2} \quad \Rightarrow \quad D_1 = D_2 = D_3 = OFF.$



Verifica: $V_{D1} = V_{B1} - V_o < 0$

$V_{D2} = -V_{B2} + V_o - V_{B1} < 0$

$V_{D3} = V_o - V_{B2} < 0$

$V_o = V_i$ in quanto non c'é caduta su R.

c) $V_i \ge V_{B2}$

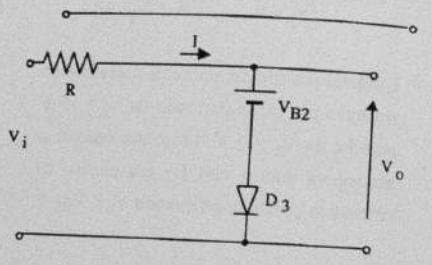
$D_1 = D_2 = OFF$,

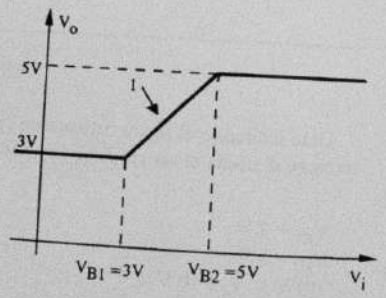
$D_3 = ON \quad \Rightarrow \quad V_o = V_{B2} = 5\,V$

Infatti la corrente $I_{D3} = \frac{V_i - V_o}{R} > 0$ assicura D_3 ON mentre

$V_{D1} = -V_{B2} < 0 \; V_{D2} = -V_{B1} < 0$

assicurano $D_1 = D_2 = OFF$.





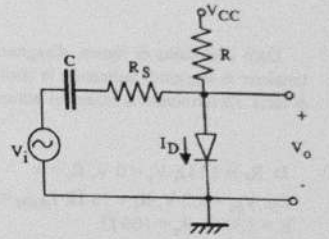
ESERCIZIO D.4

Determinare la componente alternata (piccoli segnali) della tensione di uscita $V_o(t)$ nelle due condizioni:

a) $V_{CC} = 50$ V
b) $V_{CC} = 2$ V
Diodo: $V_D = 0.6$ V; $\eta = 2$; $R = 10$ kΩ; $R_S = 10\ \Omega$

$V_i(t) = V_{iM} \sin(\omega t); \qquad V_{iM} = 2\,mV$

Si consideri C un cortocircuito alle frequenze di lavoro



SOLUZIONE

Ipotizziamo che $V_i(t)$ sia sufficientemente piccola da poter considerare valida l'analisi ai piccoli segnali.

$$I_D = I_S\left(e^{\frac{V_D}{\eta V_T}} - 1\right) \equiv I_S\left(e^{\frac{V_D}{\eta V_T}}\right) \qquad \text{per} \qquad \frac{V_D}{\eta V_T} >> 1$$

per $T = 293\ ^\circ K \qquad V_T = \frac{T}{11.600} = 25\ mV$

Calcolo della conduttanza differenziale del diodo:

$$g_d = \left.\frac{\partial I_D}{\partial V_D}\right|_{I_{DQ}} = \left.\frac{I_S e^{\frac{V_D}{\eta \cdot V_T}}}{\eta V_T}\right|_{I_{DQ}} = \left.\frac{I_D}{\eta V_T}\right|_{I_{DQ}}$$

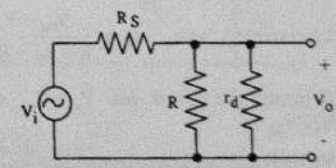
$$r_d = \frac{1}{g_d} = \frac{\eta V_T}{I_{DQ}} = \frac{25 \cdot 2}{I_{DQ}(mA)}$$

$V_{CC} = R\,I_D + V_D \qquad V_D = 0.6\,V$

a) $I_D = 4,94\ mA \quad \Rightarrow \quad r_D = 10,12\ \Omega$

b) $I_D = 0,14\ mA \quad \Rightarrow \quad r_D = 357\ \Omega$

Per l'analisi ai piccoli segnali il circuito diventa:



$$V_o = V_i \frac{r_d // R}{R_S + r_d // R}$$

$V_o = V_{oM}\,\text{sen}(\omega t)$

con

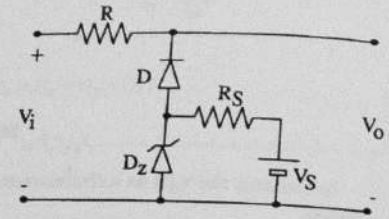
a) $V_{oM} = 0,34\ mV$

b) $V_{oM} = 1,75\ mV$

ESERCIZIO D.5

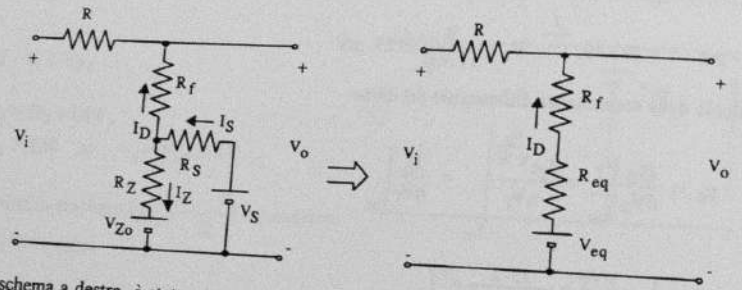
Dato il circuito di figura, disegnare la transcaratteristica (tensione di uscita in funzione della tensione di ingresso) indicando le coordinate dei punti di spezzamento e le pendenze dei vari tratti di retta. Determinare la massima potenza dissipata dal diodo zener D_z.

D: $R_f = 10\ \Omega$, $V_\gamma = 0$ V, $R_r = \infty$
D_z: $V_{z0} = 8.2$ V, $R_z = 10\ \Omega$, $I_{ZMIN} = 10$ mA
$R = 150\ \Omega$, $R_s = 100\ \Omega$
$V_s = 15$ V, $0 \le V_i \le 20$ V



SOLUZIONE

a) Si fa l'ipotesi D in conduzione e $I_Z > I_{ZMIN}$. Il circuito equivalente diventa :



Lo schema a destra è stato ottenuto applicando Thevenin alla parte di circuito contenente V_{Zo}, R_Z, V_S ed R_S:

$$\begin{cases} R_{eq} = R_Z // R_S = 9.09\ \Omega \\ V_{eq} = V_{Zo}\dfrac{R_S}{R_S + R_Z} + V_S\dfrac{R_Z}{R_S + R_Z} = \left(\dfrac{V_{Zo}}{R_Z} + \dfrac{V_S}{R_S}\right)R_{eq} = 8.82\ \text{V} \end{cases}$$

La corrente I_D vale : $I_D = \dfrac{V_{eq} - V_i}{R + R_f + R_{eq}}$

Si osservi che $I_D > 0$ per $V_i < V_{eq}$ e perciò l'ipotesi di diodo D in conduzione è corretta per $V_i < V_{eq}$.

Verifichiamo ora la condizione $I_Z > I_{ZMIN}$. Il caso peggiore si ha quando V_i è minima e quindi I_D è massima.

$$V_S = R_S I_S + R_Z I_Z + V_{Zo}$$
$$I_S = I_D + I_Z$$
$$V_S = V_{Zo} + R_S I_D + (R_S + R_Z) I_Z$$
$$I_Z = \frac{V_S - V_{Zo} - R_S I_D}{R_S + R_Z}$$

$$I_{DMAX} = \frac{V_{eq}}{R + R_f + R_{eq}} = 52.2\ \text{mA}$$

$$I_{ZMIN} = \frac{+V_S - V_{Zo} - R_S I_{DMAX}}{R_S + R_Z} = 14\ \text{mA} > 10\ \text{mA}$$

confermando anche la seconda parte dell'ipotesi.

La tensione di uscita vale:

$$V_o = \left(\frac{V_i}{R} + \frac{V_{eq}}{R_f + R_{eq}}\right)\left[R // (R_f + R_{eq})\right]$$

che, vista come funzione di V_i, rappresenta una retta con pendenza $= \dfrac{R_f + R_{eq}}{R + R_f + R_{eq}} = 0.113$ nel piano $V_o = f(V_i)$

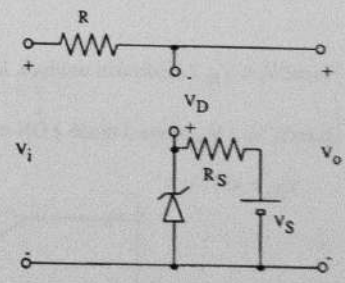
b) Per $V_i > V_{eq}$ l'ipotesi di diodo D in conduzione non è più valida, per cui lo si considera interdetto.

Risulta:

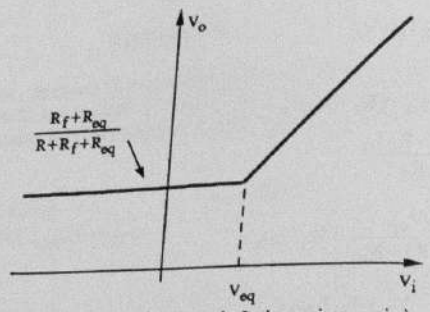
$$V_o = V_i$$

in quanto la caduta su R è nulla. Risulta

$$V_D = R_Z\left(\frac{V_S - V_{Zo}}{R_S + R_Z}\right) + V_{Zo} - V_o$$



il che conferma che $V_D < 0$ per $V_i > \dfrac{R_Z V_S}{R_S + R_Z} + \dfrac{R_S V_{Zo}}{R_S + R_Z} = V_{eq}$



c) La potenza dissipata nello zener è massima quando I_Z è massima, e cioè quando $I_D = 0$ (diodo D interdetto)

$$I_{ZMAX} = \frac{V_S - V_{Zo}}{R_S + R_Z} = 61.8 \text{ mA}$$

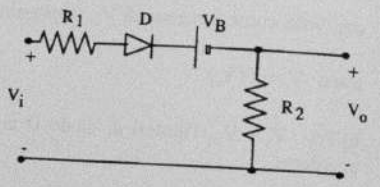
$$P_{DZ} = V_Z I_{ZMAX} = R_Z I_{ZMAX}^2 + V_{Zo} I_{ZMAX} = 0.545 \text{ W}$$

ESERCIZIO D.6

La tensione V_i é una rampa periodica di frequenza 1 kHz compresa tra 0 e 10 V. Considerando il diodo ideale si disegni:

1) la transcaratteristica $V_o = f(V_i)$ indicando i valori dei punti di spezzamento
2) l'andamento nel tempo di V_o

Si assuma $V_B = 3$ V; $R_1 = 2$ kΩ; $R_2 = 4$ kΩ

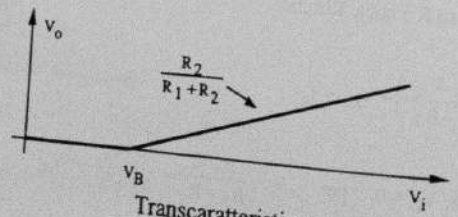


SOLUZIONE

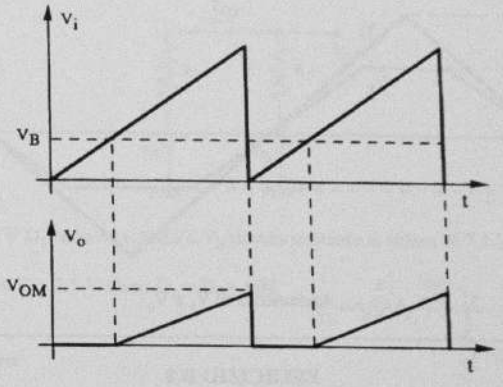
Finché $V_i < V_B$, il diodo non conduce, la corrente nella maglia é nulla e l'uscita è nulla.

Quando $V_i \geq V_B$, allora il diodo è ON e $V_o = (V_i - V_B)\frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

$V_{oM} = 4.67$ V.



Transcaratteristica

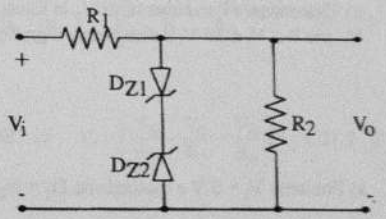


ESERCIZIO D.7

Dato il circuito di figura disegnare:

1) la transcaratteristica $V_o = f(V_i)$ indicando i punti di spezzamento;
2) l'andamento nel tempo di V_o quando V_i é una tensione triangolare a valore medio nullo di ampiezza $V_{iM} = 8$V.

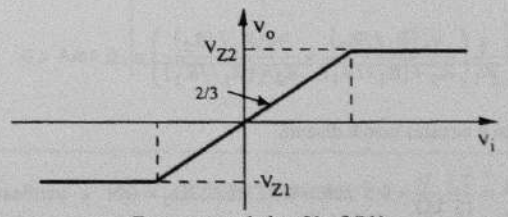
Dati: $R_2 = 2\,R_1$, $V_{Z1} = 5$ V, $V_{Z2} = 3$ V (diodi zener ideali)



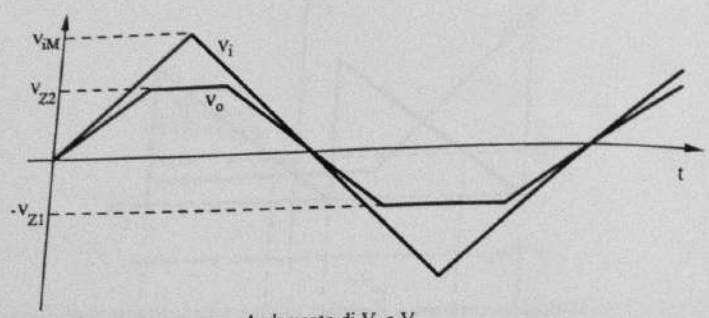
SOLUZIONE

Ipotesi: i diodi zener non conducono: $V_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_i = \frac{2}{3} V_i$,

e l'ipotesi è vera finché $-V_{Z1} < V_o < V_{Z2}$.



Transcaratteristica $V_o = f(V_i)$

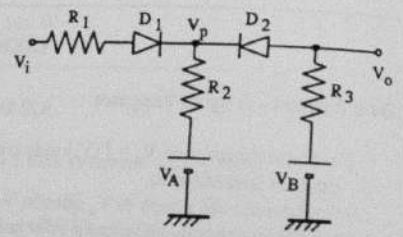


Andamento di V_i e V_o

ESERCIZIO D.8

Dato il circuito in figura con:
$V_A = 2.5$ V; $V_B = 10$ V; $R_1 = 15$ kΩ;
$R_2 = 10$ kΩ; $R_3 = 5$ kΩ;

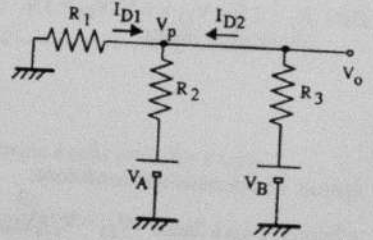
Determinare l'andamento di V_o in funzione di V_i per $0 \le V_i \le 30$ V, e disegnarne il grafico.



SOLUZIONE

a) Poniamo $V_i = 0$ V e ipotizziamo $D_1 = D_2 = ON$.

Il circuito diviene:

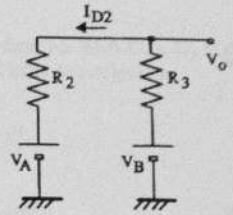


$$I_{D1} = -\frac{V_o}{R_1} = -\frac{1}{R_1}\left(\frac{V_A(R_1//R_3)}{R_2+(R_1//R_3)} + \frac{V_B(R_1//R_2)}{R_3+(R_1//R_2)}\right) = -0.4\,\text{mA} < 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 = \text{OFF}$$

Con la nuova ipotesi il circuito quindi diventa:

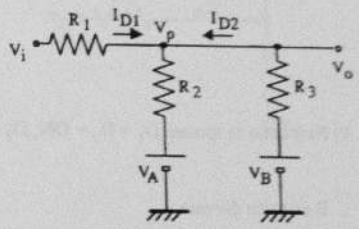
$$I_{D2} = \frac{V_B - V_A}{R_1 + R_2} = \frac{7.5\ \text{V}}{15\ \text{k}\Omega} = 0.5\ \text{mA} > 0 \quad \Rightarrow \quad D_2 = \text{ON} \ \text{è verificato}$$

$$V_O = -R_3 \cdot I_{D2} + V_B = -2.5 + 10 = 7.5\ \text{V}$$



b) Finché $V_i \le 7.5$ V D_1 resta interdetto e V_o rimane costante al valore di 7.5 V.

c) Poniamo che per $V_i \ge 7.5$ V siano $D_1 = D_2 = ON$.



Il circuito diviene:

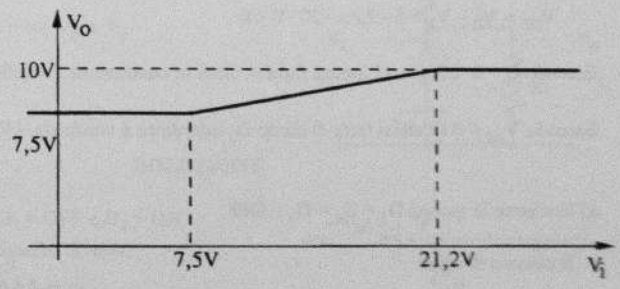
$$V_o = \frac{V_i(R_2//R_3)}{R_1+(R_2//R_3)} + \frac{V_A(R_1//R_3)}{R_2+(R_1//R_3)} + \frac{V_B(R_1//R_2)}{R_3+(R_1//R_2)} = \left(\frac{V_i}{R_1} + \frac{V_A}{R_2} + \frac{V_B}{R_3}\right)(R_1//R_2//R_3)$$

$$R_P = R_1//R_2//R_3 = 2.73\ \text{k}\Omega$$

$$I_{D2} = \frac{V_B - V_o}{R_3} > 0 \quad \text{finchè} \quad V_o < V_B = 10\ \text{V} \quad \Rightarrow \quad V_i < \left(\frac{V_B}{R_P} - \frac{V_A}{R_2} - \frac{V_B}{R_3}\right)R_1 = 21.2\ \text{V}$$

d) Per $V_i \ge 21.2$ V si ha $V_o = V_B = 10$ V

L'andamento richiesto risulta:



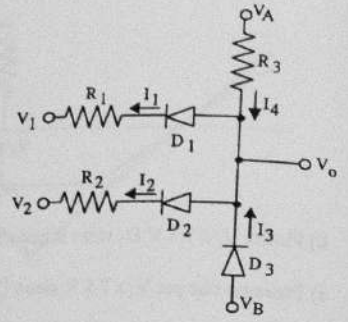
ESERCIZIO D.9

Dato il circuito in figura con i seguenti parametri:

$V_A = 40$ V; $V_B = 5$ V; $R_1 = R_2 = 1$ kΩ; $R_3 = 20$ kΩ; D_1, D_2, D_3 ideali ($R_f = 0$; $V_\gamma = 0$; $R_r = \infty$).

Determinare il valore di V_O nei casi:

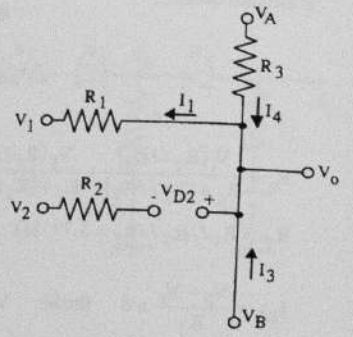
1) $V_1 = 0$; $V_2 = 25$ V
2) $V_1 = V_2 = 25$ V



SOLUZIONE

1) Facciamo le ipotesi $D_1 = D_3 = ON$, $D_2 = OFF$.

Il circuito diventa:



$$I_4 = \frac{V_A - V_B}{R_3} = \frac{40-5}{20\cdot 10^3} = 1.75 \text{ mA}$$

$$I_1 = \frac{V_B - V_1}{R_1} = \frac{5-0}{1\cdot 10^3} = 5 \text{ mA} > 0$$

$$I_3 = I_1 - I_4 = 3.25 \text{ mA} > 0$$

$$V_{D2} = V_B - V_2 = 5 - 25 = -20 \text{ V} < 0$$

Essendo $I_1 > 0$ ed $I_3 > 0$ l'ipotesi fatta di diodi in conduzione è verificata.

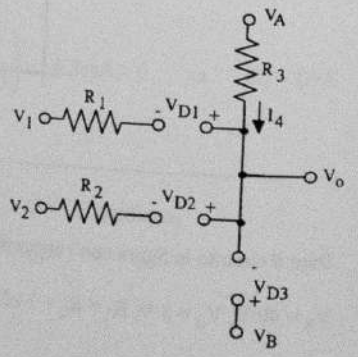
Essendo $V_{D2} < 0$ l'ipotesi fatta di diodo D_2 interdetto è verificata. ($V_o = V_B = 5$ V)

2) Facciamo le ipotesi $D_1 = D_2 = D_3 = OFF$.

Il circuito diventa:

$$I_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_o = V_A = 40 \text{ V}$$
$$V_{D1} = V_o - V_1 = 40 - 25 = 15 \text{ V} > 0$$

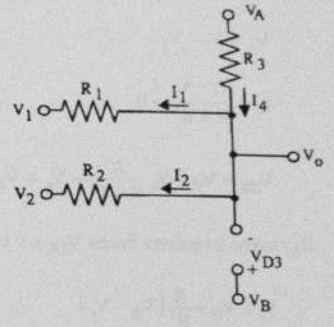
$$V_{D2} = V_o - V_1 = 15 \text{ V} > 0$$
$$V_{D3} = V_B - V_o = 5 - 40 = -35 \text{ V} < 0$$



Essendo V_{D1} e $V_{D2} > 0$ l'ipotesi fatta sui diodi D_1 e D_2 (OFF) non è corretta, mentre lo è per il diodo D_3. Si ripete perciò l'analisi nella nuova ipotesi:

$D_1 = D_2 = ON$, $D_3 = OFF$

Il circuito diventa:



Essendo $V_1 = V_2$ e $R_1 = R_2$ => $I_1 = I_2$

$$I_4 = I_1 + I_2 = 2I_1$$

$$V_A - V_1 = R_3 I_4 + R_1 I_1 = (2R_3 + R_1) I_1$$

$$I_1 = \frac{V_A - V_1}{2R_3 + R_1} = 366 \ \mu\text{A} > 0$$

$$I_4 = 2I_1 = 732 \ \mu\text{A}$$

$$V_O = R_1 I_1 + V_1 = 25.37 \text{ V}$$

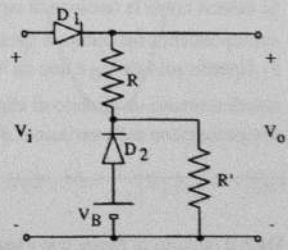
$$V_{D3} = V_B - V_O = 5 - 25.37 = -20.37 \text{ V} < 0$$

Tutte le ipotesi fatte sono verificate, quindi $V_o = 25.37$ V

ESERCIZIO D.10

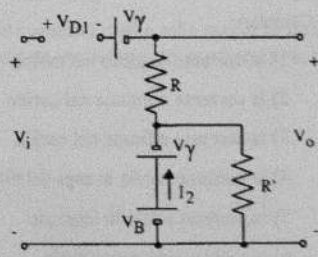
Dato il circuito in figura si ricavi la caratteristica $V_o = f(V_i)$.

D_1, D_2: $V\gamma \neq 0$; $R_f = 0$; $R_r = \infty$; $V_B > V_\gamma$



SOLUZIONE

1) Facciamo l'ipotesi che D_1 = OFF e D_2 = ON.
In questa situazione il circuito diventa:



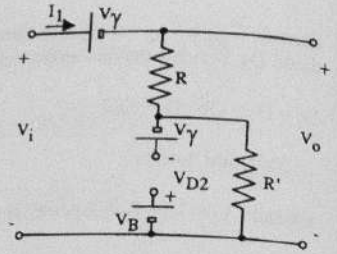
$$I_R = 0 \quad \Rightarrow \quad V_O = V_B - V_\gamma$$

$$I_2 = \frac{V_B - V_\gamma}{R'} > 0$$

$$V_{D1} = V_i - V_B + V_\gamma - V_\gamma$$

D_1 rimane interdetto finché $V_{D1} \leq 0$ cioè $V_i \leq V_B$.

2) Facciamo l'ipotesi che D_1 = ON e D_2 = OFF.



In questa situazione il circuito diventa:

$$V_o = V_i - V_\gamma$$

$$I_1 = \frac{V_i - V_\gamma}{R + R'} > 0$$

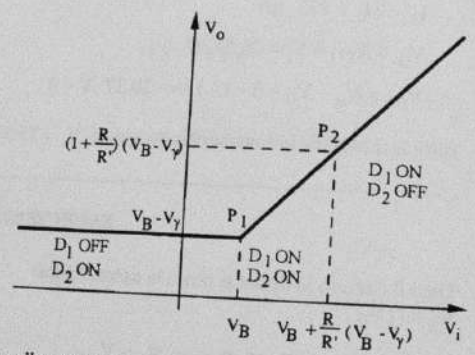
$$V_{D2} = V_B - V_o \frac{R'}{R+R'} - V_\gamma = V_B - (V_i - V_\gamma)\frac{R'}{R+R'} - V_\gamma$$

D_2 rimane interdetto finché $V_{D2} \le 0$ cioè finché

$$V_i \ge V_B + \frac{R}{R'}(V_B - V_\gamma)$$

Quando D_2 conduce vale ancora:

$V_o = V_i - V_\gamma$

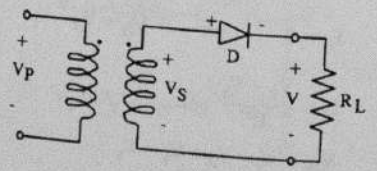


Osserviamo che in P_2 la pendenza non cambia e rimane unitaria.
Infatti $V_o = V_i - V_\gamma$ é indipendente dallo stato di D_2 quando D_1 è in conduzione.
Si osservi come la tensione di ingresso in corrispondenza del punto di spezzamento P_1 dipenda solo da V_B e non da V_γ. Si è quindi ottenuto un circuito di clipping con compensazione delle variazioni di V_γ dovute alla temperatura.

ESERCIZIO D.11

Dato il circuito di figura con i seguenti parametri:
$R_L = 200\ \Omega$; $V_S = 220\ V_{RMS}$; $V_{SM} = V_S \cdot \sqrt{2} = 311\ V$; $R_F = 20\ \Omega$; $V_\gamma = 0$; $R_r = \infty$
Calcolare:

1) la corrente di picco nel carico
2) la corrente continua nel carico
3) la corrente efficace nel carico
4) la tensione media ai capi del diodo
5) la potenza totale in ingresso
6) la regolazione percentuale



SOLUZIONE

1) Corrente di picco nel carico:

Durante la semionda positiva di V_S il diodo conduce e risulta:

$$I_M = \frac{V_{SM}}{R_F + R_L} = \frac{311}{20+200} = \sqrt{2} = 1.41\ A$$

2) Corrente media nel carico:

Il valore della corrente media su R_L é dato da:

$$I_{dc} = I_O = \frac{I_M}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0.42\ A$$

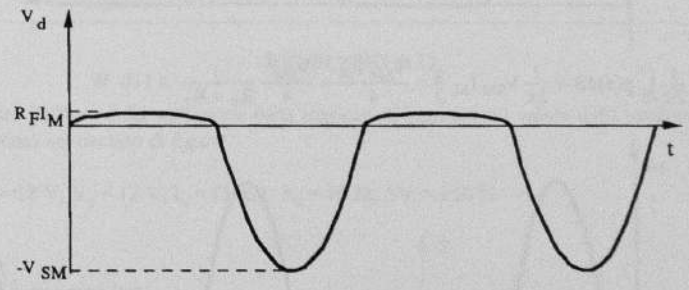
3) Corrente efficace nel carico:

Il valore della corrente efficace su R_L é dato da:

$$I_{RMS} = \frac{I_M}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\ A$$

4) Tensione media ai capi del diodo:

La forma d'onda della tensione sul diodo é mostrata in figura. La tensione media ai suoi capi vale:



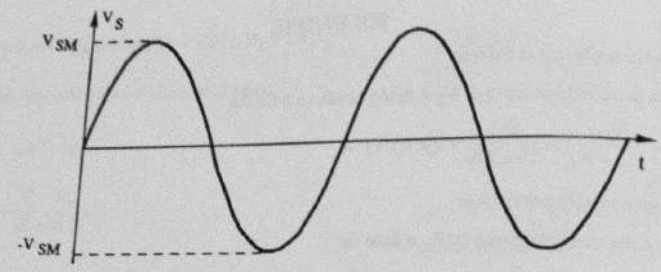
$$V_d = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_d(\vartheta)\,d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\pi} R_F I_M \operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta + \int_\pi^{2\pi} V_{SM}\operatorname{sen}\vartheta\,d\vartheta\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{R_F I_M \cdot 2 + V_{SM}(-2)\right\}$$

$$\Rightarrow\ V_d = \frac{1}{2\pi}\left\{R_F I_M \cdot 2 - 2\left[I_M(R_F + R_L)\right]\right\} = -\frac{1}{\pi}(R_L I_M) = -R_L I_{dc} = -V_O = -90\ V$$

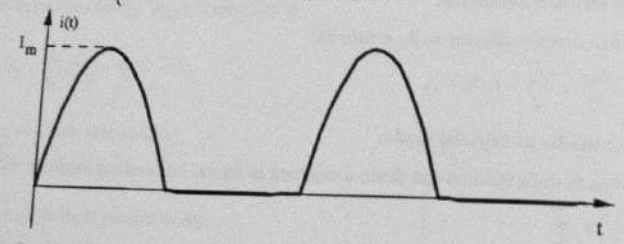
Questo risultato é confermato dal fatto che la somma delle tensioni medie sulla maglia di uscita deve essere nulla. Ma, essendo nulla anche la tensione media al secondario del trasformatore, la tensione media sul diodo é la stessa di quella sul carico.

5) Potenza totale in ingresso:

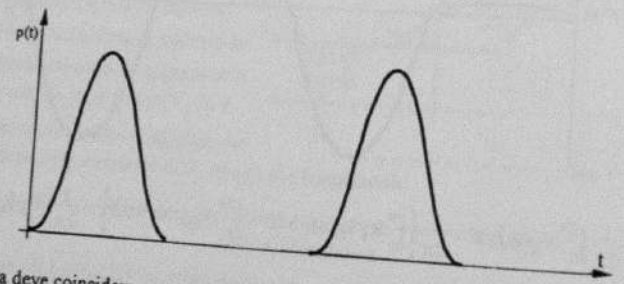
Il calcolo della potenza (media) di ingresso é dato da:



$$p(t) = v_S(t)\,i(t) = \begin{cases} V_{SM}\,I_M\,\text{sen}^2\vartheta & 0 \le \vartheta \le \pi \\ 0 & \pi \le \vartheta \le 2\pi \end{cases}$$



$$P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} p(t)\,d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\,V_{SM}\,I_M\,\frac{\pi}{2} = \frac{V_{SM}\,I_M}{4} = \frac{{V_{SM}}^2}{4}\,\frac{1}{R_F + R_L} \cong 110\ \text{W}$$



Tale potenza deve coincidere con quella dissipata nelle resistenze R_F ed R_L.

$$P = P_d = (R_L + R_F)\,I_{RMS}^2 = \frac{2}{4}(R_L + R_F) = 110\ \text{W}$$

La potenza continua fornita in uscita risulta:

$$P_O = R_L\,I_{dc}^2 = \left(\frac{I_M}{\pi}\right)^2 R_L = 40.5\ \text{W}$$

Si definisce efficienza di raddrizzamento η_r il rapporto tra la potenza continua fornita al carico e la totale potenza in ingresso:

$$\eta_r = \frac{P_O}{P} = \left(\frac{I_M}{\pi}\right)^2 R_L\,\frac{4}{V_{SM}\,I_M} = \frac{I_M^2}{\pi^2}\,R_L\,\frac{4}{I_M^2\,(R_L + R_F)} = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{1}{1 + \frac{R_F}{R_L}}$$

$$\eta_r\,\% = \eta_r \cdot 100 = \frac{40.5}{1 + \frac{R_F}{R_L}} = 38.9\ \%$$

6) Regolazione percentuale:

Dalla definizione

$$\text{Reg}\% = \left(\frac{V_{O\ \text{no-load}} - V_{O\ \text{load}}}{V_{O\ \text{load}}}\right)100$$

$$V_{O\ \text{load}} = R_L\,I_O = R_L\,\frac{I_M}{\pi} = \frac{R_L}{R_L + R_F}\,\frac{V_{SM}}{\pi}$$

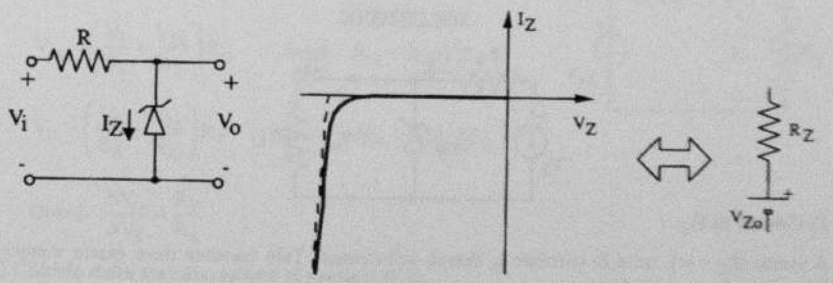
$$V_{O\ \text{no-load}} = \frac{V_{SM}}{\pi}$$

$$\text{Reg}\% = \left[\frac{V_{SM}}{\pi}\,\frac{(R_F + R_L)\,\pi}{R_L\,V_{SM}} - 1\right]100 = \left[\left(1 + \frac{R_F}{R_L}\right) - 1\right]100 = \frac{R_F}{R_L}\,100 = 10\%$$

ESERCIZIO D.12

Studiare l'effetto della variazione della tensione di ingresso sul valore della tensione di uscita (regolazione) nel circuito di figura:

Dati: $V_i = 18$ V; $V_o = 12$ V; $I_z = 15$ mA; $R_z = 10\ \Omega$; $\Delta V_i = \pm 10\ \%$



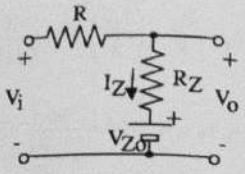
La linea tratteggiata rappresenta una approssimazione lineare a tratti.
Calcolare ΔV_o

SOLUZIONE

Il valore della resistenza R e della tensione di uscita si ottengono dalle equazioni:

$$R = \frac{V_i - V_o}{I_Z} = 400\ \Omega$$

$$V_{Zo} = V_O - R_Z I_Z = 11.85 \text{ V}$$



Al variare di V_i fra i valori minimo e massimo si determinano i valori di V_o

$$V_{Imin} = V_i(1-0.1) = 16.2 \text{ V}$$

$$V_{Imax} = V_i(1+0.1) = 19.8 \text{ V}$$

$$V_O = R_Z I_Z + V_{Zo} = R_Z \frac{V_i - V_{Zo}}{R + R_Z} + V_{Zo} \Rightarrow \begin{cases} V_{O\min} = 11.95 \text{ V} \\ V_{O\max} = 12.04 \text{ V} \end{cases} \Rightarrow \Delta V_O = \pm 0.044 \text{ V}$$

Si poteva calcolare anche come in uno schema "ai piccoli segnali":

$$\Delta V_O = \frac{R_Z}{R + R_Z} \Delta V_I = 2.44 \cdot 10^{-2} \cdot \Delta V_I = 0.044 \text{ V}$$

ESERCIZIO D.13

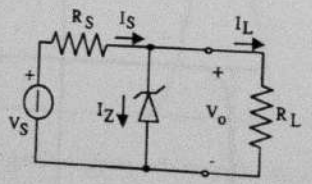
Progettare un circuito di regolazione a zener che fornisca in uscita una tensione di 6V a partire da una tensione di 15 V.

Dati: $V_{Zo} = 6$ V; $I_{Zmin} = 10$ mA (per mantenere la regolazione); $I_{Zmax} = 60$ mA; $R_Z = 7\ \Omega$

Per il progetto del circuito determinare i valori di :

1) R_S e $P(R_S)$= potenza dissipata su R_S
2) R_{Lmin} (che mantiene la regolazione)
3) $S_v = \Delta V_o/\Delta V_s$ (stabilizzazione della tensione di uscita al variare di V_s)
4) $S_R = \Delta V_o/\Delta R_L$ (stabilizzazione della tensione di uscita al variare di R_L)

SOLUZIONE



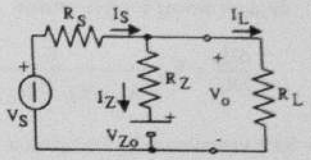
1) Calcolo di R_S:

A vuoto ($R_L = \infty$), tutta la corrente I_s fluisce nello zener. Tale corrente deve essere minore del valore massimo consentito:

$$I_S = \frac{V_S - V_{Zo}}{R_S + R_Z} \le 60 \text{ mA} \quad \Rightarrow \quad R_S \ge 143\ \Omega \quad (\text{si può porre } R_S = 150\ \Omega)$$

2) Calcolo di R_{Lmin}:

Dallo schema si determina il valore di R_L minimo che garantisce la corrente minima sullo zener.



$$I_{L\max} = I_S - I_{Z\min}$$

$$I_{L\max} = \frac{V_S - [R_Z I_{Z\min} + V_{Zo}]}{R_S} - I_{Z\min} \cong 50 \text{ mA}$$

$$R_{L\min} = \frac{(R_Z I_{Z\min} + V_{Zo})}{I_{L\max}} = \frac{6}{50 \cdot 10^{-3}} = 120\ \Omega$$

La potenza dissipata su R_S vale:

$$P(Rs) = \frac{V_{RS}^2}{R_S} = \frac{[V_S - (R_Z I_{Z\min} + V_{Zo})]^2}{R_S} = 0,53 \text{ W}$$

3) Calcolo della stabilizzazione al variare di V_s

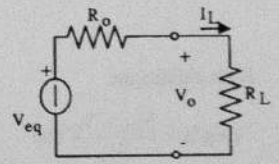
A vuoto ($R_L = \infty$) si ottiene:

$$V_O = \left(\frac{V_S}{R_S} + \frac{V_{Zo}}{R_Z}\right) R_O \quad \text{dove} \quad R_O = R_S // R_Z$$

$$\Delta V_O = \Delta V_S \frac{R_O}{R_S} = \Delta V_S \frac{R_Z}{R_S + R_Z} \quad (V_{Zo} \text{ rimane costante})$$

$$S_V = \frac{\Delta V_O}{\Delta V_S} = \frac{R_Z}{R_S + R_Z} = 0,0446 \quad \Leftarrow \text{ calcolata a vuoto}$$

La stabilizzazione a carico diventa:



$$V_{eq} = \left(\frac{V_S}{R_S} + \frac{V_{Zo}}{R_Z}\right) R_O \quad \text{dove} \quad R_O = R_S // R_Z$$

$$V_O = \left(\frac{V_S}{R_S} + \frac{V_{Zo}}{R_Z}\right) R_P \quad \text{dove} \quad R_P = R_O // R_L$$

Quindi $\dfrac{\Delta V_O}{\Delta V_S} = \dfrac{R_P}{R_S}$.

4) Calcolo della stabilizzazione al variare di R_L

Si vuole esprimere la sensibilità di V_O alle variazioni di R_L. Possiamo scrivere:

$$\begin{cases} V_O' = V_{eq} \dfrac{R_L'}{R_O + R_L'} \\ V_O'' = V_{eq} \dfrac{R_L''}{R_O + R_L''} \end{cases} \Rightarrow V_O'' - V_O' = \Delta V_O = V_{eq} \frac{R_O \Delta R_L}{\left(R_O + R_L'\right)\left(R_O + R_L''\right)}$$

da cui si ottiene il valore cercato

$$\frac{\Delta V_O}{\Delta R_L} = V_{eq} \frac{R_O}{\left(R_O + R_L'\right)\left(R_O + R_L''\right)}$$

Se le variazioni di R_L sono piccole si può anche scrivere:

$$\frac{\Delta V_O}{\Delta R_L} \cong \frac{dV_O}{dR_L} = \frac{V_{eq} R_O}{(R_L + R_O)^2}$$

Per sapere come varia ΔV_o in funzione di I_L (o di R_L) conviene considerare la resistenza di uscita del regolatore. Dallo schema secondo Thevenin si trova:

$$R_O = R_S // R_Z \cong R_Z = 7\ \Omega$$

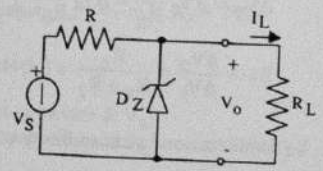
$$\Delta V_O = -R_Z I_L$$

Il segno meno sta ad indicare che un aumento di I_L provoca una diminuzione di V_O.

ESERCIZIO D.14

Determinare il fattore di regolazione percentuale con $R_L = 200\ \Omega$ e disegnare l'andamento di $V_o = f(I_L)$ relativi allo schema di figura.

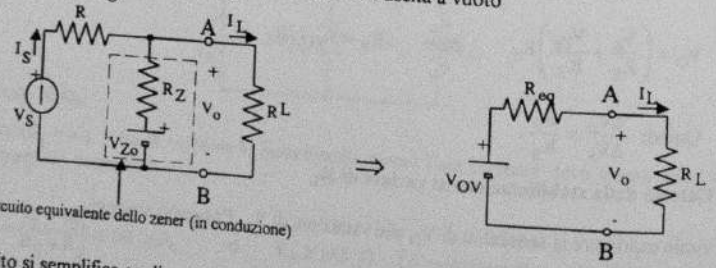
Dati: $R = 100\ \Omega$; $V_s = 20$ V;
Zener: $V_{Zo} = 10$ V; $R_Z = 10\ \Omega$; $I_{Zmin} = 0$.



SOLUZIONE

Dalla definizione:

$$Reg\% = \frac{V_{OV} - V_O}{V_O} 100 \qquad V_{OV} = \text{tensione di uscita a vuoto}$$



Circuito equivalente dello zener (in conduzione)

Il circuito si semplifica applicando Thevenin alla sezione a sinistra dei nodi A e B

$$V_{OV} = V_S \frac{R_Z}{R + R_Z} + V_{ZO} \frac{R}{R + R_Z} = \left(\frac{V_S}{R} + \frac{V_{ZO}}{R_Z}\right) R_{eq}$$

$$R_{eq} = R_Z // R = 9.1\ \Omega$$

$$V_{OV} = 10.9\ \text{V}$$

La tensione di uscita con $R_L = 200\ \Omega$ è:

$$V_O = V_{OV} \frac{R_L}{R_L + R_{eq}} = 10.4\ \text{V}$$

e la regolazione vale:

$$Reg\% = \frac{V_{OV} - V_{OV} \dfrac{R_L}{R_L + R_{eq}}}{V_{OV} \dfrac{R_L}{R_L + R_{eq}}} \cdot 100 = \frac{R_{eq}}{R_L} \cdot 100 = 4.46\ \%$$

$$V_O = V_{OV} - R_{eq} I_L$$

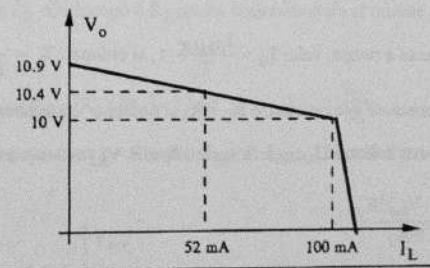
con $R_L = 200\ \Omega \quad \Rightarrow \quad I_L = \frac{V_O}{R_L} = \frac{10.4}{200} = 52$ mA

$$I_S = \frac{V_S - V_O}{R} = \frac{20 - 10.4}{100} = 96\ \text{mA} \quad \Rightarrow \quad I_Z = I_S - I_L = 44\ \text{mA}$$

Quando $I_z = 0$ lo zener diventa un circuito aperto $\Rightarrow$ $V_O = 10$ V; $I_L = 100$ mA

Per I_L maggiore di 100 mA lo zener si spegne e la relazione $V_o = f(I_L)$ diventa:

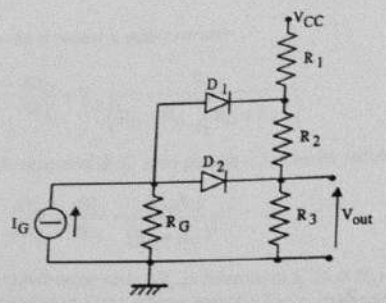
$$V_O = V_S - R I_L$$

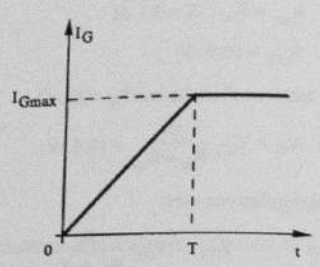


ESERCIZIO D.15

Il circuito di figura è costituito da diodi ideali e dai seguenti parametri:
$R_1 = 1$ kΩ; $R_2 = 1.5$ kΩ; $R_3 = 7.5$ kΩ; $R_G = 3$ kΩ; $V_{CC} = 12$ V; $I_{Gmax} = 4$ mA; $T = 3$ s;

1) Tracciare l'andamento temporale della tensione di uscita V_{out} al variare della corrente I_G come indicato in figura
2) Si tracci l'andamento di V_{out} per un valore di I_{Gmax} doppio di quello al punto 1).





SOLUZIONE

Per $I_G = 0$ la caduta su R_G è nulla e i due diodi sono interdetti. Al crescere di I_G i diodi rimangono spenti finché la tensione di anodo non raggiunge quella di catodo. Si nota quindi che il primo diodo ad entrare in conduzione è D_2 in quanto ha una tensione di catodo inferiore (gli anodi sono allo stesso potenziale). Si calcolano V_{K2} (tensione sul catodo di D_2) e V_{K1} (tensione sul catodo di D_1):

$$V_{K2} = V_{CC}\frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} = 9\,V; \qquad V_{K1} = V_{CC}\frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3} = 10.8\,V$$

$V_G = I_G R_G$ finché D_2 e D_1 sono spenti.

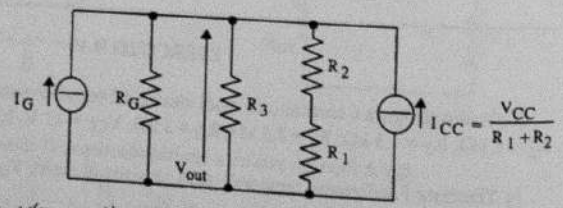
Per $V_G = V_{K2}$ il diodo D_2 inizia a condurre. In tale istante (T_1) vale:

$$R_G I_G(T_1) = V_{CC}\frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} \qquad I_{G1}(T_1) = V_{CC}\frac{R_3}{R_G}\frac{1}{R_1+R_2+R_3} = 3\,mA$$

Essendo I_G una corrente a rampa, vale: $I_G = \frac{I_{GMAX}}{T}\cdot t$, si ottiene: $T_1 = \frac{I_{G1}}{I_{GMAX}}T = 2.25\,s$

Da questo punto D_2 conduce e le resistenze R_G e R_3 si possono considerare in parallelo. Si nota che $V_{R2} = V_{KA1}$ ovvero il diodo D_1 rimarrà spento finché $V_{R2} > 0$ ovvero finché $V_{out} < V_{CC}$ in quanto $V_{R2} = \frac{(V_{CC}-V_{out})R_2}{R_1+R_2}$.

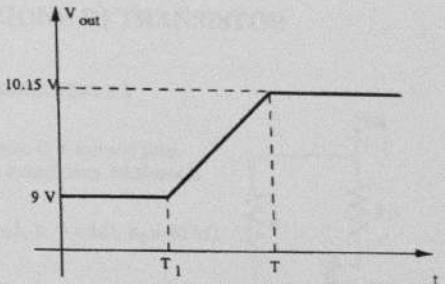
Il calcolo di V_{out} si può fare schematizzando i due generatori secondo Norton. Si ottiene il circuito:



da cui:

$$V_{out} = (I_G + I_{CC})(R_G // R_3 // (R_1+R_2)).$$

Si osserva che per $I_G = I_{GMAX}$ risulta $V_{out} = 10.15\,V < V_{CC}$, quindi il diodo D_1 rimarrà interdetto e il secondo spezzamento della caratteristica si avrà per $I_G = I_{GMAX}$ e $T_2 = T$.
I risultati in forma grafica sono mostrati in figura.



Nel caso si raddoppi I_{GMAX} valgono gli stessi discorsi precedenti e in particolare risulta $T_1' = \frac{T_1}{2}$. Si osserva però che ora per $I_G = I_{GMAX}$ risulta $V_{out} > V_{CC}$ e quindi la formula precedente non è più valida.
Essa vale solo per $V_{out} \le V_{CC}$ e quindi si può usare per determinare l'istante in cui entra in conduzione D_1.
Si ottiene: $V_{out} = V_{CC} = (I_{G2} + I_{CC})R_{P1}$ con $R_{P1} = R_G // R_3 // (R_1+R_2)$
da cui si ricava I_{G2}.

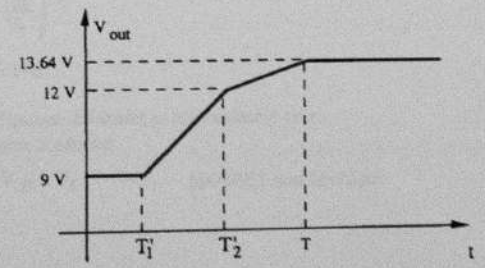
$$I_{G2} = \frac{V_{CC}}{R_{P1}} - I_{CC} = 5.6\,mA$$ e l'istante di inizio conduzione per D_1 risulta:

$$T_2' = \frac{I_{G2}}{I_{GMAX}}T = 2.15\,s.$$

Dopo T_2' sia D_1 che D_2 conducono e R_2 risulta cortocircuitata si ottiene (dallo schema precedente con $R_2 = 0$)

$$V_{out} = (I_G + I_{CC})(R_G // R_3 // R_1) = 13.64\,V; \qquad I_{CC} = \frac{V_{CC}}{R_1}$$

il terzo spezzamento si ha per $t = T$ e per $I_G = 2\cdot I_{GMAX}$. L'andamento complessivo è riportato in figura.

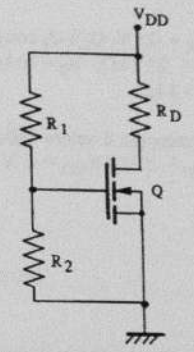


POLARIZZAZIONE DI TRANSISTOR

ESERCIZIO P.1

Determinare se il Mosfet ad arricchimento Q si trova in zona lineare (zona ohmica), di saturazione o in interdizione. Motivare la risposta.

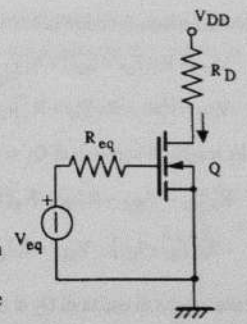
Dati: $V_{DD} = 8$ V, $V_T = 6$ V, $I_{DSS} = 10$ mA, $R_1 = 4$ kΩ, $R_2 = 47$ kΩ, $R_D = 5.6$ kΩ



SOLUZIONE

Nel calcolo della polarizzazione conviene applicare il teorema di Thevenin al partitore in ingresso.

$$\begin{cases} V_{eq} = V_{DD} \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \\ R_{eq} = R_1 // R_2 \end{cases}$$



La corrente di gate è nulla per cui $V_{GS} = V_{eq}$
Se $V_{GS} < V_T$ il Mosfet è interdetto, altrimenti può essere sia in zona lineare che di saturazione.
Supponiamo che sia in saturazione, dobbiamo verificare che $V_{GD} < V_T$ cioè $V_{GS} - V_{DS} < V_T$.

In saturazione vale:

$$I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_T}\right)^2$$

$$V_{DS} = V_{DD} - R_D I_D$$

Se $V_{GS} - V_{DS} < V_T$ l'ipotesi di Mosfet in saturazione è vera.
Con i dati del problema si ottiene:

$V_{eq} = 7.3$ V $= V_{GS} > V_T$ ⇒ MOSFET non interdetto

$I_D = 0.52$ mA

$V_{DS} = 5$ V

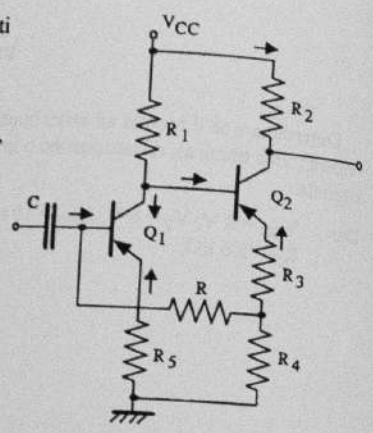
$V_{GD} = 2.3$ V $< V_T$ ⇒ è in zona di saturaturazione.

ESERCIZIO P.2

È dato il circuito di figura caratterizzato dei seguenti parametri:

V_{CC} = -25 V, Q_1 e Q_2 con $\beta_F = 100$, V_{BE} = -0.6 V
R_1 = 27.7 kΩ, R_2 = 10 kΩ, R_3 = 1 kΩ, R_4 = 4 kΩ, R_5 = 3 kΩ.

Determinare il valore della resistenza R in modo che V_{CE1} = -5 V e V_{CE2} = -6 V



SOLUZIONE

Nella resistenza R scorre la corrente di base di Q_1. Dalla maglia di uscita di Q_1 si può scrivere:

$$V_{CC} = R_1(I_{C1} + I_{B2}) + V_{CE1} - R_5 I_{E1} = R_1(I_{C1} + I_{B2}) + V_{CE1} + R_5(I_{C1} + I_{B1})$$

$$V_{CC} = \left[(R_1 + R_5)\beta_F + R_5\right] I_{B1} + R_1 I_{B2} + V_{CE1}$$

Dalla maglia di ingresso di Q_1 si ottiene:

$$R_5 I_{E1} - V_{BE1} - R I_{B1} - R_4(I_{E2} + I_{B1}) = 0$$

$$-R_5(I_{B1} + I_{C1}) - V_{BE1} - R I_{B1} - R_4(-I_{B2} - I_{C2} + I_{B1}) = 0$$

E dalla maglia di uscita di Q_2 si ottiene:

$$V_{CC} = R_2 I_{C2} + V_{CE2} - R_3 I_{E2} - R_4(I_{E2} + I_{B1})$$

$$V_{CC} = R_2 I_{C2} + V_{CE2} + R_3(I_{B2} + I_{C2}) + R_4(I_{B2} + I_{C2} - I_{B1})$$

mentre per la maglia di ingresso di Q_2 si può scrivere:

$$V_{CE1} + R_5(I_{B1} + I_{C1}) = V_{BE2} + R_3(I_{B2} + I_{C2}) + R_4(I_{B2} + I_{C2} - I_{B1})$$

Essendo i transistor in zona attiva: $I_{C1} = \beta_F I_{B1}$, $I_{C2} = \beta_F I_{B2}$, per cui risolvendo il sistema composto dalle equazioni della maglia di ingresso e di uscita di Q_2 si determinano le espressioni di I_{C1} e I_{C2}:

$$\begin{cases} V_{CC} - V_{CE2} = \left[R_2 + R_3\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right) + R_4\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right)\right] I_{C2} - R_4 \frac{I_{C1}}{\beta_F} \\ V_{CE1} - V_{BE2} = \left(R_3 + R_4\right)\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right) I_{C2} - \left[\frac{R_4}{\beta_F} + R_5\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right)\right] I_{C1} \end{cases}$$

da cui, sostituendo i valori dati, si ottiene:

$$\begin{cases} -19 = 15050 \cdot I_{C2} - 40 \cdot I_{C1} & I_{C2} = -1.26 \text{ mA} \\ -4.4 = 5050 \cdot I_{C2} - 3070 \cdot I_{C1} & I_{C1} = -639 \ \mu\text{A} \end{cases}$$

Infine, dalla equazione della maglia di ingresso di Q_1 si ricava R:

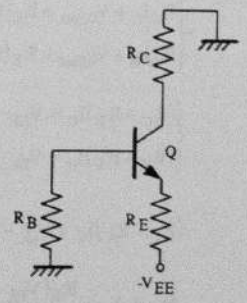
$$R = \left\{-R_5\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right) I_{C1} - V_{BE1} + R_4\left[I_{C2}\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right) - \frac{I_{C1}}{\beta_F}\right]\right\} \frac{\beta_F}{I_{C1}} = 396 \text{ kΩ}$$

Per verificare la correttezza del risultato si può, per esempio, sostituire i valori trovati di I_{C1} e I_{C2} nell'equazione della maglia di uscita di Q_1.
Come si vede I_{C2} è circa 200 volte più grande di I_{B1}. Nell'ipotesi di trascurare questa corrente nella equazione della maglia di uscita di Q_2, era possibile ricavare direttamente il valore di I_{C2} (poi, ovviamente, la validità di tale ipotesi doveva essere verificata).

ESERCIZIO P.3

È dato il circuito di figura caratterizzato dai seguenti parametri:

$\beta_F = 99$
$I_{CB0} = 0$ $\quad V_{BE} = 0.7$ V
$R_C = 2$ kΩ $\quad V_{CEsat} = 0.3$ V
$R_E = 1$ kΩ $\quad V_{EE} = 6$ V
$R_B = 200$ kΩ $\quad V_{BE\,sat} = 0.8$ V



Calcolare:

1) I_C e V_{CE}
2) I_C e V_{CE} con $\beta_F = 199$

SOLUZIONE

1) Si fa l'ipotesi che il transistor Q sia in zona attiva. Dallo schema col modello per la polarizzazione del BJT

Analisi della maglia di ingresso:

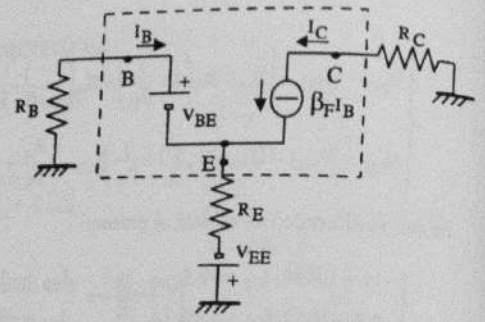
Dalla maglia di ingresso si può scrivere:

$$R_B I_B + V_{BE} + R_E(1 + \beta_F) I_B - V_{EE} = 0$$

da cui

$$I_B = \frac{V_{EE} - V_{BE}}{R_B + (1+\beta_F)R_E} = 17.7\ \mu A$$

$$I_C = \beta_F I_B = 1.75 mA$$



Analisi della maglia di uscita:

Dalla maglia di uscita si può scrivere:

$$R_C I_C + V_{CE} + R_E(\beta_F + 1)I_B - V_{EE} = 0$$

da cui

$$V_{CE} = 6 - 3.5 - 1.77 = 0.73\ V$$

$V_{CE} > 0.3\ V \Rightarrow$ Q è in zona attiva.

2) Si fa l'ipotesi che il transistor Q sia in zona attiva. Seguendo il procedimento al punto 1) col nuovo valore di β_F si ottiene:

$$I_B = 13.25\ \mu A,\ I_C = 2.65 mA \Rightarrow V_{CE} = -1.95\ V < V_{CEsat} = 0.3\ V$$

quindi Q è in saturazione per cui risulta $I_C < \beta_F I_B$

Riscrivendo le equazioni della maglia di uscita e quella di ingresso, assumendo

$V_{CE} = V_{CEsat} = 0.3\,V$ e $V_{BEsat} = 0.8\ V$ si ottiene:

$$\begin{cases} R_C I_C + V_{CEsat} + R_E(I_C + I_B) - V_{EE} = 0 \\ R_B I_B + V_{BEsat} + R_E(I_C + I_B) - V_{EE} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R_C + R_E)I_C = V_{EE} - V_{CEsat} - R_E I_B \\ (R_B + R_E)I_B = V_{EE} - V_{BEsat} - R_E I_C \end{cases}$$

$$(R_C + R_E)I_C = V_{EE} - V_{CEsat} - R_E\left[\frac{V_{EE} - V_{BEsat} - R_E I_C}{R_B + R_E}\right]$$

da cui: $I_C = \dfrac{R_B(V_{EE} - V_{CEsat}) - R_E(V_{BEsat} - V_{CEsat})}{R_C R_B + R_C R_E + R_B R_E} = 1.89\ mA$

Facendo l'ipotesi $I_C >> I_B$ dalla maglia di uscita si poteva ricavare direttamente

$$I_C \cong \frac{V_{EE} - V_{CEsat}}{R_C + R_E} = 1.9\,mA$$

Dalla maglia di ingresso si ricava:

$$I_B = \frac{V_{EE} - V_{BEsat} - R_E I_C}{R_B + R_E} = 16.4\ \mu A$$

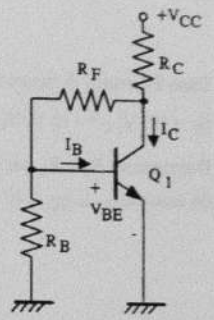
L'ipotesi $I_C >> I_B$ è verificata.

NOTA: Doveva risultare $I_C/I_B > 99$ in quanto con $\beta_F = 99$ il BJT non è in saturazione

ESERCIZIO P.4

Sia dato il circuito di figura con i seguenti parametri:

$\beta_F = 99$, $V_{BE} = 0.7$ V, $I_{CB0} = 0$, $R_C = 2.7\ k\Omega$, $R_F = 180\ k\Omega$, $R_B = \infty$, $V_{CC} = 10$ V.



Calcolare:

1)I valori di I_C e V_{CE}

2)I valori di I_C e V_{CE} con $\beta_F = 199$

SOLUZIONE

1) Si fa l'ipotesi che Q sia in zona attiva. Si ottiene:

1) $V_{CC} = R_C(I_C + I_B) + V_{CE}$

2) $V_{CC} = R_C(I_C + I_B) + R_F I_B + V_{BE}$

3) $I_C = \beta_F I_B$

Sostituendo la 3) nella 2) si ricava:

$$V_{CC} = R_C(1+\beta_F)I_B + R_F I_B + V_{BE}$$

$$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_F + R_C(1+\beta_F)} = \frac{9.3}{450} = 21\mu A$$

$$I_C = \beta_F I_B = 2.05\,mA$$

e dalla 1):

$$V_{CE} = V_{CC} - R_C(I_C + I_B) = V_{CC} - R_C(1 + 1/\beta_F)I_C = 4.47\ V$$

da cui risulta che Q é in zona attiva.

2) Rifacendo i calcoli precedenti con $\beta_F = 199$ si ottiene:

$$I_B = \frac{9.3}{720} = 12.9\,\mu A$$

$I_C = 2.58$ mA

$V_{CE} = 3.03$ V > 0.3 V quindi Q è ancora in zona attiva.

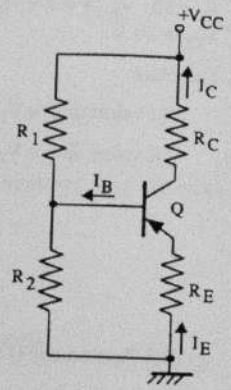
NOTA: Con questo tipo di polarizzazione Q è sempre in zona attiva in quanto $V_{CB} = R_F I_B > 0$

ESERCIZIO P.5

Dato il circuito di figura composto da un transistor Q di tipo PNP con:

$\beta_F = 50$, $V_{CC} = -12$ V, $R_C = R_E = 2$ kΩ.

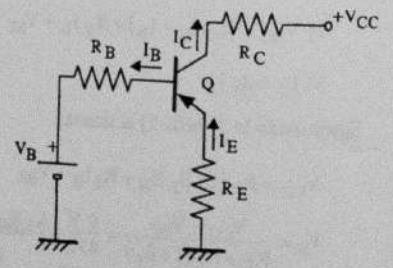
Determinare R_1 e R_2 per avere $V_{CE} = -6$ V
(si assuma $I_{R1} \cong I_{R2} \cong 10\, I_B$).



SOLUZIONE

Si suppone che il transistor Q sia in zona attiva e si assume $V_{BE} = -0.7$ V (non avendo altre indicazioni).
Schematizzando con Thevenin il circuito di polarizzazione di base si ottiene:

$$V_B = V_{CC}\frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{e} \quad R_B = R_1 // R_2$$



Si può ora scrivere (assumendo i versi delle correnti come in figura):

1) $V_B = -R_B I_B + V_{BE} - R_E(I_C + I_B)$

2) $V_{CC} = -R_C I_C + V_{CE} - R_E(I_C + I_B)$

Dalla 2) si ricava:

$$I_C = \frac{V_{CE} - V_{CC}}{R_C + (1 + 1/\beta_F)R_E} \cong \frac{-6 + 12}{4} = 1.5 \text{ mA}$$

$$I_B = \frac{I_C}{\beta_F} = \frac{1.5\,\text{mA}}{50} = 30\,\mu A$$

Dalla 1) si ricava:

3) $V_B + R_B I_B = V_{BE} - R_E(I_C + I_B) = -3.76$ V.

Per la scelta di R_1 e R_2 c'è ancora un grado di libertà. Fissiamo dunque la corrente in R_1 e R_2 pari a 10 volte il valore di I_B (come da specifica) cioè pari a 300 μA, in questo modo si ottiene:

$$R_1 + R_2 \cong \frac{V_{CC}}{300\ \mu A} = 40\ \text{kΩ}$$

e dalla 3)

$$V_{CC}\frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_B = -3.76\ \text{V}$$

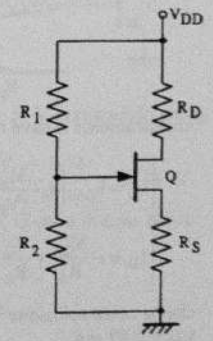
$$V_{CC} R_2 + \left(40\cdot 10^3 - R_2\right) R_2 I_B = -3.76\left(40\cdot 10^3\right)$$

Sostituendo il valore di I_B e risolvendo per ottenere R_1 ed R_2 si ottiene:

$R_2 = 13.4$ kΩ, $\quad R_1 = 26.6$ kΩ

ESERCIZIO P.6

È dato il circuito di figura composto da un JFET a canale N.



Dati:

$V_P = -5$V

$I_{DSS} = 1.2$ mA

$V_{DD} = 18$ V

$R_S = 2$ kΩ

$R_D = 2$ kΩ,

$R_1 = 400$ kΩ

$R_2 = 90$ kΩ.

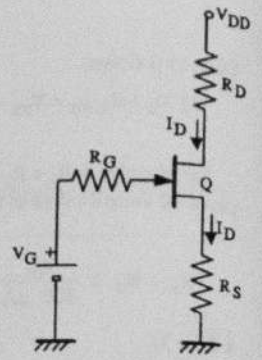
Determinare il valore di V_{DSQ} e I_{DQ}.

SOLUZIONE

Schematizzando secondo Thevenin lo stadio di ingresso si ottiene:

$R_G = R_1 // R_2 = 73.5$ kΩ

$$V_G = V_{DD}\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 3.31 \text{ V}$$



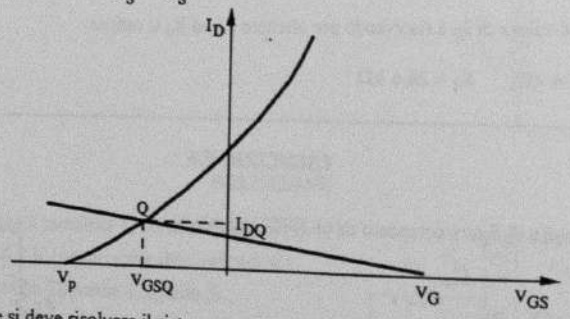
Per la maglia di ingresso, ricordando che $I_G = 0$, si può scrivere:

$$V_G = R_G I_G + V_{GSQ} + R_S I_{DQ}$$

Per la maglia di uscita vale:

$$V_{DD} = R_D I_{DQ} + V_{DSQ} + R_S I_{DQ}$$

In forma grafica, il punto di riposo è determinato dall'intersezione dell'equazione della transcaratteristica del Fet: $I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P}\right)^2$ e della "retta di polarizzazione" $I_D = -\frac{V_{GS}}{R_S} + \frac{V_G}{R_S}$ come riportato in figura.



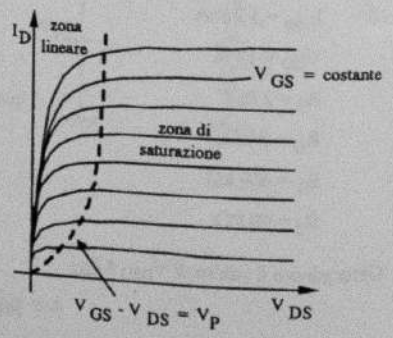
Analiticamente si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P}\right)^2 \\ I_D = -\frac{V_{GS}}{R_S} + \frac{V_G}{R_S} \end{cases}$$

che ha come soluzione $V_{GSQ} = -2.53$ V, $I_{DQ} = 2.93$ mA.
Infine, dalla maglia di uscita si ricava:

$$V_{DSQ} = V_{DD} - (R_S + R_D)I_{DQ} = 6.28 \text{ V},$$
$$V_{GD} = V_{GS} - V_{DS} = -8.81 \text{ V}$$

Essendo $V_{GDQ} < V_P$, il JFET si trova in zona di saturazione.

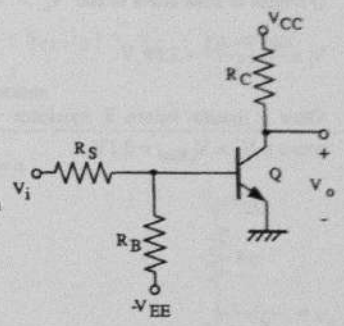


ESERCIZIO P.7

Dato il circuito di figura con:

$\beta_F = 75$
$I_{CB0} = 0$
$R_C = 2.2$ kΩ, $R_S = 15$ kΩ, $R_B = 100$ kΩ
$V_{EE} = V_{CC} = 12$ V, $V_\gamma = 0.5$ V, $V_{BE} = 0.7$ V,
$V_{CEsat} = 0.1$ V

Valutare l'andamento della tensione di uscita V_o in funzione della tensione di ingresso V_i: $V_o = f(V_i)$



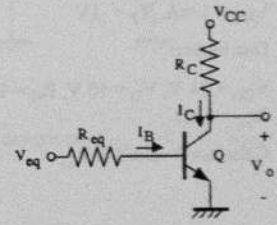
SOLUZIONE

Schematizzando secondo Thevenin la maglia di ingresso si ottiene:

$$R_{eq} = R_S // R_B = 13 \text{ kΩ}$$

$$V_{eq} = \left(\frac{V_i}{R_S} - \frac{V_{EE}}{R_B}\right)R_{eq} = V_i \cdot 0.87 - 1.56 \text{ V}$$

secondo lo schema di figura.



Per $V_i = 0$ risulta $V_{eq} = -1.56$ V e quindi il transistor Q risulta interdetto (infatti si avrebbe una $I_B < 0$). In questa fase vale $V_o = V_{CC}$ (perché $I_C \cong 0$)

Il transistor Q rimane interdetto finché $V_{eq} + R_{eq}I_B = V_{eq} < V_\gamma = 0.5$ V (assumendo che I_B rimanga zero e che la tensione di soglia sia pari a 0.5V) cioè per $V_i = \frac{V_\gamma + 1.56}{0.87} = 2.34$ V dopo di che Q entra in zona attiva. Supponiamo che valga ancora $I_B \cong 0$, Q entra in zona attiva quando $V_{eq} > V_{BE} = 0.7$ V il che avviene quando V_i supera 2.6 V.

Oltre questo valore Q risulta in zona attiva e perciò vale:

$$I_B = \frac{V_{eq} - V_{BE}}{R_{eq}}, \qquad I_C = \beta_F I_B$$

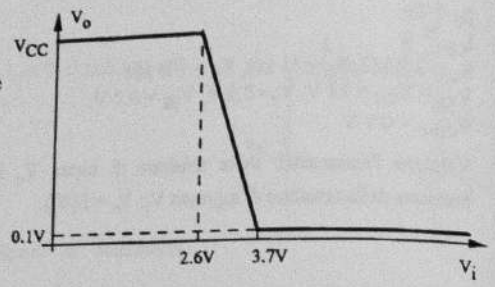
$$V_o = V_{CC} - R_C I_C = V_{CC} - R_C \beta_F\left(\frac{V_{eq} - V_{BE}}{R_{eq}}\right) = V_{CC} - R_C \beta_F\left\{\frac{V_i}{R_S} - \frac{V_{EE}}{R_B} - \frac{V_{BE}}{R_{eq}}\right\} =$$

$$= V_{CC} + R_C \beta_F\left(\frac{V_{EE}}{R_B} + \frac{V_{BE}}{R_{eq}}\right) - \frac{R_C \beta_F}{R_S} V_i = 40.7 - 11 \cdot V_i$$

Q rimane in zona attiva finché $V_o > V_{CEsat} = 0.1\,V$ e quindi:

$$V_i \le \frac{40.7-0.1}{11} = 3.69\ V.$$

Oltre a questo valore il transistor è saturo e $V_o = V_{CEsat} = 0.1V$.



ESERCIZIO P.8

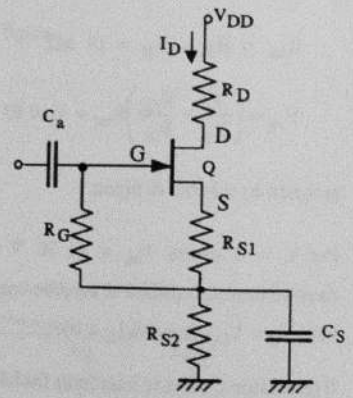
Dato il circuito di figura, sapendo che Q è un JFET a canale N con:

$I_{DSS} = 1$ mA, $V_P = -1V$

Dati inoltre:

$V_{DD} = 24$ V, $V_D = 10$ V, $R_G = 1$ MΩ, $R_D = 56$ kΩ, $R_{S2} = 4$ kΩ.

Calcolare il valore di R_{S1}.



SOLUZIONE

Si suppone che il FET si trovi in zona di saturazione. Vale:

$$I_D = \frac{V_{DD}-V_D}{R_D} = \frac{24-10}{56} = 0.25\ mA$$

Essendo $I_G = 0 \Rightarrow$ non c'è caduta di tensione su R_G e quindi $V_{GS} = -R_{S1} I_D$ e, dalla transcaratteristica:

$$I_D = I_{DSS}\left(1-\frac{V_{GS}}{V_P}\right)^2 \qquad 1-\frac{V_{GS}}{V_P} = \sqrt{\frac{I_D}{I_{DSS}}} \qquad V_{GS} = V_P\left[1-\sqrt{\frac{I_D}{I_{DSS}}}\right]$$

da quest'ultima equazione si ricava il valore di V_{GS} e, infine, il valore di R_{S1}:

$$V_{GS} = -0.5\ V\ ;\ R_{S1} = \frac{-V_{GS}}{I_D} = 2\,k\Omega$$

essendo:

$$V_{GD} = V_{GS} - V_{DS} = -0.5 - [V_{DD} - (R_D + R_{S1} + R_{S2})I_D] = -9V < V_P = -1V$$

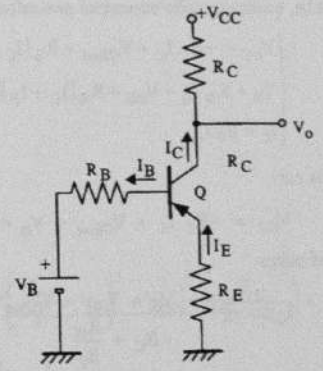
si conferma l'ipotesi di funzionamento in zona di saturazione.

ESERCIZIO P.9

Dato il circuito di figura con i seguenti parametri:

$V_{CC} = -10$ V, $V_B = -3$ V, $V_{CEsat} = -0.2$ V, $\beta_F = 100$, $R_B = 7$ kΩ, $R_C = 3$ kΩ, $R_E = 0.5$ kΩ,

1) Determinare lo stato del transistor
2) Calcolare il valore di V_o
3) Calcolare il valore minimo di R_E per il quale il transistor Q si trova in zona attiva



SOLUZIONE

1) Si suppone che il transistor Q sia in zona attiva quindi si assumono $V_{BE} = -0.7V$, $V_{CE} < 0$, $|V_{CE}| > |V_{CEsat}|$.

Dalla maglia di uscita si ottiene:

$$V_{CC} = -R_C I_C + V_{CE} - R_E(I_C + I_B)$$

$$-V_{CE} + V_{CC} = -\left(R_E + \frac{R_E}{\beta_F} + R_C\right)I_C$$

Dalla maglia di ingresso si ottiene:

$$-V_B - R_B I_B + V_{BE} - R_E(I_C + I_B) = -V_B - \left[R_B + R_E(\beta_F + 1)\right]I_B + V_{BE} = 0$$

$$I_B = \frac{-V_B + V_{BE}}{R_B + (\beta_F + 1)R_E} = 40\ \mu A \qquad I_C = \beta_F I_B = 4\ mA$$

$$V_{CE} = V_{CC} + \left[(R_C + R_E(1 + 1/\beta_F)\right]I_C \cong -10 + 14 = 4\ V > 0$$

quindi Q si trova in saturazione. Si ricava I_{Csat} della maglia di uscita nell'ipotesi $I_{Csat} >> I_{Bsat}$:

$$I_{Csat} \cong -\frac{V_{CC} - V_{CEsat}}{R_C + R_E} = \frac{10-0.2}{3.5\,k\Omega} = 2.8\ mA$$

$$I_{Bsat} = \frac{-V_B + V_{BE} - R_E I_C}{R_B + R_E} = 120\ \mu A$$ il che conferma $I_{Bsat} << I_{Csat}$

2) La tensione di uscita vale:

$$V_o = R_C \cdot I_{Csat} + V_{CC} = -1.6\ V$$

3) Al limite tra la zona lineare e la saturazione deve valere:

$$I_C = \beta_F I_B, \qquad V_{CE} = V_{CEsat}$$

che, sostituite nelle equazioni precedenti, danno:

$$\begin{cases} V_{CC} = -R_C I_C + V_{CEsat} - R_E(I_C + I_B) \\ V_B + R_B I_B - V_{BE} + R_E(I_C + I_B) = 0 \\ I_C = \beta_F I_B \end{cases}$$

da cui:

$$V_{CC} = -R_C I_C + V_{CEsat} + V_B + R_B I_B - V_{BE}$$

ed infine

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_B + V_{BE} - V_{CEsat}}{-R_C + \frac{R_B}{\beta_F}}$$

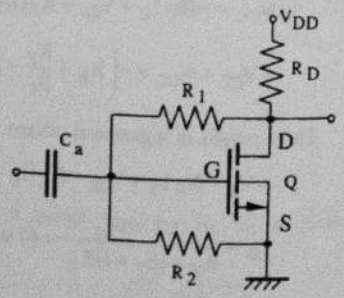
Sostituendo il valore di I_C nella 2ª equazione si ricava il valore limite sotto del quale il transistor entra in saturazione ed al di sopra del quale rimane in zona attiva: $R_E = 834\ \Omega$.
Questo risultato conferma che con $R_E = 500\ \Omega$, come nei dati del problema, il transistor Q è in saturazione.

ESERCIZIO P.10

Sia dato il circuito di figura, con:

$V_{DD} = 30$ V, $R_D = 10$ kΩ, $R_1 = R_2 = 1$ MΩ

Sapendo inoltre che il transistor Q è un MOSFET di tipo enhancement e che nella regione $V_{DS} \geq V_{GS} - V_T$ vale: $I_D = 0.2(V_{GS} - V_T)^2$ mA con $V_T = 3$ V, trovare il punto di lavoro V_{DSQ} e I_{DQ} del transistor.



SOLUZIONE

Il MOSFET risulta essere in zona di saturazione. Infatti, essendo

$I_G = 0$ e $R_1 = R_2$, $V_{DS} > 0$

$$V_{GS} = \frac{V_{DS}}{2}$$

risulta

$$V_{GD} = V_{GS} - V_{DS} = \frac{-V_{DS}}{2} < V_T = 3\,V$$

confermando l'ipotesi.

A questo punto si può scrivere:

1) $I_D = 0.2 \cdot 10^{-3}(V_{GS} - V_T)^2$

2) $V_{GS} = \frac{V_{DS}}{2}$

3) $V_{DD} = R_D\left[I_D + \frac{V_{DS}}{R_1 + R_2}\right] + V_{DS}$

sostituendo la 2) nella 1) e quest'ultima nella 3), si ricava:

$$3)\ V_{DD} = R_D I_D + V_{DS}\left(1 + \frac{R_D}{R_1 + R_2}\right) = R_D \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}\left(\frac{V_{DS}}{2} - V_T\right)^2 + V_{DS}\left(1 + \frac{R_D}{R_1 + R_2}\right) =$$

$$= R_D\, 0.2 \cdot 10^{-3}\left(\frac{V_{DS}^2}{4} - V_{DS} V_T + V_T^2\right) + V_{DS}\left(1 + \frac{R_D}{R_1 + R_2}\right)$$

sostituendo i valori si ottiene un'equazione di secondo grado in V_{DS}:

$$0 = -30 + 0.5 V_{DS}^2 - 6 V_{DS} + 18 + V_{DS} \Rightarrow 0.5 V_{DS}^2 + V_{DS}(1 - 6) - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{DS}^2 - 10 V_{DS} - 24 = 0 \Rightarrow V_{DS} = 5 \pm \sqrt{25 + 24} = 5 \pm 7 \Rightarrow 12\ V$$

Osserviamo che la soluzione $V_{DS} = -2$ V è da scartare perché, in tal caso, il MOSFET sarebbe spento ($V_{GS} < V_T$) e si avrebbe $I_D = 0 \Rightarrow V_{DS} = V_{DD} = 30$ V che crea un assurdo col valore di partenza di -2 V.

Infine abbiamo:

$$I_D \cong \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_D} = 1.8\ mA \qquad V_{DS} = 12\ V \qquad V_{GS} = 6\ V$$

dove nel calcolo di I_D si è trascurata la corrente nel partitore R_1 e R_2 che vale:

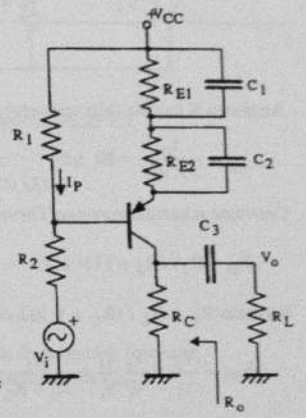
$$I_{R1} = \frac{V_{DS}}{R_1 + R_2} = 6\ \mu A$$

CIRCUITI AMPLIFICATORI

ESERCIZIO A.1

Dato l'amplificatore di figura, determinare:

1) I valori delle resistenze R_1, R_2 e R_C che assicurano: $V_{CE} = -5$ V, $I_C = -2$ mA.
   Nel calcolo considerare:
   $V_{CC} = 12$ V, $I_P = 20$ μA, $R_{E1} = 500$ Ω, $R_{E2} = 1$ kΩ, $V_{BE} = -0.65$ V, $\beta_o = \beta_F = 250$, e $V_i = 0$ V.
2) Calcolare il guadagno $A_{V1} = V_o/V_i$, la resistenza di ingresso R_{i1} vista dal generatore V_i e la resistenza di uscita R_{o1} considerando $R_L = 2$ kΩ, C_1 e C_3 dei cortocircuiti e C_2 un circuito aperto.
3) Calcolare il guadagno $A_{V2} = V_o/V_i$, la resistenza di ingresso R_{i2} vista dal generatore V_i e la resistenza di uscita R_{o2} considerando $R_L = 2$ kΩ, C_1, C_2 e C_3 dei cortocircuiti.
4) Giustificare le eventuali differenze riscontrate tra A_{V1} e A_{V2}, R_{i1} e R_{i2}, R_{o1} e R_{o2}.



SOLUZIONE

1) Calcolo delle resistenze

Si deve calcolare il valore di R_1, R_2 ed R_C. V_i si considera spento.

$$R_C = \frac{\left[V_{CC} - V_{EC} - (R_{E1} + R_{E2})I_E\right]}{-I_C}$$

$$I_E = -I_C\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right) \cong -I_C$$

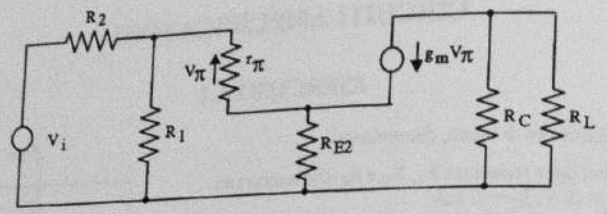
$$R_C = \frac{(12 - 5 - 1.5 \cdot 2)}{2} = 2 \text{ kΩ}$$

$$R_1 = \frac{\left[(R_{E1} + R_{E2})I_E + V_{EB}\right]}{I_P} = \frac{(1.5 \cdot 2 + 0.65)}{0.02} = \frac{3.65}{0.02} = 182.5 \text{ kΩ}$$

$$R_2 = \frac{(V_{CC} - V_{R1})}{(I_P - I_B)} = \frac{\left\{12 - \left[(R_{E1} + R_{E2}) \cdot I_E + V_{EB}\right]\right\}}{\left(0.02 + \frac{2}{250}\right)} = \frac{(12 - 3.65)}{(0.02 + 0.008)} = 298 \text{ kΩ}$$

2) Calcolo di A_{V1}, R_{i1}, R_{o1}

Si tratta di un amplificatore ad emettitore comune, con resistenza di emettitore (R_{E2}). Lo schema dinamico è quello di figura.



Anzitutto si calcola (alla temperatura di 25°C):

$$g_m = \frac{I_C}{25\ mV} = 80\ mS; \qquad r_\pi = \frac{\beta_0}{g_m} = \frac{250}{80} = 3.125\ k\Omega$$

Conviene schematizzare con Thevenin lo stadio di ingresso:

$$R_B = R_1 // R_2 = 113\ k\Omega, \qquad V_i' = V_i \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Ponendo $R_L' = R_L // R_C = 1\ k\Omega$ si ha:

$$A_{V1} = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_i'}\frac{V_i'}{V_i} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\,\frac{-\beta_0 R_L'}{R_B + r_\pi + (1+\beta_0)R_{E2}} = -0.258$$

Il valore di R_{i1} risulta: $R_{i1} = R_2 + R_1 // R_i'$ dove R_i' è la resistenza di ingresso vista dalla base che vale:

$$R_i' = r_\pi + (1+\beta_0)R_{E2} = 254\ k\Omega$$

Quindi si ottiene $R_{i1} = 404\ k\Omega$. Infine $R_{o1} = R_C = 2\,k\Omega$

3) Calcolo di A_{V2}, R_{i2}, R_{o2}

Cortocircuitando anche R_{E2} si ottiene lo schema di un amplificatore ad emettitore comune (R_{E2}=0 nello schema precedente) e in modo analogo si ricava:

$$A_{V2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{-\beta_0 R_L'}{R_B + r_\pi} = -0.816$$

$$R_{i2} = R_2 + R_1 // R_i' \quad \text{con } R_i' = r_\pi$$

$$R_{i2} = 301\ k\Omega$$

$$R_{o2} = R_C = 2\ k\Omega$$

4) Analisi delle differenze riscontrate

Il guadagno A_{V2} risulta più grande (in modulo) di A_{V1} e la resistenza di ingresso R_{i2} risulta più piccola di R_{i1}. Queste differenze sono dovute alla presenza di R_{E2} nel primo schema, che realizza una retroazione negativa (di tipo serie in uscita, serie in ingresso). Gli effetti della retroazione negativa, come noto, sono una riduzione del guadagno e un aumento dell'impedenza di ingresso (perché la reazione in ingresso è di tipo serie). Il valore di R_o non cambia (vale sempre

R_C) perché nel modello semplificato (a due parametri) che è stato utilizzato per il BJT, si suppone che la resistenza di uscita al collettore del BJT sia infinita. Un modello più realistico, che avesse tenuto conto della resistenza di uscita r_o, avrebbe risentito di un aumento di R_o sempre dovuto alla reazione negativa (anche in uscita di tipo serie).

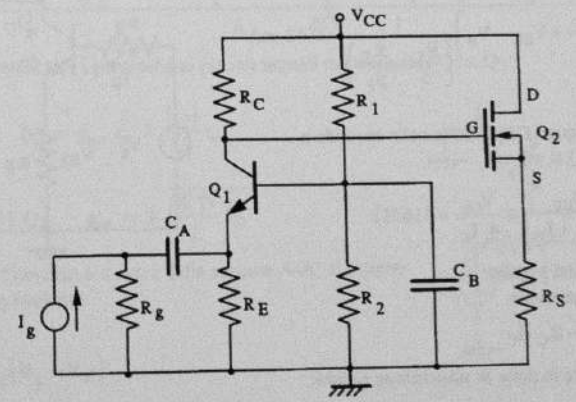
ESERCIZIO A.2

Dato l'amplificatore di figura con i seguenti parametri (a temperatura 25°C):

$V_{CC} = 18$ V; $V_{BE} = 0.7$ V; $V_{RE} = V_{CE}/4$; $C_A = 220$nF
$R_1 = 270\ k\Omega$, $R_2 = 49\ k\Omega$; $R_C = 13.2\ k\Omega$, $R_S = 820\ \Omega$; $R_g = 100\ k\Omega$
Q_1: $r_\pi = 12\ k\Omega$, $\beta_F = 250$.
Q_2: KW/L = 0.2 mA/V^2, V_T=2.5 V, $r_d = 50\ k\Omega$

Calcolare:

1) R_E, I_{CQ}, V_{CEQ}, I_{DQ}, V_{DSQ}
2) $A = V_o/I_g$, considerando le capacità un corto circuito alle frequenze di interesse
3) C_B in modo tale che sia $f_L = 50$ Hz. Si consideri anche l'influenza di C_A



SOLUZIONE

1) Calcolo di R_E, I_{CQ}, V_{CEQ}, I_{DQ}, V_{DSQ}

Al circuito relativo alla polarizzazione del BJT Q_1 di figura, conviene applicare il teorema di Thevenin a sinistra della sezione A-A'ottenendo:

$$V_B = V_{CC}\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 2.76\ V$$

$$R_B = R_1 // R_2 = 41.5\ k\Omega$$

Ora si possono scrivere le equazioni relative alle maglie di ingresso e di uscita di Q_1:

a) $V_B = R_B I_B + V_{BE} + V_{RE}$

b) $V_{CC} = R_C I_C + V_{CE} + V_{RE}$

c) $I_B = \frac{I_C}{\beta_F}$

d) $V_{RE} = \frac{V_{CE}}{4}$

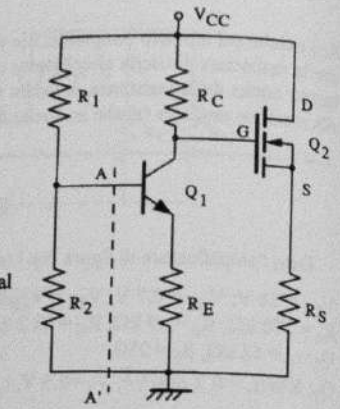
Le equazioni a, b, c, d) formano un sistema di equazioni dal quale si ottengono le due incognite I_C e V_{CE}:

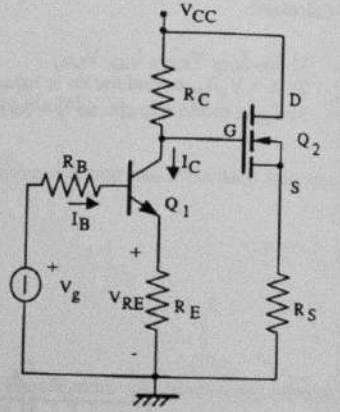
$$V_{CC} = R_C I_C + V_{CE}\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

$$V_{CE} = (V_{CC} - R_C I_C)\frac{4}{5} = 7.85V$$

$$V_B = R_B \frac{I_C}{\beta_F} + V_{BE} + (V_{CC} - R_C I_C)\frac{1}{5}$$

$$I_C = \left(\frac{V_{CC}}{5} + V_{BE} - V_B\right)\frac{1}{\left(\frac{R_C}{5} - \frac{R_B}{\beta_F}\right)} = 0.62 \text{ mA}$$





Sostituendo la quarta equazione nella seconda e ricordando la d) si ottiene:

$$R_E = \frac{V_{CE}}{4(I_C + I_B)} \cong \frac{V_{CE}}{4 \cdot I_C} = 3160\Omega$$

Polarizzazione del Mosfet:
La tensione al gate vale:

$$V_G = V_{CC} - R_C \cdot I_C$$

Il Mosfet si trova in zona di saturazione poiché:

$$V_{DS} > V_{GS} - V_T \quad \text{cioè} \quad V_{DS} - V_{GS} = V_{DG} = R_C \cdot I_C > -V_T$$

e la disuguaglianza è sempre verificata.
Dall'equazione della maglia di ingresso del Mosfet:

$$V_{GS} = V_G - R_S I_D$$

ed utilizzando la relazione (transcaratteristica) fra I_D e V_{GS} di un Mosfet in saturazione:

$$I_D = K\frac{W}{L}(V_{GS} - V_T)^2$$

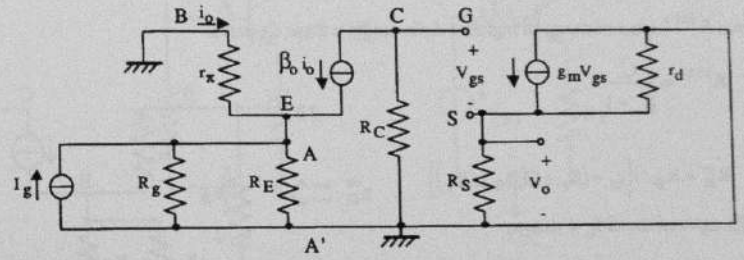
si ottiene un sistema di equazioni nelle due incognite I_D e V_{GS}. L'equazione di secondo grado che

risulta fornisce due risultati uno dei quali è da scartare perchè porta ad avere una soluzione assurda ($V_{GS} < V_T$ quindi Mosfet spento contrariamente all'ipotesi). Si trova $I_D = 3.7$ mA, $V_{GS} = 6.8$ V.
Dalla maglia di uscita si ricava

$$V_{DS} = V_{CC} - R_S I_D \approx 15V$$

2) Calcolo di $A = V_o/I_g$

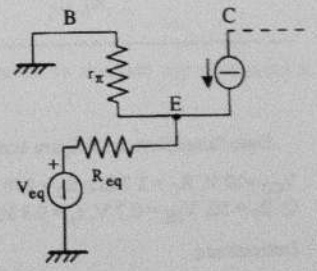
Si tratta della cascata di uno stadio a base comune con uno a drain comune. Conviene anzitutto disegnare lo schema equivalente ai piccoli segnali dell'amplificatore:



Occorre ora calcolare i parametri ai piccoli segnali dei transistor Q_1 e Q_2:

BJT Q_1: $\beta_o = g_{m1} r_\pi = \frac{|I_C|}{V_T} r_\pi$

MOSFET Q_2: $g_m = 2\sqrt{\frac{K W}{L} I_D}$



Applicando Thevenin a sinistra della sezione A-A' si ottiene lo schema equivalente:

$$V_{eq} = I_g(R_g // R_E)$$

$$R_{eq} = R_g // R_E$$

$$A = \frac{V_o}{I_g} = \frac{V_o}{V_{eq}}\frac{V_{eq}}{I_g} = \frac{V_o}{V_G}\frac{V_G}{V_{eq}}(R_g // R_E) = A_{V1} A_{V2}(R_g // R_E)$$

dove:

$$A_{V1} = \frac{\mu R_S}{r_d + R_S(1+\mu)} \quad \text{con} \quad \mu = g_m r_d \quad \text{e} \quad A_{V2} = \frac{\beta_o}{\beta_o + 1}\frac{R_C}{R_{eq} + \frac{r_\pi}{\beta_o + 1}}$$

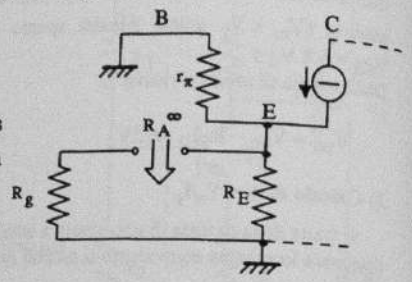
3) Calcolo di C_B

La frequenza di taglio inferiore f_L dipende da entrambe le capacità: quella di disaccoppiamento C_A e quella di by-pass C_B.

Nell'ipotesi di polo dominante si può utilizzare la formula seguente:

$$f_L = \frac{1}{2\pi}\cdot\left\{\frac{1}{R_A^{\infty}\cdot C_A}+\frac{1}{R_B^{\infty}\cdot C_B}\right\}$$

Dove R_A^{∞} è la resistenza vista da C_A con C_B cortocircuitato, mentre R_B^{∞} è la resistenza vista da C_B con C_A cortocircuitato.

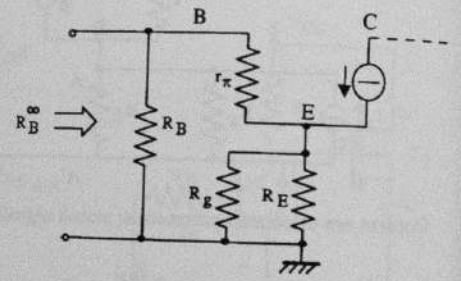


$$R_A^{\infty} = R_g + R_i^{(C.B.)} \,//\, R_E$$

Dove $R_i^{(C.B.)}$ è la resistenza di ingresso dello stadio a Base Comune:

$$R_i^{(C.B.)} = \frac{r_\pi}{\beta_o + 1}$$

$$R_B^{\infty} = R_B \,//\left[r_\pi + (\beta_o + 1)(R_E \,//\, R_g)\right]$$



Dalla espressione di f_L si ricava:

$$C_B = \frac{1}{2\pi f_L - \dfrac{1}{R_A^{\infty} C_A}}\cdot\frac{1}{R_B^{\infty}}$$

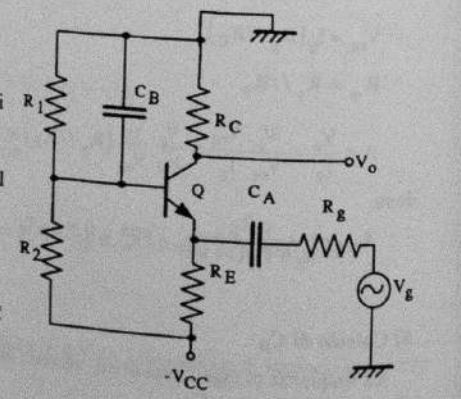
ESERCIZIO A.3

Dato l'amplificatore di figura con i seguenti parametri (a 25°C):

V_{CC} =30 V, R_C = 2.7 kΩ, R_1 = 270 kΩ, R_E = 0.6 kΩ, R_2 = 82 kΩ, R_g = 5 kΩ,
Q: β_F = 50, V_{BE} = 0.7 V, r_π = 0.8 kΩ, $r_o = \infty$

Determinare:

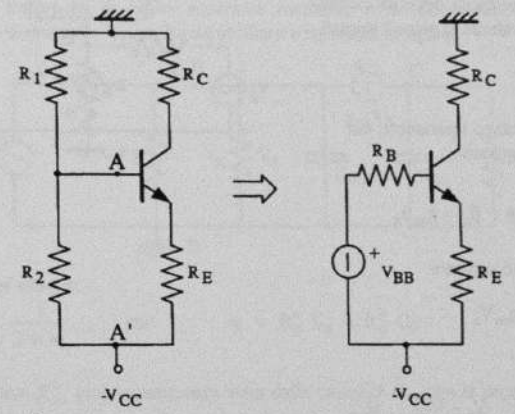
1) I_{CQ}, V_{CEQ}, e la potenza dissipata dal transistor a riposo.
2) $A_V = V_o/V_g$ (si considerino le capacità dei corto circuiti alle frequenze di interesse)
3) La frequenza di taglio superiore f_H sapendo che la frequenza di transizione del transistor f_T = 300 MHz e la capacità tra base e collettore C_μ = 2.2 pF.
4) Calcolare la variazione relativa $\Delta I_C/I_{CQ}$ dovuta ad un aumento di temperatura di 50°C, sapendo che $\Delta V_{BE}/\Delta T$ = -2.2mV/°C e che il valore di β_F a 75°C è 120. Si trascuri la variazione dovuta a I_{CO}.



SOLUZIONE

1) Polarizzazione

Si applica la schematizzazione del circuito di base secondo Thevenin (a sinistra della sezione A-A') ottenendo:



$$\begin{cases} V_{BB} = V_{CC}\dfrac{R_2}{R_1+R_2} = 6.99\ \text{V} \\ R_B = R_1 \,//\, R_2 = 63\ \text{k}\Omega \end{cases}$$

NOTA: V_{BB} è stato calcolato con riferimento a $-V_{CC}$ e quindi va riportato con riferimento a questa tensione.

Dall'equazione della maglia di ingresso:

$$V_{BB} = R_B I_B + V_{BE} + R_E(I_B + I_C) \quad \text{con} \quad I_B = \frac{I_C}{\beta_F}$$

si ottiene il valore di I_{CQ}:

$$V_{BB} = \left[\frac{R_B}{\beta_F} + R_E\left(\frac{1}{\beta_F}+1\right)\right] I_C + V_{BE} \quad \Rightarrow \quad I_{CQ} = \frac{V_{BB} - V_{BE}}{\dfrac{R_B}{\beta_F} + R_E\left(\dfrac{1}{\beta_F}+1\right)} = 3.36\ \text{mA}$$

Dall'equazione della maglia di uscita si ricava V_{CEQ}:

$$R_C I_C + V_{CE} + R_E(I_B + I_C) - V_{CC} = 0$$

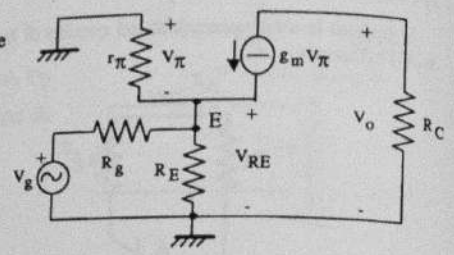
$$V_{CEQ} = V_{CC} - \left[R_C + R_E\left(\frac{1}{\beta_F}+1\right)\right] I_C$$

Infine si calcola la potenza dissipata dal transistor a riposo:

$$P_{DQ} = V_{CEQ} I_{CQ} + V_{BEQ} I_{BQ} \cong V_{CEQ} I_{CQ}$$

2) Guadagno in tensione

Per il calcolo del guadagno di tensione, le capacità di accoppiamento e by-pass C_A e C_B vengono considerate dei cortocircuiti. Lo schema equivalente ai piccoli segnali diventa:



Anzitutto si calcolano i parametri dei transistor dalle equazioni:

$$g_m = \frac{|I_c|}{V_T} \quad \text{e} \quad \beta_o = g_m r_\pi$$

e con questi si può scrivere:

$$\begin{cases} V_o = -R_C g_m V_\pi \\ V_{RE} = -V_\pi \\ g_m V_\pi + \dfrac{V_\pi}{r_\pi} + \dfrac{V_g - V_{RE}}{R_g} = \dfrac{V_{RE}}{R_E} \end{cases}$$

$$g_m V_\pi + \frac{V_\pi}{r_\pi} + \frac{V_g}{R_g} + \frac{V_\pi}{R_g} + \frac{V_\pi}{R_E} = 0 \qquad V_\pi = -\frac{V_g}{R_g} \frac{1}{g_m + \frac{1}{r_\pi} + \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_E}}$$

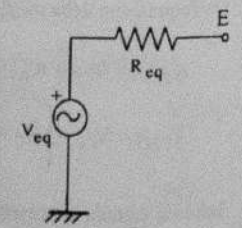
$$V_o = \frac{R_C}{R_g} \frac{g_m}{g_m + \frac{1}{r_\pi} + \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_E}} V_g$$

e da questa:

$$A_V = \frac{R_C}{R_g} \frac{g_m}{g_m + \frac{1}{r_\pi} + \frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_E}} = \frac{R_C}{R_g} \frac{\beta_o}{\beta_o + 1 + r_\pi \left(\frac{1}{R_g} + \frac{1}{R_E} \right)}$$

Si poteva anche arrivare allo stesso risultato applicando Thevenin a sinistra di R_E come in figura, ottenendo:

$$R_{eq} = R_g // R_E; \qquad V_{eq} = V_g \frac{R_E}{R_g + R_E}$$



da cui

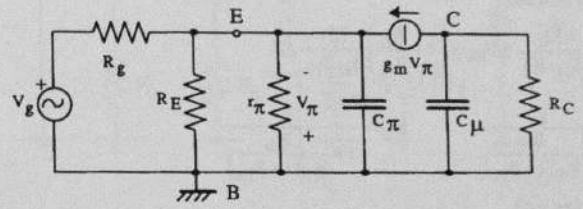
$$A_V = \frac{\beta_o}{\beta_o + 1} \frac{R_C}{R_{eq} + R_i} \frac{R_E}{R_g + R_E} \quad \text{dove} \quad R_i = \frac{r_\pi}{\beta_o + 1}$$

che si può riscrivere in:

$$A_V = \frac{R_C}{R_g} \frac{\beta_o}{R_{eq} + \frac{r_\pi}{\beta_o + 1}} \frac{R_{eq}}{\beta_o + 1} = \frac{R_C}{R_g} \frac{\beta_o}{\beta_o + 1 + \frac{r_\pi}{R_{EQ}}} \quad \text{(c.v.d.)}$$

3) Frequenza di taglio superiore

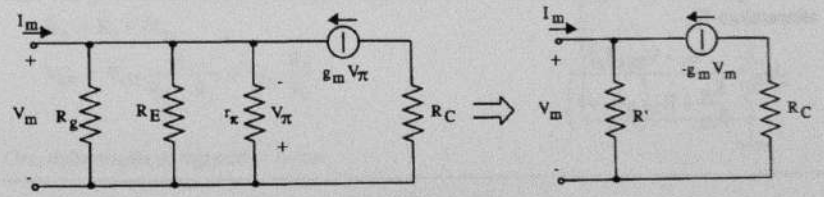
Calcoliamo la frequenza di taglio superiore mediante il metodo delle costanti di tempo nell'ipotesi di polo dominante. Il circuito da studiare è riportato in figura.



Dalla definizione si ottiene:

$$f_H \cong \frac{P_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi a_1} \qquad \text{con} \qquad a_1 = R_\pi^o C_\pi + R_\mu^o C_\mu$$

Occorre calcolare R_π^o, cioè la resistenza vista dalla capacità C_π con la capacità C_μ aperta. Per far ciò si applica una tensione V_m fra i punti di misura e si calcola la corrente I_m che eroga il generatore:



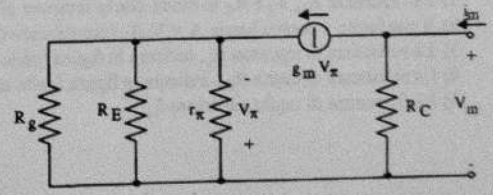
$$V_\pi = -V_m$$

$$R' = R_g // R_E // r_\pi$$

$$i_m = \frac{V_m}{R'} + g_m V_m = \left(\frac{1}{R'} + g_m \right) V_m$$

$$R_\pi^o = \frac{R'}{1 + g_m R'} = \frac{1}{\frac{1}{R'} + g_m} \cong \frac{1}{g_m}$$

Si calcola ora R_μ^o:



$$R_\mu^o = \frac{V_m}{i_m} = R_C$$

Infatti è:

$$-V_\pi = g_m V_\pi \left(R_g // R_E // r_\pi \right) \quad \Rightarrow \quad V_\pi = 0$$

Per il calcolo della capacità C_π utilizziamo l'espressione della frequenza di transizione f_T:

$$f_T = \frac{g_m}{2\pi(C_\pi + C_\mu)} \quad \Rightarrow \quad C_\pi = \frac{g_m}{2\pi f_T} - C_\mu$$

4) Variazione relativa della corrente di collettore I_{CQ}

La variazione relativa della corrente di collettore dovuta a variazioni di V_{BE} e di β_F con la temperatura è data da:

$$\frac{\Delta I_C}{I_{C1}} = -\frac{M_1}{I_{C1}\cdot R_E}\Delta V_{BE} + \left(1+\frac{R_B}{R_E}\right)\frac{M_2}{\beta_{F1}\beta_{F2}}\Delta\beta$$

dove:

$$M_1 = \frac{1}{1+\dfrac{R_B}{R_E(1+\beta_{F1})}}; \qquad M_2 = \frac{1}{1+\dfrac{R_B}{R_E(1+\beta_{F2})}}$$

$$I_{C1} = I_{CQ}(25\ ^\circ C)$$

$$I_{C2} = I_{CQ}(75\ ^\circ C)$$

$$\Delta I_C = I_{C2} - I_{C1}$$

$$\Delta\beta = \beta_{F2} - \beta_{F1}$$

$$\Delta V_{BE} = -2.2\cdot 10^{-3}\Delta T$$

Si osservi come ΔI_C / I_{C1} può anche essere calcolato trovando il nuovo valore di I_C alla nuova temperatura T_2:

$$I_{C2} = \frac{V_B - V_{BE}(T_2)}{\dfrac{R_B}{\beta_{F2}} + R_E\left(\dfrac{1}{\beta_{F2}}+1\right)}$$

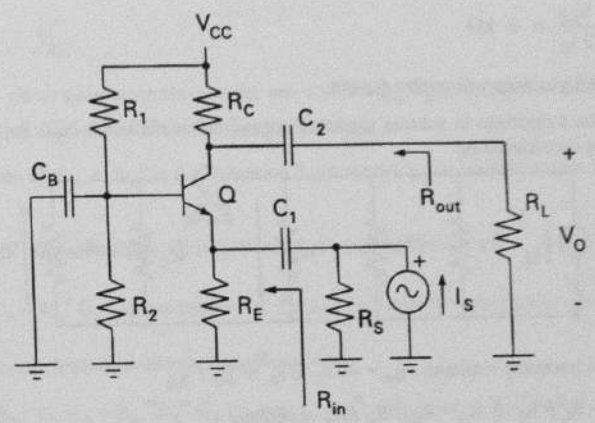
ESERCIZIO A.4

Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri (a 25°C):

V_{CC} = 12V, R_S = 0.5 kΩ, $R_B = R_1//R_2$ = 50 kΩ, R_L = 1 kΩ, R_E = 0.8 kΩ
Q: β_F = 100, β_0 = 100, I_C = 1 mA, V_{BE} = 0.7 V, C_μ = 50 pF, C_π = 100 pF

Determinare:

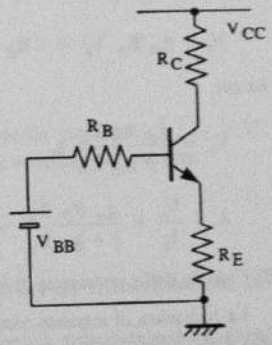
1) Le resistenze R_1, R_2 e R_C in modo che la tensione al collettore del BJT sia pari a $V_{CC}/2$
2) Il guadagno a centro banda $A = V_o/I_S$ (considerare C_1, C_2 e C_B dei corto circuiti)
3) La resistenza di ingresso R_{in} indicata in figura (nelle stesse condizioni del punto 2)
4) La resistenza di uscita R_{out} indicata in figura (nelle stesse condizioni del punto 2)
5) La frequenza di taglio superiore f_H



SOLUZIONE

1) Calcolo delle resistenze R_1, R_2 e R_C

Si tratta di un amplificatore in configurazione base comune. Schematizzando secondo Thevenin la maglia di ingresso come mostrato in figura, si ottiene:



$$R_B = R_1 // R_2$$

$$V_{BB} = V_{CC}\frac{R_2}{R_1+R_2} = V_{CC}\frac{R_B}{R_1}$$

Ora, dalla maglia di ingresso si ricava:

$$V_{BB} = R_B I_B + V_{BE} + R_E I_E = R_B\frac{I_C}{\beta_F} + V_{BE} + R_E\left(1+\frac{1}{\beta_F}\right)I_C$$

da cui si ricava V_{BB}. Dall'uguaglianza:

$$V_{BB} = V_{CC}\frac{R_2}{R_1+R_2} = V_{CC}\frac{R_B}{R_1}$$

si ottiene il valore di R_1 e di R_2:

$$R_1 = \frac{V_{CC}}{V_{BB}}R_B = 300\text{k}\Omega;$$

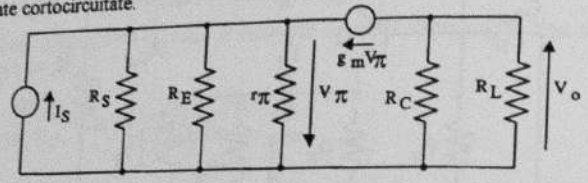
$$R_2 = \frac{R_1 R_B}{R_1 - R_B} = 60\text{k}\Omega$$

Essendo $V_C = V_{CC}/2$ si ha anche $V_{RC} = V_{CC} - V_C = V_{CC}/2$ da cui si ricava

$$R_C = \frac{V_{CC}}{2\,I_C} = 6\ k\Omega.$$

2) Calcolo del guadagno di centro banda.

Nella figura è riportato lo schema ai piccoli segnali col modello del BJT. Le capacità C_1, C_2, C_B sono state cortocircuitate.



I parametri del transistor risultano : $g_m = 40\,I_C$ e $r_\pi = \beta_0 / g_m$

Definite $R_P = R_C // R_L$ e $R_A = R_S // R_E // r_\pi$ si ottiene

$$V_O = -g_m V_\pi R_P \quad \text{e} \quad V_\pi = -R_A (I_S + g_m v_\pi)$$

$$V_\pi + g_m R_A V_\pi = -R_A I_S \quad \Rightarrow \quad V_\pi = \frac{-R_A I_S}{1 + g_m R_A}$$

da cui

$$V_o = \frac{g_m R_P R_A}{1 + g_m R_A} I_S$$

$$A = \frac{V_o}{I_S} = \frac{g_m R_P R_A}{1 + g_m R_A} = 785\ k\Omega.$$

3) Calcolo della resistenza di ingresso:

La resistenza di ingresso vista come nello schema è la resistenza R_E in parallelo con la R_i di uno stadio CB che vale:

$$R_i^{(CB)} = \frac{r_\pi}{1 + \beta_o} \cong \frac{1}{g_m}$$

quindi si ottiene:

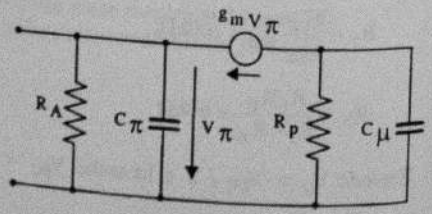
$$R_{in} = R_E // r_\pi // \frac{1}{g_m} \cong R_E // \frac{1}{g_m} \cong \frac{1}{g_m} = 24\ \Omega$$

La resistenza di uscita vale ovviamente R_C.

$$R_{out} = R_C = 6\ k\Omega.$$

4) Calcolo della frequenza di taglio superiore:

Ci sono due capacità indipendenti e quindi due poli. Calcolo le due resistenze equivalenti viste dalle capacità:



$$R_\pi^o = R_A // 1/g_m$$

(a destra di C_π, c'é un generatore che assorbe una corrente $g_m V_\pi$ se sottoposto ad una tensione V_π, quindi equivale ad una resistenza pari a $1 / g_m$).

La resistenza vista da C_μ è $R_\mu^o = R_P$ in quanto il generatore $g_m V_\pi$ rimane spento risultando: $V_\pi = 0$.

Si usa l'ipotesi di polo dominante. Quindi si calcola il coefficiente a_1:

$$a_1 = R_\pi^o C_\pi + R_\mu^o C_\mu \quad \text{da cui risulta che} \quad f_H \cong \frac{1}{2\pi a_1} \quad \text{nell'ipotesi che sia} \quad \frac{a_1^2}{a_2} >> 1$$

Per verificare questa ipotesi, si calcola il coefficiente a_2:

$$a_2 = R_\pi^\infty R_\mu^o C_\pi C_\mu = R_\mu^\infty R_\pi^o C_\pi C_\mu, \text{ma} \quad R_\mu^\infty = R_\mu^o \quad \text{e} \quad R_\pi^\infty = R_\pi^o$$

Risulta quindi da verificare che:

$$\frac{a_1^2}{a_2} = \frac{\left(R_\pi^o C_\pi + R_\mu^o C_\mu\right)^2}{R_\pi^o C_\pi R_\mu^o C_\mu} >> 1$$

Supponiamo ad esempio che, affinché l'ipotesi sia verificata, debba risultare $a_1^2 / a_2 > 10$. Sostituendo i valori dati nel testo, si trova che questa espressione è verificata per cui vale:

$$f_H \cong \frac{1}{2\pi a_1} = 3.5\,\text{MHz}$$

NOTA: La particolare espressione di R_π^∞ e R_μ^∞ ovvero il fatto che tali valori coincidono con R_π^o e R_μ^o fa ricordare che i poli associati alle due capacità sono indipendenti. Infatti definendo:

$\tau_\pi = R_\pi^o C_\pi$ e $\tau_\mu = R_\mu^o C_\mu$ si ha

$a_1 = \tau_\mu + \tau_\pi$ e $a_2 = \tau_\mu \tau_\pi$ da cui

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + a_1 s + a_2 s^2} = \frac{A_0}{1 + (\tau_\mu + \tau_\pi) s + \tau_\mu \tau_\pi s^2} = \frac{A_0}{(1 + s\tau_\pi)(1 + s\tau_\mu)}$$

e la frequenza di taglio si può calcolare con precisione dalla formula

$$|A(j\omega)| = \frac{A_0}{\sqrt{2}} = \frac{A_0}{|1 + j\omega\tau_\pi| \cdot |1 + j\omega\tau_\mu|}$$

nell'unica incognita ω risolvendo l'equazione: $\left(1 + \omega^2 \tau_\pi^2\right)\left(1 + \omega^2 \tau_\mu^2\right) = 2$

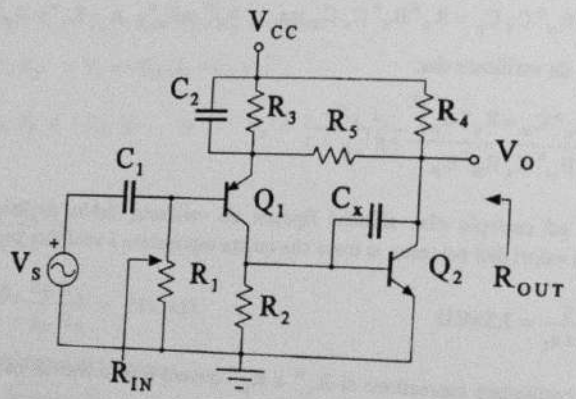
ESERCIZIO A.5

Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri (a 25°C): $V_{CC} = 36$ V; $R_5 = 10$ kΩ

Q_1: $\beta_{F1} = 100$, $\beta_{01} = 200$, $I_{C1} = -0.4$ mA, $V_{CE1} = -16$ V, $V_{BE1} = -0.7$ V
Q_2: $\beta_{F2} = 100$, $\beta_{02} = 200$, $I_{C2} = 2$ mA, $V_{CE2} = 18$ V, $V_{BE2} = 0.7$ V

Determinare:

1) Le resistenze R_1, R_2, R_3, R_4
2) Il guadagno di tensione $A_V = V_o/V_S$ (considerare C_1 e C_2 dei corto circuiti e C_x un circuito aperto)
3) La resistenza di ingresso R_{in} indicata in figura (nelle stesse condizioni del punto 2)
4) La resistenza di uscita R_{out} indicata in figura (nelle stesse condizioni del punto 2)
5) La frequenza di taglio superiore considerando l'effetto della capacita' C_x (C_x=20pF)



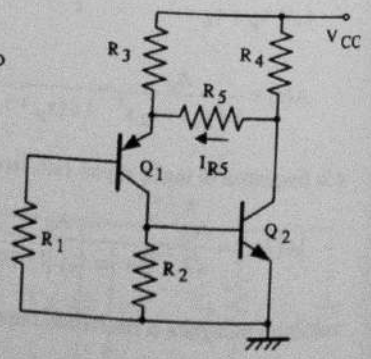
SOLUZIONE

1) Calcolo delle resistenze R_1, R_2, R_3, R_4:

Si ricava lo schema relativo alla polarizzazione come mostrato in figura. Dalle maglie del circuito cosi ottenuto si ricavano le seguenti equazioni:

$$V_{B1} = V_{BE1} + V_{EC1} + V_{BE2} = $$
$$= V_{BE1} - V_{CE1} + V_{BE2} = 16 \text{ V}$$

$$R_1 = \frac{V_{B1}}{-I_{B1}} = \frac{-V_{B1}\,\beta_{F1}}{I_{C1}} = 4\ \text{M}\Omega$$



$$R_2 = \frac{V_{BE2}}{I_{R2}} = \frac{V_{BE2}}{-I_{B2} - I_{C1}} = \frac{V_{BE2}}{-I_{C1} - \frac{I_{C2}}{\beta_{F2}}} = 1.8\,\text{k}\Omega$$

$$I_{R5} = \frac{V_{R5}}{R_5} = \frac{V_{CE2} - V_{E1}}{R_5} = \frac{V_{CE2} + V_{CE1} - V_{BE2}}{R_5}$$

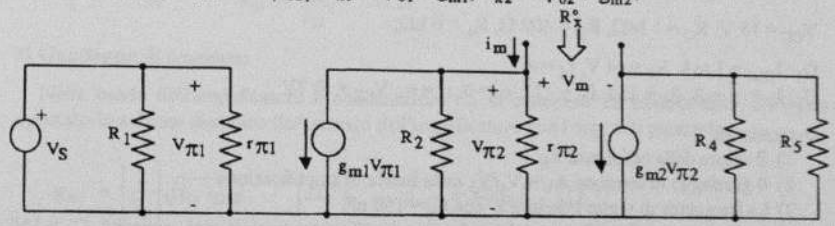
$$R_3 = \frac{V_{CC} - V_{E1}}{I_{E1} - I_{R5}} = \frac{V_{CC} + V_{CE1} - V_{BE2}}{-I_{C1}(1 + \frac{1}{\beta_{F1}}) - I_{R5}} = 70\,\text{k}\Omega$$

$$R_4 = \frac{V_{CC} - V_{CE2}}{I_{C2} + I_{R5}} = 8.5\,\text{k}\Omega$$

2) Calcolo di A_V:

Dallo schema dell'amplificatore, costituito dalla cascata di due stadi ad emettitore comune, si ricava lo schema ai piccoli segnali come riportato in figura dove si è posto:

$$g_{m1} = 40 \cdot |I_{C1}|,\ g_{m2} = 40 \cdot |I_{C2}|,\ r_{\pi 1} = \beta_{01} / g_{m1},\ r_{\pi 2} = \beta_{02} / g_{m2}.$$



Il guadagno dei due stadi si ricava con l'espressione:

$$A_v = -g_{m1}(R_2 // r_{\pi 2})\left[-g_{m2}(R_4 // R_5)\right] = g_{m1}\,g_{m2}\,\frac{r_{\pi 2}\,R_2}{r_{\pi 2} + R_2}\,\frac{R_4\,R_5}{R_4 + R_5}$$

3) Resistenza di ingresso R_{in}:

La resistenza di ingresso R_{in} è quella vista dal generatore V_S e risulta:

$$R_{in} = R_1 // r_{\pi 1} = \frac{R_1\,r_{\pi 1}}{R_1 + r_{\pi 1}} = 12{,}5\ \text{k}\Omega$$

4) Resistenza di uscita R_{out}:

La resistenza di uscita R_{out} è quella vista dai morsetti di uscita e risulta:

$$R_{out} = R_4 // R_5 = \frac{R_4\,R_5}{R_4 + R_5} = 4.6\ \text{k}\Omega.$$

5) Frequenza di taglio:

Conviene usare il metodo delle costanti di tempo con il solo polo dato da C_x. (N.B. per un solo polo il metodo è CORRETTO in quanto il calcolo di a_1 è sempre esatto e c'è un solo polo).
Osservando il circuito si nota che g_{m1} è spento perché $V_x = V_S = 0$. Iniettando nei morsetti dove è collegato C_x una corrente I_m si ottiene:

$$V_{x2} = I_m(r_{x2} // R_2) \quad \text{in quanto } V_{p1}=0 \text{ e } g_{m1}V_{p1}=0$$

da cui:

$$V_m = V_{x2} + (R_4 // R_5)(g_{m2}V_{x2} + I_m) = I_m(r_{x2} // R_2) + (R_4 // R_5)\left[I_m + g_{m2}I_m(r_{x2} // R_2)\right]$$

e la resistenza "vista" da C_x risulta:

$$R_x^\circ = (R_2 // r_{x2})\left[1 + g_{m2}(R_4 // R_5)\right] + R_4 // R_5$$

Si ottiene infine:

$$f_H = \frac{1}{2\pi R_x^\circ C_x} = 20.2\,\text{kHz}$$

ESERCIZIO A.6

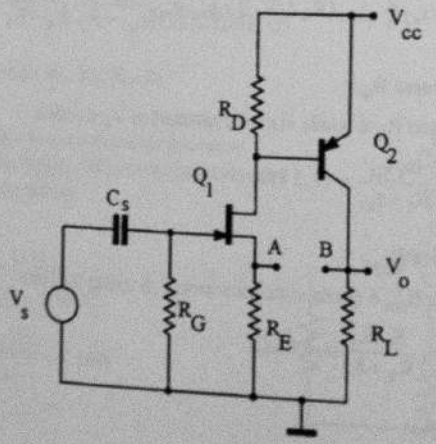
Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri (a 25°C):

$V_{CC} = 15$ V, $R_G = 1$ MΩ, $R_D = 400$ Ω, $R_L = 6$ kΩ;

Q_1: $I_{DSS} = 3$ mA, $V_P = -4$ V, $r_d = \infty$
Q_2: $I_C = -1$ mA, $\beta_F = 150$, $\beta_0 = 125$, $r_b = 0$, $r_o = \infty$, $V_{BE} = -0.7$V

Determinare:

1) Il valore della resistenza R_E
2) Il guadagno di tensione $A_V = V_o/V_S$ nella banda di amplificazione
3) La frequenza di taglio inferiore f_L con $C_s = 150$ nF
4) La frequenza di taglio superiore f_H dovuta alla presenza di una capacità $C_x = 150$ pF connessa fra i punti A e B del circuito.



SOLUZIONE

1) Calcolo del valore di R_E:

Dallo schema si possono ricavare le seguenti equazioni:

$$I_{RD} = \frac{-V_{BE2}}{R_D} = 1.75\,\text{mA} \qquad I_D = I_{RD} - I_{B2} = I_{RD} - \frac{I_C}{\beta_{F2}} = 1.76\ \text{mA}$$

Dalla transcaratteristica del fet si ricava:

$$I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P}\right)^2 \Rightarrow \qquad V_{GS} = \left[1 - \left(\frac{I_D}{I_{DSS}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]V_P = -0.94\ \text{V}$$

NOTA: Fra le due soluzioni della radice si tiene quella che rispetta la condizione:

$V_P < V_{GS} < 0$.

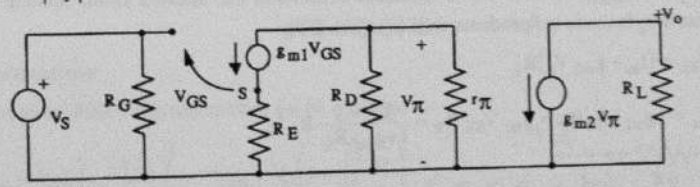
Essendo $V_G = 0$ si ha:

$$V_S = -V_{GS} \qquad R_E = \frac{V_S}{I_D} = 535\,\Omega$$

2) Guadagno di tensione:

Nella banda dell'amplificatore il condensatore C_S si considera un cortocircuito. In figura è riportato lo schema dinamico linearizzato dell'amplificatore con i seguenti parametri:

$$g_{m1} = \left|\frac{2}{V_P}\right|\sqrt{I_D\, I_{DSS}} \quad \left[\Omega^{-1}\right] \qquad g_{m2} = 40|I_C| \quad \left[\Omega^{-1}\right]$$



L'amplificatore è costituito dalla cascata di uno stadio a source comune con resistenza di source e di uno stadio ad emettitore comune. Il suo guadagno è dato da:

$$A_v = \frac{-g_{m1}(R_D // r_\pi)}{1 + g_{m1}R_E}(-g_{m2}R_L) = 60.5$$

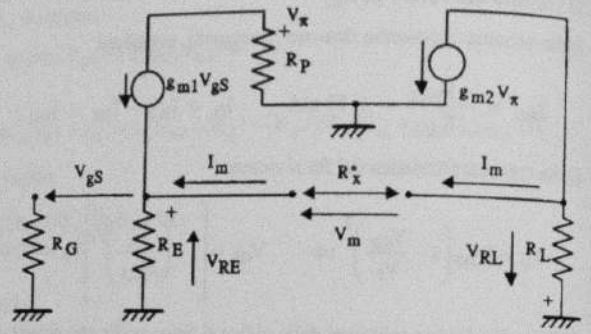
3) Calcolo di f_L:

La frequenza di taglio inferiore è data dalla capacità di blocco C_S. Il suo valore coincide col polo associato a tale capacità. La resistenza "vista" da C_S è pari a R_G perché il fet mostra una resistenza di ingresso infinita, quindi:

$$f_L = \frac{1}{2\pi R_G C_S} = 1.6\,\text{Hz}$$

4) Calcolo di f_H:

La frequenza di taglio superiore è data dalla capacità di blocco C_x e coincide col valore del polo associato a questa capacità.
Dallo schema ai piccoli segnali rappresentato in figura, dove $R_P = r_x // R_D$, si ricavano le seguenti equazioni:



$$V_m = V_{RE} + V_{RL}$$

$$V_{RL} = (I_m + g_{m2} V_x) R_L$$

$$V_{RE} = R_E (I_m + g_{m1} V_{GS})$$

$$V_{GS} = -V_{RE}$$

$$V_{RE} = R_E (I_m - g_{m1} V_{RE})$$

$$V_{RE}(1 + g_{m1} R_E) = R_E I_m$$

$$V_{RE} = \frac{R_E}{(1 + g_{m1} R_E)} I_m = \left(R_E // \frac{1}{g_{m1}} \right) I_m$$

dove $R_E // (1/g_{m1})$ coincide con la resistenza di uscita di uno stadio a Drain comune visto che l'assenza di r_d la rende indipendente dalla presenza di R_P.

$$V_{RL} = (I_m + g_{m2} V_x) R_L$$

$$V_x = -g_{m1} V_{GS} R_P = g_{m1} V_{RE} R_P = \frac{g_{m1} R_E}{1 + g_{m1} R_E} R_P I_m$$

$$V_{RL} = \left[R_L + \frac{g_{m2} g_{m1} R_E R_P R_L}{1 + g_{m1} R_E} \right] I_m$$

$$V_m = V_{RE} + V_{RL}$$

ed essendo: $R_x^o = \frac{V_m}{I_m}$ si ottiene: $R_x^o = \frac{R_E}{1 + g_{m1} R_E} + R_L + \frac{g_{m2} g_{m1} R_E R_P R_L}{1 + g_{m1} R_E}$

da cui si ricava:

$$f_H = \frac{1}{2\pi R_x C_x} = 103\,\text{kHz}$$

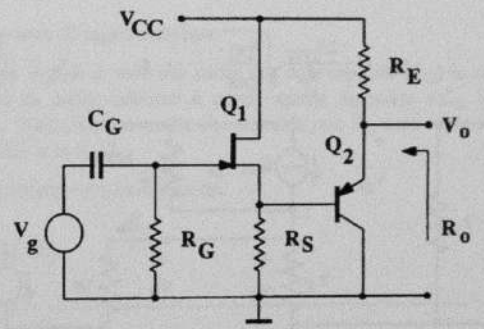
ESERCIZIO A.7

Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri (a 25°C):

$V_{CC} = 24$ V; $R_g = 1$ MΩ;
$I_{DQ} = 0.5$ mA; $I_{CQ} = -2$ mA;
$C_G = 100$ nF;
Q_1: $I_{DSS} = 2$ mA; $V_p = -8$ V, $r_d = 100$ kΩ
Q_2: $\beta_F = 100$, $\beta_0 = 150$, $r_b = 0$, $r_o = \infty$, $V_{BE} = -0.7$V

Determinare:

1) Il valore delle resistenze R_S e R_E
2) Il guadagno di tensione $A_V = V_o/V_g$ (considerare la capacità un corto circuito)
3) La resistenza di uscita R_o
4) La frequenza di taglio inferiore f_L dovuta alla capacità C_G.

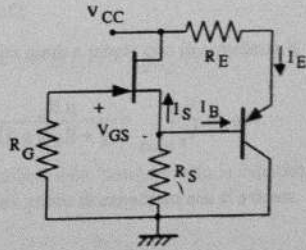


SOLUZIONE

1) Polarizzazione

Dall'equazione della transcaratteristica del fet si ottiene:

$$I_{DQ} = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P}\right)^2 \qquad V_{GS} = V_P\left(1 - \sqrt{\frac{I_{DQ}}{I_{DSS}}}\right)$$



(delle due soluzioni dell'equazione si deve prendere solo quella che garantisce $|V_{GS}| < |V_P|$ in quanto il fet funziona in zona di saturazione).

La corrente che scorre su R_G é nulla (non c'é caduta di tensione su R_G) mentre la corrente che scorre su R_S é: $I_{RS} = I_S + I_B$ e quindi si ricava:

$$R_S = \frac{V_{GS}}{I_{RS}} = \frac{V_{GS}}{I_S + I_B}; \qquad I_B = \frac{I_C}{\beta_F}; \qquad I_S = -I_D$$

Dalla maglia di uscita di Q_2 si può scrivere:

$$V_{CC} = R_E I_E - V_{BE} - V_{GS} = -R_E(I_C + I_B) - V_{BE} - V_{GS}$$

da cui si ottiene:

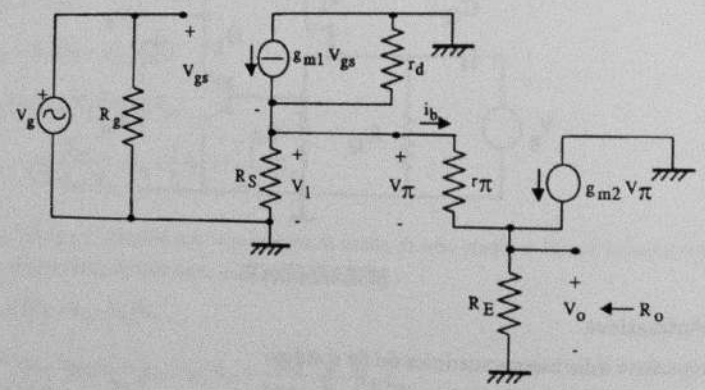
$$R_E = -\frac{V_{CC} + V_{BE} + V_{GS}}{I_C + I_B}$$

Sostituendo i valori dati si ottiene: $R_S = 8\,k\Omega$, $R_E = 9.65\,k\Omega$

2) Calcolo del guadagno

L'amplificatore é costituito dalla cascata di uno stadio a drain comune e da uno stadio a collettore comune. Per il calcolo del guadagno si considera lo schema ai piccoli segnali di figura dove la capacità C_G è sostituita da un corto circuito di figura. Si assume:

$$\mu = g_{m1} r_d, \qquad g_{m1} = -\frac{2I_{DSS}}{V_P}\sqrt{\frac{I_{DQ}}{I_{DSS}}} \qquad \text{e} \qquad r_\pi = \frac{\beta_0}{|I_{CQ}|} V_T$$



Il guadagno di uno stadio a drain comune (caricato sulla sola R_S) risulta:

$$A_{V1} = \left.\frac{V_1}{V_g}\right|_{i_b=0} = \frac{\mu R_S}{r_d + R_S(1+\mu)} = 0.88$$

mentre la sua resistenza di uscita vale:

$$R_{o1} = R_S // \left(\frac{r_d}{1+\mu}\right)$$

Il guadagno del secondo stadio, calcolato considerando R_{o1} come resistenza interna dello stadio precedente, vale:

$$A_{V2} = \frac{(1+\beta_0)R_E}{R_{o1} + r_\pi + R_E(1+\beta_0)}$$

dalle precedenti equazioni si ricava il valore cercato

$$A_V = \frac{V_O}{V_g} = A_{V1} A_{V2} = 0.878$$

3) Calcolo della resistenza di uscita

Lo stadio di uscita é a collettore comune. La sua resistenza di uscita vale:

$$R_0 = R_E // \left(\frac{R_{o1} + r_\pi}{1+\beta_0}\right) = 16\Omega$$

4) Calcolo della frequenza di taglio inferiore

Dallo schema ai piccoli segnali si vede che esiste una sola capacità (C_G) in serie al percorso del segnale. La frequenza di taglio inferiore é perciò quella associata a C_G. Occorre calcolare la resistenza vista da C_G. Dallo schema risulta che coincide con R_G (una volta spento il generatore V_G, C_G é in parallelo alla sola R_G).

La frequenza di taglio inferiore é perciò data da:

$$f_L = \frac{1}{2\pi R_G C_G} = 1.6\text{Hz}$$

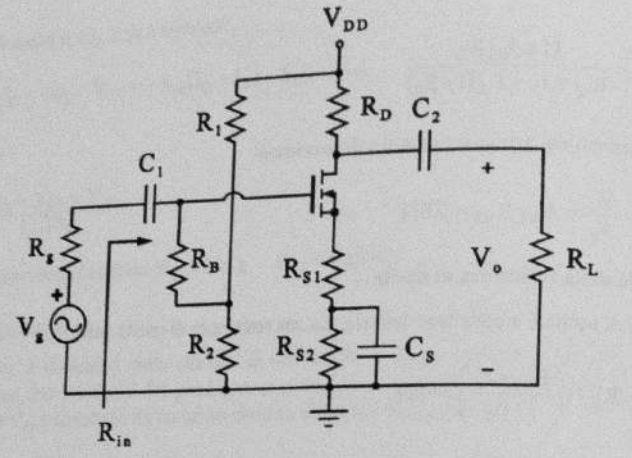
ESERCIZIO A.8

Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri (a 25°C):

$V_{DD} = 36$ V
$R_g = 100\,k\Omega$, $R_B = 1\,M\Omega$, $R_D = 6\,k\Omega$, $R_{S1} = 200\,\Omega$, $R_L = 4\,k\Omega$;
Q = mosfet ad accrescimento a canale N:
$I_{DQ} = 3$ mA, $V_{DSQ} = 12$ V, $V_T = 5$ V, $V_T^2 kW/L = 5$ mA, $r_d = 150\,k\Omega$; ($k = \mu_n C_{ox}/2$)

Determinare:

1) Il valore delle resistenze R_1, R_2, R_{S2} noto che $R_1 // R_2 = R_B$
2) Il guadagno di tensione $A_V = V_o/V_g$ nella banda di amplificazione (considerando le capacità dei corto circuiti)
3) La resistenza di ingresso R_{in}
4) Il valore della capacità C_2 che fissa la frequenza di taglio inferiore f_L a 150 Hz (si considerino dei corto circuiti le altre capacità)



SOLUZIONE

1) Calcolo delle resistenze:

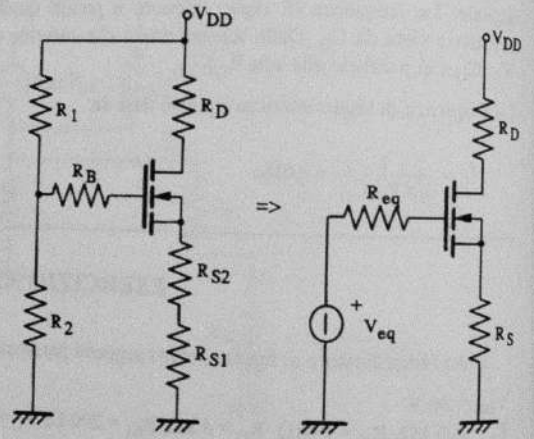
Si disegna il circuito relativo alla polarizzazione.

Dalla schematizzazione secondo Thevenin risultano:

$$V_{eq} = V_{DD}\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$R_{eq} = R_B + R_1 // R_2$$

$$R_S = R_{S1} + R_{S2}$$



Dall'equazione della maglia di uscita si ha:

$$V_{DD} = R_D I_{DQ} + V_{DSQ} + R_S I_{DQ}$$

da cui si ricavano i valori di R_S e, quindi, di R_{S2}

$$R_S = \frac{V_{DD} - V_{DSQ}}{I_{DQ}} - R_D \quad \Rightarrow \quad R_{S2} = R_S - R_{S1}$$

Si suppone il mosfet in zona di saturazione per cui la corrente di Drain dipende solo dalla V_{GS}

$$I_D = K\frac{W}{L}(V_{GS}-V_T)^2 = K\frac{W\cdot V_T^2}{L}\left(-1+\frac{V_{GS}}{V_T}\right)^2 = I_{DSS}\left(1-\frac{V_{GS}}{V_T}\right)^2$$

$$V_{GSQ} = V_T\left(1+\sqrt{\frac{I_{DQ}}{I_{DSS}}}\right)$$

Si sceglie la radice positiva in quanto deve essere $V_{GSQ} > V_T$.

Occorre verificare se il mosfet si trova in zona di saturazione: affinchè il canale risulti strozzato sul Drain deve essere:

$$V_{GD} < V_T \quad \Rightarrow \quad V_{GS} - V_{GD} < V_T.$$

Dall'equazione della maglia di ingresso:

$$V_{eq} = R_{eq} I_G + V_{GSQ} + R_S I_{DQ}$$

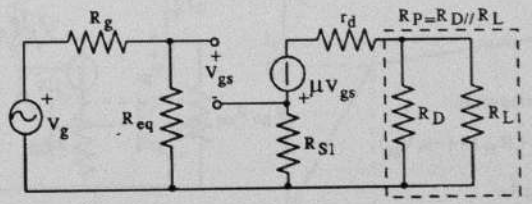
dove $R_{eq} I_G = 0$. Sapendo che $R_1 // R_2 = R_B$ e $V_{eq} = V_{DD}\frac{R_2}{R_1+R_2}$ si ottiene:

$$V_{eq} = V_{DD}\frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{V_{DD}}{R_1}(R_1 // R_2) = \frac{V_{DD}}{R_1}R_B \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{V_{DD}}{V_{eq}}R_B,\ R_2 = \frac{R_1 R_B}{R_1 - R_B}$$

2) Guadagno di tensione:

Se disegniamo lo schema equivalente ai piccoli segnali dell'amplificatore ricordando che valgono:

$$\mu = g_m r_d \qquad g_m = 2\sqrt{\frac{K\,W}{L}I_{DQ}} = \frac{2}{V_T}\sqrt{I_D\, I_{DSS}}$$



Dallo schema si possono ricavare le seguenti equazioni:

$$V_o = -\mu\, V_{gs}\frac{R_P}{r_d + R_P + R_{S1}}$$

$$V_{gs} = V_g\frac{R_{eq}}{R_g + R_{eq}} - R_{S1}\frac{\mu\, V_{gs}}{r_d + R_P + R_{S1}}$$

$$V_{gs}\left\{1+\frac{\mu R_{S1}}{r_d + R_P + R_{S1}}\right\} = V_g\frac{R_{eq}}{R_g + R_{eq}}$$

$$V_{gs} = V_g\frac{R_{eq}}{R_g + R_{eq}}\frac{r_d + R_P + R_{S1}}{r_d + R_P + (1+\mu)R_{S1}}$$

Sostituendo l'ultima equazione nella prima si ottiene:

$$V_o = -R_P\,\mu\frac{1}{r_d + R_P + R_{S1}}V_g\frac{R_{eq}}{R_g + R_{eq}}\frac{r_d + R_P + R_{S1}}{r_d + R_P + (1+\mu)R_{S1}}$$

$$V_o = -R_P \mu V_g \frac{R_{eq}}{R_g + R_{eq}} \frac{1}{r_d + R_P + (1+\mu)R_{S1}}$$

da cui:

$$A_o = \frac{V_o}{V_g} = -\frac{R_{eq}}{R_g + R_{eq}} \frac{\mu R_P}{r_d + R_P + (1+\mu)R_{S1}}$$

3) Resistenza di ingresso:

Osservando lo schema si ottiene:

$$R_{in} = R_{eq} = R_B + R_1 // R_2 = 2 \cdot R_B$$

4) Calcolo della capacità:

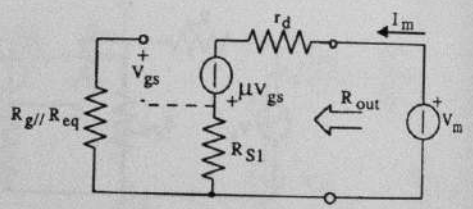
La frequenza di taglio inferiore è data dall'inverso della costante di tempo associata alla capacità C_2 (le altre capacità sono considerate dei cortocircuiti)

La frequenza di taglio è data da:

$$f_L = \frac{1}{2\pi C_2 R_2^o}$$

dove R_2^o è la resistenza di uscita vista da C_2 che vale: $R_2^o = R_L + R_D // R_{out}$, dove R_{out} è la resistenza di uscita dello stadio e, dallo schema di figura, vale:

$$R_{out} = \frac{V_m}{I_m}$$



Dallo schema si ricavano:

$$V_m = I_m(r_d + R_{S1}) + (-\mu V_{gs})$$

$$V_{gs} = -R_{S1} I_m$$

$$R_{out} = r_d + (1+\mu)R_{S1}$$

$$C_2 = \frac{1}{2\pi f_L R_2^o}$$

ESERCIZIO A.9

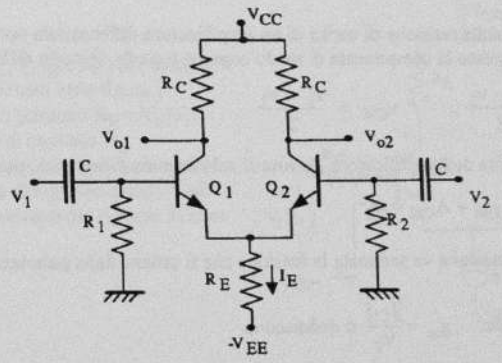
Dato l'amplificatore differenziale di figura con i seguenti parametri (a 25°C):

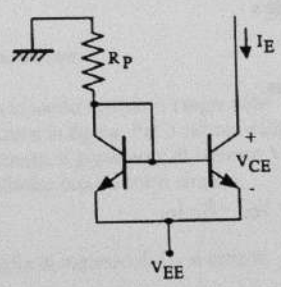
$V_{CC} = V_{EE} = 18$ V
$R_C = 12$ kΩ, $R_1 = 167$ kΩ, $R_E = 14$ kΩ
$Q_1 = Q_2$: $\beta_F = \beta_o = 200$, $V_{BE} = 0.7$ V, $r_b = 0$, $r_o = \infty$

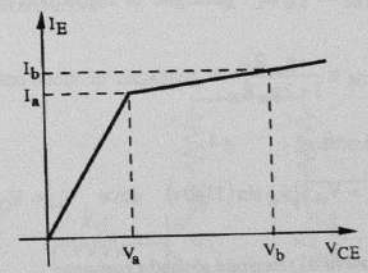
Determinare:

1) I_{CQ1}, I_{CQ2}, V_{CEQ1}, V_{CEQ2}

2) V_{o1}, sapendo che $v_1 = 0.012 \cdot \sin(3140 \cdot t)$ e $v_2 = 0.010 \cdot \sin(3140 \cdot t)$ (si consideri la capacità C un corto circuito alle frequenze di interesse).
3) Il rapporto di reiezione al modo comune CMRR
4) Il rapporto di reiezione al modo comune CMRR che si ottiene sostituendo R_E con uno specchio di corrente avente la caratteristica di uscita mostrata in figura: ($I_a = 1.113$ mA, $I_b = 1.268$ mA, $V_a = 1$ V, $V_b = 32$ V)







SOLUZIONE

1) Polarizzazione:

Dal circuito, data la sua simmetria, si ricava:

$$I_{C1} = I_{C2}; \quad I_{E1} = I_{E2} = \frac{I_E}{2}; \quad V_{CE1} = V_{CE2}; \quad V_{EE} = R_1 I_{B1} + V_{BE1} + R_E I_E$$

Dall'equazione della maglia di ingresso si ricava il valore di I_{C1}:

$$V_{EE} = \left[\frac{R_1}{\beta_F} + 2R_E\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right)\right] I_{C1} + V_{BE1}$$

$$I_{C1} = \frac{V_{EE} - V_{BE1}}{\frac{R_1}{\beta_F} + 2R_E\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right)}$$

$$I_E = 2(I_{C1} + I_{B1}) = 2\,I_{C1}\,(1 + 1/\beta_F)$$

Dalla maglia di uscita si ricava: $V_{CC} = R_C\,I_{C1} + V_{CE1} + R_E\,I_E - V_{EE}$ e da questa si ottiene:

$$V_{CE1} = V_{CC} + V_{EE} - R_C\,I_{C1} - R_E\,I_E = V_{CC} + V_{EE} - \left[R_C + 2R_E\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right)\right] I_{C1}$$

2) Calcolo di V_{o1}:

Per il calcolo della tensione di uscita di un amplificatore differenziale conviene distinguere nei due segnali di ingresso la componente di modo comune e quella di modo differenziale:

$$v_{DM} = \frac{v_1 - v_2}{2}; \qquad v_{CM} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

La tensione di uscita dell'amplificatore, dovuta al solo segnale di ingresso, risulta:

$$\tilde{v}_{o1} = A_{DM}\,v_{DM} + A_{CM}\,v_{CM}$$

NOTA: a questa tensione va sommata la tensione che si ottiene dalla polarizzazione V_{CQ}.

Ricordando che vale: $g_m = \dfrac{|I_{C1}|}{V_T}$ si definiscono

$A_{DM} = -g_m R_C$ = guadagno di modo differenziale e

$$A_{CM} \cong \frac{-g_m R_C}{1 + 2g_m R_E} = \text{ guadagno di modo comune.}$$

Infine si ottiene:

$$v_{o1} = V_{o1} + \tilde{v}_{o1}\sin(3140t) \quad \text{dove} \quad V_{o1} = V_{CQ} = V_{CC} - R_C\,I_{C1}.$$

3) Rapporto di reiezione al modo comune:

Dalla definizione: $CMRR \equiv \dfrac{A_{DM}}{A_{CM}} \cong 1 + 2g_m R_E$

4) Calcolo del CMRR con lo specchio di corrente:

La conduttanza di uscita dello specchio di corrente è data dalla pendenza della caratteristica di uscita del BJT relativa alla polarizzazione dello specchio il cui andamento è, con una approssimazione lineare a tratti, riportata in figura. Dai dati si ottiene:

$$r_o = \frac{V_b - V_a}{I_b - I_a} \quad \text{e} \quad CMRR \cong 1 + 2g_m\,r_o$$

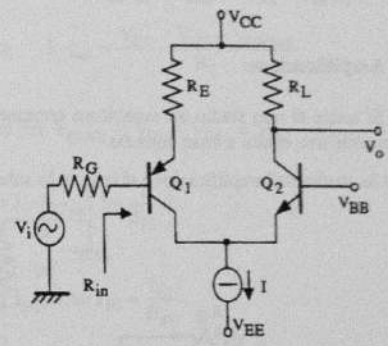
ESERCIZIO A.10

Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri (a 25°C):

V_{CC} =6 V, I = 12 mA
R_E = 0.53 kΩ, V_{EE} = -6 V, R_L = 1.5 kΩ, V_{BB} = -3 V, R_G = 0.5 kΩ
Q_1, Q_2: $\beta_{F1} = \beta_{F2} = 200$, $|V_{BE}| = 0.7$ V, $r_{x1} = 0.5$ kΩ, $r_{x2} = 2$ kΩ, $r_b = 0$, $r_o = \infty$.

Determinare:

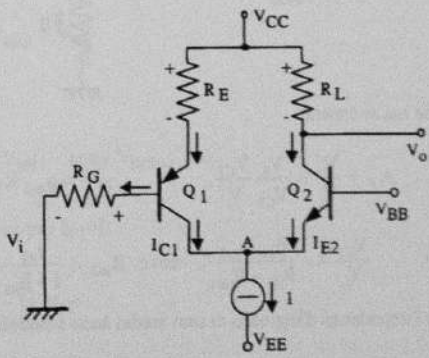
1) I_{C1}, I_{C2}, V_{CE1}, V_{CE2} a riposo (indicare il verso delle correnti nella figura)
2) Il guadagno di tensione $A_V = V_o/V_i$
3) La resistenza di ingresso R_{in}
4) Determinare i valori massimo e minimo della tensione di ingresso entro i quali entrambi i transistor funzionano in zona attiva.



SOLUZIONE

1) Polarizzazione:

Si fissano in modo arbitrario i segni delle correnti come in figura. Per il calcolo della polarizzazione, il generatore di ingresso V_i viene sostituito con un corto circuito.



Dalla maglia di ingresso di Q_1 si ottiene:

$$V_{CC} = R_E\,I_{E1} + V_{EB1} + R_G\,I_{B1}$$

$$V_{CC} = \left[R_E(1 + \beta_{F1}) + R_G\right] I_{B1} + V_{EB1}$$

$$I_{B1} = \frac{V_{CC} + V_{BE1}}{\left[R_E(1 + \beta_{F1}) + R_G\right]}$$

$$I_{C1} = \beta_{F1}\,I_{B1}$$

$$I_{E1} = I_{B1} + I_{C1} = (1 + \beta_{F1})\,I_{B1}$$

Dalla maglia di uscita di Q_1 si ottiene:

$$V_{CC} = R_E\,I_{E1} + V_{EC1} + V_{EB2} + V_{BB} \quad \Rightarrow \quad V_{CE1} = -V_{CC} + V_{BB} + R_E\,I_{E1} - V_{BE2}$$

La somma delle correnti al nodo A deve essere nulla:

$$I_{C1} + I_{E2} = I \quad \Rightarrow \quad I_{E2} = I - I_{C1} \quad \Rightarrow \quad I_{C2} = \frac{I_{E2}}{1 + \frac{1}{\beta_{F2}}}.$$

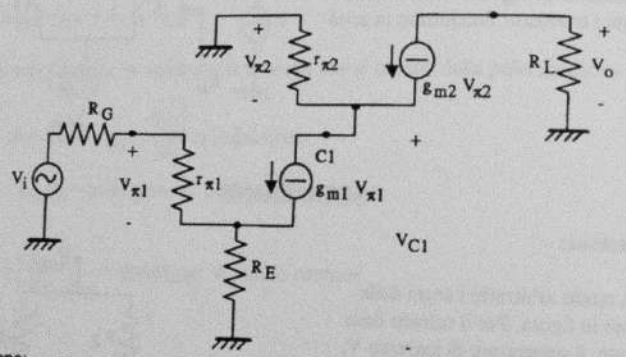
Dalla maglia che comprende entrambi i transistor si ottiene infine:

$$R_E I_{E1} + V_{EC1} - V_{CE2} - R_L I_{C2} = 0 \qquad V_{CE2} = R_E I_{E1} - V_{CE1} - R_L I_{C2}.$$

2) Amplificazione:

Si tratta di uno stadio ad emettitore comune con resistenza di emettitore (doppio carico) che comanda uno stadio a base comune.

Per lo studio dell'amplificazione si traccia lo schema equivalente ai piccoli segnali:



da cui si ottiene:

$$A_V = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_{C1}} \frac{V_{C1}}{V_i}, \qquad \frac{V_o}{V_{C1}} = g_{m2} R_L \qquad \text{perché} \qquad V_{C1} = -V_{\pi 2}$$

$$\frac{V_{C1}}{V_i} = -\frac{\beta_{o1} R_{in2}}{R_G + R_{in1}} \quad \text{dove: } R_{in2} = \frac{r_{\pi 2}}{1 + \beta_{o2}}$$

è l'impedenza d'ingresso di uno stadio base comune e

$$R_{in1} = r_{\pi 1} + (\beta_{o1} + 1) R_E$$

è l'impedenza d'ingresso del doppio carico.

3) Impedenza di ingresso:

Dal circuito si ricava:

$$R_{in} \equiv R_{in1}.$$

4) Limiti di tensione:

All'aumentare della tensione di ingresso, I_{C1} diminuisce e di conseguenza aumenta I_{C2} ($I_{C1} + I_{C2} \cong I_E$ = costante).
Perciò, la massima tensione di ingresso che garantisce un comportamento da amplificatore, può essere determinata sia dall'interdizione di Q_1 che dalla saturazione di Q_2. Per sapere quale situazione si verifica per prima, si calcola la corrente di saturazione di Q_2 e la si confronta con I: se è maggiore (quindi Q_2 non può saturare), la massima tensione di ingresso viene limitata dall'interdizione di Q_1 altrimenti è limitata dalla saturazione di Q_2.

$$V_{CC} = R_L I_{C2sat} + V_{CB2sat} + V_{BB} \qquad \Rightarrow \qquad I_{C2sat} = \frac{V_{CC} - V_{BB} - V_{CB2sat}}{R_L}$$

Se $I_{C2sat} > I \quad \Rightarrow \quad Q_1$ si interdice per $V_{iMAX} \cong V_{CC} + V_{BE1} = V_{CC} - |V_{BE}|$.

Se $I_{C2sat} < I \quad \Rightarrow \quad Q_2$ satura e $I_{C1} = I - I_{C2sat}\left(1 + \frac{1}{\beta_{F2}}\right)$

e quindi:

$$V_{iMAX} = V_{CC} + V_{BE1} - R_E(I_{C1} + I_{B1}) - R_G I_{B1}, \text{dove } I_{B1} = \frac{I_{C1}}{\beta_{F1}}$$

Al diminuire della tensione di ingresso si ha la situazione opposta: I_{C1} aumenta mentre I_{C2} diminuisce. Analogamente al caso precedente, la limitazione è imposta dalla saturazione di Q_1 o dalla interdizione di Q_2 a seconda che I_{C1sat} sia maggiore o minore di I.

$$V_{CC} = R_E I_{C1sat}\left(1 + \frac{1}{\beta_{F1}}\right) - V_{CE1sat} - V_{BE2} + V_{BB}$$

Se $I_{C1sat} < I$ allora Q_1 satura :

$$V_{iMIN} = -R_G \frac{I_{C1sat}}{\beta_{F1}} + V_{BC1sat} - V_{BE2} + V_{BB}, \quad \text{con} \quad V_{BC1sat} \cong 0$$

altrimenti se $I_{C1sat} > I$ allora Q_2 si interdice per I_{C1}=I:

$$V_{iMIN} = -R_G \frac{I}{\beta_{F1}} + V_{BE1} - R_E I\left(1 + \frac{1}{\beta_{F1}}\right) + V_{CC}$$

NOTA: Nei calcoli si può assumere $|V_{CE1sat}| = V_{CE2sat} = 0,7\ V = |V_{BE}|$.

ESERCIZIO A.11

Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri:

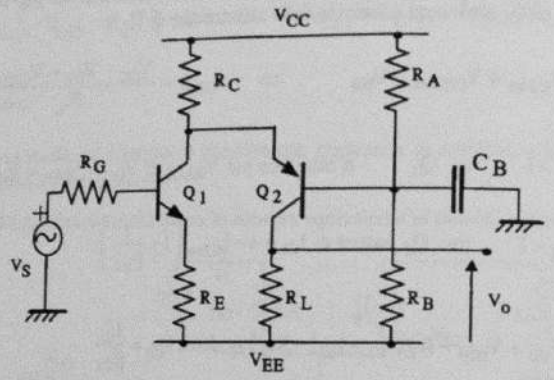
$V_{CC} = 12$ V, $V_{EE} = -8$ V, $R_E = 4$ kΩ, $R_L = 10$ kΩ, $R_G = 2.5$ kΩ, $R_C = 2$ kΩ, $R_A = 100$ kΩ, $R_B = 200$ kΩ, $C_B = 10$ μF
Q_1, Q_2: $\beta_{F1} = \beta_{F2} = 200$, $|V_{BE}| = 0.7$ V, $r_{\pi 1} = 2.5$ kΩ, $r_{\pi 2} = 8$ kΩ, $r_b = 0$, $r_o = \infty$.

Determinare:

1) I valori di I_{C1}, I_{C2}, V_{CE1}, V_{CE2} a riposo

2) Il guadagno di tensione $A_V = V_o/V_s$ (considerare C_B un corto circuito)

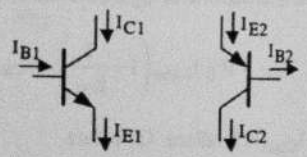
3) La frequenza di taglio inferiore f_L considerando l'effetto della capacità C_B



SOLUZIONE

1) Polarizzazione:

Con le convenzioni di figura:



dalla maglia di ingresso di Q_1 si può scrivere:

$$R_G I_{B1} + V_{BE1} + R_E(I_{B1} + I_{C1}) = -V_{EE} \qquad \text{e} \qquad I_{C1} = \beta_{F1} I_{B1},$$

quindi $$I_{C1} = \frac{(-V_{EE} - V_{BE1})}{\frac{R_G}{\beta_{F1}} + \frac{R_E}{\beta_{F1}} + R_E}.$$

Dalla maglia di base-emettitore di Q_2 si scrive:

$$V_{CC} - R_C(I_{C1} + I_{E2}) - V_{EB2} - R_{BB} I_{B2} = V_{BB}$$

dove:

$$R_{BB} = R_A // R_B \quad \text{e} \quad V_{BB} = V_{EE} + \frac{V_{CC} - V_{EE}}{R_A + R_B} R_B$$

Risulta:

$$I_{C2} = \frac{V_{CC} - V_{BB} + V_{BE2} - R_C I_{C1}}{\frac{R_{BB}}{\beta_{F2}} + \frac{R_C}{\beta_{F2}} + R_C}$$

Infine risulta:

$$V_{CE1} = V_{CC} - V_{EE} - R_C\left(I_{C1} + I_{C2} + \frac{I_{C2}}{\beta_{F2}}\right) - R_E\left(I_{C1} + \frac{I_{C1}}{\beta_{F1}}\right)$$

$$V_{CE2} = -\left(V_{CC} - V_{EE} - R_C\left(I_{C1} + I_{C2} + \frac{I_{C2}}{\beta_{F2}}\right) - R_L I_{C2}\right).$$

2) Calcolo del guadagno:

Nell'ipotesi di cortocircuitare C_B si ha la cascata di uno stadio ad emettitore comune con resistenza di emettitore, con uno stadio in configurazione base comune. Risulta quindi:

$$A_V = A_{V1} A_{V2} \quad \text{dove} \quad A_{V1} = \frac{-\beta_{o1} R_C}{R_G + r_{x1} + R_E(1+\beta_{o1})} \qquad \text{e} \qquad r_{o1} = R_C,$$

con $\beta_{o1} = 40 I_{C1} r_{x1} = g_{m1} r_{x1}$.

Inoltre: $$A_{V2} = \frac{\beta_{o2}}{1+\beta_{o2}} \frac{R_L}{R_C + \frac{r_{x2}}{(1+\beta_o)}} \quad \text{con} \quad \beta_{o2} = 40 I_{C2} r_{x2}.$$

3) Calcolo della frequenza di taglio inferiore:

La frequenza di taglio inferiore è determinata dall'effetto di C_B e dipende dal valore del polo associato a tale capacità. La resistenza "vista" dal condensatore C_B risulta il parallelo fra R_A, R_B (che è R_{BB}) e la resistenza vista dalla base di Q_2. Questa resistenza coincide con la resistenza di ingresso di un amplificatore da emettitore comune con resistenza di emettitore (R_C è la resistenza di uscita di Q_1 vista dal collettore). Tale resistenza vale $R_i = r_{x2} + (1+\beta_{o2}) R_C$. Quindi:

$$R_B^{\infty} = R_i // R_{BB} \quad \text{e} \quad \tau_p = R_B^{\infty} C_B \quad \text{e da queste:} \quad f_L = \frac{1}{2\pi\tau_p}$$

ESERCIZIO A.12

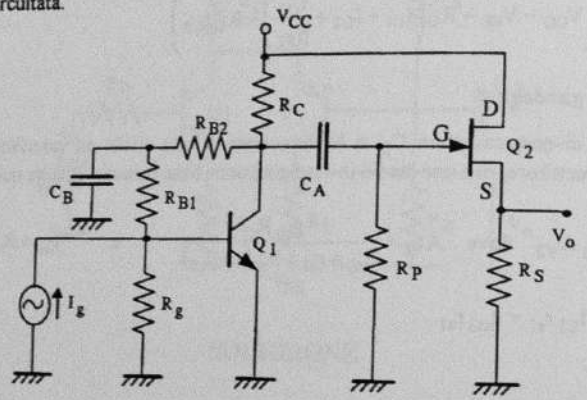
Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri (a temperatura 25°C):

$V_{CC} = 24$ V, $R_C = 2.2$ kΩ, $R_{b1} = 200$ kΩ, $R_{b2} = 70$ kΩ, $R_S = 4.7$ kΩ, $R_g = 100$ kΩ, $R_P = 1$ MΩ, $C_B = 100$ nF

Q_1: $\beta_F = 200$, $|V_{BE}| = 0.7$ V, $r_x = 1.2$ kΩ,
Q_2: $I_{DSS} = 12$ mA, $I_{DQ} = 1.17$ mA, $V_P = -8$V, $r_d = 50$ kΩ

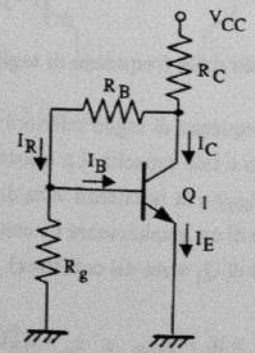
Determinare:

1) I_{C1}, V_{CE1}, a riposo (indicare il verso delle correnti nella figura)
2) Il guadagno di tensione $A_V = V_o/I_g$ (considerare C_A e C_B dei corto circuiti)
3) La frequenza di taglio inferiore f_L considerando l'effetto della capacità C_A con C_B cortocircuitata.



SOLUZIONE

1) Polarizzazione del BJT Q_1:



Equazione della maglia di uscita:

$$1)\ V_{CC} = R_C(I_C + I_R) + V_{CE}$$

Equazione della maglia di ingresso:

$$2)\ V_{CE} = R_B I_R + V_{BE}$$

Equazione al nodo di base:

$$3)\ I_R = I_B + \frac{V_{BE}}{R_g}$$

Si suppone il transistor in zona attiva per cui vale:

$$4)\ I_C = \beta_F I_B.$$

Sostituendo 2), 3), 4) in 1) si ottiene:

$$V_{CC} = \left(R_C + \frac{R_C + R_B}{\beta_F}\right) I_C + V_{BE}\left(1 + \frac{R_C + R_B}{R_g}\right)$$

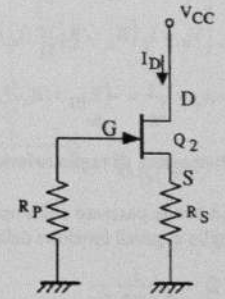
Da qui si ricava I_C:

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{BE}\left(1 + \frac{R_C + R_B}{R_g}\right)}{R_C + \frac{R_C + R_B}{\beta_F}}$$

Utilizzando l'equazione 2) si ricava:

$$V_{CE} = \frac{R_B}{\beta_F} I_C + \left(1 + \frac{R_B}{R_g}\right) V_{BE}$$

2) Polarizzazione del FET Q_2:



Si suppone il FET in zona di saturazione; valgono le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_p}\right)^2 \\ V_{GS} = -R_S I_D \end{cases}$$

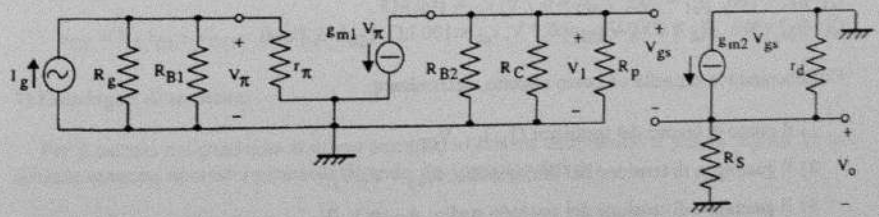
$$\begin{cases} V_{GS} = -R_S I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P}\right)^2 \\ I_D = -\frac{V_{GS}}{R_S} \end{cases}$$

Si risolve l'equazione di secondo grado e si ottiene il valore di I_D.

NOTA: l'equazione di secondo grado fornisce due valori. Si scarta quello non compatibile con l'ipotesi fatta sullo stato del FET.

3) Guadagno a centro banda:

Si disegna lo schema ai piccoli segnali.



La capacità C_B elimina, alla frequenza di interesse, la reazione negativa introdotta da R_{B1} e R_{B2}. Il guadagno dell'amplificatore è dato da:

$$A = \frac{V_o}{I_g} = \frac{V_o}{V_1}\frac{V_1}{I_g} = A_2 A_1 \qquad \text{dove} \quad A_2 = \frac{V_o}{V_1} = \frac{g_{m2}(r_d // R_S)}{1 + g_{m2}(r_d // R_S)}$$

con

$$g_{m1} \cong 40 I_{CQ}, \qquad g_{m2} \cong \frac{2 I_{DSS}}{|V_p|}\sqrt{\frac{I_{DQ}}{I_{DSS}}}$$

$$\begin{cases} V_1 = -(R_{B2} // R_C // R_P) g_{m1} V_\pi \\ V_\pi = I_g (R_g // R_{B1} // r_\pi) \end{cases}$$

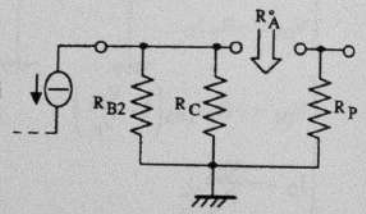
$$A_1 = \frac{V_1}{I_g} = -(R_{B2} // R_C // R_p) g_{m1} (R_g // R_{B1} // r_\pi)$$

4) Frequenza di taglio inferiore:

La banda passante dell'amplificatore è limitata dalla sola capacità C_A. Il valore della frequenza di taglio è quindi funzione della costante di tempo associata a C_A. Si ottiene:

$$f_L = \frac{1}{2\pi R_A^\circ C}$$

dove R_A° è la resistenza vista dalla capacità C_A e si può ricavare dallo schema di figura:



$$R_A^\circ = R_P + R_C // R_{B2}$$

ESERCIZIO A.13

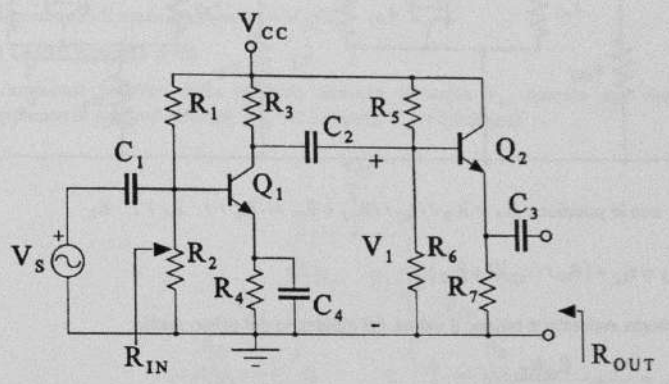
Dato l'amplificatore di figura i cui parametri (a 25°C) sono:

$R_1 = 220\ k\Omega$; $R_2 = 47\ k\Omega$; $R_3 = 2.7\ k\Omega$; $R_4 = 0.8\ k\Omega$
$R_5 = 100\ k\Omega$; $R_6 = 82\ k\Omega$; $R_7 = 1\ k\Omega$;
$V_{CC} = 20\ V$
Q_1: $\beta_{F1} = 100$, $\beta_{o1} = 200$, $V_{BE1} = 0.7\ V$, $r_{o1} = 100\ k\Omega$
Q_2: $\beta_{F2} = 100$, $\beta_{o2} = 200$, $V_{BE2} = 0.7\ V$, $r_{o2} = 100\ k\Omega$, $I_{C2} = 5.7\ mA$

Considerando le capacità un corto circuito, determinare:

1) Il punto di lavoro del transistor Q_1: I_{C1}, V_{CE1}
2) Il guadagno di tensione del primo stadio: $A_{V1} = V_1/V_s$
3) Il guadagno di tensione del secondo stadio: $A_{V2} = V_o/V_1$

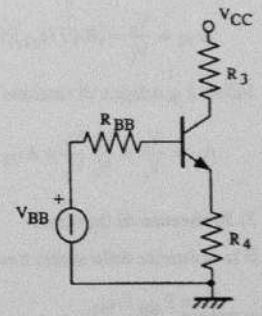
4) La resistenza di ingresso R_{IN}
5) La resistenza di uscita R_{OUT}



SOLUZIONE

1) Polarizzazione:

Di determina il punto di lavoro di Q_1:



Dallo schema di figura si ottengono le seguenti equazioni:

$$V_{BB} = V_{CC}\frac{R_2}{R_1 + R_2}; \qquad R_{BB} = R_1 // R_2$$

Dalla maglia di ingresso si ricava:

$$V_{BB} = R_{BB} I_{B1} + V_{BE1} + R_4 I_{B1}(1 + \beta_{F1}); \qquad I_{B1} = \frac{(V_B - V_{BE1})}{R_{BB} + R_4(1 + \beta_{F1})}$$

$$I_{C1} = \beta_{F1} I_{B1}$$

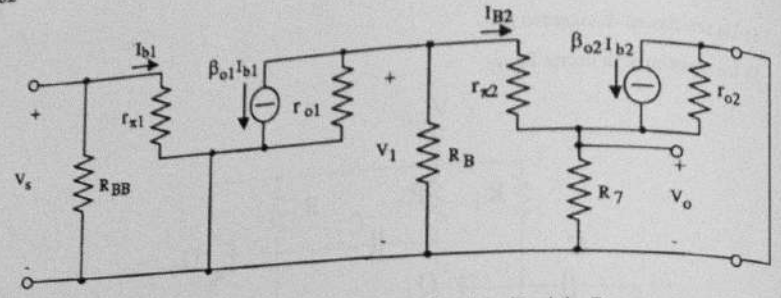
Dalla maglia di uscita si ricava:

$$V_{CC} = R_3 I_{C1} + V_{CE1} + R_4(I_{C1} + I_{B1}) \quad \Rightarrow \quad V_{CE1} = V_{CC} - R_3 I_{C1} - R_4(I_{C1} + I_{B1})$$

2) Guadagno di tensione:

Per il calcolo del guadagno si ricava anzitutto lo schema equivalente ai piccoli segnali: In tale schema vengono riportati i parametri dinamici dei transistor dati da:

$$r_{\pi 1} \cong \frac{\beta_{o1}}{g_{m1}}; \quad g_{m1} \cong 40|I_{C1}|; \quad r_{\pi 2} \cong \frac{\beta_{o2}}{g_{m2}}; \quad g_{m2} \cong 40 I_{C2}$$



Inoltre, con le posizioni: $R_P = R_B // r_{o1} // R_{i2}$ e $R_B = R_3 // R_5 // R_6$ dove:

$$R_{i2} = r_{x2} + (R_7 // r_{o2})(1+\beta_{o2})$$

dallo schema suddetto si ottiene il valore del guadagno del primo stadio:

$$A_{V1} = \frac{V_1}{V_S} = -\frac{\beta_{o1} R_P}{r_{x1}}$$

Il guadagno del secondo stadio è dato da:

$$A_{V2} = \frac{V_o}{V_1} = (R_7 // r_{o2})(1+\beta_{o2})\frac{1}{R_{i2}} = 1 - \frac{r_{x2}}{R_{i2}}$$

Infine, il guadagno di tensione totale risulta:

$$A_V = \frac{V_o}{V_s} = \frac{V_o}{V_1}\frac{V_1}{V_s} = A_{V2} A_{V1}$$

3) Resistenza di ingresso:

È la resistenza dello stadio a emettitore comune e quindi vale:

$$R_i = R_{BB} // r_{x1}$$

4) Resistenza di uscita:

È quella di uno stadio a collettore comune che si ottiene da:

$$R_o = (R_7 // r_{o2}) // \left\{ \left[(R_B // r_{o1}) + r_{x2} \right] \frac{1}{1+\beta_{o2}} \right\}.$$

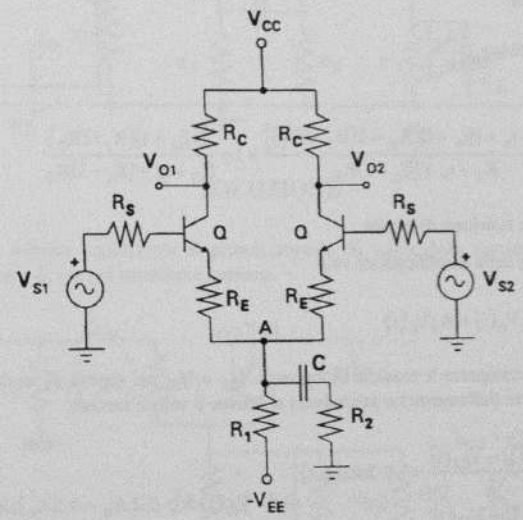
ESERCIZIO A.14

Dato l'amplificatore differenziale di figura i cui parametri sono:

$R_S = 1\ k\Omega$; $R_1 = 1\ k\Omega$; $R_2 = 5\ k\Omega$; $R_E = 80\ \Omega$; $R_C = 4\ k\Omega$;
Q: $\beta_o = 150$, $r_x = 7\ k\Omega$; $r_o = \infty$.

Considerando la capacità un corto circuito, determinare:

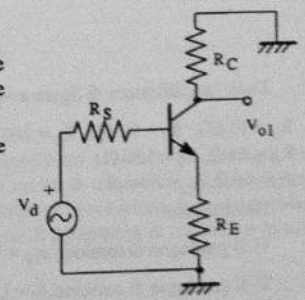
1) Il guadagno di modo differenziale $A_d = V_{o1}/V_d$
2) Il guadagno di modo comune $A_c = V_{o1}/V_c$
3) Il CMRR espresso in dB
4) L'ampiezza massima della tensione alternata di uscita V_{o1} quando agli ingressi sono applicate le seguenti tensioni: $V_{s1} = 0.1\sin(\omega t)$, $V_{s2} = 0.3\sin(\omega t)$



SOLUZIONE

1) Guadagno di modo differenziale

Nei confronti del segnale di modo differenziale, il potenziale del punto A è nullo per cui, dinamicamente, è come fosse connesso a massa.



e

Se $V_c = 0$ $\Rightarrow$ $V_{S1} = -V_{S2}$

$$V_d = \frac{V_{S1} - V_{S2}}{2} = V_{S1}$$

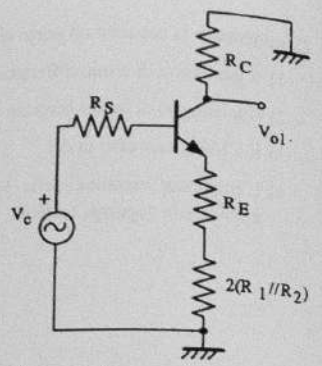
$$A_d = \frac{V_{o1}}{V_d} = -\frac{\beta_o R_C}{R_S + r_x + (\beta_o + 1) R_E}$$

2) Guadagno di modo comune

In presenza di solo segnale di modo comune si ha:

$V_{S1} = V_{S2}$, $V_c = V_{S1}$, $V_d = 0$

$$A_c = \frac{V_{o1}}{V_c} = -\frac{\beta_o R_C}{R_S + r_\pi + (\beta_o + 1)\left(R_E + 2(R_1 // R_2)\right)}$$



3) Calcolo del CMRR

Dalla definizione:

$$CMRR = 20\log_{10}\left|\frac{A_d}{A_c}\right|$$

con

$$\frac{A_d}{A_c} = \frac{R_S + r_\pi + (\beta_o + 1)\left[R_E + 2(R_1 // R_2)\right]}{R_S + r_\pi + (\beta_o + 1)R_E} = 1 + \frac{2(\beta_o + 1)(R_1 // R_2)}{R_S + r_\pi + (\beta_o + 1)R_E}$$

4) Calcolo della tensione di uscita

Dalla definizione delle amplificazioni vale:

$$V_{o1}(t) = A_d V_d(t) + A_c V_c(t)$$

Occorre quindi scomporre le tensioni di ingresso V_{S1} e V_{S2} nei segnali di modo differenziale e di modo comune. Poi dall'equazione precedente si ottiene il valore cercato.

$$\left.\begin{aligned} V_d(t) &= \frac{V_{S1}(t) - V_{S2}(t)}{2} = -0.2\sin(\omega t) \\ V_c(t) &= \frac{V_{S1}(t) + V_{S2}(t)}{2} = 0.2\sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \quad V_{o1}(t) = (-0.2A_d + 0.2A_c)\sin(\omega t)$$

ESERCIZIO A.15

Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri:

$R_S = 10\ k\Omega$, $R_1 = 91\ k\Omega$, $R_2 = 100\ k\Omega$, $R_3 = 20\ k\Omega$, $R_4 = 150\ k\Omega$, $R_5 = 20\ k\Omega$, $R_6 = 4\ k\Omega$, $R_7 = 100\ \Omega$

$r_\pi = 4\ k\Omega$, $g_m = 45\ mS$

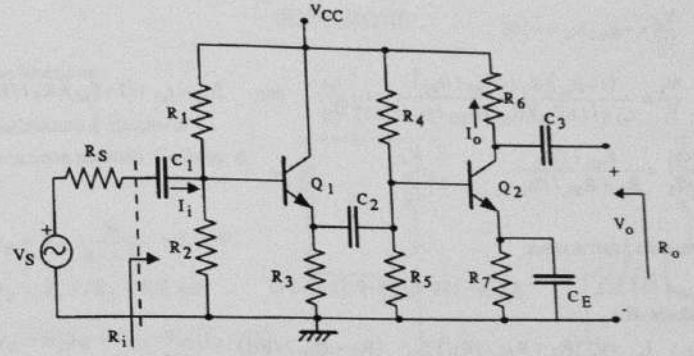
Determinare:

1) Il guadagno di tensione $A_V = V_o/V_s$

2) Il guadagno di corrente $A_I = I_o/I_i$

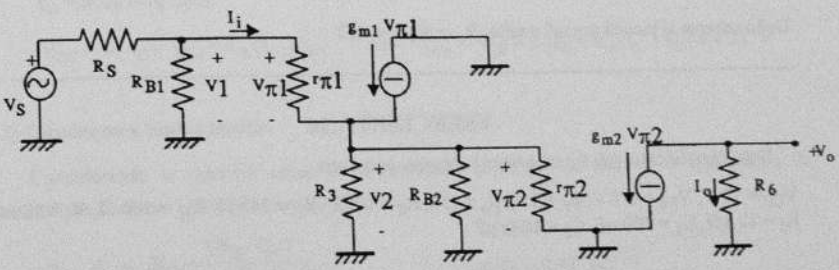
3) La resistenza di ingresso R_i

4) La resistenza di uscita R_o



SOLUZIONE

Si disegna lo schema equivalente ai piccoli segnali. Si tratta della cascata di uno stadio a collettore comune e di uno ad emettitore comune.



Nello schema di figura sono state fatte le seguenti posizioni:

$$R_{B1} = R_1 // R_2 = 47.6\,k\Omega \qquad R_{B2} = R_4 // R_5 = 17.6\,k\Omega$$

1) Calcolo del guadagno A_V

Il guadagno della cascata dei due stadi può essere scomposto nel prodotto dei guadagni dei singoli stadi. Occorre però tener conto anche dell'effetto di carico di uno stadio sul precedente, oppure del fatto che la resistenza di uscita di uno stadio costituisce la resistenza di sorgente dello stadio successivo. Quest'ultima considerazione vale anche per il generatore di ingresso e la sua resistenza di sorgente. Il guadagno risulta:

$$A_V = \frac{V_o}{V_S} = \frac{V_o}{V_2}\frac{V_2}{V_1}\frac{V_1}{V_S}$$

Si calcolano ora i guadagni dei singoli stadi:

$$\frac{V_o}{V_2} = -g_{m2}R_6 = -180$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(1+\beta_{o1})(R_3 // R_{B2} // r_{x2})}{r_{x1}+(1+\beta_{o1})(R_3 // R_{B2} // r_{x2})} = 1 - \frac{r_{x1}}{R_{i1}} \quad \text{con} \quad R_{i1} = r_{x1} + (1+\beta_{o1})(R_3 // R_{B2} // r_{x2})$$

$$\frac{V_1}{V_S} = \frac{R_{B1} // R_{i1}}{R_S + R_{B1} // R_{i1}}$$

Sostituendo i dati si trova:

$R_{i1} = 511\ k\Omega, \qquad A_V = -180 \cdot 0.978 \cdot 0.71 = -145$

2) Calcolo di A_I

$$A_I = \frac{I_o}{I_i} = \frac{V_o}{R_6}\frac{(R_S + R_{B1} // R_{i1})}{V_S} = A_V \frac{(R_S + R_{B1} // R_{i1})}{R_6} = -1939$$

3) Resistenza di ingresso R_i

Dallo schema ai piccoli segnali risulta: $R_i = R_{B1} // R_{i1} = 43.5 k\Omega$

4) Resistenza di uscita R_o

Dallo schema ai piccoli segnali risulta: $R_o = R_6 = 4\ k\Omega$

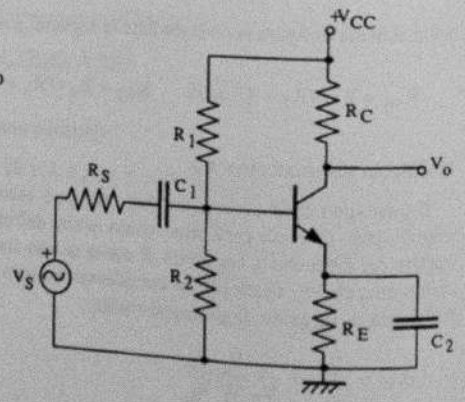
ESERCIZIO A.16

Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri:

$V_{CC} = 12$ V, $V_{BE} = 0.7$ V, $\beta_F = 150$, $\beta_o = 150$, $R_S = 10\ \Omega$, $R_C = 560\ \Omega$, $R_E = 180\ \Omega$, $R_1 = 32\ k\Omega$
$R_2 = 12\ k\Omega$, $C_1 = 100\ \mu F$, $C_2 = 1000\ \mu F$

Determinare:

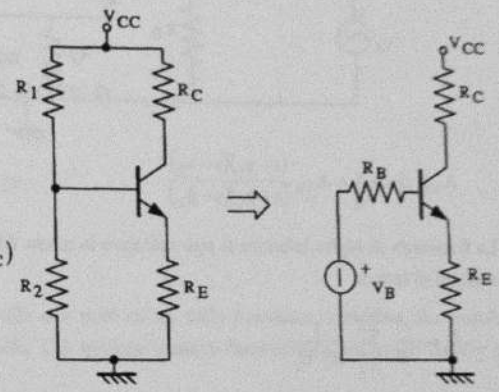
1) Il punto di lavoro
2) Il guadagno a centro banda espresso in dB
3) La risposta in bassa frequenza



SOLUZIONE

1) Polarizzazione:

Schematizzando il circuito di polarizzazione secondo Thevenin, si trova:



$$V_B = V_{CC}\frac{R_2}{R_1+R_2} = 3.2\ V$$

$$R_B = R_1 // R_2 = 8.8\ k\Omega$$

$$V_B = R_B I_B + V_{BE} + R_E(I_B + I_C)$$

$$I_B = \frac{V_B - V_{BE}}{R_B + R_E(1+\beta_F)} = 68\ \mu A$$

$$I_C = \beta_F I_F = 10.5\ mA$$

$$V_{CC} = R_C I_C + V_{CE} + R_E(I_C + I_B) \quad \Rightarrow \quad V_{CE} = V_{CC} - R_C I_C - R_E(I_C + I_B) = 4.23\ V$$

2) Guadagno a centro banda:

Considerando le capacità come dei cortocircuiti si ottiene lo schema di uno stadio da emettitore comune. L'amplificazione risulta:

$$A_{Vo} = -g_m R_C \frac{(R_B // r_x)}{R_S + (R_B // r_x)} \qquad \text{dove} \qquad g_m \cong 40 I_C = 0.42\ \left[\Omega^{-1}\right] \qquad \text{e}$$

$$r_x \cong \frac{\beta_o}{g_m} = 367\Omega$$

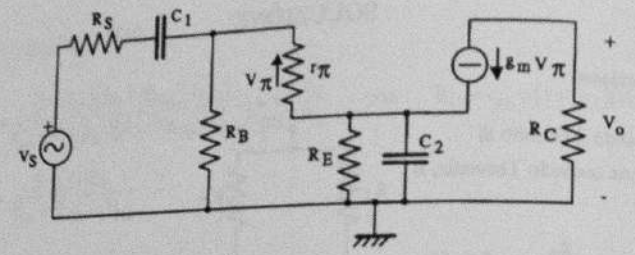
$$R_B // r_x = 352\Omega$$

$$A_{Vo} = -206 \qquad A_{Vo\,(dB)} = 20\log_{10}|A_{Vo}| = 46.3\,dB$$

3) Risposta in bassa frequenza:

C_1 e C_2 sono due capacità interagenti e indipendenti.
n° di poli = n° di capacità indipendenti = 2

$$\lim_{S\to\infty}\frac{V_o}{V_S} = K \qquad \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \text{n° zeri} = \text{n° poli} = 2$$



$$A_{VS}(s)=\frac{V_o}{V_S}=A_{Vo}\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

La frequenza di taglio inferiore si può calcolare in modo APPROSSIMATO con il metodo delle costanti di tempo:

$$f_L=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n^\circ\,poli}\frac{1}{R_i^\infty C_i}$$

dove R_i^∞ è la resistenza vista dalla capacità C_i con le altre cortocircuitate

$$R_1^\infty=R_S+R_B//R_{in}=R_S+R_B//r_\pi=402\ \Omega \qquad \text{poiché} \qquad R_{in}\big|_{C_2=\infty}=r_\pi$$

$$R_2^\infty=R_E//\left[\frac{(R_B//R_S)+r_\pi}{1+g_m r_\pi}\right]=180//2.69=2.65\ \Omega$$

Infine risulta:

$$f_L=\frac{1}{2\pi R_1^\infty C_1}+\frac{1}{2\pi R_2^\infty C_2}=3.96+60\cong 64\ \text{Hz}$$

Per verifica è possibile fare il calcolo esatto della funzione di trasferimento dell'amplificatore e da questa risalire al valore della frequenza di taglio. Per il calcolo delle FdT occorre considerare la presenza delle capacità del circuito, tenendo conto della loro impedenza.

$$A_V(s)=\frac{V_o}{V_S}=\frac{V_o}{V_i}\frac{V_i}{V_S}=-g_m R_C\frac{r_\pi}{r_\pi+(1+\beta_o)Z_E}\frac{R_B//R_i}{Z_S+R_B//R_i}$$

dove

$$R_i=r_\pi+(1+\beta_o)Z_E,\qquad Z_S=R_S+\frac{1}{sC_1},\qquad Z_E=\frac{R_E}{1+sR_E C_2}$$

Sviluppando, si arriva alla FdT in forma di Bode:

$$A_{VS}(s)=K_B\frac{s(1+s\tau_Z)}{1+a_1 s+a_2 s^2}=A_{Vo}\frac{s(s-z)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

dove K_B è il guadagno di BODE. Per il calcolo dei poli si possono anche calcolare direttamente i coefficienti a_1 e a_2 col metodo delle costanti di tempo in quanto il calcolo di tali coefficienti è esatto:

$$a_1=R_{11}^\circ C_1+R_{22}^\circ C_2$$

$$R_{11}^\circ=R_S+R_B//\left[r_\pi+(1+\beta_o)R_E\right]=6750\ \Omega$$

$$R_{22}^\circ=R_E//\left(\frac{R_B+r_\pi}{1+\beta_o}\right)=44.7\ \Omega$$

$$a_1=0.675+0.045=0.72\ \text{s}$$

Il valore del secondo zero coincide con quel valore della frequenza complessa che annulla l'uscita anche con ingresso non nullo. Ciò avviene quando l'ammettenza del ramo R_E-C_2 si annulla:

$$\Rightarrow Z_E=\frac{R_E}{1+sC_2R_E}=\infty \quad \text{e} \quad \tau_Z=R_E C_2$$

$$a_2=R_{11}^\circ C_1 R_{22}^\infty C_2=R_{11}^\infty C_1 R_{22}^\circ C_2=1.797\ \text{ms}^2$$

$$\tau_Z=R_E C_2=0.18\ \text{s}$$

$$A_V\big|_{S\to\infty}=K_B\frac{\tau_Z}{a_2}=A_{Vo} \qquad \Rightarrow \qquad K_B=-2.06$$

$$|A_V(j\omega)|=\frac{\omega K_B\sqrt{1+(\omega\tau_Z)^2}}{\sqrt{\left(1-a_2\omega^2\right)^2+(a_1\omega)^2}} \qquad |A_V(j\omega_L)|=\frac{A_{Vo}}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_L=63.6\text{Hz}$$

Considerando le seguenti semplificazioni:

$$R_B>>R_S \quad \text{e} \quad \frac{1}{\omega C_2}<<R_E$$

possiamo scrivere:

$$A_{VS}\cong\frac{-\beta_o R_C}{R_S+r_\pi}\frac{1}{1-j\dfrac{1}{\omega C_1^*(R_S+r_\pi)}} \qquad \text{dove} \quad C_1^*=\frac{1}{\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1+\beta_o}{C_2}}=6.097\ \mu\text{F}$$

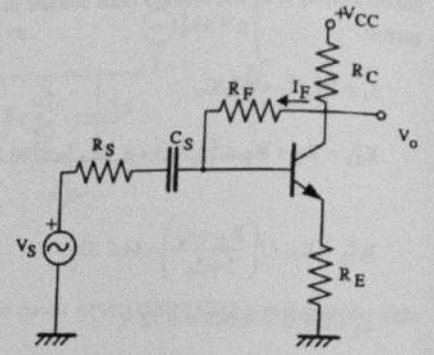
e quindi:

$$f_L=\frac{1}{2\pi C_1^*(R_S+r_\pi)}=62.3\ \text{Hz}$$

A.17

Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri:

$V_{CC} = 30$ V, $V_{BE} = 0.7$ V
$R_S = 10$ kΩ, $R_C = 10$ kΩ,
$R_E = 100$ Ω, $R_F = 200$ kΩ
$\beta_F = 100$, $\beta_o = \beta_F$



Determinare:

1) Il punto di riposo
2) Il guadagno a centro banda

SOLUZIONE

A) Determinazione del punto di riposo:

Dall'osservazione dello schema si scrivono le seguenti espressioni:

$$V_{CC} = R_C(I_C + I_F) + V_{CE} + R_E(I_C + I_B)$$

$$I_F = I_B$$

$$I_C = \beta_F I_B$$

$$V_{CC} = (R_C + R_E)\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right) I_C + V_{CE}$$

$$V_{CE} = R_F I_B + V_{BE} = R_F \frac{I_C}{\beta_F} + V_{BE}$$

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{(R_C + R_E)\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right) + \frac{R_F}{\beta_F}} = 2.4 \text{ mA}$$

da cui risulta: $V_{CE} = 5.76$ V.
Il transistor è in zona attiva.

2) Guadagno a centro banda:

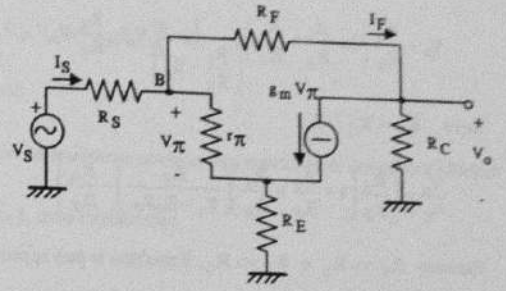
Dal circuito equivalente ai piccoli segnali di figura con i seguenti parametri:

$$g_m = \frac{|I_C|}{V_T} \cong \frac{2.4}{25} = 96 \frac{\text{mA}}{\text{V}} \qquad r_\pi = \frac{\beta_o}{g_m} = 1042\ \Omega$$

si ottiene:

1) $V_o = R_C[-g_m v_\pi + I_F]$

2) $I_F = \frac{V_B - V_o}{R_F}$



3) $V_B = V_\pi + R_E\left(g_m V_\pi + \frac{V_\pi}{r_\pi}\right) = V_\pi\left[1 + \frac{R_E}{r_\pi}(1 + g_m r_\pi)\right] = V_\pi\left[1 + \frac{R_E}{r_\pi}(1 + \beta_o)\right] = V_\pi \frac{R_i}{r_\pi}$

dove $R_i = r_\pi + R_E(\beta_o + 1)$ è la resistenza di ingresso di uno stadio CC o CE avente resistenza in emettitore.

4) $V_S = R_S I_S + V_B$

5) $I_S = I_F + \frac{V_\pi}{r_\pi}$

$$V_S = R_S I_F + \frac{R_S}{r_\pi} V_\pi + V_\pi \frac{R_i}{r_\pi} = R_S I_F + \frac{(R_S + R_i)}{r_\pi} V_\pi$$

$$I_F = V_\pi \frac{R_i}{r_\pi} \frac{1}{R_F} - \frac{V_o}{R_F}$$

$$V_S = \frac{R_S}{R_F}\frac{R_i}{r_\pi} V_\pi - \frac{R_S}{R_F} V_o + \frac{(R_S + R_i)}{r_\pi} V_\pi = \frac{V_\pi}{r_\pi}\left(R_S \frac{R_i}{R_F} + R_S + R_i\right) - \frac{R_S}{R_F} V_o$$

$$V_o = R_C\left[-g_m V_\pi + V_\pi \frac{R_i}{r_\pi R_F} - \frac{V_o}{R_F}\right] = R_C\left(\frac{R_i}{r_\pi R_F} - g_m\right) V_\pi - \frac{R_C}{R_F} V_o$$

$$V_o\left(1 + \frac{R_C}{R_F}\right) = R_C\left(\frac{R_i}{r_\pi R_F} - g_m\right) V_\pi$$

$$V_\pi = V_o \frac{1 + R_C / R_F}{\frac{R_i R_C}{r_\pi R_F} - g_m R_C}$$

$$V_S = \frac{1}{r_\pi}\left(R_S \frac{R_i}{R_F} + R_S + R_i\right)\left(1 + \frac{R_C}{R_F}\right) \frac{1}{R_C\left(\frac{R_i}{r_\pi R_F} - g_m\right)} V_o - \frac{R_S}{R_F} V_o$$

$$V_S = \frac{R_S}{R_P}\left(1+\frac{R_i}{R_F}+\frac{R_i}{R_S}\right)\frac{1}{\left(\frac{R_i}{R_F}-\beta_o\right)}V_o - \frac{R_S}{R_F}V_o$$

dove $R_P = R_C // R_F$

$$\frac{V_o}{V_S} = \left[\frac{R_S}{R_P}\left(1+\frac{R_i}{R_F}+\frac{R_i}{R_S}\right)\left(\frac{R_F}{R_i-\beta_o R_F}\right)-\frac{R_S}{R_F}\right]^{-1}$$

Essendo $R_F >> R_S$ e $R_F >> R_C$, il risultato si può approssimare a:

$$\frac{V_o}{V_S} \cong \left[\frac{R_S}{R_C}\left(1+\frac{R_i}{R_S}\right)\left(\frac{R_F}{R_i-\beta_o R_F}\right)-\frac{R_S}{R_F}\right]^{-1}$$

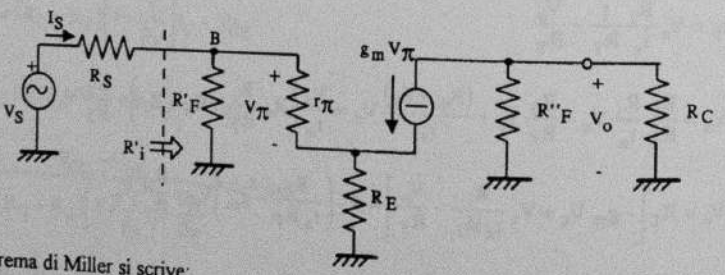
se $\beta_0 R_F >> R_i \quad (\beta_0 R_F >> r_\pi + \beta_0 R_E)$, risulta:

$$A_{Vt} = \frac{V_o}{V_S} \cong -\frac{1}{R_S\left[\frac{1}{R_C}\left(1+\frac{R_i}{R_S}\right)\frac{1}{\beta_o}+\frac{1}{R_F}\right]}$$

$$R_i = r_\pi + R_E(\beta_o+1) = 11.1\ k\Omega \qquad A_{Vt} = -14$$

Il procedimento esatto necessita di una notevole mole di calcoli, che è possibile semplificare di molto usando il teorema di Miller o studiando l'amplificatore con la teoria della retroazione.

3) Soluzione usando il teorema di Miller:



Dal teorema di Miller si scrive:

$$R_F^* = \frac{R_F}{1-\frac{1}{A_V}} \cong R_F \quad \text{se} \quad |A_V| >> 1 \qquad R'_F = \frac{R_F}{1-A_V}$$

$$A_V = \frac{V_o}{V_B}$$

$$V_o = -g_m\left(R_C // R_F^*\right)V_\pi = -g_m R_P V_\pi \cong -g_m R_C \frac{r_\pi}{R_i}V_B$$

$$A_V = -g_m r_\pi \frac{R_C}{R_i} = -\beta_o \frac{R_C}{R_i} = -90$$

È il guadagno di tensione di uno stadio da emettitore comune con resistenza di emettitore (doppio carico).

Si può ritenere valida l'ipotesi $|A_V| >> 1$, fatta inizialmente.

$$R'_F = 2.2\ k\Omega$$

$$A_{VT} = \frac{V_o}{V_S} = \frac{V_o}{V_B}\frac{V_B}{V_S} = A_V \frac{\left(R_S // R'_F // R_i\right)}{R_S} = A_V \frac{1551}{10\cdot 10^3} = -14$$

Calcolo di R'_i: $R'_i = R_i // R'_F = 1.84\ k\Omega$.

Come si vede, la presenza di R'_F riduce di molto il guadagno complessivo dello stadio per effetto dell'elevata resistenza di sorgente R_S che richiederebbe una elevata impedenza di ingresso R'_i per non ridurre l'amplificazione.

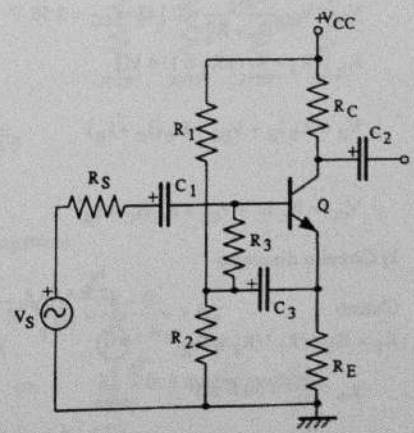
ESERCIZIO A.18

Dato l'amplificatore di figura con i seguenti parametri:

$V_{CC} = 24$ V, $V_{BE} = -0.4$ V, Q = BC237B,
$\beta_{Fmin} = 200$, $\beta_o = \beta_F$
$R_1 = 390\ k\Omega$, $R_2 = 68\ k\Omega$, $R_3 = 56\ k\Omega$,
$R_E = 1.8\ k\Omega$, $R_C = 10\ k\Omega$, $R_S = 10\ k\Omega$
$C_1 = 10\ \mu F$, $C_2 = 22\ \mu F$, $C_3 = 4.7\ \mu F$

Determinare:

1) Il punto di lavoro
2) Il guadagno di tensione $A_V = V_o / V_s$
3) Resistenze d'ingresso e di uscita

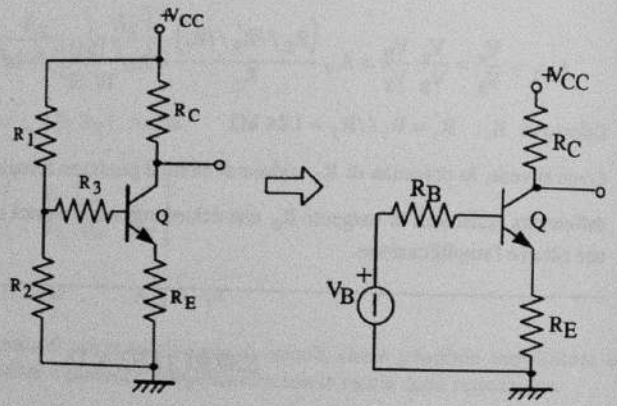


SOLUZIONE

La rete di polarizzazione di ingresso, composta da R_1, R_2, R_3 e C_3 realizza il cosiddetto circuito BOOTSTRAP. Risolve il problema della diminuzione del guadagno e della impedenza di ingresso dovuta alla presenza di $R_B = R_1 // R_2$.
In questo caso R_3 risulta dinamicamente connessa tra base ed emettitore. Dinamicamente, la tensione in emettitore è circa uguale a quella di base (guadagno di tensione di un collettore comune). R_3 ha quindi una tensione di segnale molto piccola ai suoi capi (V_p), quindi la corrente che assorbe dinamicamente è molto piccola, dando luogo ad una resistenza dinamica molto elevata.

1) Studio del punto di lavoro

Applicando Thevenin al circuito di base del transistor:



$$V_B = V_{CC}\frac{R_2}{R_1+R_2} = 0.148 \cdot V_{CC} = 3.56\ \text{V}$$

$$R_B = R_3 + R_1 // R_2 = 114\ \text{k}\Omega$$

$$V_B = R_B I_B + V_{BE} + R_E(I_C + I_B) \quad \Rightarrow \quad I_C \cong \frac{V_B - V_{BE}}{R_E + \frac{(R_B + R_E)}{\beta_F}}$$

$$V_{CC} = R_C I_C + V_{CE} + R_E(I_C + I_B) \qquad V_{CE} \cong 9.25\ \text{V}$$

2) Circuito dinamico

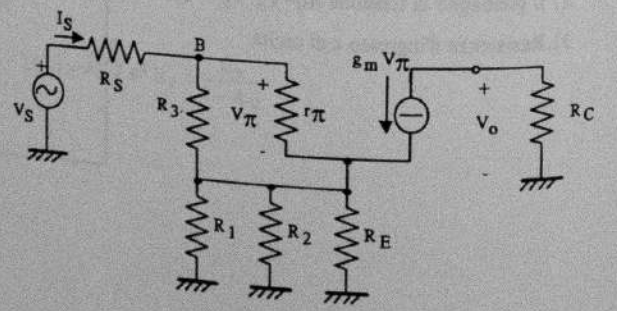
Chiamo

$$R_P = R_E // R_1 // R_2 \cong R_E$$

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = 50.8\ \text{mS}$$

$$r_\pi = \frac{\beta_o}{g_m}$$

$$r_\pi \cong 4\,\text{k}\Omega$$



R_3 è in parallelo a r_π ed è molto maggiore di r_π perciò si può trascurare.
Il guadagno risulta quello di uno stadio a doppio carico.

$$A_V = \frac{V_o}{V_S} = -\frac{R_C \beta_o}{R_i}\frac{R_i}{R_i + R_S} = -R_C \beta_o \frac{1}{R_i + R_S} = -5.35$$

3) Resistenza di ingresso e di uscita

$$R_{in} = r_\pi + (\beta_o + 1)R_P = 364\ \text{k}\Omega$$

$$R_{out} = R_C = 10\ \text{k}\Omega$$

NOTA: R_3 può anche essere spezzata secondo Miller in una resistenza

$$R_3' = \frac{R_3}{1-K}$$

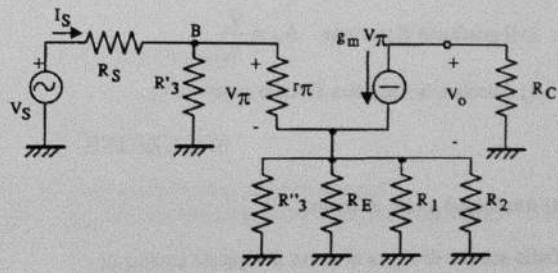
tra base e massa ed in una resistenza

$$R_3^* = \frac{R_3}{1-\frac{1}{K}}$$

tra collettore e massa.

$$K = \frac{V_E}{V_B} = A_V^{(CC)}$$

dove $A_V^{(CC)}$ è un numero di poco inferiore da 1.



$$R_3' = \frac{R_3}{1-K} >> R_3 \qquad \text{perchè} \quad 1-K \cong 0$$

$$R_3^* = \frac{R_3}{1-\frac{1}{K}} << -R_3 \quad \text{(assume un valore negativo)}$$

$$R_3^* // R_P > R_P \quad \text{perchè } R_3^* < 0 \quad \text{difatti} \quad R_3^* // R_P = \frac{R_P R_3^*}{R_P + R_3^*} > R_P$$

$$\left|R_3^*\right| > R_P \qquad R_P R_3^* < R_P\left(R_P + R_3^*\right) \quad \Rightarrow \quad R_P > 0 \text{ è sempre verificato}$$

(la disuguaglianza ha cambiato di segno perché $R_P + R_3^* < 0$).

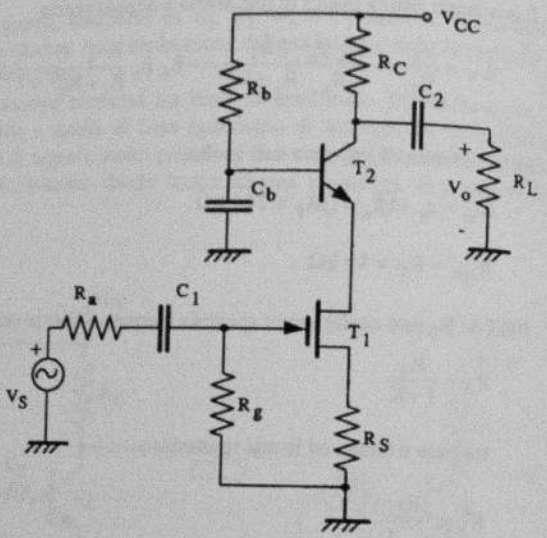
ESERCIZIO A.19

Dato il circuito di figura con:

$V_{CC} = 30$ V, $R_a = 10$ kΩ,
$R_L = 47$ kΩ, $R_g = 1$ MΩ,

T_1: JFET n-channel
$V_p = -4.5$ V, $V_{DSQ} = 4$ V,
$r_d = 200$ kΩ
$I_{DQ} \cong I_{CQ} = 2$ mA, $I_{DSS} = 6.48$ mA
$C_{gs} = 3$pF, $C_{gd} = 1$pF, $C_{ds} = 3$pF;

T_2: BJT npn
$\beta_F = 350$; $\beta_o \cong \beta_F$
$V_{CEQ} = 10$ V, $V_{BEQ} = 0.7$V
$C_\pi = 19.3$ pF, $C_\mu = 0.5$ pF



Determinare:

1) Il valore delle resistenze R_S, R_C e R_b

2) Il guadagno di tensione: $A_V = \dfrac{V_o}{V_s}$

3) Calcolare la frequenza di taglio superiore f_H

SOLUZIONE

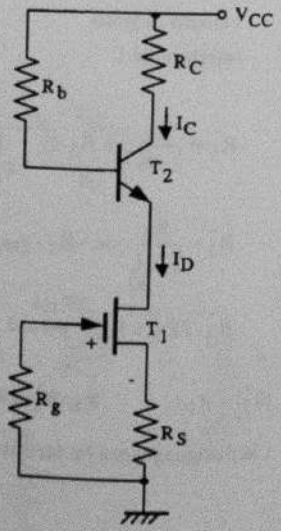
1) Analisi del punto di lavoro

Dallo schema di figura si ricava il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} V_{CC} = R_C I_C + V_{CE} + V_{DS} + R_S I_D \\ R_C I_C + V_{CE} = R_b I_B + V_{BE} \\ V_{GS} = -R_S I_S \\ I_D = I_C + I_B \cong I_C \end{cases}$$

$$I_D = I_{DSS}\left(1 - \frac{V_{GS}}{V_P}\right)^2 \Rightarrow V_{GS} = V_P\left(1 - \sqrt{\frac{I_D}{I_{DSS}}}\right) = -2 \text{ V}$$

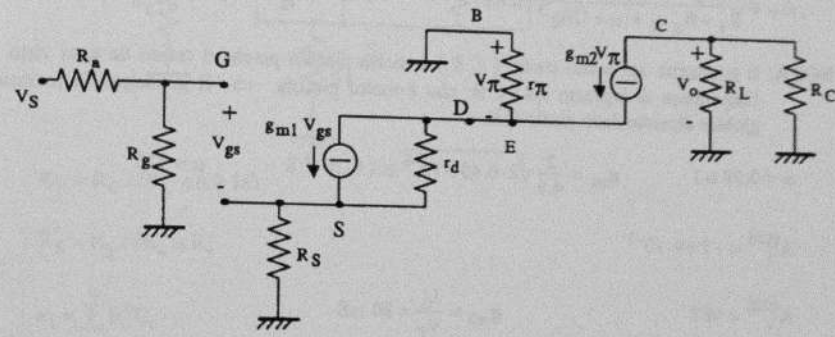
$$R_S = \frac{-V_{GS}}{I_D} = 1\text{k}\Omega$$



$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CE} - V_{DS} - R_S I_D}{I_C} = 7\text{k}\Omega$$

$$R_b = \frac{R_C I_C + V_{CE} - V_{BE}}{I_B} = 4\text{M}\Omega$$

2) Analisi del comportamento dinamico



Chiamo $R_P = R_C // R_L$

$\mu = g_{m1} r_d$ ⇐ fattore di amplificazione

$$g_{m1} = \frac{2}{|V_P|}\sqrt{I_{DQ} I_{DSS}} \qquad r_d \cong \frac{1}{\lambda I_{DQ}} = \frac{V_A}{I_{DQ}}$$

Si tratta della cascata di un CS con resistenza di source seguito da un CB.
Il carico visto dal primo stadio consiste nell'impedenza d'ingresso dello stadio successivo.

$$R_{i(CB)} = \frac{r_\pi}{1+\beta_o} \cong \frac{1}{g_{m2}} \qquad (\text{se } \beta_o >> 1)$$

Il guadagno intrinseco del primo stadio risulta:

$$A_V^{(CS)} = \frac{V_D}{V_g} = \frac{-\mu R_{i(CB)}}{r_d + R_{iCB} + (\mu+1)R_S}$$

L'attenuazione α introdotta dallo stadio d'ingresso risulta:

$$\alpha = \frac{V_g}{V_S} = \frac{R_g}{R_a + R_g}$$

L'amplificazione intrinseca dello stadio CB risulta:

$$A_V^{(CB)} = \frac{V_o}{V_D} = g_{m2} R_P$$

Il guadagno di tensione totale risulta:

$$A_V = \frac{V_o}{V_S} = \frac{V_o}{V_D}\frac{V_D}{V_g}\frac{V_g}{V_S} = A_V^{(CB)}A_V^{(CS)}\alpha \cong \frac{R_g}{R_a+R_g}\frac{1}{r_d+\frac{1}{g_{m2}}+(\mu+1)R_S}\left(-\frac{\mu}{g_{m2}}\right)g_{m2}R_P$$

Osserviamo che se $\frac{1}{g_{m2}} << r_d + \mu R_S$ (normalmente verificata).

$$A_V \cong \frac{R_g}{R_a+R_g}\frac{1}{r_d+(\mu+1)R_S}(-\mu R_P)$$

NOTA: Il guadagno del primo stadio (C.S) è molto piccolo perché il carico da esso visto è l'impedenza di ingresso del C.B. che è molto piccola. ⇒ Il guadagno di tensione globale dipende dallo stadio C.B.

$\alpha = 0.99 \cong 1$ $\qquad g_{m1} = \frac{2}{4.5}\sqrt{2\cdot 6.481\cdot 10^{-6}} \cong 1.6\cdot 10^{-3}$ S $\qquad \mu = 320$

$A_V^{(CS)} = -7.69\cdot 10^{-3}$

$A_V^{(CB)} = 487$ $\qquad g_{m2} = \frac{I_C}{V_T} = 80$ mS

$A_V = -3.75$

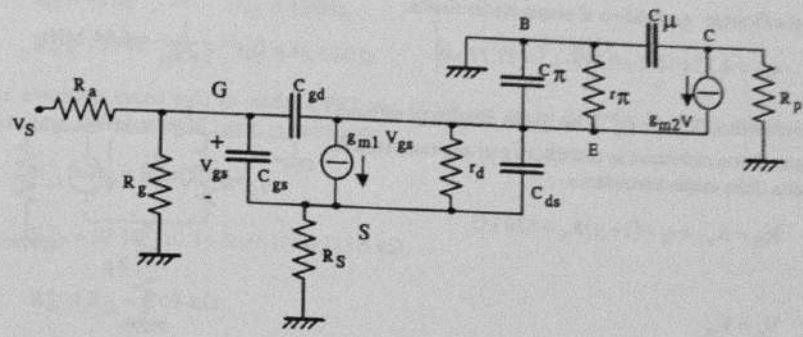
La presenza di R_S diminuisce molto il guadagno di tensione. La si può cortocircuitare dinamicamente con una capacità di by-pass. In tal caso il guadagno complessivo diventa:

$$A_V = \alpha(-g_{m1}R_P) = -9.75$$

Non risulta molto elevato perché la transcaratteristica del JFET è piccola rispetto a quello di un BJT a parità di corrente di collettore (il primo dipende dalla radice di I_{DQ} ed il secondo da I_{CQ}). Per aumentare il guadagno conviene usare un transistor anche per il primo stadio avendo cura che l'impedenza di ingresso non risulti troppo bassa in modo da non diminuire troppo il valore di α.

3) Calcolo di f_H

Utilizziamo il metodo approssimato delle costanti di tempo, (approssimazione di polo dominante).



$R_P = R_C // R_L = 6.9$ kΩ

$R_S' = R_g // R_a \cong R_a$

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n} R_i^o C_i$$

dove n è il numero di capacità e R_i^o è la resistenza vista da C_i con le altre capacità della rete aperte.

$$a_1 = R_{gs}^o C_{gs} + R_{gd}^o C_{gd} + R_{ds}^o C_{ds} + R_\pi^o C_\pi + R_\mu^o C_\mu$$

Per trovare R_{gs}^o, R_{gd}^o, R_{ds}^o si possono usare le formule riportate nel testo purché al posto di R_D si metta l'effettiva resistenza di carico del primo stadio che è l'impedenza di ingresso dello stadio successivo (CB).

$$R_D = \frac{r_\pi}{\beta_o+1} \cong \frac{1}{g_{m2}} = 12.5\,\Omega \quad \text{(molto piccolo)}$$

$$R_{gs}^o = \frac{R_S' + R_A}{1+\mu'} = 4.23\ \text{k}\Omega$$

dove:

$$R_A = R_S // (r_d + R_D) \cong R_S \quad \text{e} \quad \mu' = \frac{R_A\mu}{r_d+R_D} \cong g_{m1}R_A \cong g_{m1}R_S = 1.6$$

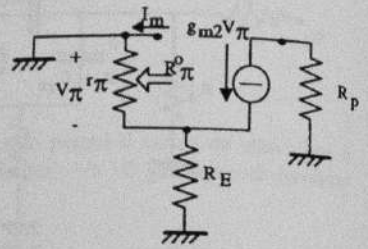
$$R_{gd}^o = R_S' + \frac{R_D\left[r_d + \mu R_S' + (1+\mu)R_S\right]}{R_D + r_d + R_S(1+\mu)} = 10\cdot 10^{-3} + 89 \cong R_S' = 10\ \text{k}\Omega$$

$$R_{ds}^o = \frac{r_d(R_D+R_S)}{R_D + r_d + R_S(1+\mu)} = 383\ \text{k}\Omega$$

Il coefficiente a_{11} relativo al primo stadio risulta:

$$a_{11} = 4.23 + 10 \cdot 1 + 0.389 \cdot 1.5 = 23.27 \text{ mS} \qquad f_{H1} = \frac{1}{2\pi a_{11}} = 6.84 \text{ MHz}$$

Le resistenze R_π° ed R_μ° sono quelle relative ad un base comune con resistenza in emettitore pari alla resistenza di uscita dello stadio precedente.

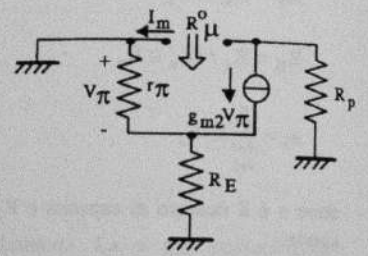


$$R_E = R_{o1} = r_d + (1+\mu)R_S = 520 \text{ k}\Omega$$

$$V_\pi = V_m$$

$$I_m = \frac{V_m}{r_\pi} + \frac{V_m}{R_E} + g_{m2}V_m$$

$$R_\pi^\circ = \frac{V_m}{i_m} = \frac{1}{\frac{1}{r_\pi} + \frac{1}{R_E} + g_{m2}} \cong \frac{1}{g_{m2}} = 12.5\ \Omega$$



$$I_m = \frac{V_\pi}{r_\pi} + g_m V_\pi + \frac{V_\pi}{R_E} + I_m$$

$$\frac{V_\pi}{r_\pi} + g_m V_\pi + \frac{V_\pi}{R_E} = 0 \Rightarrow \quad V_\pi = 0 \quad \Rightarrow \quad R_\mu^\circ = R_P$$

Il coefficiente a_{12} relativo al secondo stadio risulta:

$$a_{12} = R_\mu^\circ C_\mu + R_\pi^\circ C_\pi = 6.09 \cdot 0.5 + 0.0125 \cdot 19.5 = 3.29 \text{ nS} \qquad f_{H2} = \frac{1}{2\pi a_{12}} = 48.4 \text{ MHz}$$

$$f_H = \frac{1}{2\pi(a_{11} + a_{12})} = \left(\frac{1}{f_{H1}} + \frac{1}{f_{H2}}\right)^{-1} = 6 \text{ MHz}$$

Se nel cascode si cortocircuita la R_S si può ottenere un guadagno di tensione complessivo pari a:

$$A_V = -g_{m1}R_P\,\alpha \cong -g_{m1}R_P = -9.27$$

In questa situazione risulta:

$$R_{gs}^\circ = R_S' = R_a = 10\text{k}\Omega$$

$$R_{gd}^\circ = R_{gs}^\circ\left(1 + g_{m1}(r_d\,//R_D)\right) + (r_d\,//R_D) \cong R_{gs}^\circ = 10\text{k}\Omega$$

$$R_{ds}^\circ = r_d\,//R_D = 12.5\ \Omega$$

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11} = 40\text{nS} & \Rightarrow & f_{H1} \cong 4\text{MHz} \\ R_\pi^\circ \cong 12.5\Omega & \Rightarrow & f_{H2} \cong 48.4\text{MHz} \end{array}\right\} \quad f_H = 3.7\text{MHz}$$

Se avessimo avuto solo lo stadio a FET con R_D=R_P in modo da avere lo stesso guadagno in tensione, la frequenza di taglio sarebbe stata:

$$R_{gs}^\circ = R_S' = R_a = 10\text{k}\Omega$$

$$R_{gd}^\circ = 10 \cdot 10^3 \cdot 10.7 + 6.09 \cdot 10^3 = 113.5\ \text{k}\Omega$$

$$R_{ds}^\circ \cong R_D = 6.09\ \text{k}\Omega$$

$a_1 = 152.6$ nS $\Rightarrow$ $f_H \cong 1$MHz che risulta notevolmente inferiore

$\Rightarrow$ il CASCODE ha una f_H molto maggiore di uno stadio CE avente lo stesso guadagno di tensione. Questo perché, essendo il primo stadio caricato sull'impedenza di ingresso di un CB, l'effetto Miller su C_{gd} (o su C_μ se il primo stadio fosse stato a BJT) viene praticamente eliminato.

ESERCIZIO A.20

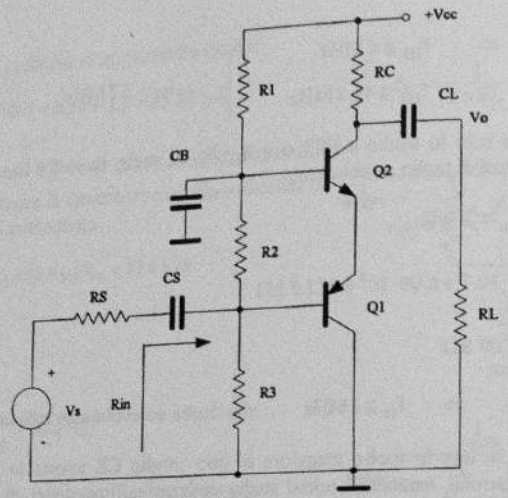
Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri (a 25°C):

$V_{CC} = 15\text{V}$, $R_1 = 200\ \text{k}\Omega$, $R_3 = 100\ \text{k}\Omega$, $R_C = 5\ \text{k}\Omega$, $R_S = 0.5\ \text{k}\Omega$, $R_L = 1\ \text{k}\Omega$,
$C_S = 1\ \mu\text{F}$, $C_B = 2\ \mu\text{F}$, $C_L = 5\ \mu\text{F}$

Q_1,Q_2: $|V_{BE}| = 0.6$ V, $|I_{CQ}| = 1$ mA, $\beta_F = 100$, $\beta_0 = 150$.

Determinare:

1) I valori delle V_{CEQ} dei due transistor ed il valore di R_2.
2) Il guadagno di tensione $A_v = V_o/V_s$ (con le capacità in corto circuito).
3) Il valore della resistenza di ingresso R_{in} (con le capacità in corto circuito).
4) La frequenza di taglio inferiore f_L.



SOLUZIONE

1) Analisi del punto di lavoro

La corrente su R_2 dipende solo dalle V_{BE} dei due transistor. Risulta inoltre che la corrente su R_1 coincide con la corrente su R_3 in quanto anche le correnti di base dei due transistor sono uguali ed opposte, risulta infatti:

$$I_{R2} = (V_{BE2} - V_{BE1}) / R_2$$

$$I_{R1} = I_{R2} + I_{B2} = I_{R2} - I_{B1} = I_{R3}$$

$$V_{CC} = R_1 I_{R1} + V_{BE2} - V_{BE1} + R_3 I_{R3}$$

da quest'ultima equazione si ricava la corrente su R_1 ed R_3

$$I_{R1} = I_{R3} = \frac{V_{CC} - (V_{BE2} - V_{BE1})}{R_1 + R_3}$$

Si può ora ricavare il valore di V_{CEQ} dei due transistor:

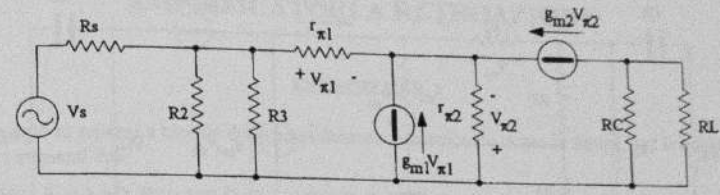
$$V_{CEQ1} = -R_3 I_{R3} + V_{BE1}$$

$$V_{CEQ2} = R_1 I_{R1} + V_{BE2} - R_C I_{CQ}$$

ed il valore di R_2

$$R_2 = \frac{V_{BE2} - V_{BE1}}{I_{R1} - I_{B2}} = \frac{V_{BE2} - V_{BE1}}{I_{R1} - I_{CQ}/\beta_F}$$

2) Analisi dell'amplificazione



Dallo schema ai piccoli segnali, si riconosce la cascata di uno stadio a collettore comune con uno stadio a base comune. Inizialmente si calcola il valore di g_m e di r_π, che coincidono nei due transistor in quanto hanno la stessa corrente di polarizzazione, e l'attenuazione dovuta al partitore di ingresso:

$$g_m = \frac{|I_{CQ}|}{V_T} \qquad r_\pi = \frac{\beta_0}{g_m} \qquad \alpha = \frac{R_2 // R_3}{R_S + R_2 // R_3} \qquad R_P = R_S // R_2 // R_3$$

Il primo stadio è caricato dalla resistenza di ingresso del secondo che vale $r_\pi / (1+\beta_0)$. Il secondo ha come carico il parallelo di R_C ed R_L.
Il guadagno complessivo risulta dato dal prodotto dell'attenuazione di ingresso α per il guadagno dei due stadi. Tenendo conto del valore assunto dalla resistenza di carico del primo stadio, si ottiene:

$$A_V = \frac{V_o}{V_S} = \alpha\, A_V^{(CC)}\, A_V^{(CB)} = \alpha\, \frac{r_\pi}{R_P + 2r_\pi}\, \frac{\beta_0 (R_C // R_L)}{r_\pi}$$

E' da notare che lo stadio a collettore comune è caricato su una impedenza inferiore a quella di uscita e quindi il suo guadagno risulta minore di 0.5.

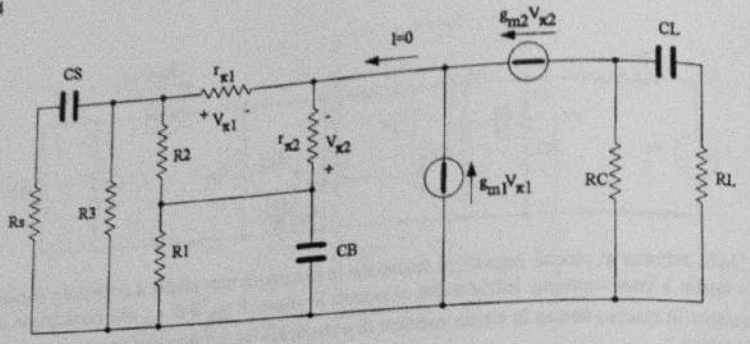
3) Resistenza di ingresso

La resistenza di ingresso R_{in} è data dal parallelo di R_2, R_3 e dalla resistenza di ingresso dello stadio a collettore comune. Risulta:

$$R_{in} = R_2 // R_3 // 2r_\pi$$

4) Frequenza di taglio inferiore

Per il calcolo della frequenza di taglio inferiore conviene utilizzare il metodo delle costanti di tempo. Risulta quindi necessario calcolare la resistenza vista da ognuna delle tre capacità. La capacità C_S "vede" una resistenza pari a $R_S + R_{in}$. La capacità C_L "vede" una resistenza pari a $R_L + R_C$. Per il calcolo della resistenza vista dalla capacità C_B, invece, è necessario rifarsi lo schema ai piccoli segnali.



La somma delle correnti entranti al nodo A fornisce:

$$v_{\pi 2}/r_\pi + g_m v_{\pi 2} + v_{\pi 1}/r_\pi + g_m v_{\pi 1} = 0$$

da cui risulta che $v_{\pi 1} = -v_{\pi 2}$ e quindi le due correnti di base sono uguali ed opposte. Questo significa che le due r_π sono in serie (sono percorse dalla stessa corrente) e tale serie è in parallelo ad R_2. Infine, anche R_S ed R_3 risultano in parallelo e quindi si ottiene:

$$R_B = R_1 // \left[(R_2 // 2r_\pi) + (R_3 // R_S)\right]$$

da cui:

$$f_L = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(R_S + R_{in})C_S} + \frac{1}{R_B C_B} + \frac{1}{(R_C + R_L)C_L}\right)$$

Risultati

V_{CEQ1} = -5.2 V, V_{CEQ2} = 4.8 V, R_2 = 33.3 kΩ,
A_V = 15.34, R_{in} = 5.77 kΩ, f_L = 43.1 Hz.

AMPLIFICATORI A RETROAZIONE

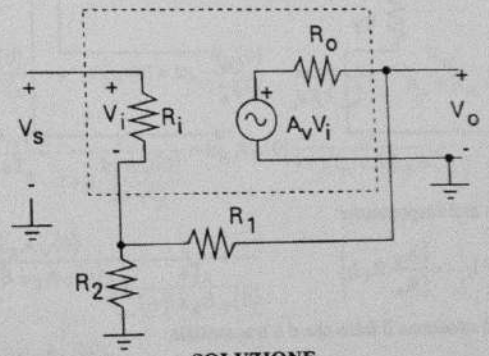
ESERCIZIO R.1

Sia dato lo schema a blocchi di un amplificatore retroazionato come in figura, per il quale siano validi i seguenti dati:

A_v = 100, R_i = 1 kΩ, R_o = 100 Ω, R_1 = 100 kΩ, R_2 = 5 kΩ

Utilizzando la teoria della retroazione, determinare:

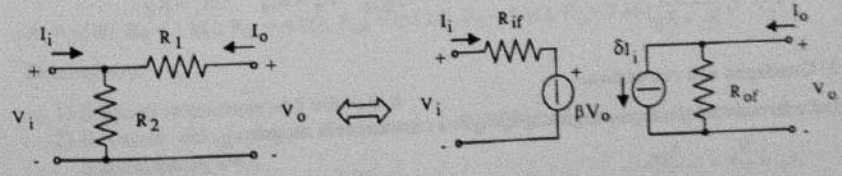
1) Il tipo di retroazione, lo schema equivalente del blocco di retroazione ed il valore di β.
2) L'amplificazione open-loop A_{OL}.
3) L'amplificazione con retroazione A_F.
4) I valori delle resistenze di ingresso e di uscita con retroazione.
5) Il valore della banda passante sapendo che l'amplificazione A_V presenta un polo alla frequenza di f_A = 10 kHz.



SOLUZIONE

1) Tipo di retroazione

La grandezza prelevata in uscita è la tensione (cortocircuitando l'uscita si annulla la retroazione).
Il confronto in ingresso è di tipo serie. Il blocco di retroazione è costituito dalle resistenze R_1 ed R_2. La figura riporta il blocco di retroazione ed il relativo schema equivalente.



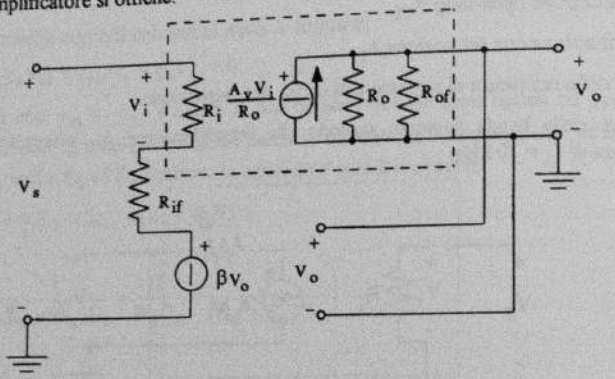
Dal confronto fra i due schemi si ottiene:

$$\begin{cases} V_i = R_{if} I_i + \beta V_o \\ I_o = \delta I_i + \dfrac{V_o}{R_{of}} \end{cases}$$

$$R_{if} = \left.\frac{V_i}{I_i}\right|_{V_o=0} = R_1 // R_2; \qquad R_{of} = \left.\frac{V_o}{I_i}\right|_{I_i=0} = R_1 + R_2$$

$$\beta = \left.\frac{V_i}{V_o}\right|_{I_i=0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \qquad \delta = \left.\frac{I_o}{I_i}\right|_{V_o=0} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Trascurando δ (δ=0) e considerando il modello equivalente secondo Norton dello stadio di uscita dell'amplificatore si ottiene:



NOTA: con i valori dati l'espressione:

$$|\delta I_i| = \left|\frac{R_2}{R_1 + R_2} I_1\right| << \left|\frac{A_V}{R_o} R_i I_i\right|$$

risulta verificata. Ciò conferma il fatto che d è trascurabile

2) Guadagno senza retroazione

Si trascura il termine δ (cioè si considera il blocco di retroazione unilaterale) e si pone $\beta = 0$. Risulta:

$$\begin{cases} V_o = \dfrac{R_{of} R_o}{R_o + R_{of}} \dfrac{A_V}{R_o} V_i \\ V_i = V_s \dfrac{R_i}{R_i + R_{if}} \end{cases} \Rightarrow \quad A_{OL} = \left.\frac{V_o}{V_s}\right|_{\beta=0} = \frac{R_{of}}{R_o + R_{of}} A_V \frac{R_i}{R_i + R_{if}}$$

3) Guadagno con retroazione

Dalle formule del guadagno degli amplificatori a retroazione si ottiene:

$$A_F = \frac{V_o}{V_s} = \frac{A_{OL}}{1 + \beta A_{OL}}$$

4) Resistenze di ingresso ed uscita

La resistenza di ingresso senza retroazione vale:

$$R_{iOL} = R_i + R_{if}$$

Con retroazione (confronto di tipo serie):

$$R_{iF} = R_{iOL}(1 + \beta A_{OL})$$

La resistenza di uscita senza retroazione vale:

$$R_{oOL} = R_o // R_{of}$$

Con retroazione (prelievo di tensione):

$$R_{oF} = \frac{R_{oOL}}{(1 + \beta A_{OL})}$$

5) Banda passante del sistema retroazionato

Nella formula del guadagno retroazionato va sostituita l'espressione del guadagno $A_V(s)$:

$$T_A = \frac{1}{2\pi f_A}$$

$$A_V(s) = \frac{A_V(0)}{1 + sT_A} \rightarrow A_{OL}(s) = k_R \frac{A_V(0)}{1 + sT_A} \quad \text{dove} \quad k_R = \frac{R_{of}}{R_o + R_{of}} \frac{R_i}{R_i + R_{if}}$$

$$A_F(s) = \frac{k_R A_V(0)}{1 + sT_A} \frac{1}{1 + \beta \dfrac{k_R A_V(0)}{1 + sT_A}} = k_R A_V(0) \frac{1}{1 + sT_A + \beta k_R A} =$$

$$= \frac{k_R A_V(0)}{1 + \beta k_R A_V(0)} \frac{1}{1 + \dfrac{sT_A}{1 + \beta k_R A_V(0)}}$$

$$f_{AF} = f_A(1 + \beta k_R A_V(0))$$

confermando l'aumento di banda pari a circa $\beta A_{OL}(0)$ tipico dei sistemi retroazionati.

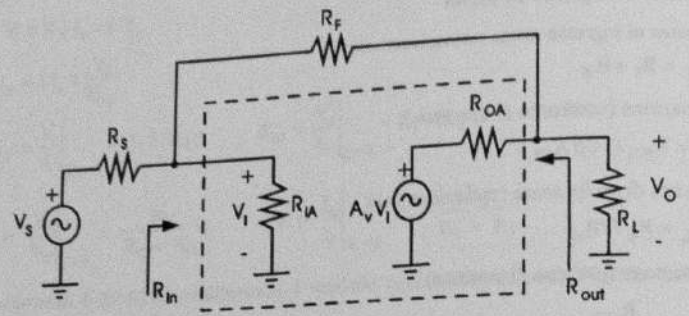
ESERCIZIO R.2

Dato il circuito dell'amplificatore retroazionato di figura avente i seguenti parametri:

A_v = -500, R_S = 1 kΩ, R_{iA} = 4 kΩ, R_{oA} = 0.4 kΩ, R_F = 5 kΩ, R_L = 2 kΩ

Determinare:

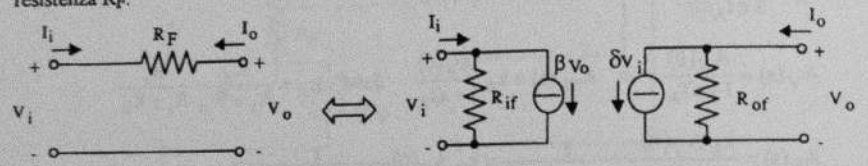
1) Il tipo di retroazione ed il valore di β
2) Il valore del guadagno di tensione $A=V_o/V_s$ (si consideri il blocco di retroazione unidirezionale, δ=0)
3) Il valore della resistenza R_{in} di figura
4) Il valore della resistenza R_{out} di figura



SOLUZIONE

1) Tipo di retroazione

Si tratta di uno schema a retroazione di tipo tensione/parallelo. La retroazione è costituita dalla resistenza R_F.

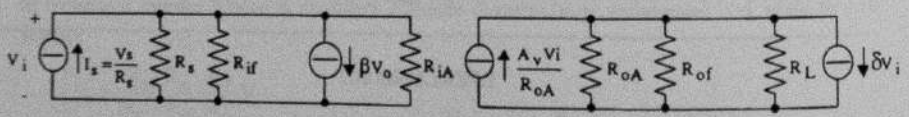


Dal confronto dei due schemi si ricava:

$$R_{if} = \left.\frac{V_i}{I_i}\right|_{V_o=0} = R_F \qquad R_{of} = \left.\frac{V_o}{I_o}\right|_{V_i=0} = R_F$$

$$\beta = \left.\frac{I_i}{V_o}\right|_{V_i=0} = -\frac{1}{R_F} \qquad \delta = \left.\frac{I_o}{V_i}\right|_{V_o=0} = -\frac{1}{R_F} \quad \text{poi si trascura} \rightarrow \delta = 0$$

Ridisegnando lo schema in forma coerente si ottiene:



2) Guadagno di tensione

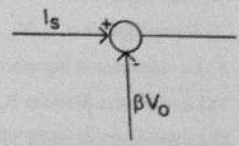
Si calcola anzitutto A_{OL}:

$$A_{OL} = \left.\frac{V_o}{I_s}\right|_{\beta=0} = (R_{OA} // R_{of} // R_L)\frac{A_V}{R_{OA}}(R_S // R_{if} // R_{iA})$$

Ora si calcola $T = A_{OL}\beta$

Facendo riferimento ad uno schema a reazione del tipo di figura:

risulta $A_F = \frac{A_{OL}}{1+T}$.



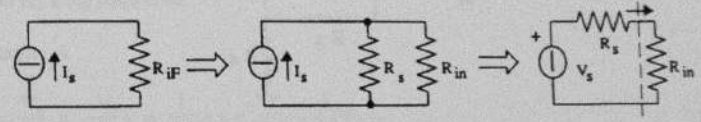
Sapendo che $A_F = \frac{V_o}{I_s}$ si ottiene: $A = \frac{V_o}{V_s} = \frac{V_o}{I_s}\frac{I_s}{V_s} = A_F\frac{1}{R_s}$

3) Resistenza di ingresso

Dallo schema coerente si ricava:

$$R_i = R_S // R_{if} // R_{iA}; \qquad R_{iF} = \frac{R_i}{1+T}$$

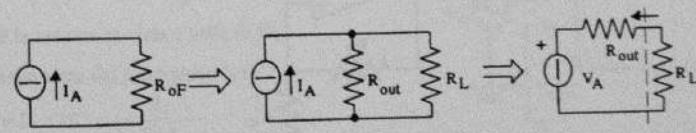
Quindi eguagliando i seguenti schemi si ricava il valore richiesto: $R_{in} = \frac{R_S R_{iF}}{R_S - R_{iF}}$



4) Resistenza di uscita

Dallo schema coerente si ricava: $R_o = R_L // R_{of} // R_{oA}$; $\qquad R_{oF} = \frac{R_o}{1+T}$

Quindi eguagliando i seguenti schemi si ricava il valore richiesto: $R_{out} = \frac{R_L R_{oF}}{R_L - R_{oF}}$



ESERCIZIO R.3

Lo schema di figura rappresenta un amplificatore retroazionato con ingresso V_s e con uscita V_o, realizzato con due amplificatori operazionali ideali.

Sapendo che vale:

$R_1 = 5\ k\Omega$, $R_2 = 100\ k\Omega$, $R_3 = 2\ k\Omega$, $R_4 = 20\ k\Omega$ e $Z = R = 1\ M\Omega$:

Determinare:

1) I blocchi A_{OL} e β ed il tipo di retroazione specificando la grandezza prelevata in uscita ed il tipo di confronto in ingresso

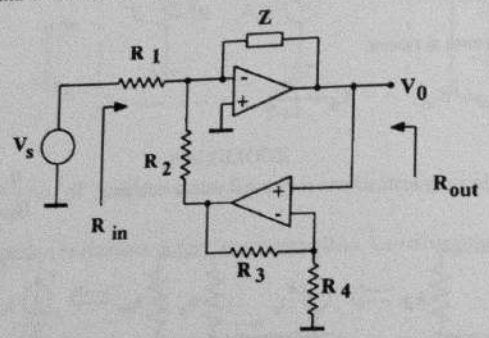
2) I guadagni dei blocchi A_{OL} e β

3) Il guadagno $A = V_o/V_s$

4) La resistenza di ingresso R_{in} in presenza di retroazione

5) La resistenza di uscita R_{out} in presenza di retroazione

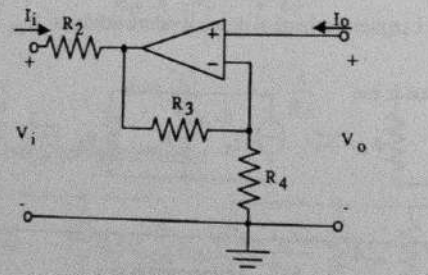
6) La frequenza di taglio superiore f_H nell'ipotesi che Z sia data dal parallelo della resistenza R ed una capacità C di valore C=100 pF e nel caso in cui Z sia una pura capacità C.

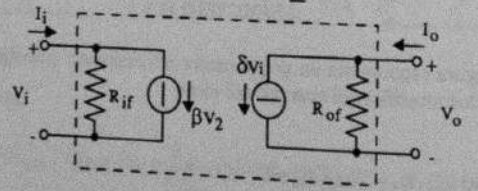


SOLUZIONE

1) Tipo di retroazione

La grandezza prelevata in uscita è la tensione mentre il confronto in ingresso è di tipo parallelo. Occorre perciò schematizzare il generatore di ingresso secondo Norton per ottenere una schematizzazione coerente. Il blocco di retroazione è riportato in figura:



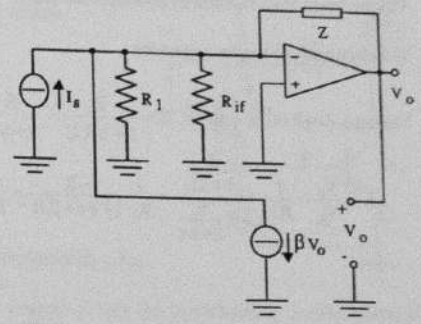


$$R_{if} = \left.\frac{V_i}{I_i}\right|_{V_o=0} = R_2 \qquad R_{of} = \left.\frac{V_o}{I_o}\right|_{V_i=0} = \infty$$

$$\beta = \left.\frac{I_i}{V_o}\right|_{V_i=0} = -\frac{1}{R_2}\left(1+\frac{R_3}{R_4}\right) \qquad \delta = \left.\frac{I_o}{V_i}\right|_{V_o=0} = 0$$

Ridisegnando lo schema in forma coerente,

si ottiene ($I_S = \frac{V_S}{R_1}$):



2) Guadagno A_{OL}

Il valore del guadagno A_{OL} risulta:

$$A_{OL} = \left.\frac{V_o}{I_s}\right|_{\beta=0} = -Z$$

Perché l'ingresso dell'amplificatore operazionale è una massa virtuale, per cui le correnti in R_1 e R_{if} sono nulle.

3) Guadagno A

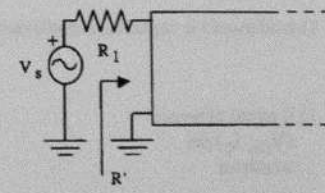
$$A = \frac{V_o}{V_S} = \frac{V_o}{R_1 I_S} = \frac{1}{R_1} A_F = \frac{1}{R_1}\frac{A_{OL}}{1+\beta A_{OL}}$$

4) Resistenza di ingresso con retroazione

La resistenza di ingresso desiderata è quella vista dal generatore V_s. Osservando che l'ingresso del primo operazionale è sempre una massa virtuale si ha: $R_{in} = R_1$

Si può vedere anche nel modo seguente:

$$R_{in} = R_1 + R'$$

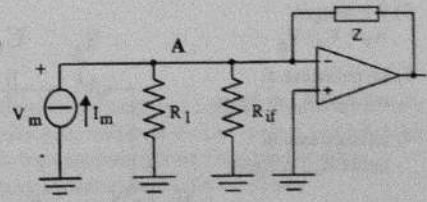


dove R' è la resistenza vista a valle di R_1.

La resistenza vista dal generatore I_s è

$$R_{iF} = R_1 // R' = \frac{R_i}{1+\beta\cdot A_{OL}}$$

dove R_i è la resistenza vista da I_s con $\beta = 0$



e vale: $R_i = \frac{V_m}{I_m} = 0\ \Omega$

dato che il nodo A è una massa virtuale.
Quindi:

$$R_{iF} = \frac{0}{(1+\beta A_{OL})} = 0\ \Omega$$

$$R_1 // R' = 0 \Rightarrow R' = 0$$

Per cui $R_{in} = R_1 + R' = R_1$ (c.v.d.)

5) Resistenza di uscita con retroazione

$$R_{out} = R_{oF} = \frac{R_o}{(1+\beta A_{OL})} = \frac{0}{(1+\beta A_{OL})} = 0\ \Omega$$

Valore ovvio vista l'ipotesi di operazionale ideale.

6) Frequenza di taglio superiore

Nel caso Z↔R//C si ottiene: $Z = \frac{R}{1+sRC} = \frac{R}{1+s\tau}$; $\tau = RC$

$$A = \frac{V_o}{V_S} = \frac{1}{R_1}\frac{-\frac{R}{1+s\tau}}{1+\beta\frac{R}{1+s\tau}} = \frac{1}{R_1}\frac{-R}{1+s\tau+\beta R} = \frac{1}{R_1}\frac{-R}{1+\beta R}\frac{1}{1+\frac{s\tau}{1+\beta R}} \Rightarrow f_H = \frac{1}{2\pi\tau}(1+\beta R)$$

Nel caso Z↔C, $Z = \frac{1}{sC} \Rightarrow A = \frac{1}{R_1}\frac{-\frac{1}{sC}}{1+\frac{\beta}{sC}} = \frac{1}{\beta R_1}\frac{-1}{1+\frac{sC}{\beta}} \Rightarrow f_H = \frac{\beta}{2\pi C}$

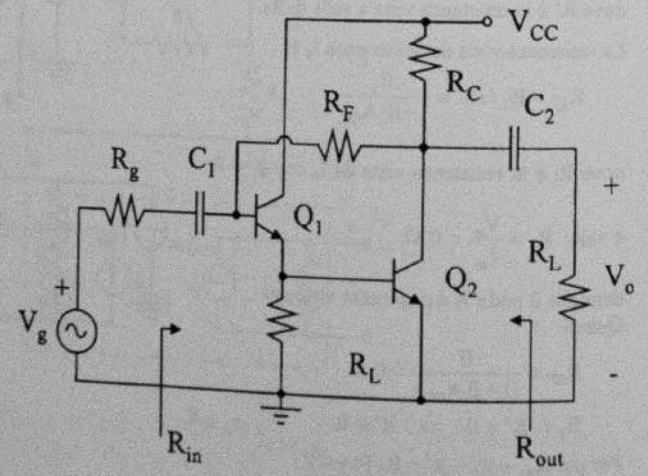
ESERCIZIO R.4

Dato l'amplificatore di figura con i seguenti parametri:

$V_{CC} = 24$ V, $R_C = 6$ kΩ, $R_E = 700$ Ω, $R_F = 6$ kΩ, $R_g = 600$ Ω, $R_L = 3$ kΩ
Q_1, Q_2: $V_{BE} = 0.7$ V, $\beta_F = 200$, $\beta_o = 400$, $r_{\pi 1} = 10$ kΩ, $r_{\pi 2} = 5$ kΩ

Considerando le capacità un corto circuito alle frequenze di interesse calcolare:

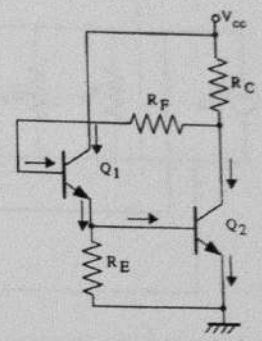
1) Il punto di lavoro (V_{CE}, I_C) dei transistor.
2) Il guadagno $A_V = V_o / V_g$
3) La resistenza di ingresso R_{in} di figura
4) La resistenza di uscita R_{out} di figura



SOLUZIONE

1) Punto di lavoro

Dallo schema per la polarizzazione di figura, si ottiene:



$$\begin{cases} I_{C1} = \frac{1}{(1+1/\beta_{F1})}\left(\frac{V_{BE2}}{R_E} + I_{B2}\right) \\ V_{CC} = R_C(I_{C2} + I_{B1}) + V_{CE2} \\ I_{B1} = (V_{CE2} - V_{BE1} - V_{BE2})\frac{1}{R_F} \end{cases}$$

che costituisce un sistema di 3 equazioni in 3 incognite (I_{C1}, I_{C2}, V_{CE2}) che risolto fornisce la soluzione cercata.
Nel seguito si fa l'ipotesi di poter trascurare le correnti di base dei due transistor. In tale ipotesi si scrive:

$$I_{RE} = \frac{V_{BE2}}{R_E} = 1\ \text{mA}$$

$$I_{E1} = \frac{V_{BE2}}{R_E} + I_{B2} = I_{C1}\left(1 + \frac{1}{\beta_{F1}}\right) \qquad I_{C1} \cong 1\text{mA}$$

$$V_{CE2} = V_{BE2} + V_{BE1} + R_F\frac{I_{C1}}{\beta_F} = 1.4\ \text{V}$$

(La caduta su R_F, che vale $R_F\frac{I_{CQ1}}{\beta_F} = 30$ mV, poteva essere trascurata)

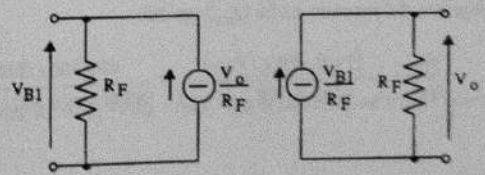
$$I_{C2} \cong \frac{(V_{CC} - V_{CE2})}{R_C} = \frac{(24-1.4)}{6} = 3.76\ \text{mA}$$

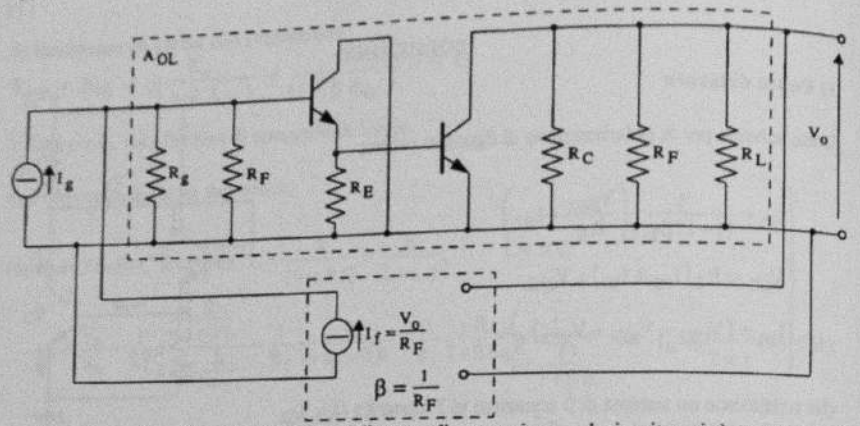
$$V_{CE1} = V_{CC} - V_{BE2} = 23.3\ \text{V}$$

2) Calcolo di A_v

L'amplificatore di figura può essere convenientemente analizzato ricorrendo alla teoria della controreazione. La reazione (negativa) è costituita dalla resistenza R_F che realizza un prelievo di tensione in uscita ed una connessione parallelo in ingresso (retroazione Tensione-Parallelo).
Lo schema del blocco di reazione β, nella schematizzazione secondo Norton risulta:

Per avere uno schema coerente occorre schematizzare secondo Norton anche il generatore di ingresso V_g ottenendo lo schema di figura.





Nel riportare lo schema equivalente della rete di retroazione nel circuito, si è trascurato il generatore $\delta = V_{B1}/R_F$ ovvero si è ipotizzata una rete di reazione unidirezionale. Inoltre si è posto $I_f = \frac{V_o}{R_F}$.

Ora si può calcolare A_{OL} considerando la cascata di due amplificatori: in CC e in CE.

$$A_{OL} = \frac{V_o}{I_g} = \frac{V_o}{V_{B2}} \frac{V_{B2}}{V_{B1}} \frac{V_{B1}}{I_g} \qquad \text{(calcolata per } I_f = 0\text{)}$$

Si possono studiare separatamente i due stadi tenendo poi conto dell'effetto di carico della loro connessione, oppure pensare l'amplificatore "collegato" e studiarne l'amplificazione complessiva. Seguiamo questo secondo metodo.

L'amplificazione del secondo stadio (è quella intrinseca) è $\frac{V_o}{V_{B2}}$ e vale:

$$\frac{V_o}{V_{B2}} = -g_{m2} R_P$$

con $R_P = R_C // R_F // R_L$ e $g_{m2} = \frac{\beta_o}{r_{\pi 2}}$ da cui:

$$R_P = 6 // 6 // 3 = 1.5 \text{ k}\Omega; \qquad g_{m2} = \frac{400}{5} = 80 \text{ mS}$$

$$\frac{V_o}{V_{B2}} = -0.008 \cdot 1500 = -120$$

Il primo stadio è un inseguitore di emettitore caricato su R_E in parallelo con la resistenza di ingresso del secondo stadio $(r_{\pi 2})$, quindi:

$$\frac{V_{B2}}{V_{B1}} = \frac{(1+\beta_o)(R_E // r_{\pi 2})}{r_{\pi 1} + (1+\beta_o)(R_E // r_{\pi 2})} = \frac{401(700 // 5000)}{10000 + 401(700 // 5000)} = 0.961$$

Da ultimo si calcola $\frac{V_{B1}}{I_g}$ che risulta:

$$\frac{V_{B1}}{I_g} = R_g // R_F // R_i' \qquad (R_i' = \text{resistenza di ingresso del I° stadio})$$

$$R_i' = r_{\pi 1} + (\beta_o + 1)(R_E // r_{\pi 2}) = 10 + 401(0.7 // 5) = 256 \text{ k}\Omega$$

Risulta:

$$\frac{V_{B1}}{I_g} = 6 // 0.6 // 256 = 544 \text{ k}\Omega$$

Il guadagno complessivo vale:

$$A_{OL} = -120 \cdot 0.961 \cdot 544 = -62.7 \cdot 10^3 \ [\Omega]$$

Si calcola ora: $T = -A_{OL} \beta_o$ (notare il segno negativo dovuto al verso adottato per il generatore di corrente di feedback)

$$\beta = \frac{1}{R_F} \quad \text{da cui:}$$

$$T = \frac{62.7}{6} = 10.46$$

e quindi:

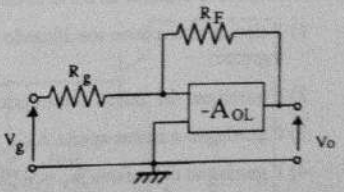
$$A_F = \frac{A_{OL}}{1+T} = \frac{-62.7 \cdot 10^3}{1+10.46} = -5.47 \cdot 10^3$$

Ricordando che $A_F = \frac{V_o}{I_g}$ e $I_g = \frac{V_g}{R_g}$ si trova:

$$A_V = \frac{V_o}{V_g} = \frac{V_o}{I_g} \frac{I_g}{V_g} = \frac{A_F}{R_g}$$

$$A_V = -9.122$$

Questo valore è circa uguale (leggermente inferiore) al guadagno che si avrebbe per $A_{OL} \to \infty$ ovvero per un amplificatore del tipo di figura, dove, per $A_{OL} \to \infty$, è:



$$A_V = \frac{V_o}{V_g} = -\frac{R_F}{R_g} = -10$$

3) Calcolo di R_{in}

Partendo dalla resistenza già calcolata $R_i = R_g // R_F // R_i'$, che è calcolata ad anello aperto, si trova quella ad anello chiuso:

$$R_{iF} = \frac{R_i}{1+T} = \frac{544}{11.46} = 47.5\ \Omega$$

Questa è costituita dal parallelo di R_g e di R_{in} cercata, da cui:

$$R_{in} = \frac{R_{iF} \cdot R_g}{R_g - R_{iF}} = 51.6\ \Omega$$

Valore basso, in accordo col fatto che una reazione di tipo shunt in ingresso riduce l'impedenza di ingresso dell'amplificatore.

4) Calcolo di R_{out}

Procedendo in modo analogo si trova R_o ad anello aperto:

$$R_o = R_L // R_C // R_F = 1.5\ k\Omega$$

Si calcola quella ad anello chiuso:

$$R_{oF} = \frac{R_o}{1+T} = \frac{1500}{11.46} = 130.1\ \Omega$$

e si scompone nel parallelo di R_L e di R_{out} cercata, da cui:

$$R_{out} = \frac{R_L \cdot R_{oF}}{R_L - R_{oF}} = \frac{3000 \cdot 130.1}{3000 - 130.1} = 136\ \Omega$$

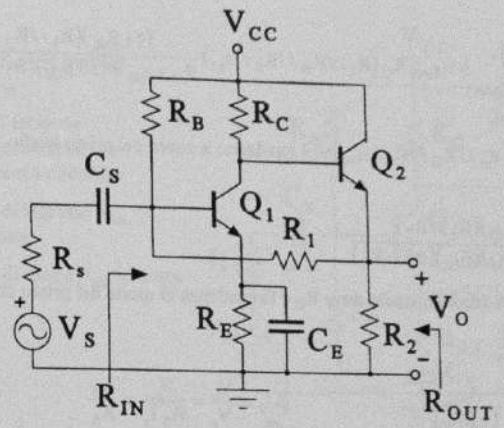
ESERCIZIO R.5

Dato l'amplificatore di figura i cui parametri (a 25°C) sono:

$R_S = 1\ k\Omega$; $R_1 = 47\ k\Omega$; $R_2 = 4\ k\Omega$; $R_C = 12\ k\Omega$;
Q_1: $I_{CQ1} = 1\ mA$, $\beta_{01} = 200$
Q_2: $I_{CQ2} = 2\ mA$, $\beta_{02} = 200$

Considerando le capacità un corto circuito determinare:

1) Il tipo di retroazione specificando la grandezza prelevata in uscita ed il tipo di confronto in ingresso;
2) Il guadagno del blocco di retroazione β
3) Il guadagno a catena aperta A_{OL}
4) Il guadagno di tensione $A_V = V_O/V_S$
5) La resistenza di ingresso R_{in}
6) La resistenza di uscita R_{out}



SOLUZIONE

1) Tipo di retroazione

Il tipo di confronto in ingresso è PARALLELO (esiste un nodo in base a Q_1 nel quale confluiscono la corrente del generatore di ingresso e quella proveniente da R_1 che è connessa all'uscita. La grandezza prelevata è la TENSIONE perché cortocircuitando V_o si annulla il segnale di retroazione.

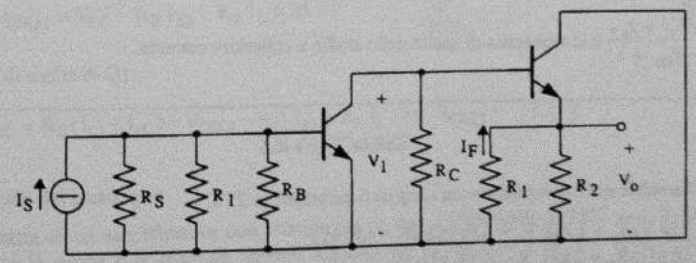
2) Calcolo del valore di β

Dallo schema del circuito di retroazione (vedi anche la figura al punto 3), si ottiene:

$$\beta = \frac{I_F}{V_o} = -\frac{1}{R_1}$$

3) Calcolo del Guadagno A_{OL}

Si disegna lo schema equivalente ai piccoli segnali usando la rappresentazione secondo Norton del generatore di ingresso e con retroazione annullata.



$$I_S = \frac{V_S}{R_S}$$

$$A_{OL} = \left.\frac{V_o}{I_s}\right|_{\beta=0} = -g_{m1} R_C (R_1 // R_B // R_S // r_{\pi 1}) \frac{(1+\beta_{02})(R_1 // R_2)}{R_C + r_{\pi 2} + (1+\beta_{02})(R_1 // R_2)}$$

dove $-g_{m1} R_C (R_1 // R_B // R_S // r_{\pi 1})$ è il guadagno a vuoto del primo stadio $\left.\frac{V_1}{I_s}\right|_{vuoto}$

e:

$$\frac{(1+\beta_{02})(R_1 // R_2)}{R_C + r_{\pi 2} + (1+\beta_{02})(R_1 // R_2)}$$

è il guadagno del secondo stadio dove R_C è l'impedenza di uscita del primo stadio

4) Calcolo di A_V

$$A_F = \frac{V_o}{I_s} = \frac{A_{OL}}{1+\beta A_{OL}} \qquad A_V = \frac{V_o}{V_s} = \frac{V_o}{R_S I_s} = \frac{A_F}{R_S}$$

5) Calcolo di R_{in}

La resistenza vista dal generatore ideale I_S vale:

$$R_{iF} = (R_S // R_B // R_1 // r_{\pi 1}) \frac{1}{1+A_{OL}\beta}$$

A questa resistenza occorre togliere R_S per calcolare la R_{in} cercata:

$$R_{iF} = R_S // R_{in} \qquad \Rightarrow R_{in} = \frac{R_{iF} R_S}{R_S - R_{iF}}$$

6) Calcolo di R_{out}

$$R_{out} = R_{oF} = \frac{R_o}{1+A_{OL}\beta}$$

dove R_o è la resistenza d'uscita senza retroazione.

$$R_o = (R_1 // R_2) // \left(\frac{R_C + r_{\pi 2}}{\beta_{02}+1}\right)$$

dove $\frac{R_C + r_{\pi 2}}{\beta_{02}+1}$ è la resistenza di uscita dello stadio a collettore comune.

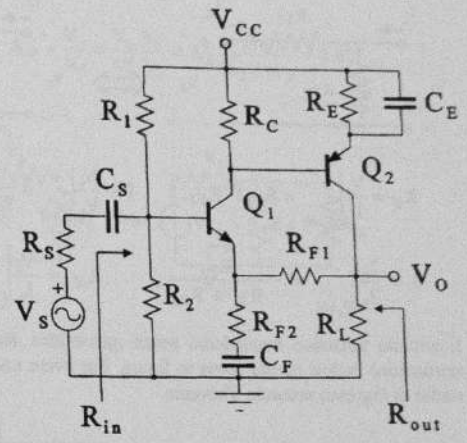
ESERCIZIO R.6

Dato l'amplificatore di figura avente i seguenti parametri (a 25°C):

V_{CC} =36 V; R_s = 1 kΩ; R_1 = 630 kΩ; R_2 = 450 kΩ;
R_C = 10 kΩ; R_L = 2 kΩ; R_{F1} = 5.6 kΩ; R_{F2} = 1kΩ
Q_1: β_{F1} = 100; β_{01} = 200; I_{C1} = 1 mA; V_{BE1} = 0.7V
Q_2: β_{F2} = 100; β_{02} = 200, I_{C2} = -2 mA; V_{BE2} = - 0.7V

Determinare:

1) La resistenza R_E e le tensioni V_{CEQ1} e V_{CEQ2}
2) Il guadagno di tensione $A_V = V_o/V_S$ (considerare le capacita' dei corto circuiti)
3) La resistenza di ingresso R_{in} indicata in figura
4) La resistenza di uscita R_{out} indicata in figura



SOLUZIONE

1) Polarizzazione

Si disegna lo schema relativo alla polarizzazione.

$$I_{B2} = I_{C2}/\beta_{F2};\ I_{E2} = -(I_{B2} + I_{C2})$$

Maglia di ingresso di Q2:

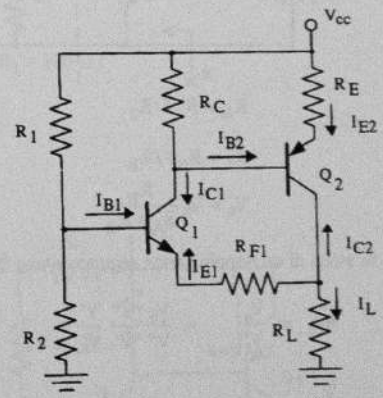
$$R_C(I_{C1} + I_{B2}) + V_{BE2} - R_E I_{E2} = 0$$

$$R_E = \frac{R_C(I_{C1} + I_{B2}) + V_{BE2}}{I_{E2}} = 4.5\ k\Omega$$

$$I_L = -(I_{C2} + I_{E1})$$

$$I_{E1} = -(I_{B1} + I_{C1}) = -I_{C1}\left(1 + \frac{1}{\beta_{F1}}\right)$$

$$-V_{CEQ2} = V_{CC} - R_E I_{E2} - R_L I_L = 25.5V$$

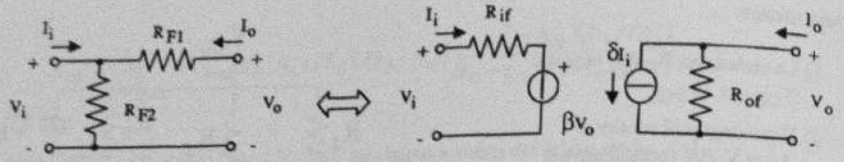


Maglia di uscita di Q1:

$$V_{CC} = R_C(I_{C1} + I_{B2}) + V_{CEQ1} - R_{F1} I_{E1} + R_L I_L \ \Rightarrow\ V_{CEQ1} = 14.5\ V$$

2) Calcolo del guadagno

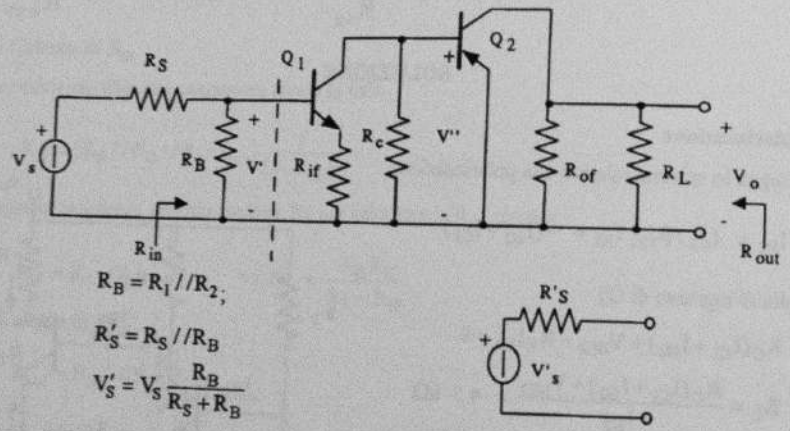
Si tratta di un amplificatore con retroazione di tipo TENSIONE-SERIE, cioè la grandezza prelevata in uscita è la tensione, mentre il confronto in ingresso è di tipo serie. Il blocco di retroazione è costituito dalle due resistenze R_{F1} e R_{F2} (le capacità sono dei cortocircuiti).



$$R_{if} = \left.\frac{V_i}{I_i}\right|_{V_o=0} = R_{F1}//R_{F2}; \qquad \beta = \left.\frac{V_i}{V_o}\right|_{I_i=0} = \frac{R_{F2}}{R_{F1}+R_{F2}}$$

$$\delta = \left.\frac{I_o}{I_i}\right|_{V_o=0} = -\frac{R_{F2}}{R_{F1}+R_{F2}}; \qquad R_{of} = \left.\frac{V_o}{I_o}\right|_{I_i=0} = R_{F1}+R_{F2}$$

Il circuito dinamico equivalente senza retroazione ma con gli effetti di carico del blocco di retroazione inclusi risulta come in figura. Per avere uno schema coerente occorre modificare lo stadio di ingresso secondo Thevenin.



$$R_B = R_1//R_2;$$

$$R'_S = R_S//R_B$$

$$V'_S = V_S\frac{R_B}{R_S+R_B}$$

Si tratta di un doppio carico seguito da uno stadio ad emettitore comune

$$A_{OL} = \left.\frac{V_o}{V'_s}\right|_{\beta=0} = \frac{V_o}{V''}\frac{V''}{V'}\frac{V'}{V'_S}$$

$$\frac{V_o}{V''} = -g_{m2}(R_{of}//R_L)$$

$$\frac{V''}{V'} = -(R_C//r_{x2})\frac{\beta_{o1}}{R_{i1}} \quad \text{dove} \quad R_{i1} = r_{x1}+(1+\beta_{o1})R_{if}$$

$$\frac{V'}{V'_S} = \frac{R_{i1}}{R'_S+R_{i1}}$$

$$g_{m1} \cong 40I_{C1}; \qquad r_{x1} = \frac{\beta_{o1}}{g_{m1}}$$

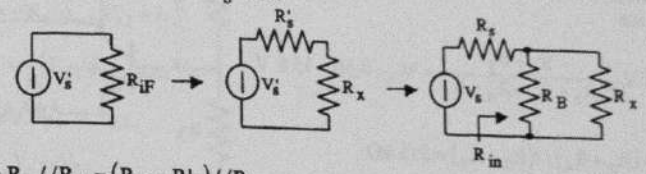
$$g_{m2} \cong 40I_{C2}; \qquad r_{x2} = \frac{\beta_{o2}}{g_{m2}}$$

$A_{OL} = 278$

$$A'_F = \frac{V_o}{V'_S} = \frac{A_{OL}}{1+A_{OL}\beta}; \qquad A_V = \frac{V_o}{V_S} = \frac{V_o}{V'_S}\frac{V'_S}{V_S} = A'_F\frac{R_B}{R_S+R_B} = 6.42$$

3) Resistenza di ingresso

La resistenza vista dal generatore V'_S vale:



$R_{in} = R_x//R_B = (R_{iF}-R'_S)//R_B$

$R_{iF} = R_i(1+A_{OL}\beta)$ dove $R_i = R'_S+R_{il}$

$R_{in} = (R_{iF}-R'_S)//R_B = 254\ k\Omega$

4) Resistenza di uscita

$$R_{out} = R_{oF} = R_0\frac{1}{1+A_{oL}\beta} \quad \text{dove} \quad R_o = R_L//R_{of} = R_L//(R_{F1}+R_{F2}) = 35.6\ \Omega$$

ESERCIZIO R.7

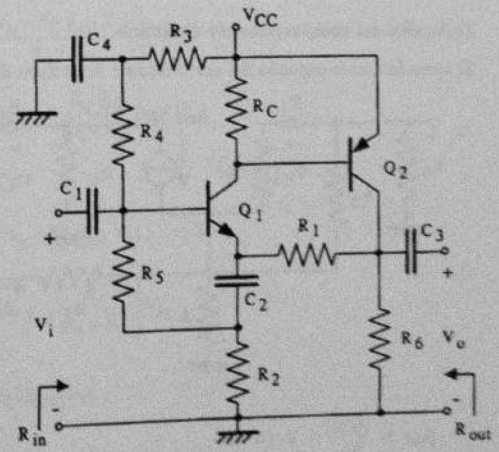
Dato il circuito di figura, sapendo che:

$V_{CC} = 24$ V, $R_C = 33$ kΩ, $R_1 = 33$ kΩ, $R_2 = 1$ kΩ, $R_3 = 100$ kΩ
$R_4 = 680$ kΩ, $R_5 = 1.5$ MΩ, $R_6 = 5.6$ kΩ.

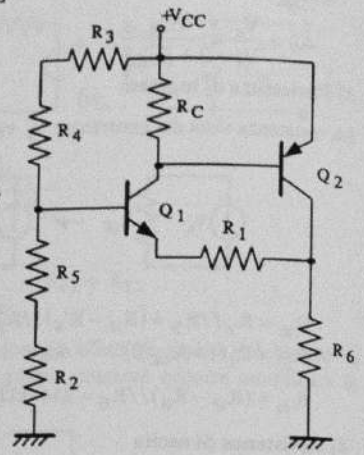
Q_1 è un BC413 (NPN) con $\beta_F = \beta_0 = 180$
Q_2 è un BC157 (PNP) con $\beta_F = \beta_0 = 70$

Determinare:

1) Il punto di lavoro di Q_1 e Q_2;
2) Il guadagno di tensione V_o/V_i;
3) La resistenza di ingresso R_{in};
4) La resistenza di uscita R_{out}.



SOLUZIONE



1) Analisi del punto di riposo:

Si riporta lo schema relativo alla polarizzazione. Schematizzando secondo Thevenin il circuito di base di Q_1 si ottiene:

$$V_B = V_{CC}\frac{R_5+R_2}{R_2+R_3+R_4+R_5} = V_{CC}\cdot 0.66 = 15.8\ V$$

$$R_B = (R_3+R_4)//(R_5+R_2) = 513\ k\Omega$$

Dal circuito di figura si ricavano le seguenti equazioni:

a) $V_B = R_B I_{B1} + V_{BE1} - R_1 I_{E1} - R_6(I_{C2}+I_{E1})$

b) $V_{CC} = R_C(I_{C1}+I_{B2}) + V_{CE1} - R_1 I_{E1} - R_6(I_{C2}+I_{E1})$

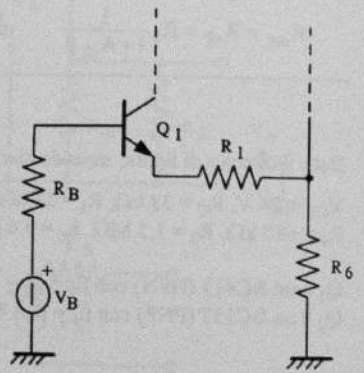
c) $V_{CC} = -V_{CE2} - R_6(I_{C2}+I_{E1})$

d) $V_{BE2} = -R_C(I_{C1}+I_{B2})$

Dalla a) e d) si ricavano: $I_{C2} = -2.3$ mA, $I_{C1} \cong 54\ \mu A$

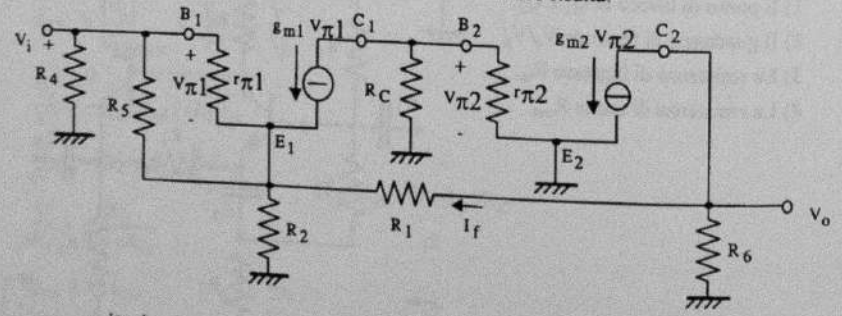
Dalla b) si ricava $V_{CE1} = 7.25$ V

Dalla c) si ricava $V_{CE2} = -10.8$ V



2) Analisi del comportamento dinamico

Si considerano le capacità dei corto circuiti. Il circuito dinamico risulta:



$$g_{m1} = \frac{|I_{C1}|}{V_T} = 2.16\ mS$$

$$g_{m1}\, r_{\pi 1} = \beta_{01} \Rightarrow r_{\pi 1} = \frac{\beta_{01}}{g_{m1}} = 83.3\ k\Omega\ (<<R_5)$$

$$g_{m2} = \frac{|I_{C2}|}{V_T} = 92\ mS \Rightarrow r_{\pi 2} = \frac{\beta_{02}}{g_{m2}} = 761\ \Omega$$

1) $V_o = -R_6(g_{m2}\, V_{\pi 2} + I_f)$

2) $V_{\pi 2} = -(R_C // r_{\pi 2}) g_{m1}\, V_{\pi 1}$

3) $V_i = V_{\pi 1} + V_{R2}$

4) $I_f = \dfrac{V_o - V_{R2}}{R_1}$

5) $V_{R2} = R_2\left(I_f + (\beta_{01}+1)\dfrac{V_{\pi 1}}{r_{\pi 1}} + \dfrac{V_{\pi 1}}{R_5}\right)$

Dalle 4) e 5) si ha:

$$V_o - V_{\pi 1}\left[\frac{R_2}{r_{\pi 1}}(\beta_{01}+1) + \frac{R_2}{R_5}\right] = (R_1+R_2)I_f$$

che, semplificata secondo le ipotesi: $R_5 >> r_{\pi 1}$ e $\beta_0 + 1 \cong \beta_0$, fornisce:

6) $V_o - R_2 g_{m1} V_{\pi 1} \cong (R_1+R_2)I_f$

Dalla 1) e dalla 2) otteniamo:

$$V_o = -R_6\left[g_{m2}\left(-(R_C // r_{\pi 2})g_{m1}\right)V_{\pi 1} + I_f\right] = R_6(R_C // r_{\pi 2})g_{m1}\, g_{m2}\, V_{\pi 1} - I_f R_6$$

Ricavando I_f dalla 6) e sostituendo si ottiene:

$$V_o \cong R_6(R_C // r_{\pi 2})g_{m1}\, g_{m2} V_{\pi 1} + \left(\frac{V_o - R_2\, g_{m1}\, V_{\pi 1}}{R_1+R_2}\right)(-R_6)$$

7) $$\left(1+\frac{R_6}{R_1+R_2}\right)V_o \cong \left[R_6(R_C // r_{\pi 2})g_{m2} + \frac{R_6 R_2}{R_1+R_2}\right]g_{m1} V_{\pi 1}$$

Utilizzando ora le 3, 5, 6:

$$V_i \cong V_{\pi 1} + R_2\, g_{m1} V_{\pi 1} + \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)(V_o - R_2\, g_{m1}\, V_{\pi 1})$$

$$V_i \cong \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)V_o + \left[1 + R_2\, g_{m1} - R_2\, g_{m1}\frac{R_2}{R_1+R_2}\right]V_{\pi 1}$$

8) $V_i = \left(\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\right)V_o + \left[1+(R_1 // R_2)g_{m1}\right]V_{\pi 1}$

Ricavando $V_{\pi 1}$ dalla 7) e sostituendo otteniamo:

$$V_i = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)V_o + \left[1+(R_1//R_2)g_{m1}\right]\left(1+\frac{R_6}{R_1+R_2}\right)\frac{1}{\left[R_6(R_C//r_{x2})g_{m2}+\frac{R_6R_2}{R_1+R_2}\right]g_{m1}}V_o =$$

$$= \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)V_o\left\{1+\left(1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_6}{R_2}\right)\frac{1+(R_1//R_2)g_{m1}}{\left[R_6(R_C//r_{x2})g_{m2}+\frac{R_6R_2}{R_1+R_2}\right]g_{m1}}\right\} =$$

$$= (1+0.145)V_o\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$$

con $\frac{R_6R_2}{R_1+R_2}$ di valore trascurabile.

$$V_o = \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)V_i\frac{1}{(1+0.145)} \cong \left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)V_i = 34\,V_i$$

$A_V \cong 34$ (il conto esatto, senza le approssimazioni fatte per la 6) e seguenti, dà 29.7) con un errore del 12% dovuto alle approssimazioni fatte.

Il termine entro parentesi graffa contiene i valori dei guadagni dei due transistor. Per osservare cosa succede al guadagno complessivo dell'amplificatore al variare del guadagno dei due transistor si suppongono delle variazioni di β_{01} e β_{02}:

Supponendo un raddoppio di β_{01}, $\Rightarrow$ tale termine rimane invariato (non dipende da β_{O1} ma da g_{m1} e quindi dalla polarizzazione)

Supponendo un raddoppio di β_{02}, $\Rightarrow r_{x2}$ raddoppia (=1500 Ω) ed il guadagno risulta: A_V=31.6.

Abbiamo quindi una piccola variazione (+6%) in A_V a fronte di una forte variazione (100%) di β_{O2}. Questo risultato risulta chiaro ricordando l'effetto della retroazione negativa sulle variazioni dei parametri di un amplificatore.

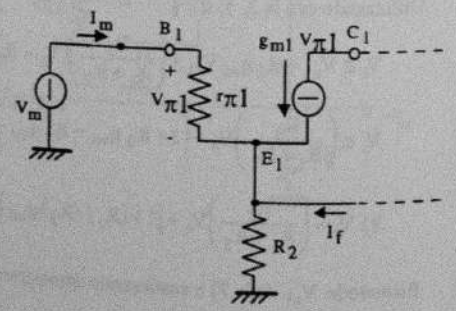
NOTA: Una soluzione più semplice può essere ottenuta studiando il circuito con la teoria della controreazione come al successivo punto 5.

3) Calcolo della resistenza di ingresso

Nel calcolo della impedenza di ingresso si trascura R_5 rispetto a r_{x1} come al punto precedente.

$R_{in} = R_4 // R_{i1}$

dove R_{i1} è la resistenza d'ingresso del primo stadio. Per calcolarla conviene fare riferimento alla figura che segue:



$$i_m = \frac{V_{x1}}{r_{x1}}$$

Riscrivendo la 8) in questa forma:

$$V_m = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\frac{V_o}{V_{x1}}r_{x1}\,i_m + \left[1+(R_1//R_2)g_{m1}\right]r_{x1}\,i_m$$

e ricavando V_O/V_{p1} dalla 7) si ottiene:

$$\frac{V_m}{i_m} = R_{i1} = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{R_6}{R_1+R_2}\right)}\left[R_6(R_C//r_{x2})g_{m2}+\frac{R_6R_2}{R_1+R_2}\right]g_{m1}\,r_{x1} + \left[1+(R_1//R_2)g_{m1}\right]r_{x1} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\left(1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_6}{R_2}\right)}\left[R_6(R_C//r_{x2})g_{m2}+\frac{R_6R_2}{R_1+R_2}\right]g_{m1}+\left[1+(R_1//R_2)g_{m1}\right]\right\}r_{x1}$$

$$= r_{x1}\left(1+(R_1//R_2)g_{m1}\right)(1+T)$$

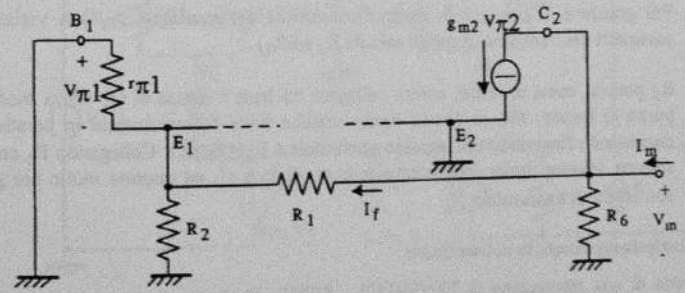
dove

$$T = \frac{1}{\left(1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_6}{R_2}\right)}\left[R_6(R_C//r_{x2})g_{m2}+\frac{R_6\cdot R_2}{R_1+R_2}\right]g_{m1}\frac{1}{\left[1+(R_1//R_2)g_{m1}\right]} \cong 6.9$$

risulta: $R_{i1} = 203\ M\Omega$ $R_{in} = 509\ k\Omega$

4) Calcolo della resistenza di uscita

Si considera lo schema di figura:



$$i_m = \frac{V_m}{R_6} + I_f + g_{m2}V_{x2} = \frac{V_m}{R_6} + \frac{V_m - R_2\,g_{m1}\,V_{x1}}{R_1+R_2} - (R_C//r_{x2})g_{m1}\,g_{m2}\,V_{x1}$$

Utilizzando la 8) nel caso $V_i = 0$ e $V_o = V_m$ risulta:

$$0 = V_{x1}\left\{1+(R_1//R_2)g_{m1}\right\} + \frac{R_2}{R_1+R_2}V_m$$

Ricavando $V_{\pi 1}$ e sostituendolo nell'espressione precedente otteniamo:

$$i_m = \frac{V_m}{R_6} + \frac{V_m}{R_1+R_2} - \left\{\frac{R_2 g_{m1}}{R_1+R_2} + (R_C // r_{\pi 2}) g_{m1} g_{m2}\right\}\left[-\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\frac{V_m}{\left[1+(R_1 // R_2) g_{m1}\right]}\right]$$

$$\frac{i_m}{V_m} = \left(\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_1+R_2}\right)\left\{1+\frac{1}{\left(\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_1+R_2}\right)}\left[\frac{R_2}{R_1+R_2}+(R_C // r_{\pi 2}) g_{m2}\right] g_{m1}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)\frac{1}{\left[1+(R_1 // R_2) g_{m1}\right]}\right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_1+R_2}\right)(1+T)$$

$$G_{out} = \left(\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_1+R_2}\right)(1+T) \quad \Rightarrow \quad R_{out} \cong 600\ \Omega \text{ (dipende fortemente dal valore di T)}$$

$$G_o = \left(\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_1+R_2}\right) \qquad R_o = R_6 // (R_1+R_2)$$

Osserviamo che all'aumentare di T aumenta l'impedenza d'ingresso e diminuisce quella di uscita.

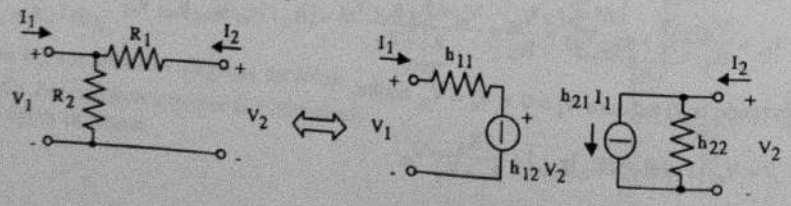
NOTA: Osserviamo che la presenza di R_1 e R_6 ha un effetto benefico sulla stabilità del punto di lavoro. Infatti supponendo che $|I_{C2}|$ cresca allora V_{R6} cresce anch'esso, quindi I_{B1} diminuisce e anche I_{C1}. Di conseguenza $|V_{B2}|$ diminuisce contrastando l'aumento iniziale di $|I_{C2}|$.

NOTA: Più grande è T e maggiore risulta l'insensibilità del guadagno A_V alla variazione dei parametri dei transistor (dipende solo da R_1 ed R_2).

NOTA: R_5 poteva, come al solito, essere collegato tra base e massa di Q_1 senza modificare il punto di lavoro. Ma, in questo modo sarebbe finita dinamicamente in parallelo a R_{i2} diminuendo l'impedenza di ingresso portandola a R_{in}=380kΩ. Collegando R_5 come nello schema, invece, risulta dinamicamente in parallelo a $r_{\pi 1}$ ed essendo molto più grande, il suo effetto è trascurabile.

5) Risoluzione mediante la retroazione:

Si tratta di una retroazione di TENSIONE - SERIE. Il blocco di retroazione ed il relativo schema dinamico sono mostrati in figura:

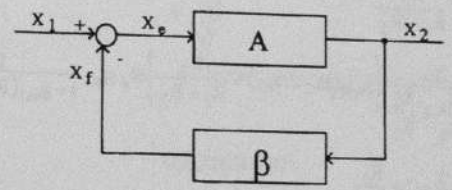


NOTA: in questo esempio è mostrato uno schema equivalente a parametri ibridi per il quale valgono: $h_{11}=R_{if}$, $h_{12}=\beta$, $h_{21}=\delta$, $h_{22}=R_{of}$.

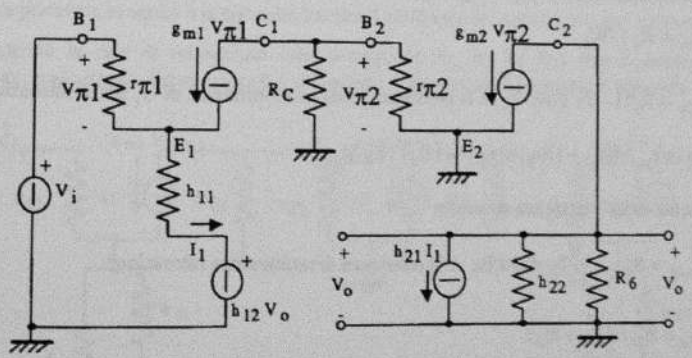
$$\begin{cases} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_2 + h_{22} V_2 \end{cases}$$

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} = R_1 // R_2; \qquad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} = -\frac{R_2}{R_1+R_2}; \qquad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} = \frac{1}{R_1+R_2}$$



$$A = \frac{x_2}{x_e}; \quad \beta = \frac{x_f}{x_2}; \quad x_1 = V_i; \quad x_2 = V_o$$



R_4 è in parallelo a V_i e quindi non entra nel computo del guadagno di tensione.
R_5 viene trascurata rispetto a $r_{\pi 1}$.

$$A = \left.\frac{x_2}{x_1}\right|_{x_f=0} = \left.\frac{V_o}{V_i}\right|_{x_f=0} = -\left(R_6 // \frac{1}{h_{22}}\right)(g_{m2} V_{x2} + h_{21} I_1)\frac{1}{V_i}$$

$$V_{x2} = -g_{m1} V_{x1} (R_C // r_{\pi 2})$$

$$V_{\pi 1} = \frac{V_i}{r_{\pi 1} + (\beta_{01}+1)h_{11}} r_{\pi 1} \cong \frac{V_i}{1 + g_{m1} h_{11}} \quad \text{(considerando } \beta_{01}+1 \cong \beta_{01}\text{)}$$

$$I_1 = (\beta_{01}+1)\frac{V_{\pi 1}}{r_{\pi 1}} \cong \beta_{01}\frac{V_{\pi 1}}{r_{\pi 1}}$$

$$A = -\frac{1}{\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_1+R_2}}\left\{-g_{m1}\, g_{m2}(R_C // r_{\pi 2})V_{\pi 1} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\beta_{01}\frac{V_{\pi 1}}{r_{\pi 1}}\right\}\frac{1}{V_i} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_1+R_2}}\left\{g_{m2}(R_C // r_{\pi 2}) + \frac{R_2}{R_1+R_2}\right\} g_{m1}\frac{1}{1+g_{m1}(R_1 // R_2)}$$

$$\beta = \frac{x_f}{x_2} = h_{12} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$T = A\beta = \frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_6}{R_2}}\left\{g_{m2}(R_C // r_{\pi 2}) + \frac{R_2}{R_1+R_2}\right\} R_6\, g_{m1}\frac{1}{1+g_{m1}(R_1 // R_2)}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{A}{1+A\beta} \cong \frac{1}{\beta} = 1+\frac{R_1}{R_2}$$

6) Calcolo della resistenza di ingresso

$R_{in} = R_4 // R_{iF}$

$R_{iF} = R_i(1+T)$ dove R_i è la resistenza di ingresso intrinseca di Q_1 senza retroazione.

$R_i \cong r_{\pi 1} + (\beta_{01}+1)h_{11} \cong r_{\pi 1}\left(1+(R_1 // R_2)g_{m1}\right)$

7) Calcolo della resistenza di uscita

$R_{out} = R_{oF} = \frac{R_o}{1+T}$ dove R_o è la resistenza di uscita senza retroazione.

$R_o = R_6 // (R_1 + R_2)$.

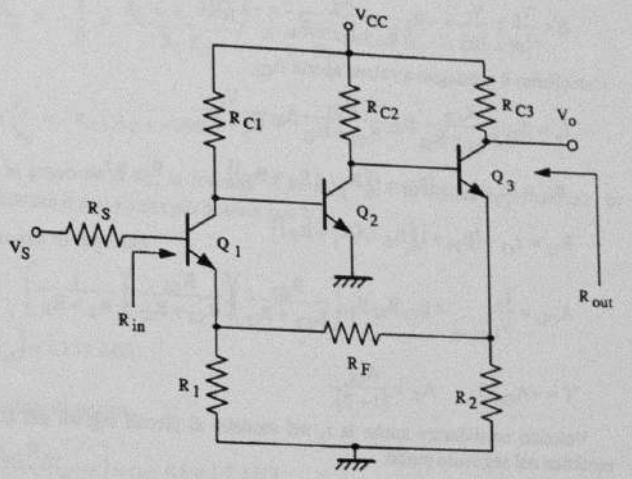
ESERCIZIO R.8

Dato il circuito di figura, con i seguenti valori:

$R_{C1} = 5\ k\Omega$, $R_{C2} = 7{,}5\ k\Omega$, $R_{C3} = 10\ k\Omega$,
$R_1 = 0.2\ k\Omega$, $R_2 = 0.33\ k\Omega$
$R_S = 0.6\ k\Omega$, $R_F = 20\ k\Omega$,
$\beta_o = 200$, $V_A = 125$ V (tensione di Early)

$I_{C1} = 0.25$ mA, $I_{C1} = 1$ mA, $I_{C3} = 0.5$ mA.
Determinare:

1) Il guadagno a catena aperta A_{OL} e il β
2) Il guadagno di tensione: $A_V = \frac{V_o}{V_s}$
3) La resistenza di ingresso R_{in}
4) La resistenza di uscita R_{out}
5) Lo schema coerente semplificato dell'amplificatore

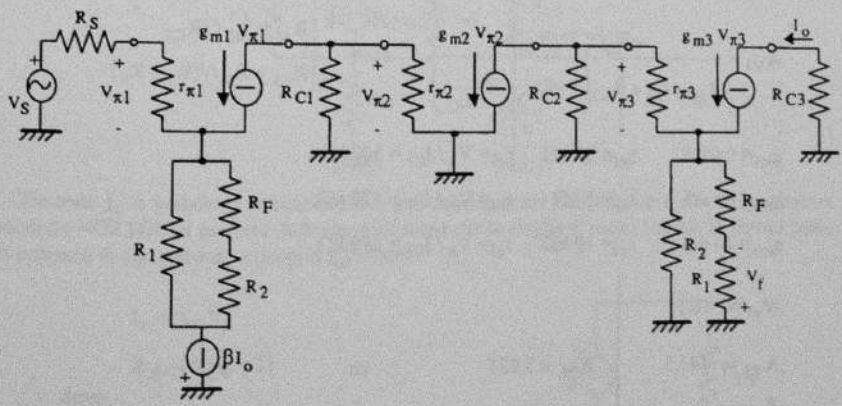


SOLUZIONE

1) Calcolo del guadagno

Si tratta di uno schema a retroazione di tipo CORRENTE-SERIE (serie-serie). Infatti la grandezza prelevata in uscita è la corrente, mentre il confronto in ingresso avviene tra tensioni.

Sostituendo la rete di retroazione (che comprende R_1, R_2 ed R_F) con il doppio bipolo equivalente, trascurando il generatore δ e spegnendo il generatore β si ottiene il seguente schema.



Trascurando la corrente di base del transistor Q_3 possiamo scrivere:

$$\beta = \frac{V_f}{I_o} \cong \frac{V_f}{I_{E3}} = -R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_F} = -3.22\Omega$$

Calcoliamo il guadagno a catena aperta A_{OL} :

$$I_o = \beta_{03} \frac{R_{C2}}{R_{C2} + R_{i3}} \beta_{02} \frac{R_{C1}}{R_{C1} + R_{i2}} \beta_{01} \frac{V_s}{R_S + R_{i1}}$$

$$R_{i1} = R_i = r_{\pi 1} + (\beta_{01} + 1)\left[R_1 // (R_2 + R_F)\right] \qquad R_{i2} = r_{\pi 2}$$

$$R_{i3} = r_{\pi 3} + (\beta_{03} + 1)\left[R_2 // (R_1 + R_F)\right]$$

$$A_{OL} = \left.\frac{I_o}{V_s}\right|_{V_f = 0} = \beta_{03}\beta_{02}\beta_{01}\left(\frac{R_{C2}}{R_{C2} + R_{i3}}\right)\left(\frac{R_{C1}}{R_{C1} + R_{i2}}\right)\left(\frac{1}{R_S + R_{i1}}\right)$$

$$T = -A_{OL}\,\beta; \qquad A_F = \frac{A_{OL}}{(1+T)}$$

Volendo considerare anche la r_o nel modello ai piccoli segnali dei BJT il calcolo di A_{OL} si modifica nel seguente modo:

$$A_{OL} = -\frac{1}{R_{C3}} A_V\big|_{V_f = 0} = -\frac{1}{R_{C3}} A_{V1}\, A_{V2}\, A_{V3}$$

$$A_{V1} = \frac{-\beta_{01}(r_{o1} // R_{C1})}{R_S + r_{\pi 1} + R_{E1}\left(1 + \beta_{01}\dfrac{r_{o1}}{r_{o1} + R_{C1}}\right)} \quad \text{dove} \quad R_{E1} = R_1 // (R_2 + R_F)$$

$$A_{V2} = \frac{-\beta_{02}(R_{C2} // r_{o2})}{R_{o1} + r_{\pi 2}} \quad \text{dove} \quad R_{o1} = \left\{ r_{o1}\left[1 + \frac{\beta_{01} R_{E1}}{R_S + r_{\pi 1} + R_{E1}}\right]\right\} // R_{C1}$$

$$A_{V3} = \frac{-\beta_{03}(r_{o3} // R_{C3})}{R_{o2} + r_{\pi 3} + R_{E3}\left(1 + \beta_{03}\dfrac{r_{o3}}{r_{o3} + R_{C3}}\right)} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} R_{o2} = r_{o2} // R_{C2} \\ R_{E3} = R_2 // (R_1 + R_F) \end{cases}$$

$g_{m1} = 0.01$ S $\quad r_{\pi 1} = 20$ kΩ $\quad r_{o1} = V_A / I_{C1} = 500$ kΩ

$g_{m2} = 40$ mS $\quad r_{\pi 2} = 5$ kΩ $\quad r_{o2} = V_A / I_{C1} = 125$ kΩ

$g_{m3} = 20$ mS $\quad r_{\pi 3} = 10$ kΩ $\quad r_{o3} = V_A / I_{C1} = 250$ kΩ

$$\left.\begin{array}{l} A_{V1} = -16.5 \\ A_{V2} = -141.5 \\ \dfrac{A_{V3}}{R_{C3}} = -2.41 \cdot 10^{-3} \end{array}\right\} \; A_{OL} = 5.621 \quad \Rightarrow \quad T = 18.1 >> 1$$

Calcoliamo il guadagno di tensione:

$$A_F = \frac{I_o}{V_s} = \frac{A_{OL}}{1+T} \cong -\frac{1}{\beta} = \frac{R_1 + R_2 + R_F}{R_1 R_2} \cong \frac{R_F}{R_1 R_2} \text{ perchè } R_F >> (R_1 + R_2)$$

$A_F = 0.296$

$$A_V = \frac{V_o}{V_S} = -R_{C3}\frac{I_o}{V_S} = -R_{C3}\,A_F = -2960$$

NOTA: considerando la presenza di r_{01}, la formula $A_F = A_{OL}/(1+T)$ risulta approssimata, in quanto il generatore b non risulta più in serie con V_s

2) Calcolo della resistenza di ingresso

$$R_i' = R_{i1} = 60 \text{ kΩ}$$

$$R_{in} = R_i'\left(1 + T\big|_{R_S = 0}\right) = 1.157 \text{ MΩ}$$

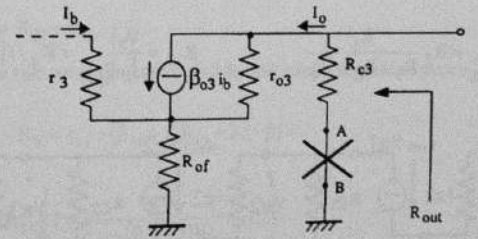
3) Calcolo della resistenza di uscita

$$R_o = r_{o3}\left[1 + \frac{\beta_{o3} R_{E3}}{R_{o2} + r_{\pi 3} + R_{E3}}\right] = r_{o3} \cdot 4.8 = 1.2 \text{ MΩ}$$

$$R_{oF}' = R_o'\left(1 + T\big|_{R_{C3} = 0}\right) \cong 23 \text{ MΩ}$$

$$R_{out} = R_{C3} // R_{oF}'$$

4) Alcune considerazioni sulla resistenza di uscita:



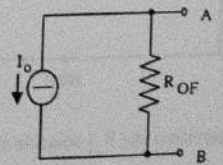
Essendo I_o la grandezza retroazionata si può schematizzare l'amplificatore con un generatore secondo NORTON ai morsetti A-B una volta interrotta la maglia di uscita (infatti, in questo caso, la corrente di cortocircuito è proprio I_o) e vale:

$$I_o = A_F V_s$$

$$R_{oF} = R_o(1+T)$$

dove

$$R_o = R_{C3} + R_o'.$$



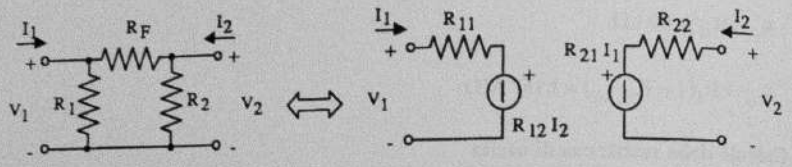
Come si può vedere, la R_{oF} coincide con la somma di R_{C3} e la resistenza di uscita con retroazione che si misurerebbe ai morsetti A-B una volta annullata R_{C3}, cioè:

$$R_{oF} = R_{C3} + R'_{oF}$$

Quindi il calcolo di R_{out} può partire dalla R_{oF}:

$$R_{out} = R_{C3} // (R_{oF} - R_{C3})$$

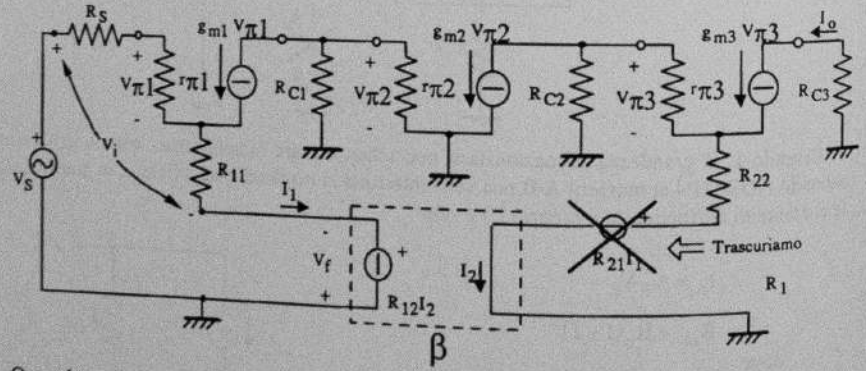
3) Calcolo della resistenza di ingresso. Secondo metodo



$$\begin{cases} V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2 \\ V_2 = R_{21} I_1 + R_{22} I_2 \end{cases}$$

$$R_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = R_1 // (R_F + R_2) \qquad R_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_F}$$

$$R_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = R_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_F} \qquad R_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = R_2 // (R_F + R_1)$$



Osserviamo che R_{11} coincide con R_{if} mentre R_{22} coincide con R_{of}.

$$\beta = \frac{V_f}{I_o} \cong \frac{V_f}{I_2} = -R_{12} = -R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_F}$$

Con $V_f = 0$ il circuito per la determinazione di A_{OL} è identico a quello che si disegna seguendo le indicazioni del testo.

$$A_{OL} = \frac{I_o}{V_i} = \left.\frac{I_o}{V_s}\right|_{V_f=0}$$

$$T = -A_{OL}\beta$$

La resistenza di ingresso complessiva vista dal generatore V_s, senza retroazione vale:

$$R_i = \left.\frac{V_S}{I_S}\right|_{V_f=0} = R_S + R_{i1} = R_S + r_{\pi 1} + (\beta_{01} + 1) R_{11}$$

La stessa resistenza con retroazione vale:

$$R_{iF} = \frac{V_s}{I_s} = R_i (1 + T) =$$

$$= [R_S + R_{i1}] \left[1 + \beta_{03}\beta_{02}\beta_{01} \left(\frac{R_{C2}}{R_{C2} + R_{i3}} \right) \left(\frac{R_{C1}}{R_{C1} + R_{i2}} \right) \left(\frac{-\beta}{R_S + R_{i1}} \right) \right]$$

Osserviamo che:

$$R_{iF} = R_S + R_{in}$$

da cui si ricava $R_{in} = R_{iF} - R_S$.

Dimostriamo ora che tale procedimento coincide con quello seguito al punto 2:

$$R_{in} = R_i (1 + T) - R_S = r_{\pi 1} + (\beta_{o1} + 1) R_{11} + K(-\beta) =$$

$$= \left[r_{\pi 1} + (\beta_{o1} + 1) R_{11} \right] \left[1 + \frac{K}{r_{\pi 1} + (\beta_{o1} + 1) R_{11}} (-\beta) \right]$$

dove

$$K = \beta_{o3}\beta_{o2}\beta_{o1} \left(\frac{R_{C2}}{R_{C2} + R_{i3}} \right) \left(\frac{R_{C1}}{R_{C1} + R_{i2}} \right)$$

Come si può verificare tale espressione coincide con:

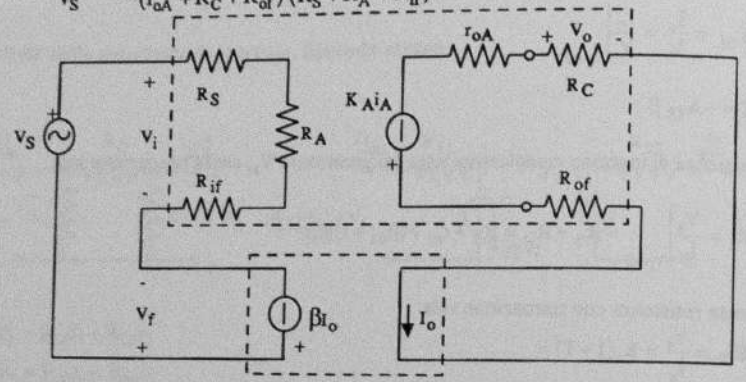
$$R_{in} = R'_i \left(1 + T|_{R_S=0} \right)$$

5) Schema generale per una retroazione di tipo CORRENTE - SERIE

$$X_o = I_o; \qquad X_i = V_i; \qquad X_S = V_S; \qquad X_f = V_f$$

$$\beta = \frac{V_f}{I_o} = -R_{12} = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_F}$$

$$A_{OL} = \frac{I_o}{V_S} = K_A \frac{1}{(r_{oA} + R_C + R_{of})} \frac{1}{(R_S + R_A + R_{if})}$$



$$A_F = \frac{I_o}{V_S} = \frac{A_{OL}}{1+T} \qquad T = -\beta A_{OL} \qquad A_V = \frac{V_o}{V_S} = -R_C \frac{I_o}{V_S} = -R_C A_F$$

$$R_i = R_S + R_A + R_{if}, \quad R_o = R_C + r_{oA} + R_{of}$$

$$R_{iF} = R_{in}(1+T) \quad R_{oF} = R_{out}(1+T)$$

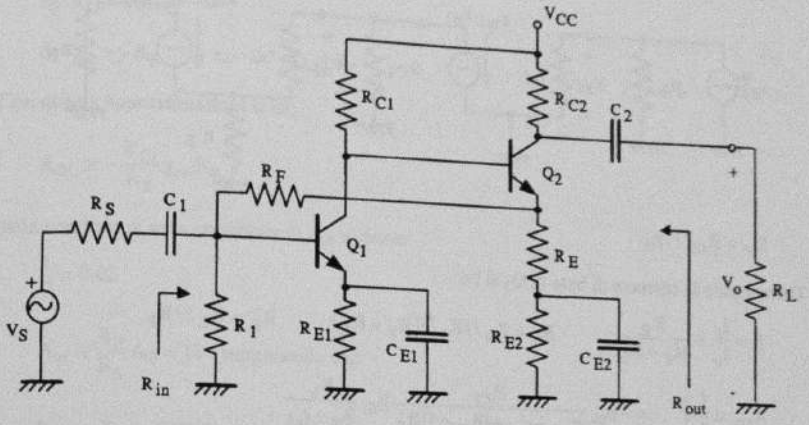
ESERCIZIO R.9

Dato l'amplificatore di figura con:

$R_S = 500\ \Omega$ e $R_L = 200\ \Omega$.

1) Progettare l'amplificatore in modo da avere $A_{vt} = 10$ a meno del 2%.

2) Analizzare l'amplificatore con uscita sull'emettitore di Q_2



SOLUZIONE

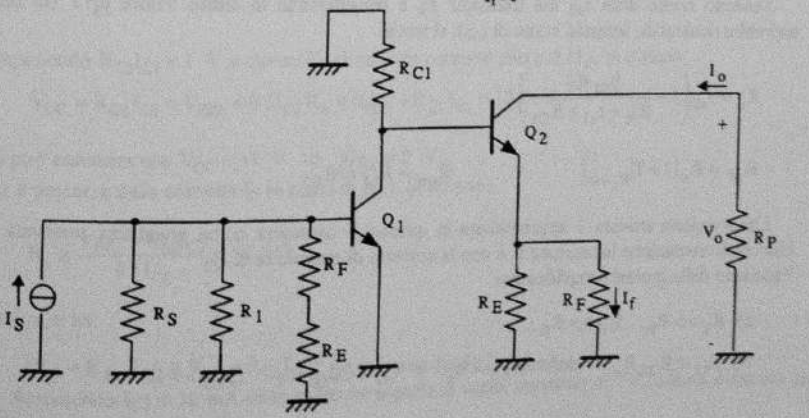
1) La retroazione è di tipo corrente-parallelo:

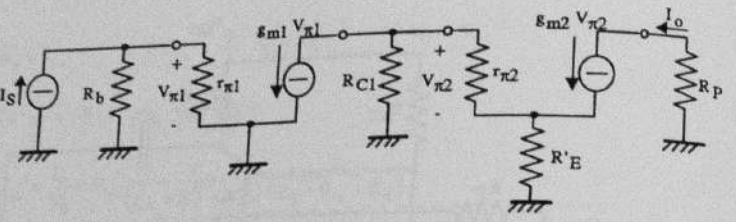
$$X_o = I_o; \qquad X_f = I_f; \qquad X_S = I_S = \frac{V_S}{R_S}$$

Utilizziamo lo schema secondo Norton del generatore di ingresso:

$$A_F = \frac{I_o}{I_s}; \qquad A_V = \frac{V_o}{V_s} = \frac{V_o}{I_o}\frac{I_o}{I_s}\frac{I_s}{V_s} = -A_F \frac{R_P}{R_S}$$

Lo schema dinamico per la determinazione di $A_{OL} = \left.\frac{I_o}{I_S}\right|_{I_f=0}$ risulta:





$$R_P = R_{C2} // R_L$$

Trascurando la corrente di base di Q_2 si ha:

$$\beta = \frac{I_f}{I_o} \cong \frac{R_E}{R_F + R_E}; \qquad R_b = R_S // R_1 // (R_F + R_E); \qquad R'_E = R_E // R_F$$

$$A_{OL} = \left.\frac{I_o}{I_s}\right|_{I_f = 0} = -\beta_{02} \frac{R_{C1}}{R_{C1} + r_{\pi2} + (\beta_{02}+1)R'_E} \beta_{01} \frac{R_b}{R_b + r_{\pi1}}$$

Avendo considerato il segnale di retroazione I_f che si somma al segnale di ingresso I_s si ha:

$$T = -A_{OL}\beta; \qquad A_F = \frac{A_{OL}}{1+T} \cong -\frac{1}{\beta} = -\left(1 + \frac{R_F}{R_E}\right)$$

$$R'_i = R_1 // (R_F + R_E) // r_{\pi1}$$

$$R_{in} = R'_i \frac{1}{1+T|_{R_S \to \infty}} \quad \text{oppure}$$

$$R_i = R'_i // R_S; \qquad R_{iF} = R_i \frac{1}{1+T}; \qquad R_{in} = \frac{R_S R_{iF}}{R_S - R_{iF}}$$

$$R_O = \infty$$

Tenendo conto della r_{o2} del transistor T_2 e considerando lo stesso valore di T (in realtà andrebbe ricalcolato tenendo conto di r_{o2}); si trova:

$$R_o = r_{o2}\left(1 + \frac{\beta_{02} R'_E}{R'_E + r_{\pi1} + R_{C1}}\right)$$

$$R_{oF} = R_o\left(1 + T|_{R_P=0}\right) \qquad R_{out} = R_{oF} // R_{C2}$$

L'espressione trovata è approssimata in quanto si considera come grandezza prelevata dal blocco di retroazione la corrente I_o e non la corrente di emettitore di Q_2.
Facciamo delle ipotesi semplificative:

a) $R_1 >> R_S$, $R_F >> R_S$

b) $R_{i2} \cong \beta_{O2} R_E$ cioè $R_F >> R_E$ e $r_{\pi2} << \beta_{O2} R_E$ $(\beta_{O2} >> 1)$

c) $R_{i2} >> R_{C1}$

d) $r_{\pi1} >> R_S \quad \Rightarrow \quad R_b \cong R_S$

Con queste approssimazioni si ha:

$$A_{OL} \cong -\frac{R_{C1}}{R_E} g_{m1} R_S$$

dalla condizione sulla precisione di A_{vt} si ricava:

$$\frac{1}{T} = 0.02$$

$$A_{vt} \cong \frac{R_P}{R_S} A_F = 10 \quad \text{supponendo che:}$$

$$R_{C2} = R_L = 200\ \Omega \quad \Rightarrow \quad R_P = 100\ \Omega \quad \Rightarrow \quad A_F = -50$$

Essendo poi: $A_F \cong -\frac{1}{\beta} = -\left(1 + \frac{R_F}{R_E}\right) \quad \Rightarrow \quad R_F = 49 R_E$

Si può assumere $R_F = 50 R_E$

$$A_{OL} = -\frac{1}{0.02\beta} = -2.5 \cdot 10^3 = -\frac{R_{C1}}{R_E}\frac{I_{C1}}{V_T} R_S \quad \Rightarrow \quad R_E \cong 8 I_{C1} R_{C1}$$

Per non avere R_E ed R_F troppo piccole si può scegliere $R_{C1} I_{C1} = 10$ V. Risulta:

$$R_E = 80\ \Omega \quad \Rightarrow \quad R_F = 4\ k\Omega$$

Per avere $r_{p1} >> R_b$ si può imporre: $r_{p1} = 5\ k\Omega$. Usando $\beta_o = 200$ si ottiene:

$$I_{C1} = \frac{\beta_O}{r_{\pi1}} V_T = 1\ mA \quad \Rightarrow \quad R_{C1} = 10\ k\Omega$$

Imponendo $R_{E1} I_{C1} = 1$ V e che su R_F circoli una corrente pari a $0.1 I_{C1}$ si ottiene:

$$V_{CC} = R_{C1} I_{C1} + V_{BE2} + 0.1 I_{C1} R_F + V_{BE1} + R_{E1} I_{C1} = 12.6\ V$$

Si può assumere che $V_{CC} = 13$ V $\Rightarrow$ $V_{CE1} = 2$ V
R_1 è percorsa dalla corrente I_F (a meno di I_{B1}). Si ottiene:

$$R_1 \cong \frac{V_{BE1} + R_{E1} I_{C1}}{0.1 I_{C1}} = 16\ k\Omega$$

Inoltre si ha:

$(R_E + R_{E2}) I_{C2} \cong V_{CC} - R_{C1} I_{C1} - V_{BE2}$ (trascurando I_F e I_{B2})

Assumendo $I_{C2} = 10$ mA onde avere un segnale di uscita massimo di 1V (caduta dinamica su R_P) si ha:

$$R_{E2} \cong 160\ \Omega$$

Scegliendo $V_{CE2} = 3$ V si ricava poi:

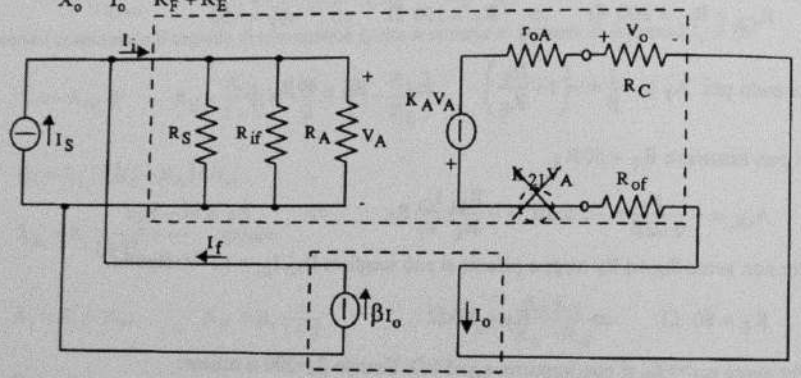
$$R_{C2} \cong \frac{V_{CC} - V_{CE2} - (R_{E2} + R_E) I_{C2}}{I_{C2}} = 750\ \Omega$$

Si osserva che la condizione $R_{i2} >> R_{C1}$ non è soddisfatta e quindi risulta A_{OL} più piccolo di quanto necessario per avere una precisione del 2%, mentre R_{C2} risulta maggiore di quanto preventivato (200 Ω)

Schema generale di retroazione corrente-shunt:

$$X_o = I_o; \quad X_S = I_S; \quad X_f = I_f; \quad X_i = I_i$$

$$\beta = \frac{X_f}{X_o} = \frac{I_f}{I_o} = \frac{R_E}{R_F + R_E}$$



$$A_{OL} = \left.\frac{I_o}{I_S}\right| = K_A \frac{1}{r_{oA} + R_C + R_{of}} (R_S // R_{if} // R_A); \qquad T = -\beta A_{OL}$$

$$A_F = \frac{I_o}{I_S} = \frac{A_{OL}}{1+T}$$

$$R_i = R_S // R_{if} // R_A; \qquad R_{iF} = R_i \frac{1}{1+T}$$

$$G_i = G_S + G_i + G_A; \qquad G_{iF} = G_i(1+T); \qquad G'_{in} = G_{iF} - G_S$$

$$R_o = R_C + r_{oA} + R_{of}, \; R_{oF} = R_o(1+T), \; R_{out} = R_{oF} - R_C$$

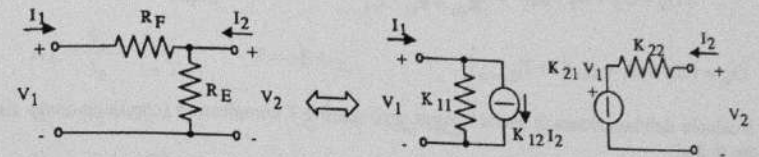
Nell'esempio visto, considerando la resistenza di uscita nel modello del BJT Q_2, abbiamo che:

$R_A = R_1 // r_{\pi 1}$

$$K_A \cong -\beta_{o2}\, r_{o2}\, \beta_{o1} \frac{R_{C1}}{R_{C1} + R_{i2}} \frac{1}{r_{\pi 1}} \qquad \text{dove} \qquad R_{i2} = r_{\pi 2} + (\beta_{o2} + 1) R_{of}$$

$r_{oA} = r_{o2}$

II metodo

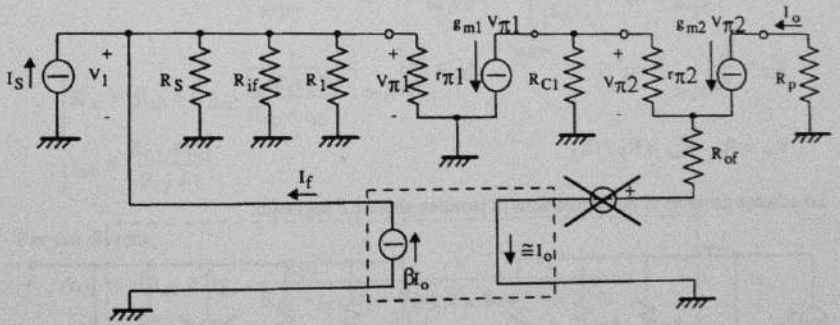


$$\begin{cases} I_1 = K_{11} V_1 + K_{12} I_2 \\ V_2 = K_{21} V_1 + K_{22} I_2 \end{cases}$$

$$K_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{R_F + R_E} \quad \Rightarrow \quad R_{if} = R_F + R_E$$

$$K_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0} = -\frac{R_E}{R_F + R_E} = -\beta \qquad K_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0} = \frac{R_E}{R_F + R_E}$$

$$K_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0} = R_E // R_F \quad \Rightarrow \quad R_{of} = R_F // R_E$$



$$\beta = \frac{I_f}{I_O} = \frac{R_E}{R_F + R_E}$$

Annullando β si ottiene lo stesso schema ai piccoli segnali per la determinazione di A_{oL} che ovviamente coincide con quello già calcolato nella prima parte.
Per quanto riguarda la resistenza di ingresso si ha:

$$R_i = \left.\frac{V_I}{I_S}\right|_{I_f=0} = R_S // R_{if} // r_{\pi 1} // R_1 \quad \Rightarrow \quad G_i = G_S + G_{if} + G_1 + g_{\pi 1}$$

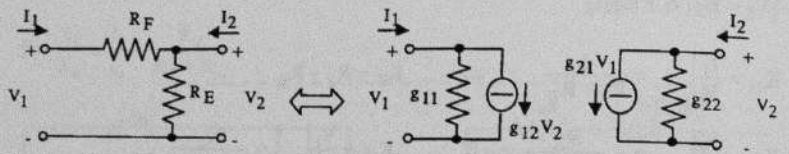
$$G_{iF} = G_i(1+T) = (G_S + G_{if} + G_1 + g_{\pi 1})\left(1 + \beta \frac{\beta_{O1}\beta_{O2} R_{C1}}{R_{C1} + R_{i2}} \frac{g_{\pi 1}}{G_S + G_{if} + G_1 + g_{\pi 1}}\right)$$

$$= G_S + G_{if} + G_1 + g_{\pi 1} + \beta \frac{\beta_{O1}\beta_{O2} R_{C1}}{R_{C1} + R_{i2}} \frac{1}{r_{\pi 1}} = G_S + G_{in}$$

$$G_{in} = (G_{if} + G_1 + g_{\pi 1})\left(1 + T|_{R_S = \infty}\right)$$

Per il calcolo dell'impedenza di uscita bisogna però usare il T complessivo (che tiene conto sia di R_S che di R_{if}).

2) Retroazione di tensione-shunt



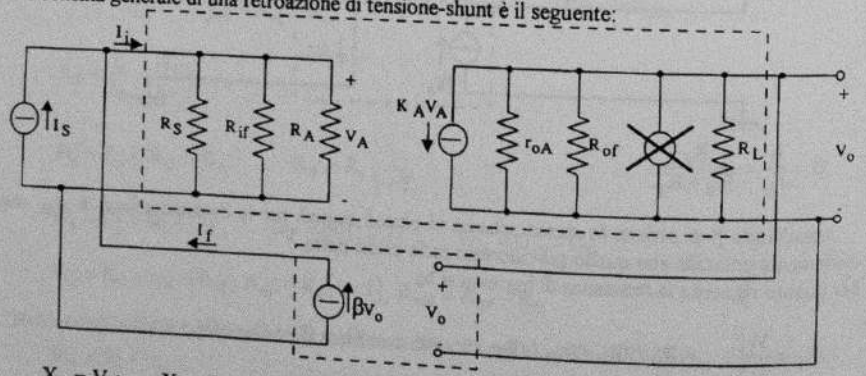
$$\begin{cases} I_1 = g_{11} V_1 + g_{12} V_2 \\ I_2 = g_{21} V_1 + g_{22} V_2 \end{cases}$$

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{1}{R_F}; \qquad g_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = -\frac{1}{R_F}$$

$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = -\frac{1}{R_F}; \qquad g_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{1}{(R_F // R_E)}$$

$$R_{if} = R_F, \quad R_{of} = R_F // R_E$$

Lo schema generale di una retroazione di tensione-shunt è il seguente:



$$X_o = V_o; \quad X_S = I_S; \quad X_f = I_f; \quad X_i = I_i$$

$$\beta = \frac{I_f}{V_o} = -g_{12} = \frac{1}{R_F}$$

$$A_{OL} = \frac{V_o}{I_i} = \left.\frac{V_o}{I_S}\right|_{I_f=0} = -K_A (r_{oA} // R_{of} // R_L) \cdot (R_S // R_{if} // R_A)$$

$$A_F = \frac{V_o}{I_S} = \frac{A_{OL}}{1+T} \qquad T = -\beta A_{OL}$$

$$G_i = G_S + G_{if} + G_A \qquad G_o = G_L + G_{of} + g_{oA}$$

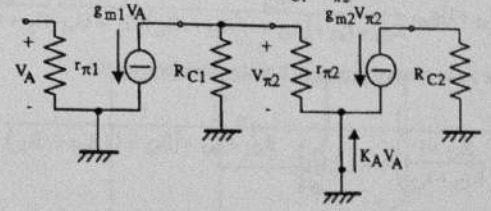
$$G_{iF} = G_i(1+T) \qquad G_{oF} = G_o(1+T)$$

$$G_{in} = G_{iF} - G_S \qquad G_{out} = G_{oF} - G_L$$

Dallo schema di partenza si ricava:

$$R_A = R_1 // r_{\pi 1}$$

$$K_A V_A = -(\beta_{o2} + 1) I_{b2} = -(\beta_{o2} + 1)(-g_{m1} V_A) \frac{R_{C1}}{R_{C1} + r_{\pi 2}}$$



$$\begin{cases} K_A = (\beta_{o2} + 1) g_{m1} \dfrac{R_{C1}}{R_{C1} + r_{\pi 2}} \\ r_{oA} = \dfrac{R_{C1} + r_{\pi 2}}{\beta_{o2} + 1} \end{cases}$$

Per cui diventa:

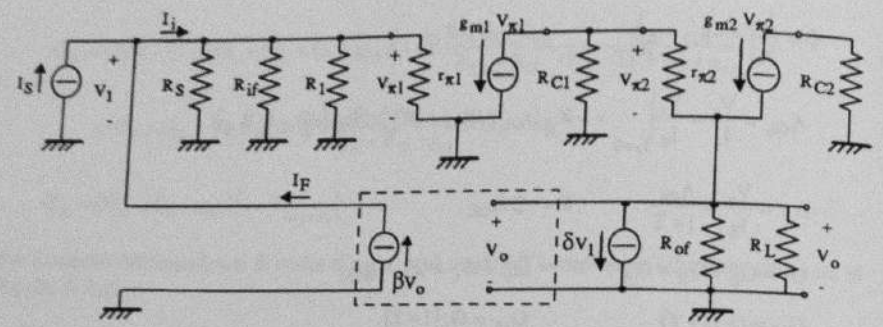
$$A_{OL} = -(\beta_{o2} + 1) g_{m1} \frac{R_{C1}}{R_{C1} + r_{\pi 2}} \frac{1}{G_S + G_{if} + G_A} \frac{1}{g_{oA} + G_{of} + G_L}$$

dove

$$G_A = G_1 + g_{\pi 1}$$

$$g_{oA} = \frac{\beta_{o2} + 1}{R_{C1} + r_{\pi 2}}$$

Tutti questi calcoli si possono fare direttamente sulla rete:



$$A_{OL} = \frac{V_o}{I_i} = \frac{V_o}{I_S}\bigg|_{I_f=0}$$

$$V_o = (R_L // R_{of})(\beta_{o2}+1)\frac{R_{C1}}{R_{C1}+R_{i2}} g_{m1}(R_S // R_{if} // R_1 // r_{\pi1}) I_i$$

$$A_{OL} = -(\beta_{o2}+1) g_{m1} \frac{R_{C1}}{R_{C1}+r_{\pi2}+(\beta_{o2}+1)(R_{of}//R_L)} \frac{1}{G_L+G_{of}} \frac{1}{G_S+G_{if}+G_1+g_{\pi1}}$$

Verifichiamo che sia la stessa espressione trovata precedentemente:

$$\frac{1}{R_{C1}+r_{\pi2}} \frac{1}{\left(\frac{\beta_{o2}+1}{R_{C1}+r_{\pi2}}\right)+G_{of}+G_L} = \frac{1}{R_{C1}+r_{\pi2}+(\beta_{o2}+1)(R_{of}//R_L)} \frac{1}{G_L+G_{of}}$$

$$\frac{1}{(\beta_{o2}+1)+(R_{C1}+r_{\pi2})(G_{of}+G_L)} = \frac{1}{(R_{C1}+r_{\pi2})(G_{of}+G_L)+(\beta_{o2}+1)} \qquad \text{c.v.d.}$$

$$\beta = \frac{I_f}{V_o} = -g_{12} = \frac{1}{R_F}$$

$$A_F = \frac{A_{OL}}{1+T} \qquad T = -\beta A_{OL}$$

Se $T >> 1 \quad \Rightarrow \quad A_F = \frac{A_{OL}}{T} = -\frac{1}{\beta} = -R_F$

Il guadagno in tensione vale:

$$A_V = \frac{V_O}{V_S} = \frac{V_O}{R_S I_S} = \frac{1}{R_S}\frac{V_O}{I_S} = \frac{1}{R_S} A_F \cong -\frac{R_F}{R_S}$$

Sapendo che $A_V = -10$, $R_{C1} = 10$ kΩ, $R_E = 80$ Ω, $I_{C1} = 1$ mA, $\beta_O = 200$, $R_L = 200$ Ω, $R_S = 500$ Ω si determinano R_F, T:

$$A_V \cong -\frac{R_F}{R_S} \quad \Rightarrow \quad R_F = 5 \text{ kΩ}$$

$$A_{OL} = -200 \cdot 0.04 \cdot \frac{10^4}{10^4 + 5\cdot10^3 + 200\cdot52} \cdot 52 \cdot \frac{1}{\frac{1}{500}+\frac{2}{5000}} \cong -72.150\Omega$$

$$T = -\beta \cdot A_{OL} = 14.43 \qquad A_V = -9.35$$

ESERCIZIO R.10

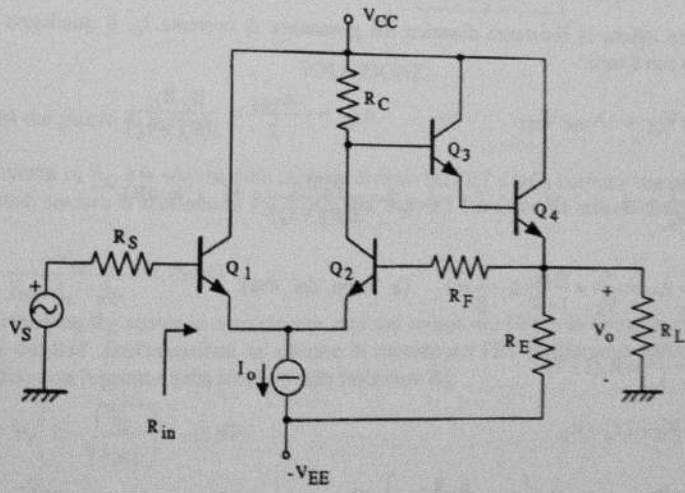
Dato il circuito di figura con:

$R_F = R_S = R_C = 1$ kΩ;

Q_1, Q_2: $r_\pi = 1$ kΩ; $\beta_O = 100$

Q_3 e Q_4 formano un inseguitore Darlington a guadagno unitario e con impedenza di ingresso molto alta.

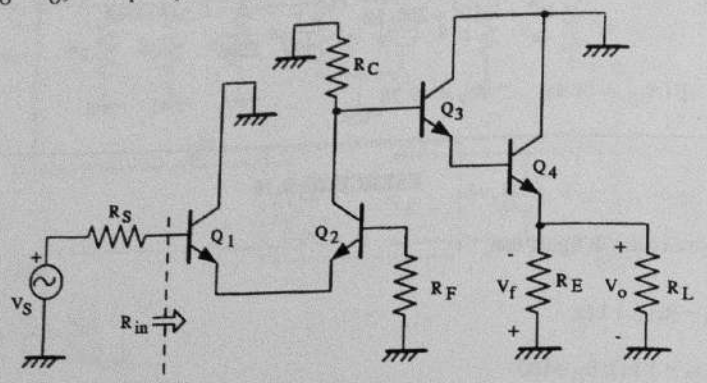
Determinare A_V e R_{in}.



SOLUZIONE

Si tratta di uno schema a retroazione del tipo tensione-serie (o serie-shunt). Il blocco di confronto è costituito dall'amplificatore differenziale Q_1 e Q_2.
Ricaviamo il circuito dinamico per la determinazione del guadagno della catena diretta tenendo conto degli effetti di carico della rete di retroazione (composta dalla resistenza R_F).
Per vedere il circuito equivalente di ingresso occorre annullare la tensione di uscita, mentre per vedere quello di uscita occorre interrompere la maglia di ingresso.

$X_O = V_O$; $X_f = V_f$; $X_S = V_S$



$R_F = R_S$ $\Rightarrow$ è un differenziale simmetrico

$$A_{OL} = \left.\frac{V_o}{V_S}\right|_{V_f=0}; \quad V_1 = V_S; \quad V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{DM} = \frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{V_S}{2}$$

Essendo infinita la resistenza dinamica del generatore di corrente I_o, il guadagno di modo comune è pari a zero.

$$V_o = V_{C2} = -A_{DM} V_{DM} \quad \Rightarrow \quad A_{OL} = -\frac{A_{DM}}{2} = \frac{\beta_o R_C}{2(R_S + r_\pi)}$$

$$\beta = \frac{V_f}{V_o} = -1 \quad \Rightarrow \quad T = -A_{OL}\beta = \frac{\beta_o R_C}{2(R_S + r_\pi)} = 45 \quad (28\ dB)$$

$$A_F = A_V = \frac{V_o}{V_S} = \frac{A_{OL}}{1+T} \cong -\frac{1}{\beta} = 1 \quad \text{(a meno del 4\%)}$$

$$R_{iF} = \frac{V_S}{I_S} = R_i(1+T)$$

$$R_i = R_S + 2r_\pi + R_F$$

$$R_{iF} = (R_S + 2r_\pi + R_F)\left(1 + \frac{\beta_o R_C}{2(R_S + r_\pi)}\right) = (R_S + 2r_\pi + R_F) + \beta_o R_C = 100\ k\Omega$$

$$R_{iF} = R_S + R_{in} \quad \Rightarrow \quad R_{in} = 2r_\pi + R_F + \beta_o R_C$$

Si può calcolare col metodo esposto nel testo:

$$R_{in} = (2r_\pi + R_F)\left(1 + T|_{R_S=0}\right)$$

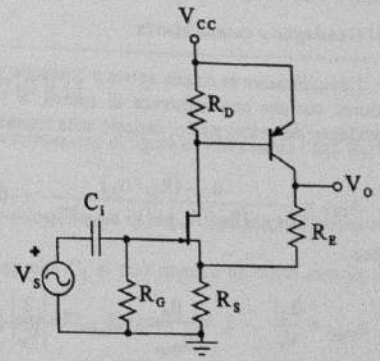
Per calcolare $T|_{R_S=0}$ occorre esprimerlo nel modo seguente:

$$T = \frac{\beta_o R_C}{2r_\pi + R_S + R_F} \quad \Rightarrow \quad T|_{R_S=0} = \frac{\beta_o R_C}{2r_\pi + R_F}$$

ESERCIZIO R.11

Dato l'amplificatore di figura, determinare:

1) il valore di R_S e R_D
2) il tipo di retroazione e il valore di β
3) il guadagno a catena aperta A_{OL} (si consideri C_i un corto circuito)
4) il guadagno di tensione $A_v = V_o/V_S$
5) la frequenza di taglio inferiore f_L



Dati: $R_G = 680\ k\Omega$, $R_E = 2.2\ k\Omega$, $C_i = 10\ nF$

FET: $I_{DSS} = 5\ mA$, $V_P = -4\ V$, $I_D = 0.4\ mA$, $r_d = 100\ k\Omega$

BJT: $I_C = -1\ mA$, $V_{BE} = -0.7\ V$, $\beta_F = \beta_0 = 100$

SOLUZIONE

1) Analisi del punto di lavoro

La corrente su R_D è la somma della corrente di drain del FET e della corrente che entra in base al transistor, mentre la tensione su R_D è pari alla V_{EB} del transistor. Si ottiene così il valore di R_D:

$$R_D = \frac{-V_{BE}}{I_D + I_C/\beta_F} = 1.79\ k\Omega$$

Sulla resistena R_S scorre la corrente che esce dal source del FET e la corrente che esce dal collettore del BJT. Dall'equazione del circuito di ingresso del FET si determina il valore di V_{GS} che coincide con l'opposto della tensione sulla resistenza R_S.

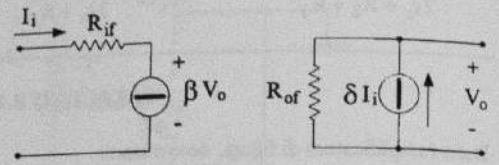
$$V_{GS} = V_P\left(1 - \sqrt{\frac{I_D}{I_{DSS}}}\right) = -2.87V$$

$$R_S = \frac{-V_{GS}}{I_D - I_C} = 2.05\ k\Omega$$

2) Tipo di retroazione

La retroazione è costituita dalle resistenze R_E ed R_S che realizzano un prelievo di tensione ed un confronto di tensione. Di conseguenza si determinano i seguenti parametri:

$$R_{if} = R_S // R_E = 1.06\,k\Omega$$
$$R_{of} = R_S + R_E = 4.25\,k\Omega$$
$$\beta = \frac{R_S}{R_S + R_E} = 0.482$$
$$\delta = \frac{R_S}{R_S + R_E} = 0.482$$



3) Guadagno a catena aperta

L'amplificatore in catena aperta è costituito dalla cascata di due stadi. Il primo è uno stadio a source comune con resistenza di source, il secondo è uno stadio ad emettitore comune. Il guadagno del primo stadio, caricato sulla resistenza di ingresso del secondo (r_π), vale:

$$A_{FET} = -\frac{\mu_{FET}(R_D // r_\pi)}{r_d + (R_D // r_\pi) + (1+\mu_{FET})R_{if}} = -0.417$$

dove

$$g_{m_{BJT}} = \frac{|I_C|}{V_T} \qquad r_\pi = \frac{\beta_0}{g_{m_{BJT}}} \qquad g_{m_{FET}} = \left|\frac{2}{V_P}\right|\sqrt{I_D\, I_{DSS}} \qquad \mu_{FET} = g_{m_{FET}} r_d$$

Il guadagno dello stadio a BJT vale:

$$A_{BJT} = -g_{m_{BJT}} R_{of} = -170$$

da cui si ricava il guadagno A_{OL} richiesto.

NOTA: Dall'analisi dello schema ai piccoli segnali, si osserva che il generatore δ è pilotato dalla corrente di source del FET e non dalla corrente della maglia di ingresso che invece è nulla essendo la corrente di gate del FET. Il contributo di δ sul guadagno A_{OL}, quindi, anche se trascurabile, (si può verificare che considerando δ il guadagno varia di circa 1%) è comunque non nullo.

$$A_{OL} = \left.\frac{V_O}{V_S}\right|_{\beta=0} = g_{m_{BJT}}\left[(R_S + R_E) // R_L\right]\frac{\mu_{FET}(R_D // r_\pi)}{r_d + (R_D // r_\pi) + (1+\mu_{FET})(R_S // R_E)} = 71$$

4) Guadagno a catena chiusa

Il guadagno a catena chiusa si determina con la formula:

$$A_V = A_F = \frac{A_{OL}}{1 + \beta A_{OL}} = 2$$

5) Frequenza di taglio inferiore

La frequenza di taglio inferiore è determinata dalla capacità C_i ed è determinata (esattamente) col metodo delle costanti di tempo. La resistenza vista dalla capacità C_i è data dalla sola R_G. La frequenza di taglio inferiore vale:

$$f_L = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{R_G C_i} = 23.4\,Hz$$

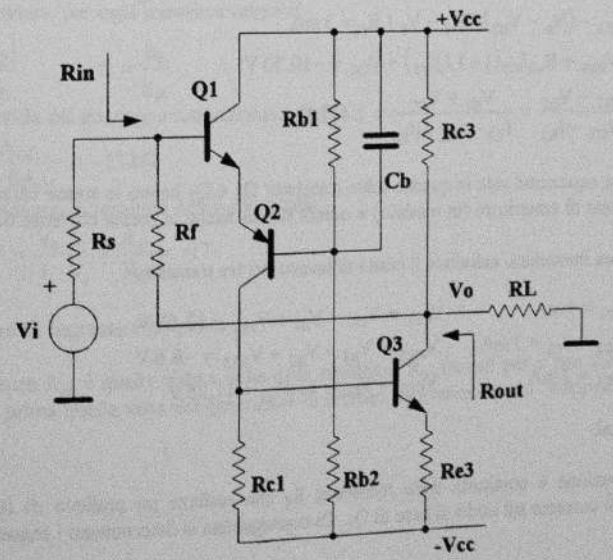
NOTA: dall'espressione di f_L si osserva che il valore della frequenza di taglio inferiore è indipendente dalla presenza o meno della retroazione. Di conseguenza, in questo caso, la retroazione negativa non modifica (riduce) il limite inferiore della banda passante del circuito. Questo si spiega col fatto che la capacità C_i non è inclusa nella funzione di trasferimento del guadagno d'anello A_{OL}. Infatti essa contribuisce a definire solo la tensione di ingresso del "nodo differenziale" (quest'ultimo è costituito dai morsetti di gate e di source del FET). Lo stesso risultato si ottiene se si osserva che il guadagno d'anello è indipendente dall'impedenza fra gate e riferimento che invece dipende dalla capacità C_i.

ESERCIZIO R.12

Dato il circuito di amplificatore a tre stadi con retroazione di figura ed utilizzando i dati forniti, determinare:

1) Il valore delle resistenze R_{c1} ed R_{b1} ed il punto di lavoro di tutti i transistor nell'ipotesi che, per la polarizzazione, valga $V_o = 0$.
2) Il guadagni: A_{OL}, A_F, $A_v = V_o/V_i$, (La capacità C_b si può ritenere un corto circuito alle frequenze di interesse).
3) I valori delle resistenze di ingresso R_{in} e di uscita R_{out} di figura.

Dati: $V_{CC} = 12$ V, $R_S = 1$ kΩ, $R_f = 22$ kΩ, $R_{b2} = 100$ kΩ, $R_{e3} = 250$ Ω, $R_{C3} = 4$ kΩ, $R_L = 1$kΩ, $I_{C1} = 1$ mA, $V_{BE1} = 0.65$ V, $V_{BE2} = -0.65$ V, $V_{BE3} = 0.7$ V, $\beta_{F1} = \beta_{F2} = \beta_{01} = \beta_{02} = 200$, $\beta_{F3} = \beta_{03} = 150$.



SOLUZIONE

1) Polarizzazione

Per il calcolo della polarizzazione si deve spegnere il generatore V_i. Considerando ora che anche V_o è nulla, si può schematizzare secondo Thevenin il circuito di base di Q_1 (un morsetto è quello di base, il secondo è quello di riferimento). La tensione a vuoto è la media ***pesata dalle resistenze*** R_s ed R_f delle due tensioni V_i e V_o che sono nulle per ipotesi. La resistenza equivalente è invece data dal parallelo delle resistenze R_s ed R_f. Da queste considerazioni si determina il potenziale di base di Q_1 che vale:

$$V_{B1} = -(R_s // R_f)\frac{I_{C1}}{\beta_{F1}} = 4.8\mu V$$

La tensione di base di Q2 vale:

$$V_{B2} = V_{B1} - V_{BE1} + V_{BE2} = -1.3V$$

Si può ora determinare la resistenza R_{b1} calcolando prima la corrente su R_{b2}. Si trova:

$$I_{Rb2} = \frac{V_{B2} - (-V_{CC})}{R_{b2}} = 0.1\,mA$$

$$I_{Rb1} = I_{Rb2} - I_{B2} = 0.1\,mA$$

$$R_{b1} = \frac{V_{CC} - V_{B2}}{I_{Rb1}} = 13\,k\Omega$$

Dall'ipotesi V_o=0 si determina anche la corrente su R_{C3}:

$$I_{RC3} = \frac{V_{CC} - V_0}{R_{C3}} = 3\,mA$$

si determinano ora la corrente di collettore e la tensione di base di Q_3 e la resistenza R_{c1}:

$$I_{C3} = I_{RC3} - (V_0 - V_{B2})/R_f - V_0/R_f = 3\,mA$$

$$V_{B31} = V_{BE3} + R_{e3}I_{C3}(1 + 1/\beta_{F3}) - V_{CC} = -10.55\,V$$

$$R_{c1} = \frac{V_{B3} + V_{CC}}{-I_{C2} - I_{B3}} = \frac{V_{B3} + V_{CC}}{I_{C1} - I_{C3}/\beta_{F3}} = 1.48\,k\Omega$$

dove l'ultima equazione vale in quanto i due transistor Q_1 e Q_2 hanno le stesse caratteristiche e la stessa corrente di emettitore (in modulo) e quindi hanno anche la stessa corrente di collettore (in modulo).

Risulta ora immediato calcolare il punto di lavoro dei tre transistor

Q_1: $I_{C1} = 1\,mA$ $\quad V_{CE1} = V_{CC} - V_{B1} + V_{BE1} = 12.65\,V$

Q_2: $I_{C2} = I_{C1} = 1\,mA$ $\quad V_{CE2} = V_{B3} - V_{B2} + V_{BE2} = -8.6\,V$

Q_3: $I_{C3} = 3\,mA$ $\quad V_{CE3} = V_{CC} - I_{E3}R_{e3} = 11.25\,V$

2) Guadagni

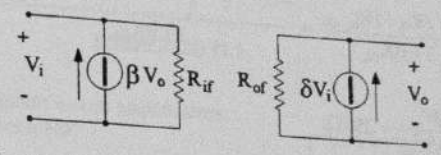
La retroazione è costituita dalla resistenza R_f che realizza un prelievo di tensione ed un confronto di corrente sul nodo di base di Q_1. Di conseguenza si determinano i seguenti parametri:

$$R_{if} = R_f$$

$$R_{of} = R_f$$

$$\beta = \frac{1}{R_f}$$

$$\delta = \frac{1}{R_f}$$



Inoltre occorre anche trasformare il generatore di ingresso secondo Norton.

L'amplificatore è costituito dalla cascata di tre stadi: un collettore comune, un base comune ed un emettitore comune con resistenza di emettitore. Il primo stadio è caricato con le resistenza di ingresso del base comune. Il secondo stadio è caricato dalla resistenza R_{C1} che è inparallelo alla resistenza di ingresso del terzo stadio. Il terzo stadio è caricato dal parallelo di R_{c3}, R_L ed R_{of}.

Risultano le seguenti equazioni:

$$A_1 = \frac{V_{E1}}{V_i} = \frac{R_f}{R_S + R_f}\frac{(1+\beta_{01})[r_{x2}/(1+\beta_{02})]}{(R_S // R_f) + r_{x1} + (1+\beta_{01})[r_{x2}/(1+\beta_{02})]} = 0.437$$

$$A_2 = \frac{V_{C2}}{V_{E1}} = g_{m2}\left[R_{C1} // \left(r_{x3} + (1+\beta_{03})R_{e3}\right)\right] = 57.2$$

$$A_3 = \frac{V_0}{V_{C2}} = -\frac{\beta_{03}(R_{C3} // R_L // R_{of})}{r_{x3} + (1+\beta_{03})R_{e3}} = -2.97$$

$$A_{OL} = \frac{V_0}{I_i} = \frac{V_0}{V_i}\frac{V_i}{I_i} = A_1 A_2 A_3 R_S = -74.2\,k\Omega$$

dove, ovviamente, per ogni transistor valgono:

$$g_m = \frac{|I_{CQ}|}{V_T} \qquad r_x = \frac{\beta_0}{g_m}$$

Dalla formula del guadagno retroazionato risulta

$$A_F = \frac{A_{OL}}{1 + \beta A_{OL}} = -17\,k\Omega$$

mentre il guadagno di tensione $A_v = V_0/V_i$ risulta:

$$A_V = \frac{V_0}{V_i} = \frac{V_0}{I_i}\frac{I_i}{V_i} = \frac{A_F}{R_S} = -17$$

2) Resistenze di ingresso e di uscita

La resistenza R_{in} è quella vista a valle della resistenza R_S. Quindi per il suo calcolo conviene determinare prima quella vista dal generatore di Norton equivalente e poi "estrarre" il contributo di R_S.

$$R'_{in} = \frac{R_s // R_{if} // R_{in_Q1}}{1+\beta A_{OL}} = \frac{R_s // R_{if} // \left(r_{\pi 1} + (1+\beta_{01})\frac{r_{\pi 2}}{1+\beta_{02}}\right)}{1+\beta A_{OL}} = \frac{R_s // R_{if} // 2\, r_{\pi 1}}{1+\beta A_{OL}} = 200\,\Omega$$

$$R_{in} = \frac{R_s R'_{in}}{R_s - R'_{in}} = 250\,\Omega$$

In modo analogo la resistenza R_{out} è quella vista a monte della resistenza R_L. Quindi per il suo calcolo conviene determinare prima quella vista dal morsetto di uscita (V_{out}) e poi "estrarre" il contributo di R_L.

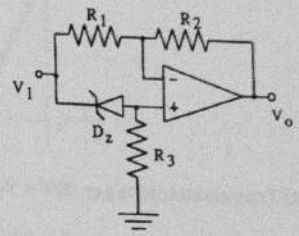
$$R'_{out} = \frac{R_{C3} // R_{of} // R_L}{1+\beta A_{OL}} = 177\Omega$$

$$R_{out} = \frac{R_L R'_{out}}{R_L - R'_{out}} = 214\,\Omega$$

AMPLIFICATORI OPERAZIONALI

ESERCIZIO O.1

Dato il circuito di figura realizzato con un amplificatore operazionale ed un diodo zener ideali:



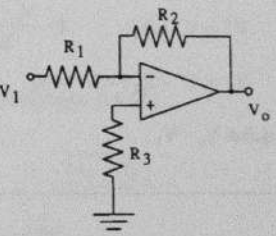
1) Disegnare la transcaratteristica $V_o = f(V_1)$ indicando i punti di spezzamento e la pendenza dei tratti inclinati per $0\ V < V_1 < 20\ V$
2) Disegnare la transcaratteristica $V_o = f(V_1)$ per $-20\ V < V_1 < 0\ V$

Dati: $R_1 = 2\,R_2$ $V_Z = 10\ V$

SOLUZIONE

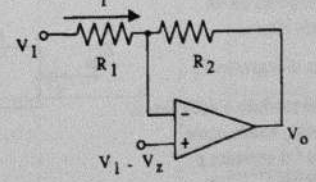
1) Transcaratteristica per $0V < V_1 < 20V$

Lo zener comincia a condurre per $V_1 > V_Z$.
Per $V_1 \le V_Z$ lo zener è un circuito aperto per cui la configurazione diventa quella di un amplificatore invertente,



da cui si ricava: $V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_1$

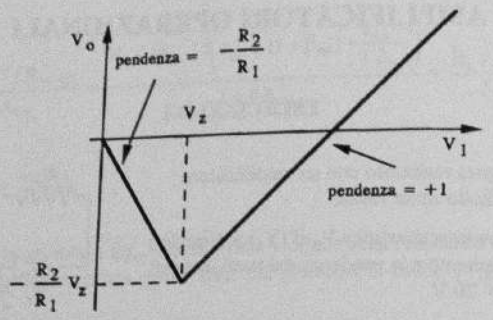
Per $V_1 \ge V_Z$ si ha $V^+ = V_1 - V_Z = V^-$ ed il circuito diventa come mostrato in figura:



$$V_O = V^- - R_2 I = V^- - \frac{(V_1 - V^-)}{R_1} R_2 = (V_1 - V_Z) - (V_1 - V_1 + V_Z)\frac{R_2}{R_1} =$$

$$= V_1 - V_Z - V_Z \frac{R_2}{R_1} = V_1 - V_Z\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Il secondo termine è costante per ogni valore di V_1 e quindi V_o "segue" V_1 con una differenza costante. Si ha quindi:



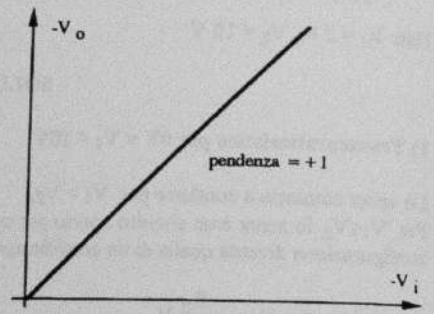
1) Transcaratteristica per $-20V < V_1 < 0V$

Per $V_1 < 0$ lo zener è sempre in conduzione diretta e quindi la sua caduta è nulla. Valgono le seguenti relazioni:

$$V^+ = V^- = V_1; \qquad I = \frac{V_1 - V^-}{R_1} = 0$$

$$V_O = V^- - R_2 I = V^- = V_1$$

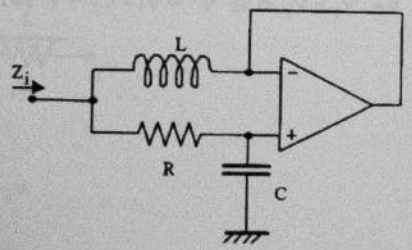
quindi $V_o = V_1$.



ESERCIZIO O.2

Dato il circuito di figura composto da un amplificatore operazionale ideale:

1) Determinare l'impedenza di ingresso Z_i
2) Tracciare i diagrammi del modulo e della fase dell'impedenza così trovata, intesa come funzione di trasferimento fra corrente e tensione (diagrammi di Bode)



SOLUZIONE

1) Impedenza di ingresso

Il valore dell'impedenza Z_i si calcola dal rapporto V_i / I_i con V_i tensione applicata in ingresso e I_i corrente assorbita dal circuito.

La corrente I_i può essere pensata come somma delle correnti dei due rami connessi al nodo di ingresso:

$$I_i = I_i' + I_i''$$

$$I_i' = \frac{V_i}{R + \frac{1}{sC}} = V_i \frac{sC}{1+sRC}$$

$$I_i'' = \frac{V_L}{sL} = \frac{V_R}{sL} = V_i \frac{sC}{1+sRC} R \frac{1}{sL}$$

$$I_i = V_i \frac{sC}{1+sRC} + V_i \frac{sC}{1+sRC} \frac{R}{sL}$$

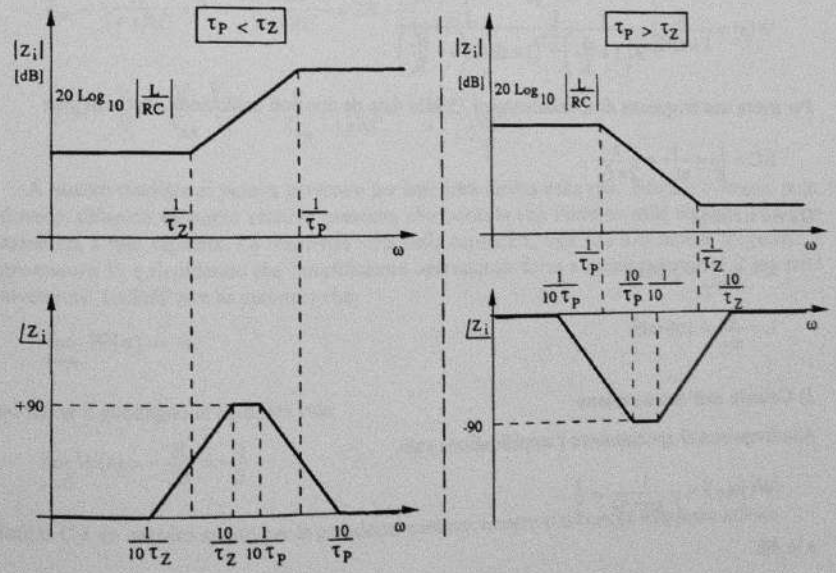
$$\frac{I_i}{V_i} = \frac{sC}{1+sRC}\left(1 + \frac{R}{sL}\right) = \frac{sC}{1+sRC}\left(\frac{R+sL}{sL}\right)$$

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = \frac{sL}{sC} \cdot \frac{1+sRC}{R(1+sL/R)} = \frac{L}{RC}\left(\frac{1+s\,\tau_Z}{1+s\,\tau_P}\right)$$

con $\tau_Z = RC, \tau_P = L/R$

2) Diagrammi di Bode

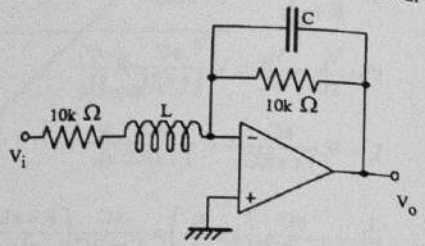
A seconda che $\tau_Z < \tau_P$ o $\tau_Z > \tau_P$ si ottiene uno dei seguenti diagrammi di Bode:



Nota: i grafici non sono rigorosamente in scala, ma dipendono dai valori di R, L e C

ESERCIZIO O.3

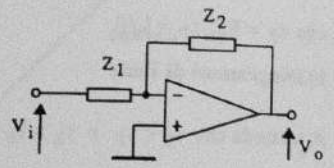
Dato l'amplificatore operazionale ideale retroazionato come in figura determinare il valore di C ed L in modo da ottenere un filtro passa basso con poli reali coincidenti, la cui frequenza al punto di spezzamento del diagramma di Bode del modulo, f_T, risulti pari a 15 kHz. Calcolare inoltre l'attenuazione risultante a tale frequenza, riportando il risultato in dB.



SOLUZIONE

1) Calcolo di L e C

La funzione di trasferimento del filtro di figura è data da:



$$W(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

$$Z_2 = \frac{R}{1+sRC}; \qquad Z_1 = R + sL = R\left(1+\frac{sL}{R}\right)$$

$$W(s) = \frac{R}{1+sRC}\frac{1}{R\left(1+\frac{sL}{R}\right)} = \frac{1}{(1+sRC)\left(1+\frac{sL}{R}\right)}$$

Per avere una frequenza di spezzamento di 15 kHz data da due poli coincidenti, occorre che:

$$RC = \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_T} = \frac{1}{2\pi f_T}$$

Da cui si ricava:

$$C = \frac{1}{R\omega_T} = 1.06\,\text{nF}$$

$$L = \frac{R}{\omega_T} = 106\,\text{mH}$$

2) Calcolo dell'attenuazione

Alla frequenza di spezzamento l'amplificazione vale:

$$|W(j\omega_T)| = \frac{1}{\left(\sqrt{1+1}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

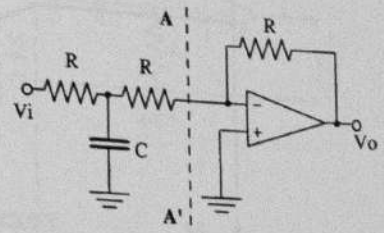
e in dB:

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \cong -6 \text{ dB}$$

ESERCIZIO O.4

Dato il circuito di figura realizzato con un amplificatore operazionale ideale:

1) Calcolare la funzione di trasferimento $W(s) = V_o(s)/V_i(s)$
2) Tracciare i diagrammi asintotici di Bode del modulo e della fase di $W(j\omega)$
3) Determinare $v_o(t)$ dato $v_i(t) = 2+1\cdot\sin(\omega t)$ [V] con $\omega = 2/RC$

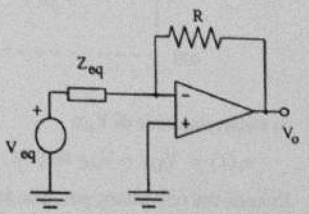


Dati: R = 1 kΩ, C = 10 nF

SOLUZIONE

1) Funzione di trasferimento

Si applica Thevenin a sinistra della sezione A-A'



$$V_{eq} = V_i \frac{1}{sC}\frac{1}{R+1/sC} = \frac{V_i}{1+sCR}$$

$$Z_{eq} = \frac{R}{1+sRC} + R = \frac{2R+sR^2C}{1+sRC} = 2R\frac{1+sRC/2}{1+sRC}$$

$$W(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_{eq}}\frac{V_{eq}}{V_i} = -\frac{R}{Z_{eq}}\frac{1}{1+sRC} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{sRC}{2}}$$

A questo risultato si poteva pervenire per ispezione diretta della rete. Infatti c'è un solo polo, dovuto all'unico elemento reattivo presente, che coincide con l'inverso della costante di tempo associata a tale capacità. La resistenza vista dalla capacità C vale R/2 e si ottiene spegnendo il generatore V_i e ricordando che l'amplificatore operazionale forza a massa la tensione al morsetto invertente. La FdT non ha zeri dato che:

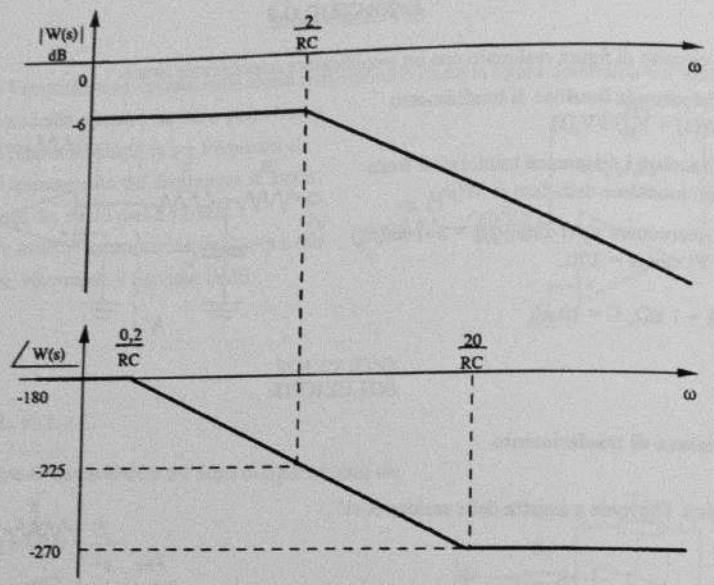
$$\lim_{s\to\infty} W(s) = 0$$

ed infine il guadagno in continua vale:

$$\lim_{s\to 0} W(s) = -\frac{R}{2R} = -\frac{1}{2}$$

Infatti C è un circuito aperto per le grandezze continue mentre è in corto a frequenza infinita.

2) Diagrammi asintotici di Bode



3) Determinazione di $V_o(t)$

$$v_i(t) = V_{iDC} + V_{iAC}\sin(\omega_i t)\ [V] \quad \text{dove} \quad \omega_i = \frac{2}{RC}$$

Essendo una rete lineare, possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, per cui la tensione di uscita risulta la somma della risposta alla componente continua ed alla componente sinusoidale del segnale di ingresso

$$v_o(t) = -V_{iDC}|W(0)| + V_{iAC}|W(j\omega_i)|+\sin\left(\omega_i t + \underline{/W(j\omega_i)}\right) =$$

$$= -\frac{V_{iDC}}{2} + \frac{V_{iAC}}{2\sqrt{2}}\sin\left(\omega_i t - \frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= -\frac{V_{iDC}}{2} - \frac{V_{iAC}}{2\sqrt{2}}\sin\left(\omega_i t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ω_i coincide esattamente con la frequenza di spezzamento per cui il modulo di W(jω) è ridotto di 3 dB $\left(=1/\sqrt{2}\right)$ rispetto al valore in continua.

ESERCIZIO O.5

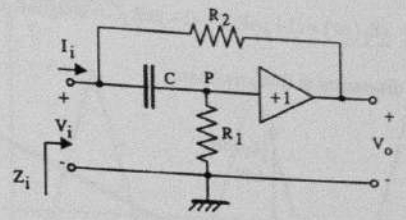
Sia dato il circuito di figura nel quale l'amplificatore a guadagno unitario è ideale (resistenza di ingresso infinita e resistenza di uscita nulla)

Dati: $R_1 = 4.7\ k\Omega$; $R_2 = 1\ k\Omega$; $C = 27\ nF$.

1) Calcolare l'impedenza di ingresso Z_i

2) Tracciare il diagramma di Bode asintotico del modulo e della fase di Z_i (intesa come funzione di trasferimento fra corrente e tensione) specificando le frequenze di spezzamento e i valori del modulo (in dB) in bassa e alta frequenza.

3) Calcolare i valori numerici del modulo e della fase Z_i alla frequenza f = 3 kHz.



SOLUZIONE

1) Calcolo di Z_i

$$V_o = V_P$$

$$I_i = \frac{V_i - V_o}{\frac{1}{sC}} + \frac{V_i - V_o}{R_2} = \left(\frac{1}{R_2}+sC\right)V_i - \left(\frac{1}{R_2}+sC\right)V_P = \left(\frac{1}{R_2}+sC\right)(V_i - V_P)$$

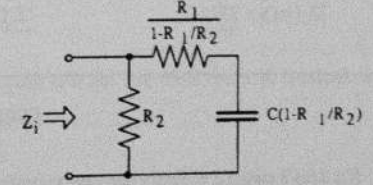
$$V_P = V_i\frac{R_1}{R_1+\frac{1}{sC}} = V_i\frac{sCR_1}{1+sCR_1}$$

$$I_i = \left(\frac{1}{R_2}+sC\right)V_i\left(1-\frac{sCR_1}{1+sCR_1}\right) = \frac{V_i}{R_2}\frac{1+sCR_2}{1+sCR_1}$$

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = R_2\frac{1+sCR_1}{1+sCR_2} = \frac{1}{\frac{1+sCR_2+sCR_1-sCR_1}{R_2(1+sCR_1)}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2}+\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{sC}{1+sCR_1}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{R_2}+\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{1}{\frac{1}{sC}+R_1}}$$

L'impedenza così ottenuta coincide con quella del circuito di figura che ne rappresenta un modello equivalente.



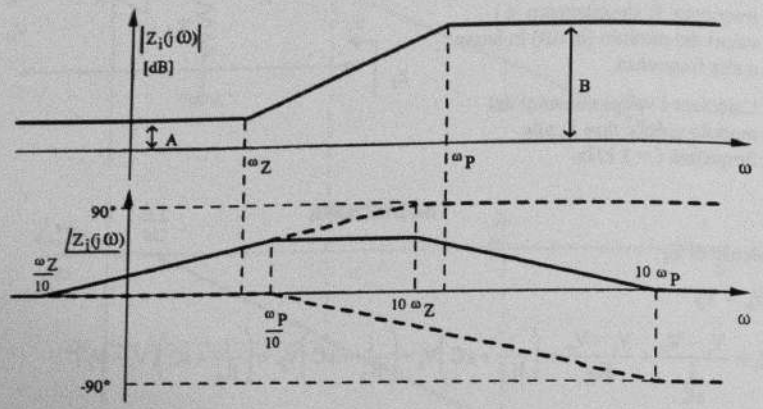
2) Diagramma di Bode

L'espressione del modulo e della fase di Z_i sono:

$$|Z_i(j\omega)| = R_2\frac{\sqrt{1+(\omega R_1 C)^2}}{\sqrt{1+(\omega R_2 C)^2}}$$

$$\underline{/Z_i(j\omega)} = \underline{/1 + j\omega R_1 C} - \underline{/1 + j\omega R_2 C} = \text{arctg}(\omega R_1 C) - \text{arctg}(\omega R_2 C)$$

e i diagrammi di Bode risultano:



dove sono stati definiti:

$$\omega_Z = \frac{1}{R_1 C}; \qquad A = 20\log_{10} R_2; \qquad \omega_P = \frac{1}{R_2 C}; \qquad B = 20\log_{10} R_1.$$

3) Calcolo di modulo e fase a 3 kHz

Il valore del modulo e della fase di Z_i alla frequenza di 3kHz si ottiene sostituendo tale valore nelle espressioni relative calcolate al punto precedente.

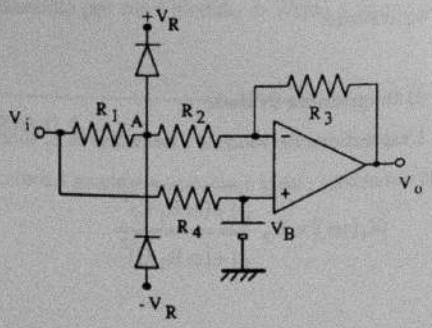
Risulta:

$$|Z_i(j\omega)| = 2311\Omega \qquad \underline{/Z_i(j\omega)} = 40.3°$$

ESERCIZIO O.6

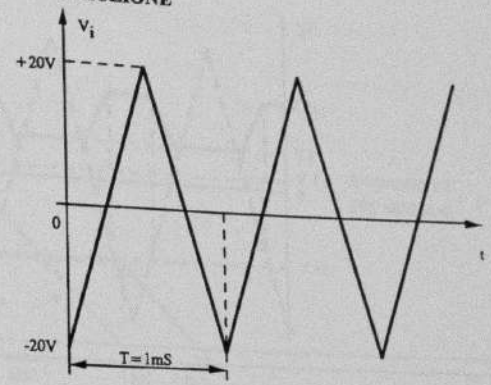
Sia dato il circuito di figura con operazionale e diodi ideali. Disegnare la forma d'onda della tensione di uscita V_o sapendo che la tensione di ingresso è un'onda triangolare di ampiezza ±20V e frequenza f = 1 kHz. Specificare i valori minimo e massimo della tensione di uscita.

Dati: $V_R = 3$ V, $V_B = 5$ V,
$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10$ kΩ.



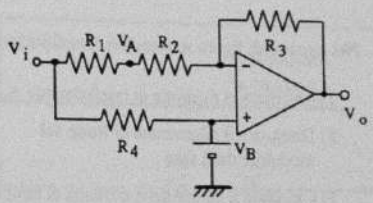
SOLUZIONE

L'andamento della tensione di ingresso è dato in figura.



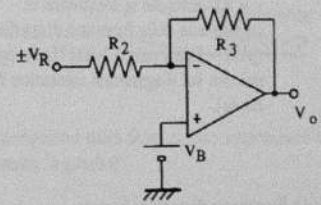
Conviene definire V_A il potenziale del nodo comune ai due diodi ed alle resistenze R_1 e R_2.

Finché $-V_R < V_A < V_R$ i due diodi, supposti ideali, sono contropolarizzati e perciò vengono sostituiti da circuiti aperti. La situazione è quindi la seguente:



$$V_o = -\frac{R_3}{R_1 + R_2} V_i + \left(1 + \frac{R_3}{R_1 + R_2}\right) V_B.$$

Quando $|V_A| > V_R$ uno dei due diodi entra in conduzione e la situazione diventa:



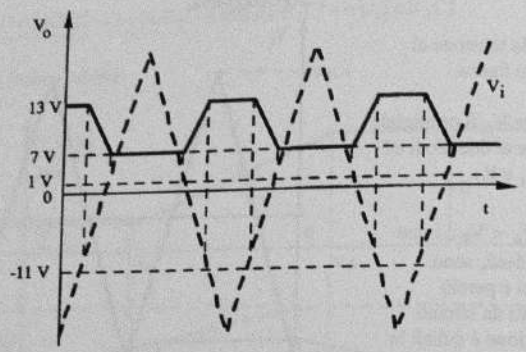
$$V_o = \pm V_R\left(-\frac{R_3}{R_2}\right) + V_B\left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) =$$

$$\pm V_R(-1) + 2\,V_B = \begin{cases} +7 \\ +13 \end{cases}$$

Le tensioni di ingresso in corrispondenza delle quali uno dei due diodi entra in conduzione si ricavano da: $V_A = \left(\frac{V_i}{R_1} + \frac{V_B}{R_2}\right)(R_1 // R_2) = \pm V_R$

$$\begin{cases} V_{i1} = R_1\left\{\frac{V_R}{R_P} - \frac{V_B}{R_2}\right\} = 2V_R - V_B = 1\,V \\ V_{i2} = R_1\left\{-\frac{V_R}{R_P} - \frac{V_B}{R_2}\right\} = -2V_R - V_B = -11\,V \end{cases}$$

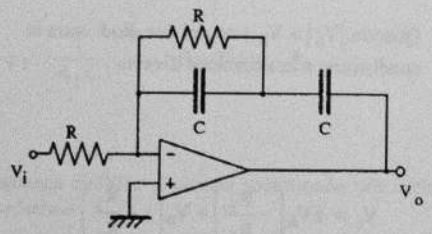
dove $R_P = R_1 // R_2$.
Il risultato è mostrato in figura.



ESERCIZIO O.7

Nel circuito di figura si consideri l'amplificatore operazionale ideale.

1) Calcolare la funzione di trasferimento $A_v = V_o/V_i$
2) Disegnare il diagramma di Bode del modulo e della fase
3) Calcolare il valore della costante di tempo $\tau = RC$ affinché la frequenza di transizione della funzione di trasferimento ($|Av| = 1$) sia pari a 1000 Hz (eseguire il calcolo sul diagramma asintotico di Bode).



SOLUZIONE

1) Funzione di trasferimento

La funzione di trasferimento vale:

$$W(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

$$Z_1(s) = R$$

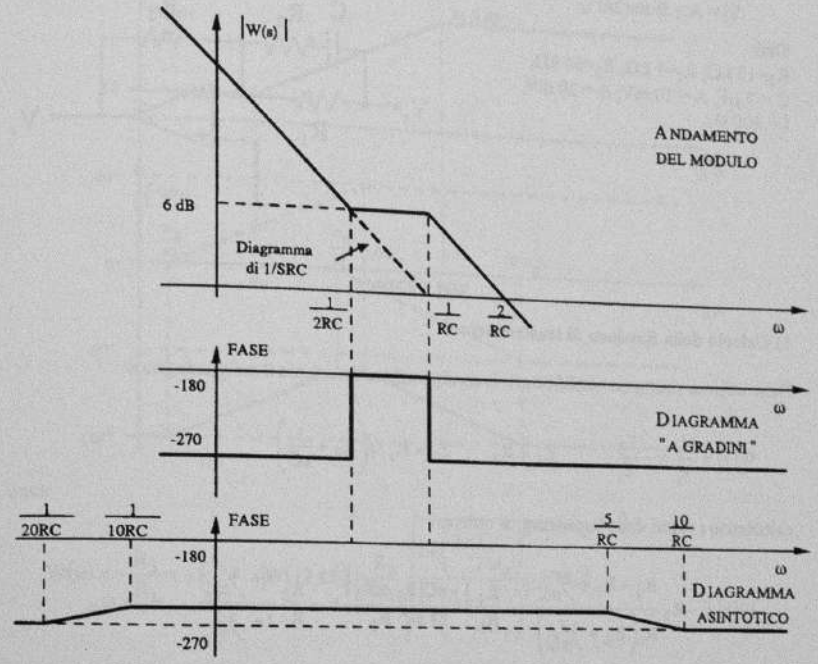
$$Z_2(s) = \frac{1}{sC} + R // \frac{1}{sC} = \frac{1}{sC} + \frac{\frac{R}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{sC} + \frac{R}{1+sCR} = \frac{1+sCR+sCR}{sC(1+sCR)}$$

da cui

$$W(s) = -\frac{1+2sCR}{sCR(1+sCR)}$$

2) Diagramma di Bode

Il diagramma di Bode risulta:



NOTA: Osservando i due diagrammi che riportano gli andamenti della fase, si può apprezzare la notevole approssimazione introdotta dal diagramma "a gradini".

3) Calcolo della costante di tempo

La frequenza di attraversamento risulta (dal diagramma di Bode asintotico) $\frac{2}{RC}\frac{1}{2\pi}$ Ponendola uguale a 1000 Hz si trova la costante di tempo:

$$\frac{2}{RC}\frac{1}{2\pi} = 1000 \quad \rightarrow \quad RC = \frac{1}{1000\,\pi} = 318\ \mu s$$

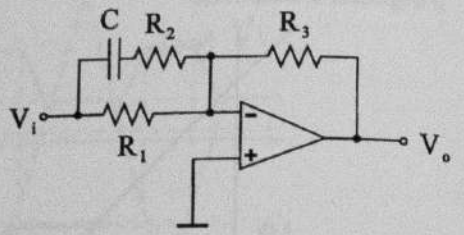
ESERCIZIO O.8

Dato il circuito di figura composto da un amplificatore operazionale ideale:

1) Determinare la funzione di trasferimento $W(s) = V_o/V_i$
2) Tracciare i diagrammi di Bode (modulo e fase) della W(s) trovata.

3) Calcolare l'espressione della tensione di uscita dell'amplificatore nell'ipotesi:
$V_i = A + B\cdot\sin(2\pi f t)$

Dati:
R_1=10 kΩ, R_2=1 kΩ, R_3=50 kΩ,
C = 3 μF, A = 10 mV, B = 30 mV,
f = 500 Hz.



SOLUZIONE

1) Calcolo della funzione di trasferimento:

Dallo schema risulta un amplificatore in configurazione invertente il cui guadagno è:

$$W(s)=\frac{V_o}{V_i}=-\frac{Z_2}{Z_1},\qquad Z_2=R_3,\qquad Z_1=R_1//\left(R_2+\frac{1}{sC}\right)$$

calcolando i valori delle impedenze, si ottiene:

$$W(s)=-R_3\frac{R_2+R_1+\frac{1}{sC}}{R_1\left(R_2+\frac{1}{sC}\right)}=-\frac{R_3}{R_1}\frac{1+sC(R_1+R_2)}{1+sC\cdot R_2}=-\frac{R_3}{R_1}\frac{1+\frac{s}{\omega_z}}{1+\frac{s}{\omega_p}},\qquad \omega_z<\omega_p$$

con: $\omega_z = 30.03\,\text{rad/s}$ $\omega_p = 333.3\,\text{rad/s}$

L'osservazione diretta della rete rivela la presenza di un polo, dovuto all'unico elemento reattivo presente, e di uno zero per il fatto che

$$|W(s)|_{s\to+\infty}=-\frac{R_3}{(R_1//R_2)}$$

Il guadagno di Bode coincide con W(0) (la capacità C è un circuito aperto).

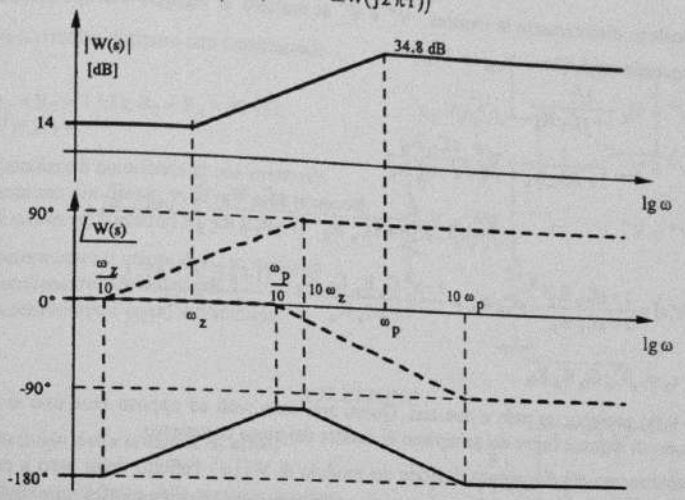
2) Diagrammi di Bode:

I diagrammi di Bode della FdT sono riportati in figura.

3) Tensione di uscita:

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$V_o = AW(0)+B|W(j2\pi f)|\cdot\sin\left(2\pi f t+\angle W(j2\pi f)\right)$$



dove:

$$W(0)=-\frac{R_3}{R_1}=-5,\qquad |W(j2\pi f)|=\frac{R_3}{R_1}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\pi f}{\omega_z}\right)^2}{1+\left(\frac{2\pi f}{\omega_p}\right)^2}}=54.7$$

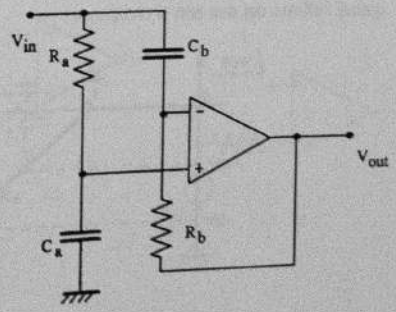
$$\angle W(j2\pi f)=-\pi+\text{arctg}\left(\frac{2\pi f}{\omega_z}\right)-\text{arctg}\left(\frac{2\pi f}{\omega_p}\right)=-3\ \text{rad}$$

ESERCIZIO O.9

Sia dato il circuito di figura composto da un operazionale ideale e dai seguenti componenti:

C_a = 20 nF; C_b = 1 nF; R_a = 4 kΩ; R_b = 1 kΩ;

1) Calcolare la funzione di trasferimento $W(s) = V_{out}/V_{in}$
2) Tracciare il diagramma di Bode asintotico del modulo di W(s)
3) Tracciare il diagramma di Bode asintotico della fase di W(s)



SOLUZIONE

Si calcolano distintamente le tensioni V^+ e V^- ai morsetti di ingresso dell'operazionale. Dalla loro uguaglianza si ricava V_{out} e $W(s)$.

$$V^+ = V_{in}\frac{1}{1+sC_aR_a}$$

$$V^- = V_{out}\frac{1}{1+sC_bR_b} + V_{in}\frac{sC_bR_b}{1+sC_bR_b}$$

$$V^+ = V^- \quad \Rightarrow \quad V_{out} = V_{in}\left(\frac{1}{1+sC_aR_a} - \frac{sC_bR_b}{1+sC_bR_b}\right)(1+sC_bR_b)$$

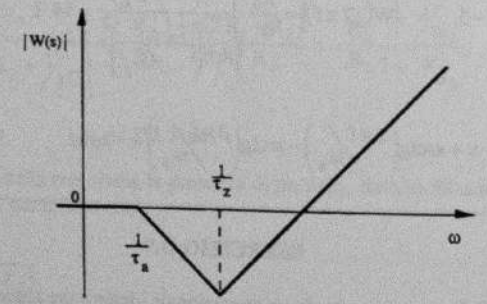
$$W(s) = \frac{1+sC_bR_b}{1+sC_aR_a} - sC_bR_b = \frac{1-s^2C_aR_aC_bR_b}{1+sC_aR_a} = \frac{(1+s\tau_z)(1-s\tau_z)}{1+sC_aR_a}$$

dove $\tau_z = \sqrt{C_aC_bR_aR_b}$.

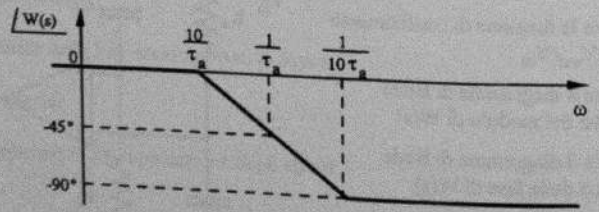
La W(s) presenta un polo e due zeri. Questi zeri sono reali ed opposti cioè uno si trova nel semipiano di destra e l'altro nel semipiano di sinistra del piano complesso.

Nel tracciamento del diagramma di Bode del modulo di $W(j\omega)$ l'effetto dello zero a parte reale positiva è analogo a quello dello zero a parte reale negativa, ovvero provoca una variazione di pendenza del diagramma di +20 dB/decade. Si ottiene:

$\tau_a = R_aC_a = 80\,\mu S \qquad \tau_z = 8.94\,\mu S$



Nel tracciamento del diagramma delle fasi occorre invece tenere conto che l'effetto dello zero a parte reale positiva provoca una diminuzione della fase (si comporta come se fosse un polo) e quindi l'effetto dei due zeri si compensa.



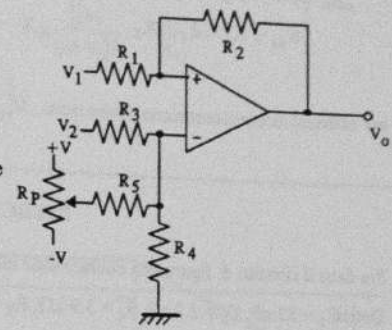
ESERCIZIO O.10

Sia dato il circuito di figura con operazionale ideale:

Dati: $R_1 = R_3 = 1\ k\Omega$; $R_2 = R_4 = 47\ k\Omega$; $V = 2.5V$

1) Calcolare il contributo di una eventuale tensione di offset $e_o = 20$ mV sulla tensione di uscita (si consideri $R_P << R_5$)

2) Determinare il valore di R_5 in modo da compensare tale offset con il potenziometro posto a fine corsa.

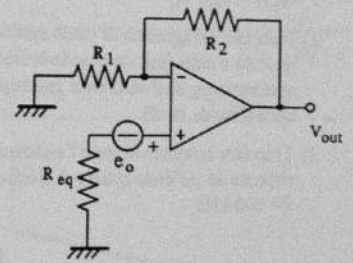


SOLUZIONE

1) Contributo della tensione di offset

Il calcolo dell'effetto della tensione di offset dell'operazionale si fa annullando i due generatori V_1 e V_2. Conviene anche disegnare uno schema semplificato. Si pone:

$$R_{eq} = R_3 // R_4 // R_5.$$



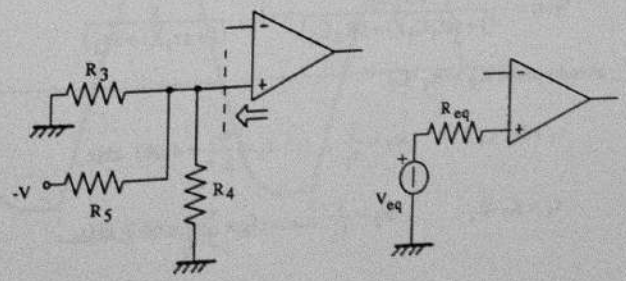
La tensione di offset viene amplificata di un fattore pari al guadagno di uno stadio non invertente in quanto non c'è caduta su R_{eq} perché l'operazionale non assorbe corrente. Risulta:

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\cdot e_o$$

2) Calcolo di R_5:

Il circuito per la compensazione dell'offset deve fornire al morsetto non invertente una tensione pari a $-e_o$. Con il verso indicato per e_o il cursore deve essere a fine corsa dalla parte di -V.

Ovviamente se la tensione di offset dovesse risultare negativa, il cursore dovrà essere mosso nella direzione opposta. Dalla schematizzazione secondo Thevenin si ottiene:



$$\text{con} \begin{cases} V_{eq} = \dfrac{-V(R_3 // R_4)}{R_5 + (R_3 // R_4)} \\ R_{eq} = R_3 // R_4 // R_5 \end{cases}$$

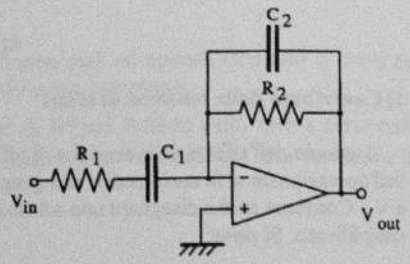
per ottenere la compensazione deve essere: $V_{eq} = -e_o \quad \Rightarrow \quad R_5 = \left(\dfrac{V}{e_o} - 1\right)(R_3 // R_4)$

ESERCIZIO O.11

Sia dato il circuito di figura con operazionale ideale:

Dati: $C_1 = 10$ nF; $C_2 = 2.2$ nF; $R_1 = 3.9$ kΩ; $R_2 = 1.2$ kΩ;

1) Calcolare la funzione di trasferimento $W(s) = V_{out}/V_{in}$
2) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase riportando le frequenze di spezzamento ed il valore del guadagno a centro banda in dB
3) Tracciare qualitativamente l'andamento della risposta ad un'onda quadra di frequenza f = 100 kHz



SOLUZIONE

1) Calcolo della funzione di trasferimento:

È un amplificatore in configurazione invertente. La FdT vale:

$$W(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} \quad \text{dove:}$$

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{sC_1} = \frac{1+sC_1R_1}{sC_1} \qquad Z_2 = R_2 // \frac{1}{sC_2} = \frac{R_2}{1+sR_2C_2}$$

e quindi:

$$W(s) = -\frac{sR_2C_1}{(1+sR_1C_1)(1+sR_2C_2)} = -K_B \cdot \frac{s}{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}$$

avendo posto $K_B = R_2 \cdot C_1$

$$\tau_1 = R_1 \cdot C_1, \qquad \omega_1 = \frac{1}{\tau_1}, \qquad f_1 = \frac{\omega_1}{2\cdot\pi} = 4.083 \text{ kHz},$$

$$\tau_2 = R_2 \cdot C_2, \qquad \omega_2 = \frac{1}{\tau_2}, \qquad f_2 = \frac{\omega_2}{2\cdot\pi} = 60.3 \text{ kHz}$$

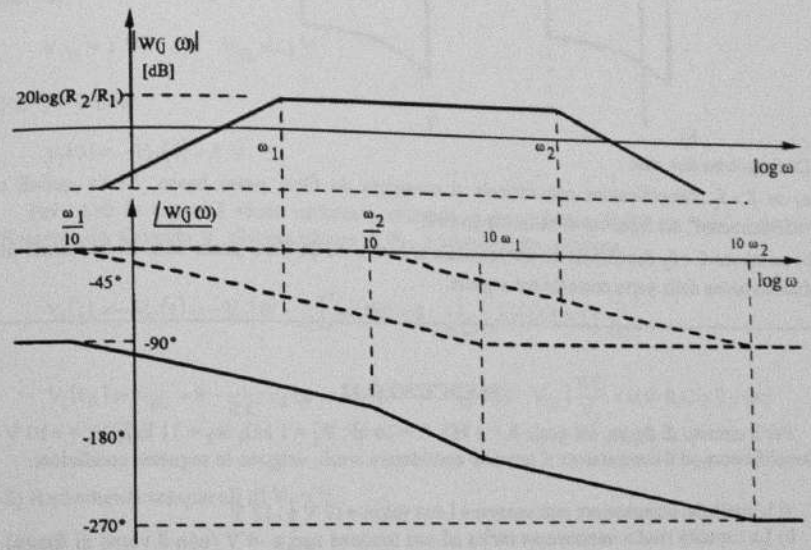
2) Diagrammi di Bode:

Nell'ipotesi che valga l'approssimazione $f_1 << f_2$, (i poli sono molto separati) si ottiene:

$$\text{Per } \omega_1 << \omega << \omega_2 \quad \Rightarrow \quad |W(j\omega)| = -K_B \frac{|j\omega|}{|j\omega\,\tau_1||1|} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$|W(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|W(j\omega)| = 20\log_{10}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

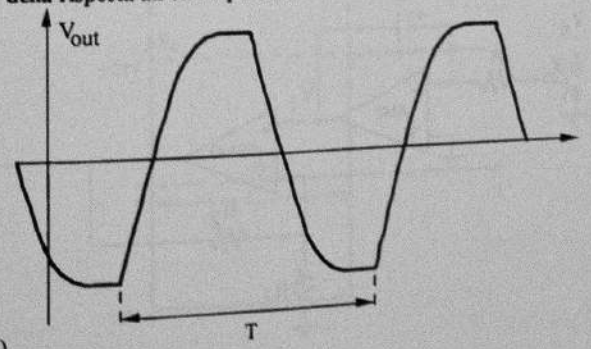
e i diagrammi di Bode risultano:



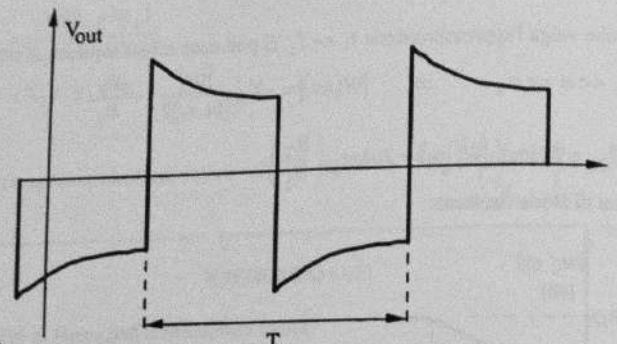
L'inversione di segno del guadagno della FdT, introduce uno sfasamento costante di $-180°$, mentre lo zero nell'origine introduce uno sfasamento costante di $+90°$.

NOTA: il diagramma dei moduli attraversa l'asse delle ascisse solo se $R_2 > R_1$, altrimenti il diagramma rimane sempre sotto a tale asse.

3) Andamento della risposta all'onda quadra:



a)



b)

Distinguiamo due casi:

a) se $f > f_2$ l'amplificatore operazionale si comporta da filtro passa basso. Si ha quindi un "addolcimento" nei fronti ripidi dell'onda quadra;

b) se invece $f < f_2$ l'amplificatore operazionale si comporta da filtro passa alto. Si ha quindi una deformazione della parte costante del segnale.

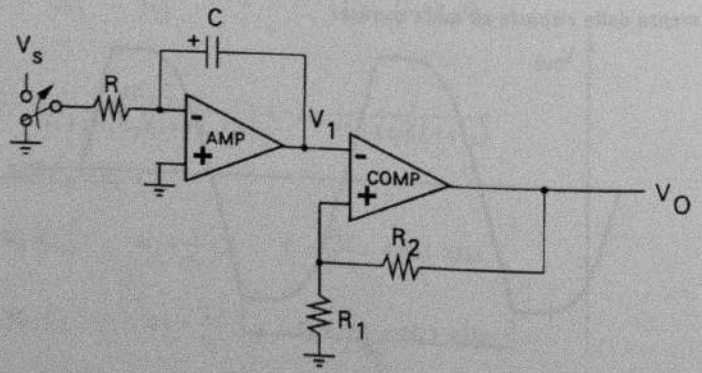
ESERCIZIO O.12

Per il circuito di figura, nel quale R = 1 kΩ, C = 10 nF; R_1 = 1 kΩ, R_2 = 11 kΩ, V_s = +10 V e l'amplificatore ed il comparatore si possono considerare ideali, valgono le seguenti condizioni:

a) L'uscita del comparatore può assumere i due valori +12 V e -12 V
b) La capacità risulta inizialmente carica ad una tensione pari a -8 V (con il verso di figura) e l'uscita del comparatore è, ovviamente, negativa.
c) All'istante t = 0, il deviatore viene spostato su V_s.

Determinare:

1) Dopo quanto tempo commuta il comparatore
2) Gli andamenti nel tempo di V_1 e V_o



SOLUZIONE

1) Istante di commutazione

Il comparatore ha una isteresi simmetrica rispetto all'origine di ampiezza:

$$V_H = 2V_o \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 2\ V$$

per cui:

$$V_{TH} = 1\ V \quad \text{e} \quad V_{TL} = -1\ V.$$

Per t = 0 si ha:

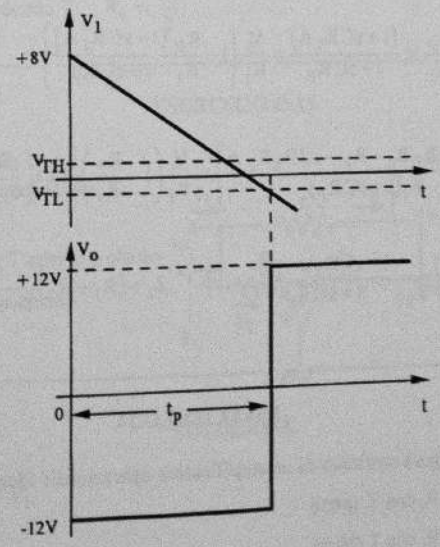
$$V_1(0) = -V_C(0) = 8\ V.$$

Per t>0 la capacità viene caricata a corrente costante pari a V_s/R, per cui V_1 decresce linearmente. Quando V_1 diventa minore di V_{TL} il comparatore commuta.

$$V_1(t) = -V_C(t) = -V_C(0) - \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)dt = 8 - \frac{1}{RC}\int_0^t V_S(t)dt = 8 - \frac{V_S\, t}{RC}$$

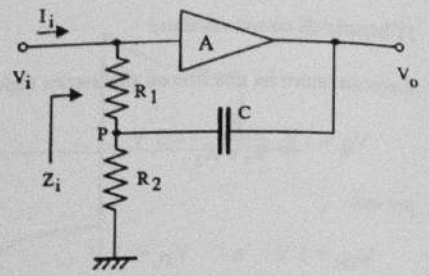
$$V_1(t_P) = V_{TL} = 8 - \frac{1}{RC} V_S\, t_P \qquad \Rightarrow \qquad t_P = (8 - V_{TL})\frac{RC}{V_S} = 0.9 \cdot RC = 9\,\mu\text{sec}$$

2) Andamenti temporali di V_1 e V_o



ESERCIZIO O.13

Calcolare l'impedenza di ingresso del seguente circuito, in cui l'amplificatore A è ideale (impedenza di ingresso infinita, impedenza di uscita nulla, guadagno A).



SOLUZIONE

Dall'osservazione dello schema si ricava:

$$\begin{cases} I_i = \dfrac{V_i - V_P}{R_1} \\ \dfrac{V_i - V_P}{R_1} + sC(V_o - V_P) = \dfrac{V_P}{R_2} \\ V_o = AV_i \end{cases}$$

$$\frac{V_i}{R_1} + sCA\,V_i = V_P\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + sC\right) \qquad \frac{V_i}{R_1}(1 + sCR_1A) = \frac{V_P}{R_P}(1 + sCR_P)$$

dove $R_P = R_1 // R_2$

$$I_i = \frac{V_i}{R_1} - \frac{1}{R_1}\frac{R_P}{R_1}V_i\frac{(1+sCR_1A)}{1+sCR_P} = \frac{V_i}{R_1}\left\{1 - \frac{R_P}{R_1}\frac{(1+sCR_1A)}{1+sCR_P}\right\} =$$

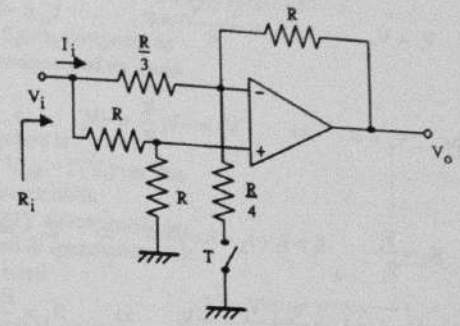
$$= \frac{V_i}{R_1}\left\{\frac{R_1 + sCR_PR_1 - R_P - sCR_1R_PA}{R_1(1+sCR_P)}\right\} = \frac{V_i}{R_1}\left(1 - \frac{R_P}{R_1}\right)\left\{1 + s\left(\frac{R_1R_P}{R_1 - R_P}\right)C(1-A)\right\}\frac{1}{1+sCR_P}$$

$$\frac{I_i}{V_i} = Y_i = \frac{1}{(R_1+R_2)}\frac{1+sCR_2(1-A)}{1+sCR_P} \quad \Rightarrow \quad Z_i = (R_1+R_2)\frac{1+sCR_P}{1+sCR_2(1-A)}$$

ESERCIZIO O.14

Dato il circuito di figura costituito da un amplificatore operazionale ideale, trovare:

1) $A_V = V_o / V_i$ e R_i con T aperto
2) $A_V = V_o / V_i$ e R_i con T chiuso



SOLUZIONE

1)

$$V_+ = \frac{V_i}{2}; \qquad V_o = -R\left(V_i - \frac{V_i}{2}\right)\frac{1}{R/3} + \frac{V_i}{2} = -3\frac{V_i}{2} + \frac{V_i}{2} = -V_i$$

$$I_i = \frac{V_i}{2R} + \left(V_i - \frac{V_i}{2}\right)\frac{3}{R} = \left(\frac{1}{2R} + \frac{3}{2R}\right)V_i = \frac{2}{R}V_i; \qquad R_i = \frac{R}{2}$$

2)

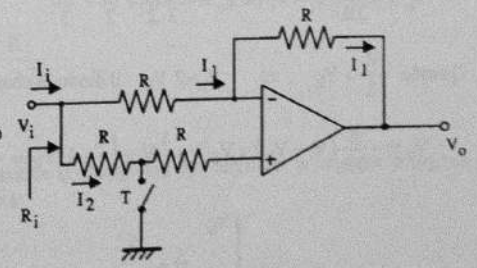
$$V_+ = \frac{V_i}{2}; \qquad V_o = -R\left[\left(V_i - \frac{V_i}{2}\right)\frac{1}{R/3} - \frac{V_i}{2}\frac{4}{R}\right] + \frac{V_i}{2} = -V_i + 2V_i = V_i$$

I_i non è cambiata chiudendo T: $R_i = \dfrac{R}{2}$.

ESERCIZIO O.15

Dato il circuito di figura con amplificatore operazionale ideale, trovare:

1) $A_V = V_o / V_i$ con T aperto e chiuso
2) R_i con T aperto e chiuso



SOLUZIONE

1) Calcolo di $A_V = V_o / V_i$

Con T aperto si ha:

$V_+ = V_i \qquad V_- = V_+ \qquad I_1 = \frac{V_i - V_-}{R} = 0 \qquad V_o = -R \cdot I_1 + V_- = V_- = V_i$

$A_{VA} = +1$

Con T chiuso si ha: $V_+ = 0 \quad \Rightarrow \quad V_o = -V_i \frac{R}{R} = -V_i \quad \Rightarrow \quad A_{VC} = -1$

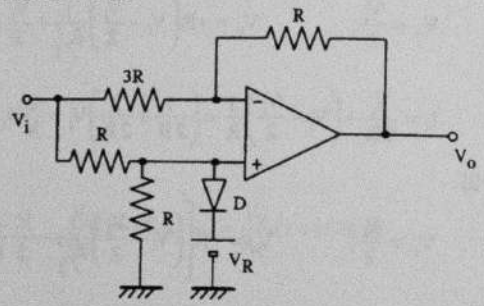
2) Calcolo di R_i

Con T aperto si ha: $R_i = \frac{V_i}{I_i} \qquad I_i = I_1 + I_2 = 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_i = \infty$

Con T chiuso si ha: $I_i = I_1 + I_2 = \frac{V_i}{R} + \frac{V_i}{R} = \frac{2}{R} V_i \quad \Rightarrow \quad R_i = \frac{R}{2}$

ESERCIZIO O.16

Dato il circuito di figura con amplificatore operazionale e diodo ideali, trovare $V_o = f(V_i)$



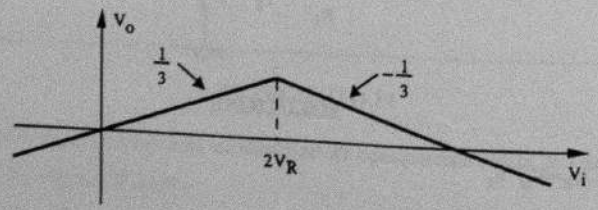
SOLUZIONE

$V_+ = \frac{V_i}{2}$ finché $V_+ < V_R$ il diodo D non conduce.

$V_o = -\frac{R}{3R}(V_i - V_+) + V_+ = -\frac{1}{3}\frac{V_i}{2} + \frac{V_i}{2} = \frac{V_i}{3}$

Quando $\frac{V_i}{2} > V_R \quad \Rightarrow \quad V_i > 2\,V_R$ il diodo D conduce.

$V_o = -\frac{R}{3R}(V_i - V_R) + V_R = -\frac{1}{3}V_i + \left(\frac{1}{3}+1\right)V_R = -\frac{1}{3}V_i + \frac{4}{3}V_R$

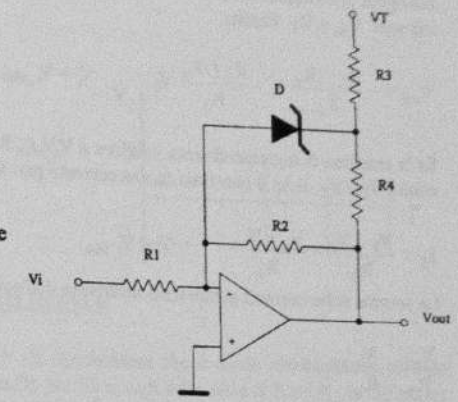


ESERCIZIO O.17

Dato il circuito di figura, composto da un amplificatore operazionale ed un diodo zener ideali:

1) Determinare e tracciare la transcaratteristica $V_{out} = f(V_i)$ per una tensione di ingresso variabile nell'intervallo +/- 20V determinando le coordinate dei punti di spezzamento e le pendenze dei vari tratti.

2) Calcolare il valore di V_i per cui $V_{out} = 8V$ e verificare il risultato sul grafico.



Dati: $R_1 = 125\ k\Omega$, $R_2 = 100\ k\Omega$, $R_3 = 200\ k\Omega$, $R_4 = 100\ k\Omega$, $V_T = 15\ V$, $V_Z = 8\ V$

SOLUZIONE

1) Transcaratteristica

Nell'ipotesi che il diodo zener sia un circuito aperto, si possono calcolare la tensione V_D fra catodo ed anodo. Tale tensione deve risultare positiva ed inferiore a V_Z per convalidare l'ipotesi. Le tensioni sul diodo risultano:

$V_A = 0$

$V_K = V_T \frac{R_4}{R_3 + R_4} + V_{out} \frac{R_3}{R_3 + R_4}$

$V_{out} = -\frac{R_2}{R_1} V_i$

$V_D = V_K - V_A = V_T \frac{R_4}{R_3 + R_4} - V_i \frac{R_2}{R_1} \frac{R_3}{R_3 + R_4}$

e quindi deve valere:

$0 \le V_D \le V_Z$

Sostituendo il valore di V_D nella disequazione si ottengono i due limiti per la tensione di ingresso V_i entro i quali rimane valida l'ipotesi fatta:

$V_i \le V_T \frac{R_4}{R_3} \frac{R_1}{R_2} = V_{i_Max}$

$V_i \ge V_T \frac{R_4}{R_3} \frac{R_1}{R_2} - V_Z \frac{R_3 + R_4}{R_3} \frac{R_1}{R_2} = V_{i_Min}$

Quando si eccedono i limiti appena visti, lo zener entra in conduzione modificando il circuito. In particolare, se la tensione di ingresso diventa superiore a V_{i_Max} lo zener entra in conduzione diretta e quindi risulta V_D=0. Le resistenze R_2 ed R_4 risultano in parallelo mentre R_3 risulta

collegata al morsetto invertente. Il circuito si può studiare come un sommatore invertente a due ingressi: V_{in} e V_T. Risulta:

$$V_{out} = -\frac{R_2 // R_4}{R_1} V_i - \frac{R_2 // R_4}{R_3} V_T \qquad V_i > V_{i_Max}$$

Se la tensione di ingresso diventa inferiore a V_{i_Min} lo zener entra in conduzione inversa e quindi risulta $V_D = V_Z$. Esso è percorso da una corrente pari a:

$$I_Z = \frac{V_T - V_Z}{R_3} - \frac{V_Z - V_{out}}{R_4} \qquad V_i < V_{i_Min}$$

La somma delle correnti al morsetto invertente dell'operazionale fornisce:

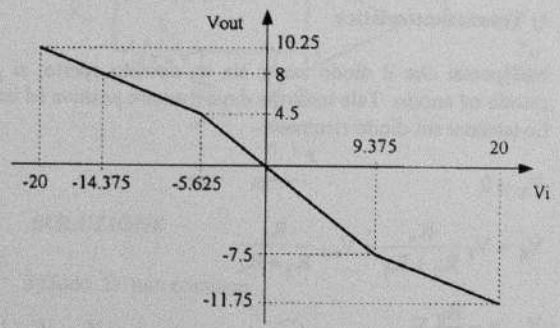
$$\frac{V_{out}}{R_2} + \frac{V_i}{R_1} + I_Z = 0$$

da cui, sostituendo l'espressione di I_Z e sviluppando i calcoli, si ottiene:

$$V_{out} = -\frac{R_2 // R_4}{R_1} V_i + \frac{R_2 // R_4}{R_3 // R_4} V_Z - \frac{R_2 // R_4}{R_3} V_T \qquad V_i < V_{i_Min}$$

Il grafico della transcaratteristica è riportato in figura assieme ai risultati dei calcoli.
E' da notare che le pendenze dei due tratti esterni della transcaratteristica coincidono. Infatti le equazioni mostrano che il coefficiente di V_i è lo stesso nelle due condizioni, e vale:

$$\frac{dV_{out}}{dV_i} = -\frac{R_2 // R_4}{R_1} V_i$$



2) Calcolo di V_{in}

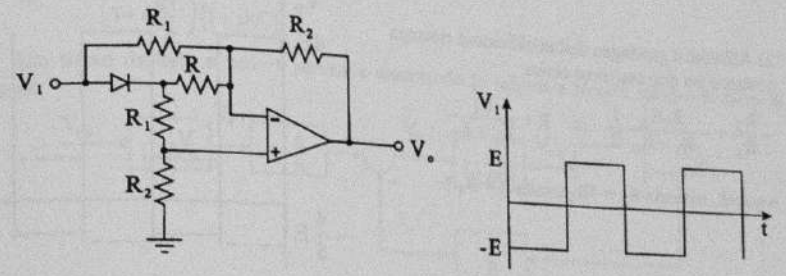
Dalla figura (e dalle equazioni) si vede che il punto richiesto giace nel tratto più a sinistra ($V_{in} < V_{in_Min}$) della caratteristica. Utilizzando l'espressione calcolata in precedenza si ricava il valore cercato come riportato nella figura precedente.

ESERCIZIO O.18

Dato il circuito di figura, composto da un amplificatore operazionale e da un diodo ideali, sapendo che la tensione di ingresso V_1 ha l'andamento di figura, determinare:

1) L'andamento della tensione di uscita V_o dato $R = R_1$
2) Il valore della resistenza R in modo che il guadagno dell'amplificatore rimanga costante

(dati: $R_2 = 4\,R_1$).

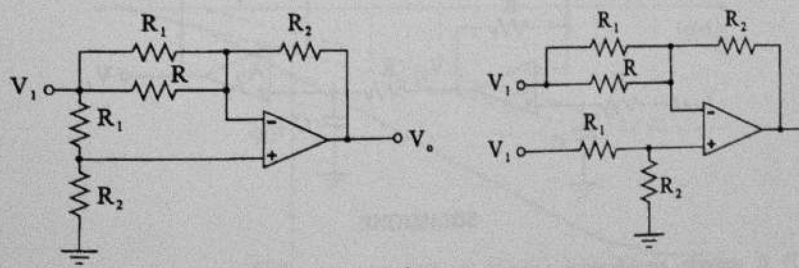


SOLUZIONE

1a) Consideriamo la situazione in cui $V_1 = -E$. Ipotizziamo che il diodo sia interdetto. In tale situazione, la corrente nella resistenza R è nulla perchè ai capi della serie di R ed R_1 la differenza di potenziale è zero ($V_- = V_+$), per cui risulta:
$V_- = V_+ = 0$
(si ricorda che anche la corrente in R_2 è nulla in quanto L'amplificatore operazionale ideale non assorbe corrente). Il circuito di figura si riduce, quindi, a quello di un amplificatore in configurazione invertente. Si osservi che la tensione ai capi del diodo vale -E, per cui è verificata l'ipotesi di diodo interdetto. La tensione di uscita vale:

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_1 = 4E$$

1b) Consideriamo ora la situazione in cui $V_1 = E$. Ipotizziamo che il diodo sia in conduzione. Il circuito che ne risulta è mostrato in figura.



La tensione al morsetto non invertertente risulta:

$$V_+ = V_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Si noti che la corrente che scorre nel diodo è data dalla somma delle correnti che fluiscono in R e R_1 che sono entrambe positive se $V_1 > 0$.
Per calcolare la tensione di uscita applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti:

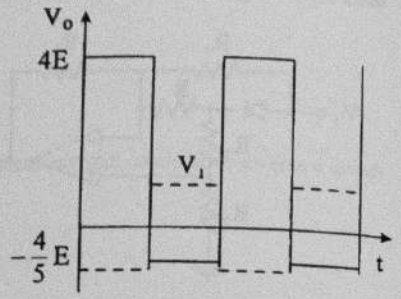
$$V_o = -\frac{R_2}{R_1 // R} V_1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1 // R}\right) \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{R} V_1 = -\frac{4}{5} E$$

dove per il risultato finale si sono sfruttati i dati del problema. L'andamento della tensione di uscita è riportato in figura.

2) Affinchè il guadagno dell'amplificatore rimanga costante nei due casi deve essere:

$$-\frac{R_2}{R_1} = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{R_1^2}{R_1 + R_2}$$

e quindi, essendo $R_2 = 4R_1$ risulta $R = R_1/5$.

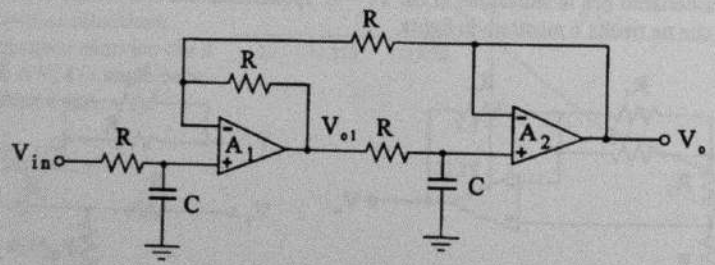


ESERCIZIO O.19

Dato il circuito di figura rappresentante un filtro attivo realizzato con amplificatori operazionali ideali, determinare:

1) la funzione di trasferimento del filtro $W(s) = V_o(s)/V_{in}(s)$;
2) il valore dell'amplificazione del filtro alla pulsazione $\omega = 6$krad/s.

Si disegni, inoltre, il diagramma di Bode del modulo e della fase di W(s).
Dati: $R = 10k\Omega$, $C = 100nF$



SOLUZIONE

1) Il secondo amplificatore operazionale A2 viene utilizzato come "buffer", cioè come amplificatore a guadagno unitario ad impedenza di ingresso infinita e impedenza di uscita nulla. Con riferimento alla figura possiamo scrivere:

$$V_{+1} = V_{in}\frac{1}{1+sRC}$$

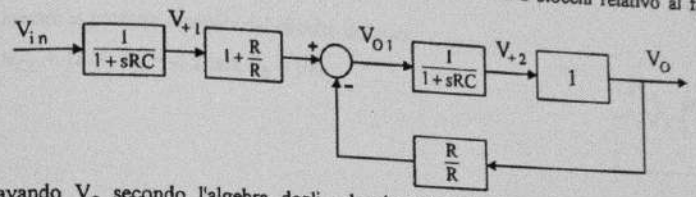
$$V_{o1} = -\frac{R}{R}V_o + \left(1+\frac{R}{R}\right)V_{+1} = -V_o + 2V_{+1}$$

$$V_o = V_{+2} = V_{o1}\frac{1}{1+sRC}$$

dove per calcolare V_{o1} si è applicato il principio di sovrapposizione degli effetti. Risolvendo in funzione di V_o otteniamo:

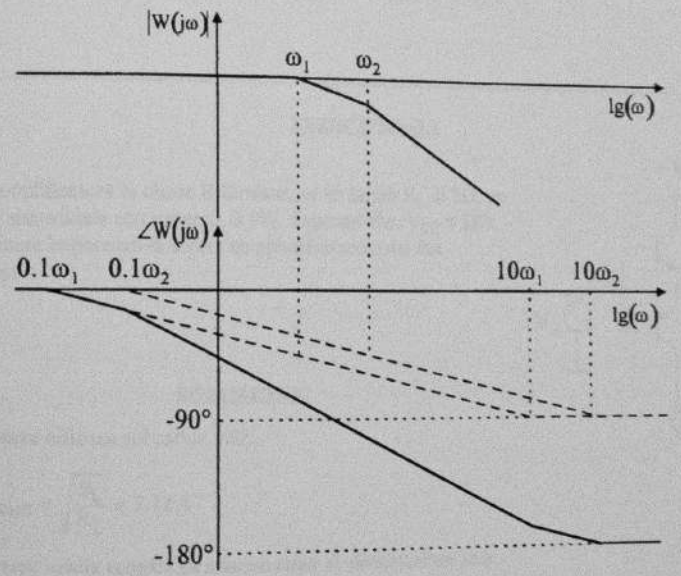
$$V_o = V_{in}\frac{1}{\left(1+s\frac{RC}{2}\right)(1+sRC)}$$

Allo stesso risultato si poteva pervenire disegnando lo schema a blocchi relativo al filtro di figura:



Ricavando V_o secondo l'algebra degli schemi a blocchi si perviene allo stesso risultato precedentemente trovato.

Il diagramma di Bode del modulo e della fase di W(jω) è riportato nella figura seguente. I due poli sono a pulsazione $\omega_1 = 1/RC = 1$ krad/s e $\omega_2 = 2/RC = 2$ krad/s rispettivamente.



2) Per calcolare il valore dell'amplificazione del filtro ad una data pulsazione basta semplicemente calcolare il valore del modulo di W(jω) calcolato a quella frequenza:

$$|W(j\omega')| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega'}{\omega_1}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega'}{\omega_2}\right)^2}}$$

Utilizzando i dati del problema si ricava:

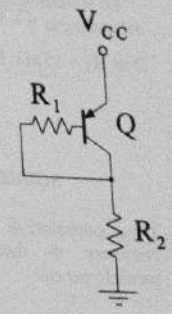
$|W(j\omega')| = 0.052 \quad (-25.7\text{dB})$

ESERCIZI "QUICK"

ESERCIZIO Q.1

Determinare la potenza dissipata dal circuito di figura.

Dati: $V_{CC} = 18$ V, $I_B = -0.2$ mA, $\beta_F = 100$

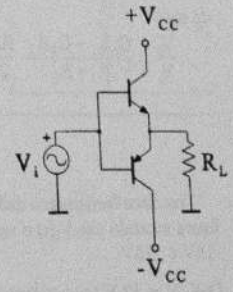


SOLUZIONE

$$P_D = V_{CC} I_E = -V_{CC}(I_B + I_C) = -V_{CC} I_B (1 + \beta_F) = 0.396 \text{ W}$$

ESERCIZIO Q.2

Un amplificatore in classe B fornisce, su un carico R_L di 2Ω, un segnale sinusoidale con potenza di 9W. Sapendo che $V_{CC} = 18$V, determinare la potenza dissipata complessivamente dai due transistor.



SOLUZIONE

La corrente efficace sul carico vale:

$$I_{LRMS} = \sqrt{\frac{P_L}{R_L}} = 2.12\,\text{A}$$

La corrente media erogata da ciascun ramo di alimentazione vale:

$$I_{dc} = \frac{I_{Lpeak}}{\pi} = \frac{\sqrt{2} \cdot I_{LRMS}}{\pi} = 0.955\,\text{A}$$

La potenza complessivamente erogata dalle due alimentazioni vale:

$$P_{dc} = 2 \cdot V_{CC} \cdot I_{dc} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_{CC} \cdot I_{LRMS} = 34.4\,\text{W}$$

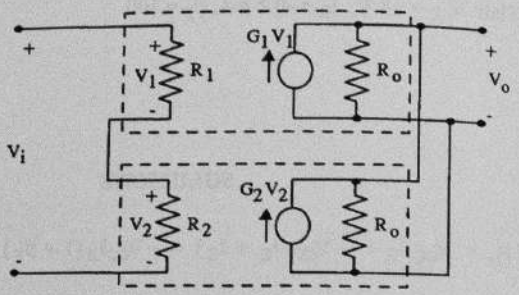
Pertanto, la potenza dissipata nei transistor vale:

$$P_D = P_{dc} - P_L = 25.4\,\text{W}$$

ESERCIZIO Q.3

Lo schema di figura rappresenta il collegamento di due amplificatori. Determinare l'espressione del guadagno $A = V_o/V_i$ dell'amplificatore composto.

Dati: $R_1 = 25\ k\Omega$; $R_2 = 5\ k\Omega$; $G_1 = 50\ mS$; $G_2 = 200\ mS$; $R_o = 35\ k\Omega$;



SOLUZIONE

I due generatori di corrente e le due resistenze di uscita risultano in parallelo per cui:

$$V_0 = (G_1V_1 + G_2V_2)\frac{R_0}{2}$$

Inoltre

$$V_1 = V_i\frac{R_1}{R_2+R_1} \qquad e \qquad V_2 = V_i\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

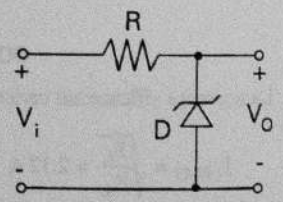
da cui:

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{G_1R_1+G_2R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{R_0}{2} = 1312.5$$

ESERCIZIO Q.4

Tracciare l'andamento della tensione $V_o(t)$ del circuito di figura sapendo che $V_i(t)$ e' una tensione che varia a rampa fra -15V e +15V.

Dati: $V_z = 12$ V (zener ideale), $R = 1\ k\Omega$



SOLUZIONE

Vi è una tensione a rampa.

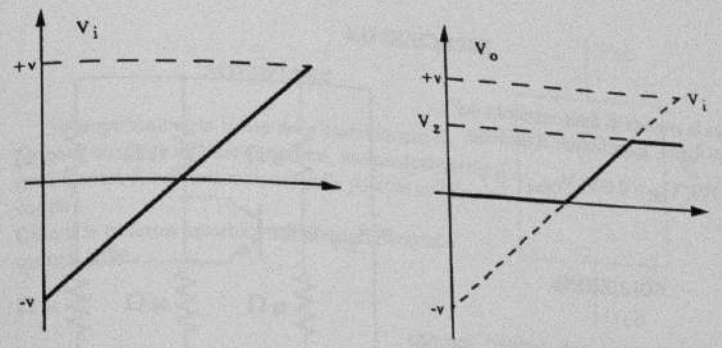
-Per $V_i < 0$ il diodo conduce e la tensione ai suoi capi è zero.

$V_0 = 0$

-Per $0 < V_i < V_z$ lo zener non conduce e quindi $V_0 = V_i$ perché la caduta su R è nulla.

-Per $V_i > V_z$ lo zener conduce e la tensione ai suoi capi vale V_z

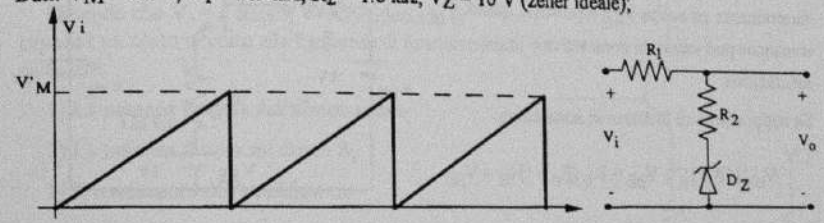
$V_0 = V_z$



ESERCIZIO Q.5

Dato lo schema di figura tracciare l'andamento della tensione di uscita $V_O(t)$.

Dati: $V_M = 50$ V; $R_1 = 6.5\ k\Omega$; $R_2 = 1.8\ k\Omega$; $V_Z = 10$ V (zener ideale);



SOLUZIONE

-Per $V_i < V_z$ lo zener non conduce, perciò e $V_0 = V_i$.

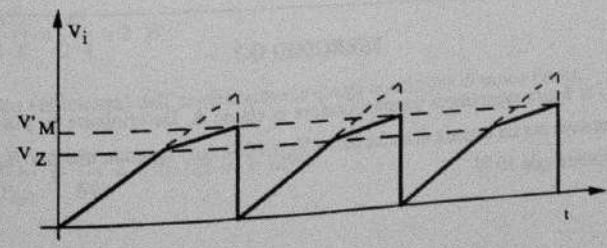
-Per $V_i > V_z$ circola una corrente I e quindi la tensione di uscita vale

$$V_0 = V_Z + R_2I = V_Z + R_2\frac{V_i - V_Z}{R_1+R_2}$$

e vale

$$V_{0MAX} = V'_M = V_Z\frac{R_1}{R_1+R_2} + V_M\frac{R_2}{R_1+R_2} = 37.6\,V$$

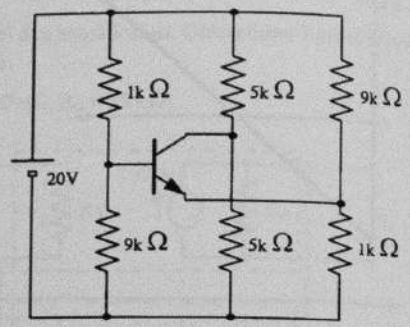
Quindi:



ESERCIZIO Q.6

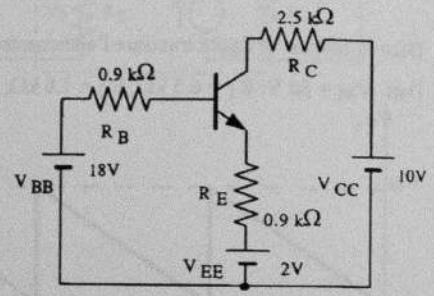
Determinare la regione di funzionamento del transistor di figura, giustificando il risultato.

Dati: $\beta_F = 100$; $V_{BE} = 0.6$ V; $V_{CEsat} = 0$ V



SOLUZIONE

Conviene schematizzare i vari partitori secondo Thevenin. Si ottiene lo schema di figura:



Si vede che la giunzione di base è polarizzata direttamente ed anche V_{CE} è positiva, quindi il transistor può essere in zona attiva o in saturazione.

Se supponiamo di lavorare in zona attiva:

$$V_{BB} = R_B I_B + V_{BE} + R_E (\beta_F + 1) I_B + V_{EE}$$

da cui:

$$I_B = \frac{(V_{BB} - V_{BE} - V_{EE})}{(R_B + R_E(\beta_F + 1))} = 168\,\mu A \qquad I_C = \beta_F \cdot I_B = 16.8\ mA$$

Ma il valore massimo di I_c (transistor saturo e V_{CEsat}=0) vale:

$$I_{C\,max} = \frac{(V_{CC} - V_{EE})}{R_c + R_E \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right)} = 2.35\,mA$$

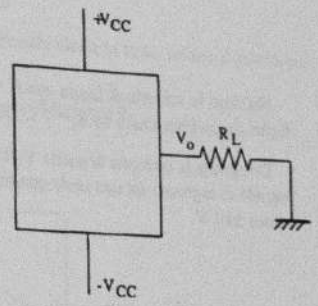
Quindi il transistor non può essere in zona attiva ma è in saturazione.

ESERCIZIO Q.7

Il blocco di figura rappresenta un amplificatore in classe A. Determinare la potenza assorbita dall'alimentazione per un segnale di uscita pari a $V_o = 10 \sin(\omega t)$ sapendo che per $V_o = 2 \sin(\omega t)$ la potenza assorbita vale 10 W.

SOLUZIONE

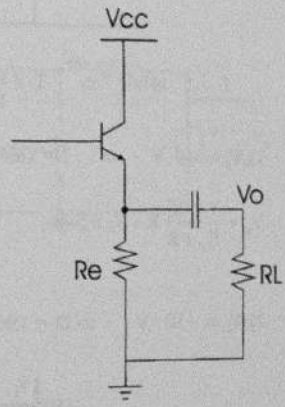
Un amplificatore in classe A ha assorbimento di potenza costante dall'alimentazione, indipendentemente (nell'ipotesi di non saturazione) dalla potenza inviata al carico.
Quindi la potenza assorbita dall'alimentazione vale ancora 10W.



ESERCIZIO Q.8

Sia dato lo schema di figura di un amplificatore di potenza in classe A.

Dati: $V_{CC} = 32$ V, $R_e = 8\ \Omega$, $R_L = 4\Omega$, $I_{CQ} = 2$ A.



Sapendo che $V_o = 4 \sin(\omega t)$ V e considerando la capacità un corto circuito alle frequenze di funzionamento, calcolare:

1) La potenza erogata dall'alimentazione
2) La potenza fornita sul carico R_L
3) Il rendimento dell'amplificatore

SOLUZIONE

La potenza (media) assorbita dall'alimentazione risulta:

$$P_{CC} = V_{CC} \cdot I_{CQ} = 32 \cdot 2 = 64\ W$$

La potenza di uscita (media, in regime sinusoidale) risulta:

$$P_L = \frac{V_M^2}{2 \cdot R} = \frac{4^2}{2 \cdot 4} = 2\ W$$

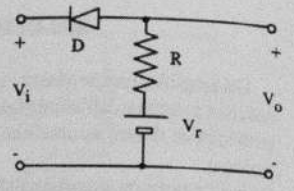
Il rendimento (efficienza) dell'amplificatore in questa condizione di carico risulta:

$$\eta = \frac{P_L}{P_{CC}} = \frac{2}{64} = 0.03125 = 3.125\%$$

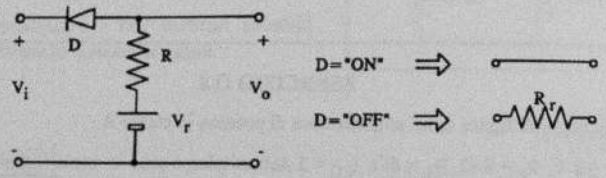
ESERCIZIO Q.9

Sia dato lo schema di figura con R = 1 MΩ, V_r = 2.5 V. Il diodo sia caratterizzato da R_f = 0 Ω, R_r = 2 MΩ, V_γ = 0 V.

Disegnare la tensione di uscita $V_o(t)$ supponendo che il segnale di ingresso sia una onda quadra di frequenza 5 kHz di valore ±10 V.



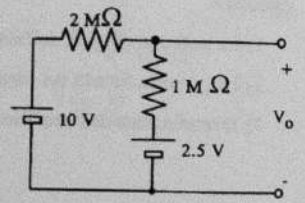
SOLUZIONE



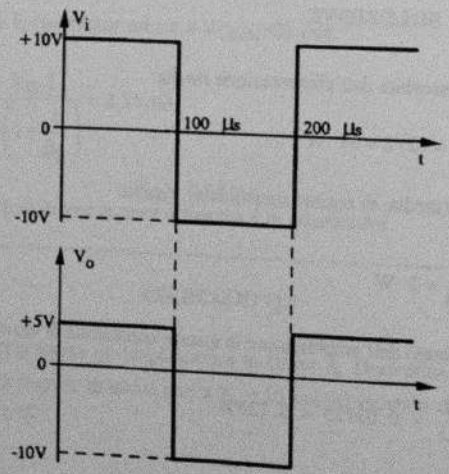
$$f = 5 \text{ kHz} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{f} = 200 \ \mu S$$

1) $V_i = +10$ V $\quad \Rightarrow \quad$ D="OFF"

$$V_o = \frac{V_i - V_r}{R_r + R} R + V_r = 5 \text{ V}$$



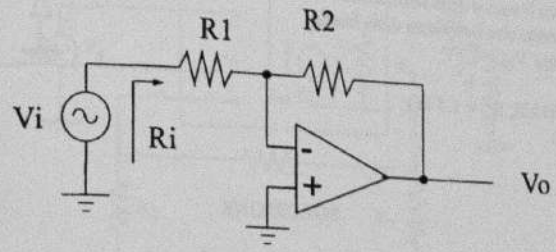
2) $V_i = -10$ V $\quad \Rightarrow$ D = ON $\quad V_o = V_i$



ESERCIZIO Q.10

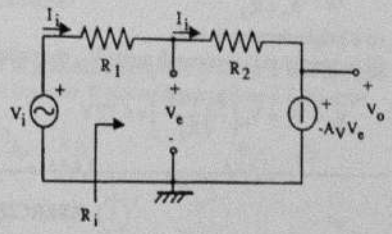
Nel circuito di figura si consideri l'amplificatore operazionale ideale in tutto tranne il guadagno che è posto pari a $A_v = 1000$.

Sapendo che $R_1 = 10$ kΩ e $R_2 = 1$ kΩ, calcolare la resistenza di ingresso R_i.



SOLUZIONE

Schematizzando con Thevenin il blocco amplificatore si ottiene lo schema di figura, dove, essendo il guadagno non infinito, non si possono considerare gli ingressi positivo e negativo equipotenziali. Perciò si devono scrivere le seguenti espressioni:



$$R_i = \frac{V_i}{I_i}$$

$$\begin{cases} I_i = \dfrac{V_i - V_e}{R_1} \\ V_e = R_2 I_i - A_v V_e \quad \rightarrow \quad V_e = \dfrac{R_2}{1+A_V} I_i \end{cases}$$

$$I_i = \frac{V_i}{R_1} - \frac{R_2}{1 + A_V} \frac{1}{R_1} I_i$$

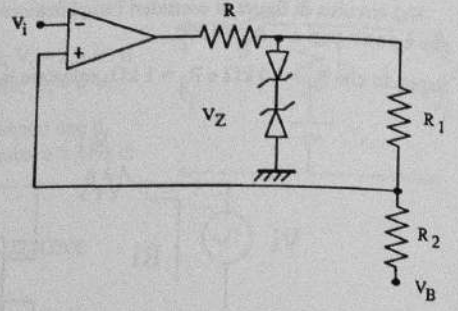
$$I_i \left(1 + \frac{R_2}{(1+A_V)R_1} \right) = \frac{V_i}{R_1}$$

$$R_i = \frac{V_i}{I_i} = R_1 \left(1 + \frac{R_2}{(1+A_V)R_1} \right) = R_1 + \frac{R_2}{1+A_V}$$

ESERCIZIO Q.11

Dato il trigger di Schmitt di figura, realizzato con un operazionale e diodi zener ideali, calcolare il valore della tensione di uscita V_o sapendo che l'ampiezza della fascia di isteresi risulta $V_H = 0.2V$.

Dati: $R_1 = 100\ k\Omega$; $R_2 = 1.5\ k\Omega$;
ZENER ideali.



SOLUZIONE

L'ampiezza della fascia di isteresi del trigger di Schmitt vale:

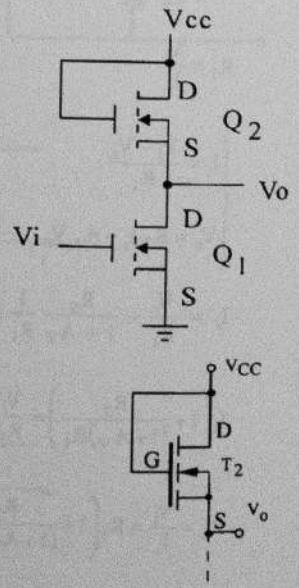
$$V_H = \frac{2R_2 V_o}{R_1 + R_2}$$

ed è indipendente da R e V_B
Di conseguenza la tensione di uscita V_o, che coincide con la tensione di zener vale:

$$V_o = V_Z = V_H\left(\frac{R_1 + R_2}{2R_2}\right) = 6.77\,V$$

ESERCIZIO Q.12

Sia dato lo schema di figura con 2 mosfet enhancement caratterizzati da $V_T = 1$ V, $V_{CC} = 10$ V. Calcolare lo stato del mosfet Q_2 quando $V_o = 0.5$ V e $V_o = 8$V



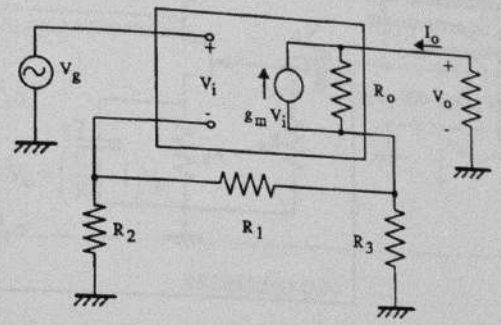
SOLUZIONE

Dalla figura seguente si vede che il mosfet Q_2 è sempre in saturazione. Infatti essendo $V_{DS} = V_{GS}$, la condizione di saturazione $V_{DS} > V_{GS} - V_T$; $V_{DS} - V_{GS} > -V_T$; $0 > -V_T$ è sempre verificata dato che, trattandosi di un mosfet enhancement, risulta $V_T > 0$.

Quindi il mosfet Q_2 risulta saturo in entrambe le condizioni.

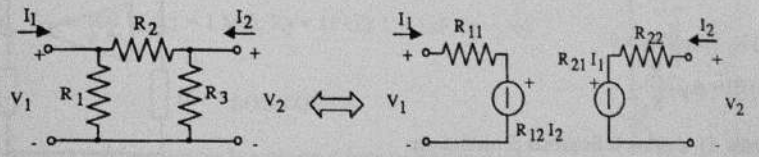
ESERCIZIO Q.13

Dato l'amplificatore retroazionato di figura calcolare il valore del fattore di retroazione β.
Dati: $R_1 = 10\ k\Omega$; $R_2 = 8.2\ k\Omega$; $R_3 = 4.7\ k\Omega$;



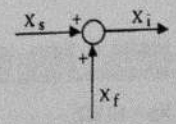
SOLUZIONE

La retroazione è di tipo corrente-serie, cioè la grandezza prelevata in uscita è una corrente, mentre la grandezza di confronto in ingresso è la tensione. Il blocco di retroazione è il seguente:



$$\begin{cases} V_1 = R_{11}\cdot I_1 + R_{12}\cdot I_2 \\ V_2 = R_{21}\cdot I_1 + R_{22}\cdot I_2 \end{cases} \qquad R_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \quad R_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

$$R_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \quad R_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$



$$\beta = \frac{V_1}{I_2} = R_{12} = R_1\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

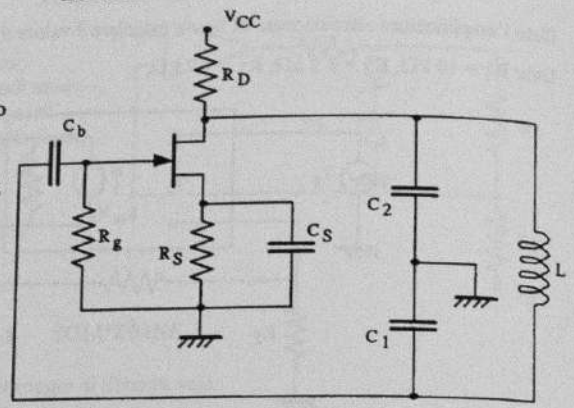
secondo la convenzione di figura
Se la convenzione è opposta cambia il segno di β

$$\beta = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = -R_{12}$$

ESERCIZIO Q.14

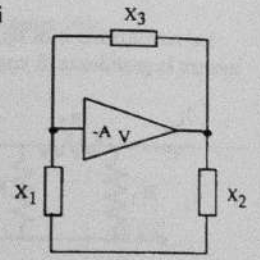
Dato l'oscillatore Colpitts di figura determinare la frequenza di oscillazione considerando R_g trascurabile e C_b un cortocircuito alla frequenza di interesse.

Dati: $C_1 = 100$ pF; $C_2 = 400$ pF; $L = 22$ μH



SOLUZIONE

Si tratta di un oscillatore Colpitts realizzato a JFET. Nell'ipotesi di R_g trascurabile, valgono le seguenti condizioni di oscillazione:



1) $X_1 + X_2 + X_3 = 0$

2) $|T| = A_V \cdot \dfrac{X_1}{X_2}$

Dalla 1) si ricava la frequenza di oscillazione:

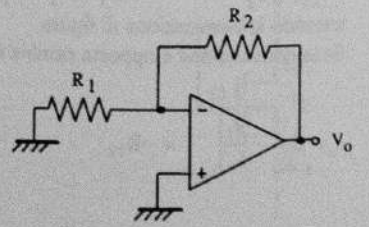
$$X_1 = -\frac{1}{\omega C_1}, \quad X_2 = -\frac{1}{\omega C_2}, \quad X_3 = \omega L$$

$$-\frac{1}{\omega_o C_2} - \frac{1}{\omega_o C_2} + \omega_o L = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC_{eq}}}; \quad C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

ESERCIZIO Q.15

Dato il circuito di figura con operazionale ideale in tutto tranne la tensione di offset determinare la tensione di uscita sapendo che:

$R_1 = 1$ kΩ; $R_2 = 10$ kΩ;
e la tensione di offset $V_{io} = 10$ mV.

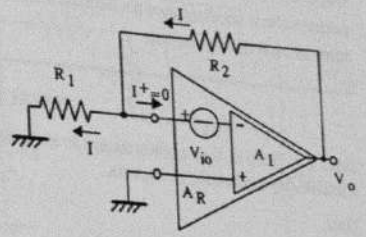


SOLUZIONE

$A_I \equiv$ amplificatore operazionale ideale

$A_R \equiv$ amplificatore operazionale reale

I morsetti + e - di A_I sono equipotenziali.



$$I = \frac{V_{io}}{R_1},$$

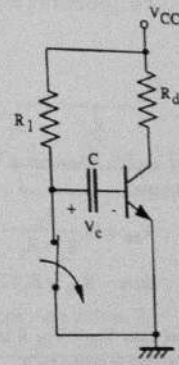
$$V_o = R_2 I + V_{io} = \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right) V_{io}.$$

ESERCIZIO Q.16

Dato il circuito di figura con l'interruttore inizialmente chiuso e la capacità C scarica per cui $V_C(0) = 0$V.

Determinare gli stati assunti dal BJT negli istanti successivi all'apertura dell'interruttore fino a $t \to \infty$ giustificando le risposte. Supporre $V_{BE} \equiv 0$ nei calcoli.

Dati: $V_{CC} = 100$ V; $R_1 = 1$ MΩ; $R_d = 15$ kΩ; $C = 1$μF, $\beta_F = 100$



SOLUZIONE

All'apertura dell'interruttore la corrente di base del transistor vale:

$$I_B \equiv \frac{V_{CC}}{R_1}$$

in quanto $V_C = 0$V e $V_{BE} \equiv 0$V. In queste condizioni il transistor può trovarsi sia in zona lineare che in quella di saturazione in dipendenza dei valori dei parametri. In particolare, si trova in saturazione se:

$$I_B > \frac{I_{Csat}}{\beta_F} = \frac{V_{CC} - V_{CEsat}}{\beta_F R_d}$$

All'aumentare del tempo, C si carica con la polarità mostrata in figura e di conseguenza I_B tende a diminuire. Infatti:

$$I_B(t) \equiv \frac{V_{CC} - V_C(t)}{R_1} \qquad \text{e} \qquad V_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_B(\tau)\,d\tau$$

Se inizialmente il transistor era in saturazione, ad un certo istante t_1 esso passa dalla saturazione alla zona lineare non appena:

$$I_B < \frac{V_{CC} - V_{CEsat}}{\beta_F R_d}$$

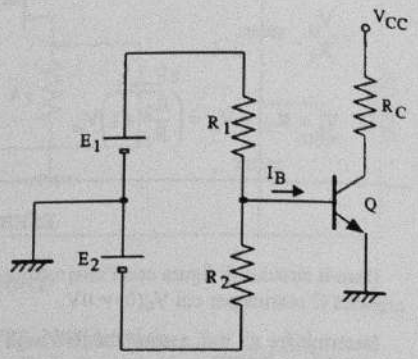
Dopo un tempo pari a circa 4÷5 volte la costante di tempo di carica di C ($\tau = R_1C$) si può pensare che il condensatore sia definitivamente carico per cui I_B=0A. I_B si annulla ed il transistor entra in zona di interdizione.

ESERCIZIO Q.17

Dato il circuito di figura, determinare lo stato del transistor Q motivando la risposta.

Dati:

$R_1 = 22\ k\Omega$; $R_2 = 20\ k\Omega$; $R_C = 3\ k\Omega$;
$E_1 = 5V$; $E_2 = 3V$;
$\beta_F = 100$;
$V_{CC} = 10\ V$; $V_{BE} = V_{BEsat} = 0.7\ V$;
$V_{CEsat} = 0.2\ V$;

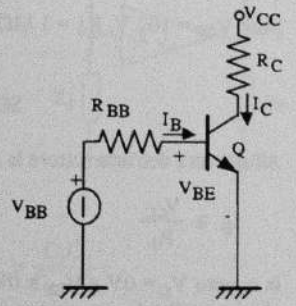


SOLUZIONE

Si applica Thevenin al circuito di polarizzazione di base. Si ottiene:

$$V_{BB} = E_1 \frac{R_2}{R_1+R_2} - E_2 \frac{R_1}{R_1+R_2} = \left(\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}\right) R_{BB}$$

dove $R_{BB} = R_1 // R_2$



Nel caso $V_{BB} < V_{BE}$ il transistor risulta interdetto in quanto la corrente di base è nulla.

Se $V_{BB} > V_{BE}$ risulta:

$$I_B = \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_{BB}}$$

In questa condizione si calcolano $I_C = \beta_F I_B$ (ipotesi di zona attiva) e

$$I_{Csat} = \frac{V_{CC} - V_{CEsat}}{R_C}$$ (ipotesi di zona di saturazione).

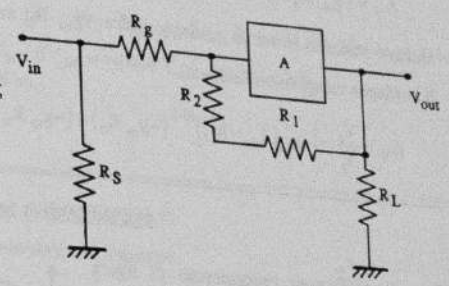
Se $I_C > I_{Csat}$ allora il transistor è in zona di saturazione in quanto la condizione $I_C = \beta_F I_B$ dà un risultato assurdo ed invece vale $I_C = I_{Csat} < \beta_F I_B$. Se risulta $I_C < I_{Csat}$ il transistor è in zona attiva. Sostituendo i valori si ottiene $V_{BB} = 0.81V$, $I_C = 1mA$, transistor in zona attiva.

NOTA: In realtà per $0 < V_{BB} < V_{BE}$, $I_B \cong 0$ ed il transistor si trova al limite tra l'interdizione e la zona attiva.

ESERCIZIO Q.18

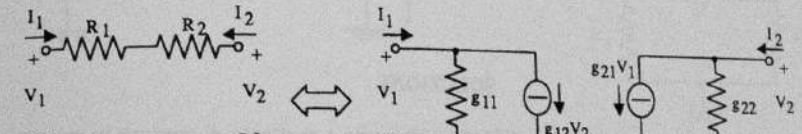
Dato l'amplificatore retroazionato di figura determinare $|\beta|$ sapendo che:

$R_1 = 0.8\ k\Omega$; $R_2 = 8.2\ k\Omega$; $R_g = 1\ k\Omega$;
$R_L = 82\ k\Omega$; $R_S = 10\ k\Omega$;



SOLUZIONE

Si tratta di un amplificatore con retroazione di tipo tensione-parallelo (cioè la grandezza prelevata in uscita è una tensione, mentre il confronto in ingresso avviene tra correnti). Il blocco di retroazione è il seguente:



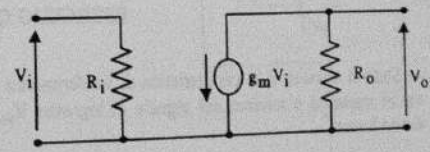
$$\beta = -g_{12} = -\left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = -\left(-\frac{1}{R_1+R_2}\right) = \frac{1}{R_1+R_2}$$

NOTA: si perviene allo stesso risultato anche se nel blocco di retroazione viene inclusa R_L.

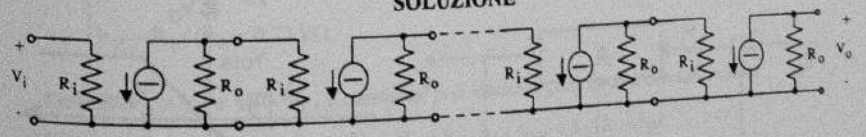
ESERCIZIO Q.19

Dato il circuito di figura determinare l'espressione del guadagno di tensione della cascata di N stadi tutti uguali.

Dati: $R_i = R_o$; $g_m = 1/R_i\ \Omega^{-1}$;



SOLUZIONE



Si osserva che tutti gli stadi, tranne l'ultimo, risultano "caricati" dallo stadio che li segue (la resistenza di uscita R_o di uno stadio risulta in parallelo con la resistenza di ingresso R_i dello stadio successivo). Ciascuno dei primi N-1 stadi ha un guadagno di tensione pari a:

$$A'_V = -g_m(R_o // R_i)$$

L'ultimo stadio ha invece un guadagno pari a $-g_m \cdot R_o$

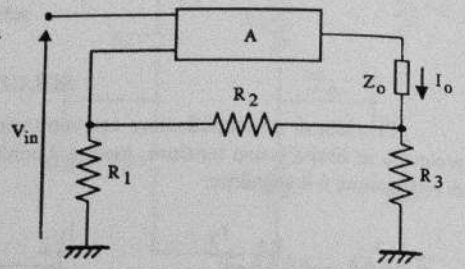
Il guadagno complessivo risulta:

$$A_V = \frac{V_o}{V_i} = \left[-g_m(R_o // R_i)\right]^{N-1}(-g_m R_o) = (-g_m R_o)^N \frac{1}{2^{N-1}} = \frac{(-1)^N}{2^{N-1}}$$

ESERCIZIO Q.20

Dato l'amplificatore retroazionato di figura determinare $|\beta|$ sapendo che:

$R_1 = 1.8\ k\Omega$; $R_2 = 8.2\ k\Omega$; $R_3 = 12\Omega$;



SOLUZIONE

Si tratta di una reazione con prelievo di corrente in uscita e confronto di tensione in ingresso.

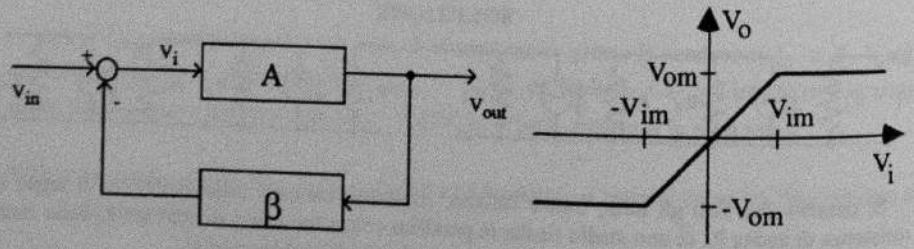
Vale: $|\beta| = \left|\frac{V_f}{I_o}\right|$ dove V_f è la tensione (a vuoto) che si presenta su R_1, quindi:

$$V_f = R_1 \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} I_o \qquad |\beta| = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 982\,\Omega$$

ESERCIZIO Q.21

Dato il circuito e la caratteristica di trasferimento dell'amplificatore di figura, determinare i valori massimo e minimo del segnale di ingresso V_{in} fra i quali l'amplificatore si comporta in modo lineare.

Dati: $V_{om} = 12$ V; $V_{im} = 3$ V; $\beta = 2$



SOLUZIONE

L'amplificatore opera in modo lineare per $|V_i| < V_{iMAX} = V_{im}$. Al limite per $V_i = V_{im}$ si ha $V_{out} = V_{om}$ e quindi essendo $V_i = V_{in} - \beta V_{out}$ si ottiene $V_{inMAX} = V_{im} + \beta \cdot V_{om}$.
Essendo la caratteristica simmetrica si ha:

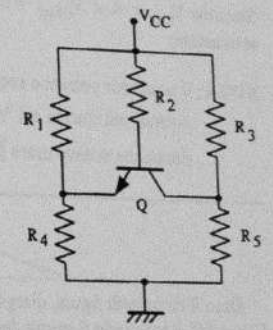
$$V_{inMIN} = -V_{inMAX}.$$

ESERCIZIO Q.22

Dato il circuito di figura determinare lo stato del transistor.

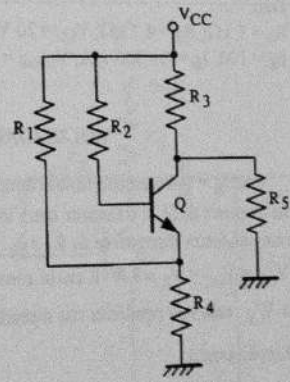
Dati:
$R_1 = 1\ k\Omega$; $R_2 = 4.7\ k\Omega$; $R_3 = 1\ k\Omega$; $R_4 = 2.7\ k\Omega$;
$R_5 = 10\ k\Omega$; $V_{CC} = 20$ V;

Q: $\beta_F = 100$; $V_{BE} = V_{BEsat} = 0.7$ V; $V_{CEsat} = 0$ V;



SOLUZIONE

Si può ridisegnare la rete, come mostrato in figura, e applicare Thevenin ai due partitori collegati all'emettitore ed al collettore rispettivamente. Si ottiene:



$$\begin{cases} V_C = V_{CC}\dfrac{R_5}{R_3 + R_5} = 18.2\ \text{V} \\ R_C = R_3 // R_5 = 0.91\ k\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_B = V_{CC} \\ R_B = R_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_E = V_{CC}\dfrac{R_4}{R_1 + R_4} = 14.6\ \text{V} \\ R_E = R_1 // R_4 = 0.73\ k\Omega \end{cases}$$

Essendo $V_B > V_E$ e $V_C > V_E$, il transistor può essere in zona lineare o in saturazione.

Dalla maglia di ingresso si ricava: $V_B - V_E = R_B \cdot I_B + V_{BE} + R_E(I_C + I_B)$.

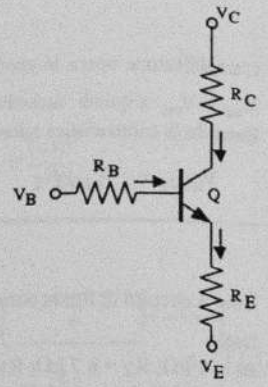
Si suppone che il transistor sia in zona lineare: $I_C = \beta_F I_B$

$$I_B = \frac{V_B - V_E - V_{BE}}{R_B + (\beta_F + 1)R_E} = 60\ \mu A$$

Dalla maglia di uscita risulta:

$V_C - V_E = R_C I_C + V_{CE} + R_E(I_C + I_B)$ e da questa si ottiene:

$$V_{CE} = V_{CC} - V_E - \left[R_C + R_E\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right)\right] I_C = -4.48\ V$$



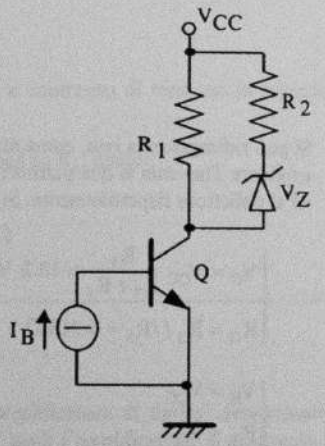
Siccome $V_{CE} < 0 < V_{CEsat}$ il transistor è in zona di saturazione.

NOTA: Il transistor potrebbe anche trovarsi in zona attiva inversa, nel caso in cui $V_B > V_C$ e $V_E > V_C$. In tale situazione si deve usare β_R invece di β_F.

ESERCIZIO Q.23

Dato il circuito di figura, disegnare la caratteristica $V_{CE} = f(I_B)$ indicando il valore dei punti di spezzamento.

Dati:
$R_1 = 1\ k\Omega$; $R_2 = 4.7\ k\Omega$; $V_{CC} = 20\ V$; $V_Z = 12\ V$;
$\beta_F = 100$; $I_B = 0 \div 300\ mA$; $V_{CEsat} = 0\ V$;



SOLUZIONE

Con $I_B = 0$ il transistor è interdetto, per cui $V_{CE} = V_{CC}$. Al crescere di I_B, il transistor entra in zona lineare e V_{CE} cala con pendenza dipendente da R_1 e β_F. Quando $V_{CE} \le V_{CC} - V_Z = 8\ V$ il diodo zener entra in conduzione e V_{CE} cala con pendenza che dipende da $R_1 // R_2$ e β_F.

Riepilogando:

1) Per $V_{CC} \ge V_{CE} \ge V_{CC} - V_Z \quad \Rightarrow \quad V_{CE} = V_{CC} - R_1 I_C = V_{CC} - R_1 \beta_F I_B$

2) Per $0 \le V_{CE} \le V_{CC} - V_Z \Rightarrow V_{CE} = V_{CC} - R_1\left[I_C - \frac{V_{CC} - V_Z - V_{CE}}{R_2}\right] \Rightarrow$

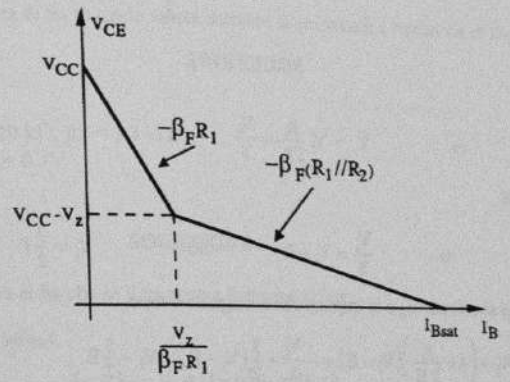
$$V_{CE} = V_{CC} - (R_1 // R_2)\beta_F I_B - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_Z$$

Il valore della corrente di base nel punto di spezzamento vale:

$$V_{CC} - V_Z = V_{CC} - R_1 \beta_F I_{B1} \quad \Rightarrow \quad I_{B1} = \frac{V_Z}{\beta_F R_1} = 120\ \mu A.$$

Il valore di I_{Bsat} si trova invece imponendo $V_{CE} = V_{CEsat}$ nella seconda equazione:

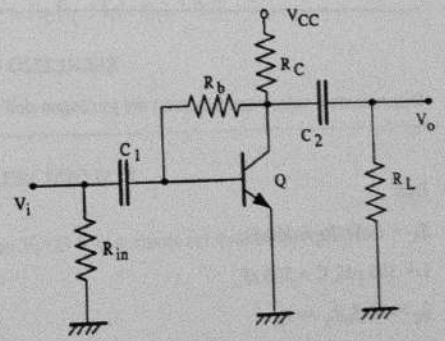
$$V_{CEsat} = V_{CC} - (R_1 // R_2)\beta_F I_{Bsat} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_Z \quad \Rightarrow \quad I_{Bsat} = 217\ \mu A.$$



ESERCIZIO Q.24

Dato il circuito di figura determinare la potenza dissipata.

Dati:
$R_C = 1\ k\Omega$; $R_b = 47\ k\Omega$;
$V_{CC} = 20\ V$; $V_Z = 12\ V$;
$\beta_F = 20$; $I_C = 5.60\ mA$; $V_{CEsat} = 0\ V$;

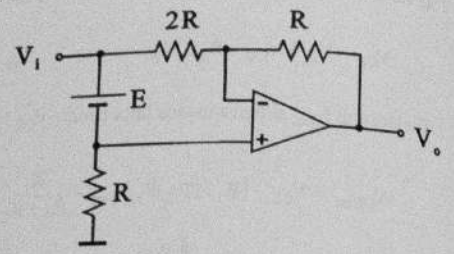


SOLUZIONE

$$P_d = V_{CC} I_{RC} = V_{CC} I_E = V_{CC}(I_C + I_B) = V_{CC}\left(1 + \frac{1}{\beta_F}\right) I_C = 117.6\ mW.$$

ESERCIZIO Q.25

Dato il circuito di figura composto da un amplificatore operazionale ideale e E = 3V, R = 9 kΩ determinare il valore della tensione di ingresso V_i tale che risulti $V_o = 0$.



SOLUZIONE

Se $V_o = 0 \quad \Rightarrow \quad V_- = V_i \frac{R}{3R} = \frac{V_i}{3}$

$V_+ = V_i - E$

$V_- = V_+ \quad \Rightarrow \quad \frac{V_i}{3} = V_i - E \quad \Rightarrow \quad V_i = \frac{3}{2}E$

Alternativamente si calcola V_o e si impone che sia uguale a zero.

$$V_o = -\frac{R}{2R}V_i + \left(1+\frac{R}{2R}\right)(V_i - E) = -\frac{V_i}{2} + \frac{3}{2}(V_i - E) = V_i - \frac{3}{2}E$$

$V_o = 0 \quad \Rightarrow \quad V_i = \frac{3}{2}E$ (c.v.d.)

ESERCIZIO Q.26

Determinare il valore approssimato del guadagno dell'amplificatore di figura alla frequenza f_R.

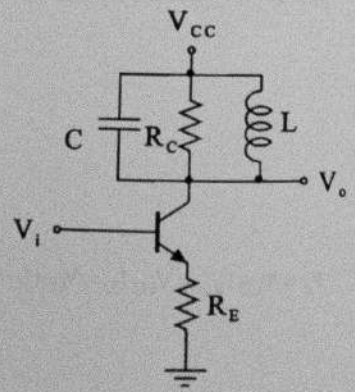
Dati:

$R_C = 1\ k\Omega$, $R_E = 250\ \Omega$,

$L = 100\ \mu H$, $C = 500\ nF$,

$\beta_0 >> 1$, $\beta_0 R_E >> r_\pi$,

$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$



SOLUZIONE

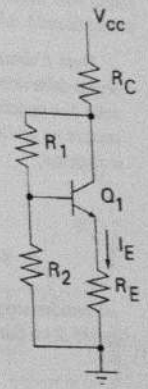
La frequenza f_R è la frequenza di risonanza del parallelo LC. A tale frequenza l'impedenza sul collettore è puramente resistiva per cui il guadagno è quello di uno stadio a doppio carico:

$$A_V = \frac{V_o}{V_i} \cong -\frac{R_C}{R_E} = -4.$$

ESERCIZIO Q.27

Determinare il valore di R_1 in modo che la corrente di emettitore a riposo sia di 2mA.

Dati:
$V_{CC} = 12$ V;
$R_E = 100\ \Omega$; $R_2 = 20\ k\Omega$; $R_C = 3.3\ k\Omega$;
Q_1: $\alpha = 0.98$; $V_{BE} = 0.7V$



SOLUZIONE

Con i versi di figura si ha che se il transistor è in zona attiva:

$I_C \cong \alpha I_E = 1.96\ mA$

$I_C + I_B = I_E \qquad I_B = I_E - I_C \cong (1-\alpha)I_E = 40\ \mu A.$

Dalla maglia di ingresso si ha $R_2 I_2 = V_{BE} + R_E I_E = 0.9\ V \qquad I_2 = 45\ \mu A$

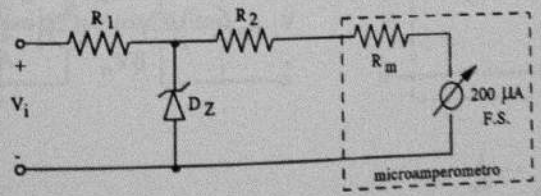
$I_1 = I_B + I_2 = 85\ \mu A \qquad V_{CC} = R_C(I_C + I_1) + R_1 I_1 + R_2 I_2$

$R_1 = \frac{V_{CC} - 6.75 - 0.9}{I_1} = 51.2\ k\Omega$

ESERCIZIO Q.28

Dimensionare R_1 ed R_2 in modo che con V_i>25 V la corrente nel microamperometro non superi il fondo scala.

Dati: V_Z=20 V; R_m=560 Ω.



SOLUZIONE

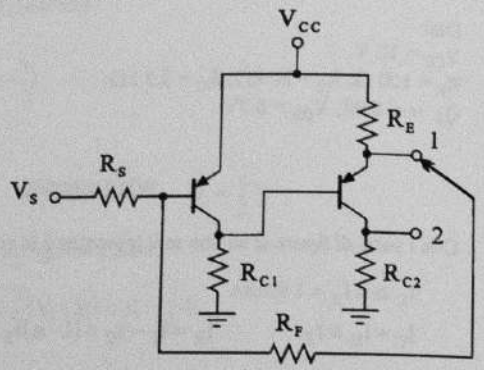
D_Z deve entrare in conduzione quando $(R_2 + R_m)I_{FS} = V_Z \Rightarrow R_2 = 99440\Omega$.

Imponendo che questo succeda per $V_i \geq 25$ V si ottiene che a 25V la corrente nello zener è nulla, essendo all'inizio della conduzione, e la corrente su R_1 è quella di fondo scala. Da ciò:

$$R_1 = \frac{V_i - V_Z}{I_{FS}} = \frac{25-20}{200\mu A} = 25\ k\Omega.$$

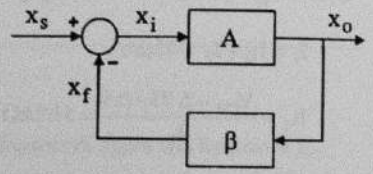
ESERCIZIO Q.29

Dato il circuito di figura determinare il segno della retroazione con il deviatore nelle due posizioni 1 e 2 (si consideri sempre un prelievo di tensione). Giustificare le risposte.



SOLUZIONE

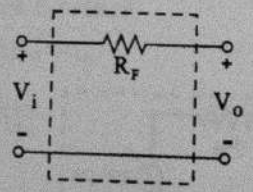
Consideriamo un generico schema a blocchi di un sistema a retroazione:

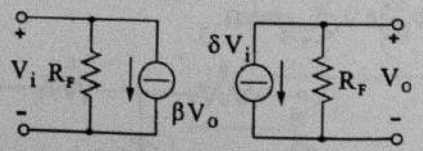


Il guadagno di anello, con la convenzione di segno utilizzata per il nodo sommatore, risulta dato da:

$$T = A\beta$$

e nel caso di retroazione negativa deve risultare positivo. Perciò, con riferimento all'amplificatore di figura, indipendentemente dalla posizione del deviatore la resistenza R_F effettua un prelievo di tensione ed un confronto di corrente. Di conseguenza, possiamo schematizzare il blocco di retroazione secondo la configurazione Norton, sia in ingresso che in uscita:





$$\beta = \left.\frac{I_i}{V_o}\right|_{V_i=0} = -\frac{1}{R_F}$$

Essendo $\beta < 0$ affinchè la retroazione risulti negativa deve essere $A < 0$, cioé l'amplificatore della catena diretta deve essere invertente:

$$A = \left.\frac{x_o}{x_s}\right|_{x_f=0} = \left.\frac{V_o}{I_s}\right|_{I_f=0}$$

dove, dato che il confronto è tra correnti, si è usata la rappresentazione secondo Norton del generatore di ingresso:

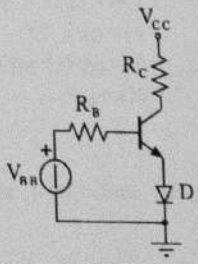
$$I_s = \frac{V_s}{R_s}$$

In definitiva, con il deviatore in posizione 1) la retroazione risulta negativa perché l'amplificatore risulta invertente (cascata di un emettitore comune con doppio carico con uscita sull'emettitore), mentre in posizione 2) la retroazione diventa positiva perché l'amplificatore diventa non invertente.

ESERCIZIO Q.30

Relativamente al circuito di figura, calcolare il massimo valore della resistenza R_B che mantiene il transistor in saturazione:

Dati: $R_C = 15k\Omega$, $V_{CC} = 12V$, $V_{BB} = 5V$, $V_{CEsat} = 0.3V$, $V_{BEsat} = 0.8V$, $V_D = 0.7V$, $\beta_F = 100$



SOLUZIONE

Affinché il transistor risulti in saturazione occorre sia verificata la seguente disequazione:

$$I_B > \frac{I_{Csat}}{\beta_F}$$

La corrente di collettore in saturazione si calcola dalla maglia di uscita:

$$I_{Csat} = \frac{V_{CC} - V_{CEsat} - V_D}{R_C}$$

mentre la corrente di base si ricava dalla maglia di ingresso:

$$I_B = \frac{V_{BB} - V_{BEsat} - V_D}{R_B}$$

Utilizzando i dati del problema si ricava:

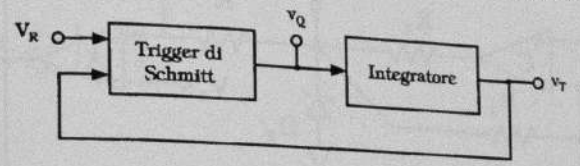
$$I_{Csat} = 733\,\mu A$$

$$R_B < 477\,k\Omega$$

TEMI DELL'ESAME DI STATO

TEMA 1

a) Progettare un generatore di onda quadra e triangolare secondo lo schema a blocchi di figura:



Caratteristiche:

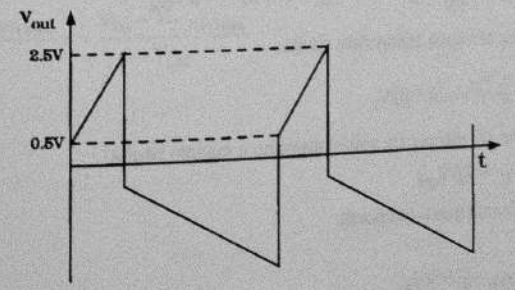
frequenza: ..... F = 2 kHz;
duty-cycle (rapporto tra la durata dell'impulso positivo e il periodo): ..... δ = 50 %;
ampiezza onda quadra (valore medio nullo): ..... V_{QM} = ±4.5 V;
valore medio onda triangolare (variabile tramite una tensione esterna V_R): ..... V_{T_AVG} = ±6 V;
valori massimo e minimo della tensione v_T: ..... $V_{TM} = -V_{Tm}$ = 10 V;
alimentazione duale: ..... V_{cc} = ±12 V.

Componenti a disposizione:
comparatori, amplificatori operazionali, componenti passivi (resistenza 1/4W, diodi 1/2W, condensatori, etc.)

b) Disegnare le forme d'onda delle tensioni v_Q e v_T.

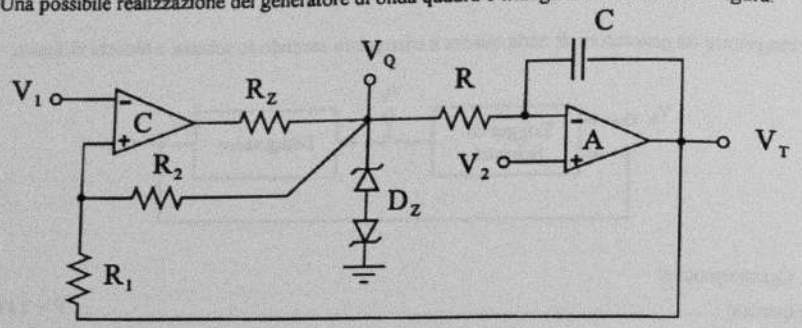
c) Modificare il circuito progettato al punto a) in modo da avere un duty-cycle pari al 25%.

d) Progettare un circuito che realizzi la combinazione lineare di v_Q e v_T, relative al generatore di forme d'onda del punto c) (si consideri $V_R = 0$), e che dia in uscita una tensione v_{out} avente la seguente forma d'onda:



SOLUZIONE

Una possibile realizzazione del generatore di onda quadra e triangolare é mostrata in figura.



ANALISI

La tensione al morsetto non invertente del comparatore risulta:

$$v_+ = v_Q \frac{R_1}{R_1+R_2} + v_T \frac{R_2}{R_1+R_2} = v_Q \frac{\beta}{1+\beta} + v_T \frac{1}{1+\beta} \tag{1}$$

dove

$$\beta = \frac{R_1}{R_2} \tag{2}$$

Il comparatore commuta quando la differenza di potenziale ai suoi morsetti cambia segno ($v_+ = v_-$). Si possono cosí determinare il valore minimo e massimo della tensione v_T in corrispondenza dei quali si hanno le commutazioni:

$$V_1 = \frac{\beta}{1+\beta} V_{QM} + \frac{1}{1+\beta} V_{TL} \quad \Rightarrow \quad V_{TL} = (1+\beta)V_1 - \beta V_{QM} \tag{3.a}$$

$$V_1 = -\frac{\beta}{1+\beta} V_{QM} + \frac{1}{1+\beta} V_{TH} \quad \Rightarrow \quad V_{TH} = (1+\beta)V_1 + \beta V_{QM} \tag{3.b}$$

Il valore medio della tensione triangolare risulta:

$$V_{T_AVG} = \frac{V_{TH} + V_{TL}}{2} = (1+\beta)V_1 \tag{4}$$

mentre la variazione di tensione tra valore massimo e minimo risulta:

$$\Delta V_T = V_{TH} - V_{TL} = 2\beta V_{QM} \tag{5}$$

Analizziamo ora gli andamenti temporali.

1) $t = 0$: $v_Q = -V_{QM}$, $v_T = V_{TL}$.

$$v_T(t) = V_{TL} + \frac{1}{C}\int_0^t \frac{V_2 + V_{QM}}{R}\,dt = V_{TL} + \frac{1}{\tau}(V_2 + V_{QM})t, \qquad \tau = RC \tag{6}$$

All'istante T_1 la tensione v_T raggiunge il valore V_{TH} e il comparatore commuta, portando l'uscita a $+V_{QM}$. La durata di tale intervallo é:

$$T_1 = \tau \cdot \left(\frac{V_{TH} - V_{TL}}{V_2 + V_{QM}}\right) = \frac{2\beta\tau}{1+\alpha} \tag{7}$$

dove

$$\alpha = \frac{V_2}{V_{QM}} \tag{8}$$

2) $t = 0$: $v_Q = V_{QM}$, $v_T = V_{TH}$.

$$v_T(t) = V_{TH} - \frac{1}{C}\int_0^t \frac{V_{QM} - V_2}{R}\,dt = V_{TL} - \frac{1}{\tau}(V_{QM} - V_2)t, \qquad \tau = RC \tag{9}$$

All'istante T_2 la tensione v_T raggiunge il valore V_{TL} e il comparatore commuta. La durata di tale intervallo é:

$$T_2 = \tau \cdot \left(\frac{V_{TH} - V_{TL}}{V_{QM} - V_2}\right) = \frac{2\beta\tau}{1-\alpha} \tag{10}$$

Il periodo delle tensioni quadra e triangolare risulta:

$$T = \frac{1}{F} = T_1 + T_2 = \frac{4\beta\tau}{1-\alpha^2} \tag{11}$$

mentre il duty-cycle é dato da:

$$\delta = \frac{T_2}{T} = \frac{1+\alpha}{2} \tag{12}$$

In definitiva, il duty-cycle dipende soltanto dal parametro α.

Un ulteriore vincolo é imposto dalla massima tensione dell'onda triangolare V_{TM}. Dalle (3) e (4) si ricava il valore di β:

$$\beta = \frac{V_{TM} - V_{T_AVG\,max}}{V_{QM}} = -\frac{V_{Tm} - V_{T_AVG\,min}}{V_{QM}} \tag{13}$$

PROGETTO

a) $\delta = 50\%$

1) La specifica sull'ampiezza dell'onda quadra determina il valore degli zener:

$$V_z = V_{QM} - V_\gamma \qquad (14)$$

dove V_γ é la caduta diretta di un diodo ($\approx 0.6V$).

2) La resistenza R_Z limita la corrente negli zener dato che la tensione di uscita del comparatore risulta superiore a V_Z. La massima corrente permessa negli zener é limitata dalla potenza dissipata dagli stessi.

$$I_{z_MAX} = \frac{P_z}{V_z} \qquad (15.a)$$

$$R_{z_MIN} \cong \frac{V_{cc} - V_{QM}}{I_{z_MAX}} \qquad (15.b)$$

3) Si determina il valore della tensione V_2 dalle (8) e (12) e dalla specifica sul duty-cycle:

$$\alpha = 2\delta - 1 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \alpha \cdot V_{QM}$$

Con $\delta = 0.5$, risulta $V_2 = 0$ V.

4) Dalla (13) si determina il valore del parametro β e quindi si scelgono i valori di R_1 e R_2.

$$\beta = \frac{10-6}{4.5} = 0.89$$

Fissando $R_2 = 82$ kΩ, si ottiene $R_1 = 73$ kΩ (68 kΩ + 10 kΩ trimmer).

5) Dalla (11) si determina il valore della costante di tempo τ:

$$\tau = \frac{1-\alpha^2}{4\beta F} = \frac{0.28}{F} = 141\mu s$$

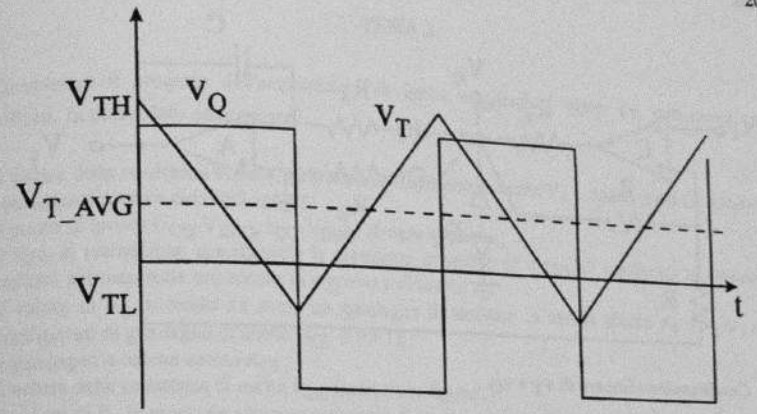
Fissato C = 12 nF si ottiene R = 11.75 kΩ (12 kΩ valore commerciale).

6) Dalla (4) si ricava il valore di V_1.

$$V_1 = \frac{V_{T_AVG}}{1+\beta} = \pm 3.18\ V$$

b) Andamento di v_T e v_Q

Gli andamenti di v_T e v_Q sono riportati nella figura seguente



c) $\delta = 25\%$

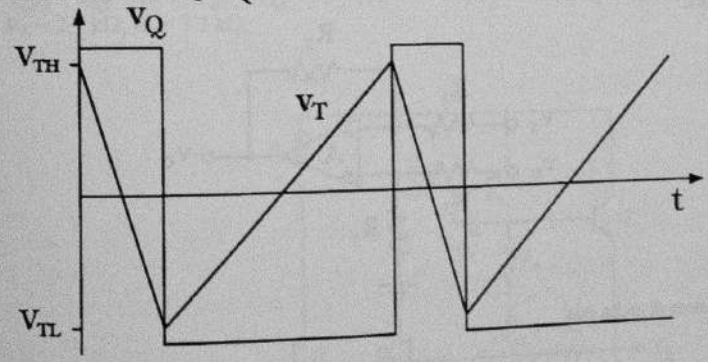
I punti 3) e 5) vanno rivisti alla luce del nuovo valore di duty-cycle.

$\alpha = -0.5$, risulta $V_2 = -2.25$ V.

$$\tau = \frac{1-\alpha^2}{4\beta F} = \frac{0.21}{F} = 105\mu s$$

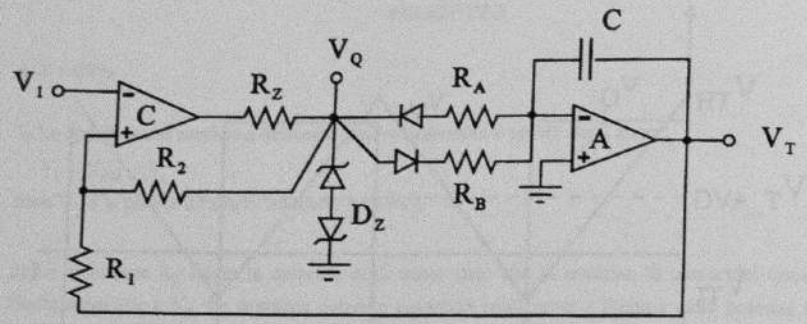
Fissato C = 4.7 nF si ottiene R = 22.3 kΩ (22 kΩ valore commerciale).

Le forme d'onda relative a v_T e v_Q in questa situazione sono riportate in figura.



NOTA:

é possibile ottenere un duty-cycle diverso dal 50% senza dover utilizzare una tensione esterna V_2. Nello schema qui sotto riportato, i due diodi e le due resistenze R_A e R_B modificano la costante di tempo τ durante le due fasi di carica e scarica di C.



d) Combinazione lineare di v_T e v_Q

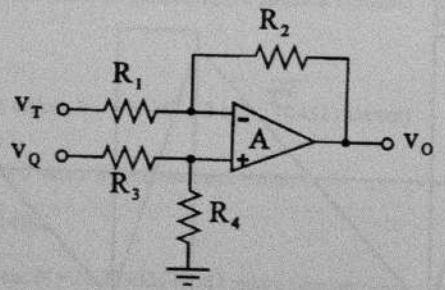
La forma d'onda da realizzare risulta una semplice combinazione lineare di v_T e v_Q, come risultano dal punto precedente. La tensione che si vuole realizzare risulta, quindi:

$$v_o = a\,v_T + b\,v_Q$$

Per determinare i valori dei coefficienti a e b basta risolvere il seguente sistema ottenuto dall'osservazione delle forme d'onda di v_T, v_Q e v_O.

$$\begin{cases} 0.5 = a\cdot 4 + b\cdot 4.5 \\ 2.5 = a\cdot(-4) + b\cdot 4.5 \end{cases}$$

da cui si ricavano a = -1/4, b = 1/3. Un semplice circuito sommatore si puó realizzare come mostrato in figura.



La tensione di uscita vale:

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1}v_T + \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_4}{R_3+R_4}v_Q$$

Imponendo che i coefficienti di v_T e v_Q siano uguali ai valori a e b precedentemente trovati si ottiene:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{R_3}{R_4} = \frac{11}{4}$$

Fissando R_1 = 27 kΩ e R_4 = 10 kΩ si ottengono R_2 = 6.75 kΩ (R_2 = 6.8 kΩ valore commerciale) e R_3 = 27.5 kΩ (R_3 = 27 kΩ valore commerciale).

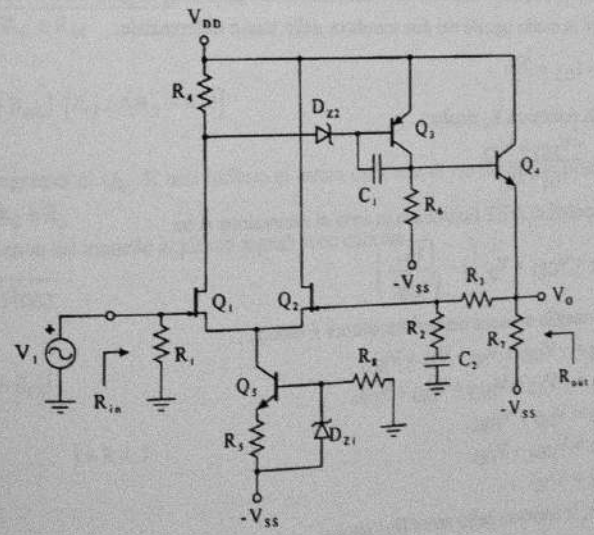
TEMA 2

Completare il progetto dell'amplificatore di figura scegliendo i valori dei componenti non specificati. In particolare determinare:

1) il valore della resistenza R_4 che garantisce una tensione di uscita V_o a riposo nulla (si trascuri la resistenza dinamica dei diodi zener);
2) il punto di lavoro (I_{CQ}-V_{CEQ}, I_{DQ}-V_{DSQ}) di ogni transistor;
3) il tipo di retroazione specificando la grandezza prelevata ed il tipo di confronto in ingresso e l'effetto previsto sulle impedenze di ingresso e di uscita;
4) il valore di R_3 in modo da avere un guadagno di tensione a catena chiusa $A_F = V_o/V_I \approx 11$ (nell'ipotesi di guadagno di anello $A_{OL}\cdot\beta >> 1$);
5) il guadagno a catena aperta A_{OL};
6) il valore della resistenza di uscita R_{out} (indicata in figura);
7) il valore di R_1 in modo da avere un resistenza di ingresso R_{in} = 47 kΩ;
8) il valore di C_2 in modo da avere una frequenza di taglio inferiore di A_F di 10 Hz;
9) il valore di C_1 in modo da avere una frequenza di taglio superiore di A_F di 100 kHz.

NOTA: nei punti 3), 4), 5), 6), 7) considerare C_1 un circuito aperto e C_2 un corto circuito.

Dati: $Q_1 = Q_2$ = 2N5486: I_{DSS} = 12 mA; V_p = -3.9 V; $r_d = \infty$
Q_3 = 2N2907: V_{BE} = -0.65 V; $\beta_F = \beta_o$ = 240; $r_o = \infty$
$Q_4 = Q_5$ = 2N2222: V_{BE} = 0.65 V; $\beta_F = \beta_o$ = 200; $r_o = \infty$
($h_{FE} = \beta_F$; $h_{fe} = \beta_o$; $r_o = 1/h_{oe}$)
$V_{DD} = V_{SS}$ = 12 V; $V_{Z1} = V_{Z2}$ = 5.1 V; R_2 = 4.7 kΩ; R_5 = 4.7 kΩ; R_6 = 8.2 kΩ; R_7 = 2.7 kΩ; R_8 = 3.3 kΩ;



SOLUZIONE

a) Polarizzazione:

In continua, C_2 é un circuito aperto per cui $I_{R3} = 0$; di conseguenza la corrente in R_7 coincide con la corrente di emettitore di Q_4:

$$I_{E4} = \frac{V_o - (-V_{SS})}{R_7} = \frac{V_{SS}}{R_7}$$

$$I_{B4} = \frac{I_{E4}}{1+\beta_{F4}}$$

Calcoliamo la corrente in R_6:

$$I_{R6} = \frac{V_{BE4} + V_{SS}}{R_6}$$

Applicando il primo principio di Kirchhoff al collettore di Q_3:

$$I_{C3} = -(I_{B4} + I_{R6})$$

$$I_{B3} = \frac{I_{C3}}{\beta_{F3}}$$

La corrente di emettitore di Q5 si calcola dall'equazione relativa alla sua maglia di ingresso:

$$I_{E5} = \frac{V_{Z1} - V_{BE5}}{R_5}$$

$$I_{C5} = \frac{I_{E5}}{1+\frac{1}{\beta_{F5}}}$$

Essendo i due JFET identici ed avendo entrambi i potenziali di gate a zero volt, la corrente I_{C5} si ripartisce in modo uguale nei due transistor dello stadio differenziale:

$$I_{D1} = I_{D2} = \frac{I_{C5}}{2}$$

per cui la resistenza R_4 risulta:

$$R_4 = \frac{-V_{BE3} + V_{Z2}}{I_{D1} + I_{B3}}$$

Nell'ipotesi di JFET funzionanti in zona di saturazione si ha:

$$V_{GS1} = V_{GS2} = V_p \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{I_{D1}}{I_{DSS}}}\right)$$

Dalle maglie di uscita dei vari transistors si ottiene:

$V_{CE5} = -V_{GS1} + V_{SS} - V_{Z1} + V_{BE5}$

$V_{DS1} = -V_{Z2} + V_{BE3} + V_{DD} + V_{GS1}$

$V_{DS2} = V_{DD} + V_{GS2}$

$V_{CE3} = V_{BE4} - V_{DD}$

$V_{CE4} = V_{DD}$

Infine, la corrente nello zener D_{Z1} risulta:

$$I_{Z1} = \frac{V_{SS} - V_{Z1}}{R_8} - I_{B5}$$

b) analisi ai piccoli segnali:

Si tratta di una retroazione con prelievo di tensione e confronto di tipo serie. La rete di retroazione é composta da R_3 e R_2-C_2. A centro banda, C_2 é da considerarsi un cortocircuito mentre C_1 é un circuito aperto per il cui il guadagno di tensione complessivo, nell'ipotesi di guadagno di anello molto elevato, é dato da:

$$A_v = A_F = \frac{A_{OL}}{1 + A_{OL}\beta} \cong \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_3}{R_2}$$

da cui si ricava R_3.

Il guadagno a catena aperta A_{OL} si ottiene dalla cascata dei tre stadi di amplificazione: lo stadio differenziale, lo stadio a emettitore comune (Q_3) e quello a collettore comune (Q_4):

$$A_{OL} = \frac{A_{DM}}{2} \cdot A_3 \cdot A_4$$

(si osservi che, avendo trascurato la resistenza di uscita r_o nel modello dei BJT, il guadagno di modo comune dello stadio differenziale é zero in quanto Q_5 diventa un generatore di corrente ideale).

I tre guadagni sono dati dalle seguenti espressioni:

$$A_{DM} = -g_{m1} R_4$$

$$A_3 = \frac{-\beta_{o3} R_6}{r_{\pi 3} + R_4}$$

$$A_4 = \frac{(1+\beta_{o4}) \cdot [R_7 // (R_2 + R_3)]}{R_6 + R_{i4}}$$

dove

$$R_{i4} = r_{\pi 4} + (1+\beta_{o4}) \cdot [R_7 // (R_2 + R_3)]$$

é la resistenza di ingresso di Q_4. Si noti l'effetto di carico della rete di retroazione sull'uscita di Q_4 dato dalla serie di R_2 e R_3.

Le transconduttanze nel modello ai piccoli segnali sono date da:

$$g_{m1} = \frac{2}{|V_p|}\sqrt{I_{D1} I_{DSS}}$$

$$g_{mj} = \frac{|I_{Cj}|}{V_T} \approx 40 \cdot |I_{Cj}|$$

$$r_{\pi j} = \frac{\beta_{oj}}{g_{mj}}, \qquad j = 3,4,5$$

Il guadagno d'anello risulta quindi:

$$T = A_{OL} \cdot \beta$$

La resistenza di uscita a catena chiusa viene diminuita, rispetto al valore a catena aperta, di una quantitá pari alla differenza di anello:

$$R_{out} = \frac{R_{oOL}}{1+T}$$

dove

$$R_{oOL} = R_7 // (R_2 + R_3) // \left(\frac{R_6 + r_{\pi 4}}{1+\beta_{o4}}\right)$$

La resistenza di ingresso vista dal generatore V_I risulta invece:

$$R_{in} = R_I$$

c) Frequenza di taglio inferiore:

La frequenza di taglio inferiore risulta determinata dalla capacitá C_2. Infatti, considerando non trascurabile il suo effetto, si ha che:

$$\beta(s) = \frac{1+sR_2C_2}{1+s(R_2+R_3)C_2}$$

e quindi

$$A_v(s) \cong \frac{1}{\beta(s)}$$

ha una frequenza di taglio inferiore data da:

$$f_L = \frac{1}{2\pi R_2 C_2}$$

d) Frequenza di taglio superiore:

La frequenza di taglio superiore risulta determinata dalla capacitá C_1. Essa introduce un polo dominante nel guadagno di catena aperta che diventa:

$$A_{OL}(s) = \frac{A_{OLo}}{1+\frac{s}{\omega_o}}$$

dove A_{OLo} coincide con il valore precedentemente trovato a centro banda, mentre ω_o é data dall'inverso della costante di tempo associata alla capacitá C_1:

$$\omega_o = \frac{1}{C_1 \cdot \left[(R_4 // r_{\pi 3}) \cdot (1 + g_{m3}(R_6 // R_{i4})) + (R_6 // R_{i4})\right]}$$

La funzione di trasferimento a catena chiusa diventa:

$$A_F(s) = \frac{A_{OL}(s)}{1+A_{OL}(s)\beta} = \frac{A_{OLo}}{1+T} \cdot \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_o(1+T)}}$$

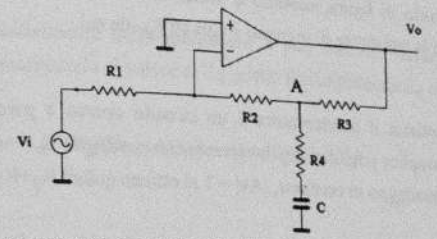
e la frequenza di taglio superiore risulta quindi:

$$f_H = \frac{\omega_H}{2\pi} = f_o(1+T)$$

Imposta f_H, si risale al valore di C_1.

TEMA 3

Lo schema di figura rappresenta una rete anticipatrice (amplificatore derivatore in un limitato range di frequenza) con la caratteristica di avere una resistenza di ingresso costante.



Utilizzando lo schema proposto, e considerando l'amplificatore operazionale ideale, si progetti un amplificatore con le seguenti caratteristiche:

1) Resistenza di ingresso pari a 9900 Ω.
2) Guadagno in continua pari a: $|A_v| = 1$.
3) Guadagno massimo (per $\omega \to \infty$) pari a: $|A_v| = 100$.
4) Azione derivativa nella gamma di frequenze comprese fra 10 Hz e 1 kHz.

A) Si determini il valore di ogni componente del circuito

B) Si traccino i diagrammi asintotici di Bode del modulo e della fase dell'amplificazione così ottenuta, evidenziando la posizione di poli, zeri ed il valore dei guadagni

Per la realizzazione è possibile scegliere fra due amplificatori operazionali reali la cui amplificazione può essere descritta da una funzione di trasferimento di tipo passa basso a tre poli con i valori dati in tabella.

	Amp. Op. #1	Amp. Op. #2
G(0)	60 dB	100 dB
f_1	1 kHz	100 Hz
f_2	1 MHz	1 kHz
f_3	1 MHz	100 kHz

C) Si scelga l'amplificatore operazionale che risulta in grado di garantire i migliori risultati.
La scelta va giustificata dal confronto delle prestazioni di entrambi gli operazionali relativamente alla stabilità del sistema a retroazione realizzato ed alla precisione del risultato (risposta in frequenza).

SOLUZIONE

A. Valore di ogni componente del circuito

Dall'analisi del circuito di figura, essendo il morsetto non invertente dell'operazionale a massa virtuale, si osserva che la resistenza di ingresso è pari ad R_1, da cui:

$R_{in} = R_1 = 9900\ \Omega$.

Per la corrente continua il condensatore è un circuito aperto e perciò il circuito assume la configurazione di un semplice amplificatore invertente con guadagno $A_v = -(R_2+R_3)/R_1$.

Dalla specifica del guadagno in continua, $|Av| = 1$ si ottiene quindi $R_2+R_3 = R_1$.

Per $\omega \to \infty$ il condensatore C si può supporre un corto circuito per determinare il guadagno del circuito.

La corrente che scorre su R_2 è la stessa che scorre su R_1 e perciò la tensione al punto comune delle tre resistenze R_4, R_2 ed R_3 vale: $V_A = -(R_2/R_1)V_{in}$.

Si ricava ora la corrente su R_3:

$I_{R3} = I_{R2}+I_{R4} = V_A/R_2+V_A/R_4$.

Si determina infine la tensione di uscita

$$V_o = V_A+R_3\, I_{R3} = V_A(1+R_3\,(1/R_2+1/R_4)) = -\,(R_2/R_1)(1+\,R_3\,(1/R_2+1/R_4))V_{in}$$

da cui

$$A_v = -\,(R_2/R_1)[1+\,R_3\,(1/R_2+1/R_4)] = -\,[R_2+R_3+\,(R_2\,R_3)/R_4)]/R_1$$

che, ricordando che $R_2+R_3 = R_1$, si può anche scrivere:

$$A_v = -\,[1+R_p/R_4] = -100$$

avendo definito $R_p = R_2//R_3$

E' da notare che il guadagno A_v può anche essere scritto nella forma

$$A_v = -\,R_{23}/R_1$$

dove si è indicata con R_{23} la resistenza che si ottiene con la trasformazione stella-triangolo applicata alle tre resistenze R_2, R_3 ed R_4. Con tale trasformazione il circuito assume la configurazione di un amplificatore invertente con una resistenza di carico, collegata all'uscita dell'amplificatore, ed una fra l'ingresso invertente ed il riferimento che risultano ininfluenti sul guadagno. Inoltre una resistenza (R_{23}) risulta connessa fra l'uscita e l'ingresso invertente dell'operazionale definendo così il guadagno.

Nel calcolo dei valori di R_2, R_3 ed R_4 ci sono solo due vincoli:

$R_2+R_3 = R_1$

$R_2//R_3 = 99\,R_4$

e quindi esiste un grado di libertà nella scelta di tali valori. Si può scegliere $R_2 = R_3$. Questa soluzione massimizza il valore di R_p e quindi di R_4. Si ottiene:

$R_2 = R_3 = R_1/2 = 4950\ \Omega$

$R_4 = (R_2//R_3)/99 = 25\ \Omega$

La Funzione di Trasferimento dell'amplificatore si può ottenere facilmente dall'espressione del guadagno in continua sostituendo al valore di R_4 quello dell'impedenza Z_4 data dalla serie di R_4 e del condensatore C.

$$W(s) = -\,(1+R_p/Z_4) = -\,[1+R_p/(R_4+1/sC)\,] = -(1+sT_1)/(1+sT_2)$$

avendo posto

$T_1 = C\,(R_4+R_p)$

$T_2 = C\,R_4$

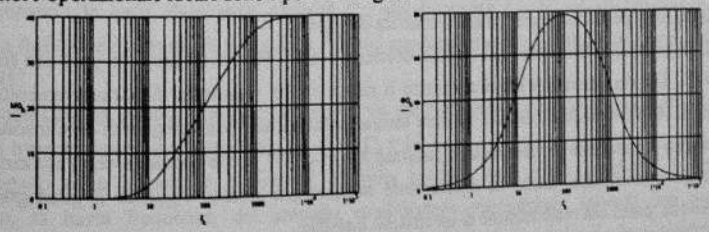
(è da notare che la scelta di massimizzare R_p ed R_4 permette ora di minimizzare il valore di C).

L'azione derivativa, che deve essere compresa fra le due decadi 10-1000Hz, consente di fissare la posizione dello zero e del polo a tali frequenze e, di conseguenza il valore di C.

$C = 1/(2\pi\ 1000\ R_4) = 1/[2\pi\ 10\ (R_4+R_p)] = 6.37\ \mu F$

B. Diagrammi di Bode del modulo e della fase dell'amplificazione

I diagrammi di Bode del modulo e della fase che si ottengono supponendo di utilizzare un amplificatore operazionale ideale sono riportati in figura.



C. Scelta dell'amplificatore operazionale

Per la scelta dell'amplificatore operazionale a partire dalle caratteristiche fornite occorre valutare la stabilità del circuito a retroazione che si deve realizzare e la precisione della caratteristica che si ottiene considerando il fatto che il guadagno è finito.

Per il calcolo della stabilità dell'anello di retroazione si può interrompere la catena all'ingresso invertente e calcolare la tensione all'uscita dell'operazionale una volta spento il generatore V_i. Si ottiene la seguente FdT:

$$T(s) = A_{AmpOp}\frac{1}{2}\frac{1+sCR_4}{\left[1+sC(R_4+3R_2/4)\right]} = A_{AmpOp}\frac{1}{2}\frac{1+s/z_1}{1+s/p_1}$$

mentre l'amplificatore operazionale presenta un FdT a tre poli

$$A_{AmpOp} = \frac{G_0}{(1+s/p_2)(1+s/p_3)(1+s/p_4)}$$

Si devono studiare ora separatamente le FdT che si ottengono a partire dai due diversi operazionali.

Amp.Op.#1

La FdT del guadagno d'anello T(s) presenta un guadagno statico pari a $G_0/2 = 500 = 54$ dB, uno zero a $f_{Z1} = 1$ kHz e quattro poli rispettivamente a $f_{P1} = 6.7$ Hz, $f_{P2} = 1$ kHz, $f_{P3} = 1$ MHz, $f_{P4} = 1$ MHz. Tenuto conto della cancellazione polo-zero che si ha alla frequenza di 1 kHz, il diagramma di Bode presenta un polo dominante (a 6.7 Hz) ed altri due poli alla frequenza di 1 MHz. Dal diagramma di Bode asintotico si ricava che la frequenza di attraversamento f_{A1} è sul tratto a -20 dB/decade ($f_{A1} = 500 \cdot 6.7 = 3350$ Hz << 1 MHz) e quindi il sistema retroazionato risulta stabile. Un calcolo del margine di fase porta al risultato MF = 89.8°.

Amp.Op.#2

La FdT del guadagno d'anello T(s) presenta un guadagno statico pari a $G_0/2 = 50000 = 94$ dB (molto più alto del precedente), uno zero a $f_{Z1} = 1$ kHz e quattro poli rispettivamente a $f_{P1} = 6.7$ Hz, $f_{P2} = 1$ kHz, $f_{P3} = 100$ Hz, $f_{P4} = 100$ kHz, e, anche in questo caso, si deve tenere conto della cancellazione polo-zero che si ha alla frequenza di 1 kHz.

Il diagramma di Bode presenta un polo dominante (a 6.7 Hz) ed un secondo polo alla frequenza di 100 Hz. Dal diagramma di Bode asintotico si ricava che la frequenza di attraversamento f_{A2} è sul tratto a -40 dB/decade e quindi il sistema retroazionato risulta con margine di fase insoddisfacente. Il calcolo del margine di fase porta al risultato MF = -2.25° il che conclude che l'utilizzo di questo secondo operazionale, anche se decisamente migliore per quanto riguarda il guadagno in bassa frequenza, porta alla realizzazione di un circuito instabile.

La frequenza di attraversamento f_{A2} in questo secondo caso è calcolabile a partire dalla FdT T(s). Per ognuno dei tre fattori del denominatore, che corrispondono ai poli di T(s), si trascura l'addendo meno significativo fra l'unità ed il termine dipendente dalla frequenza. Risulta:

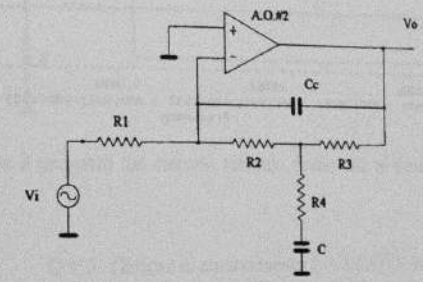
$$T(j\omega) \cong \frac{G_0}{2}\cdot\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\cdot j\frac{\omega}{\omega_{p3}}}$$

$$f_{A2} = \sqrt{\frac{G_0 f_1 f_{p3}}{2}} = 5800\,\text{Hz}$$

In conclusione,non è possibile utilizzare in questo schema il secondo operazionale perchè provoca un funzionamento instabile del circuito.

Se fosse possibile utilizzare il secondo operazionale, però, si avrebbe una maggiore precisione nell'ottenimento della FdT richiesta in quanto tale operazionale dispone di un maggiore guadagno.

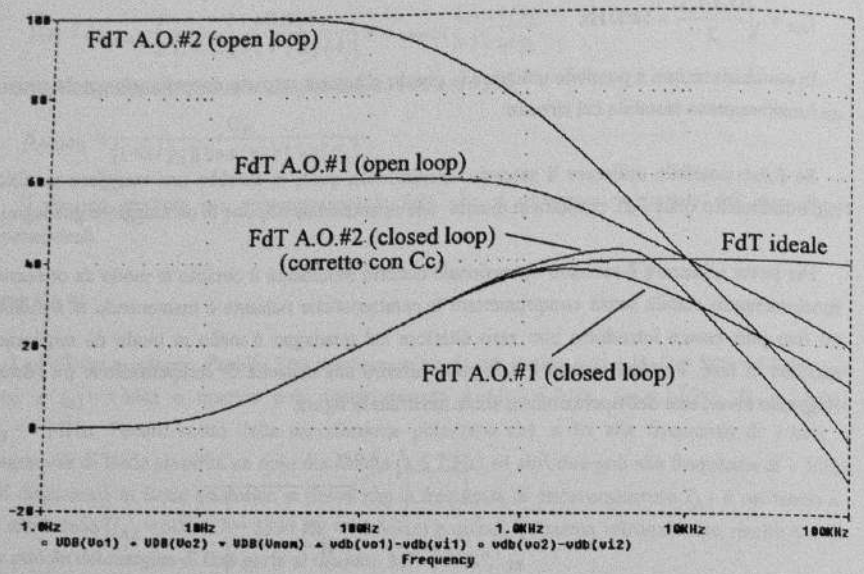
Per poter utilizzare il secondo operazionale occorre modificare il circuito in modo da ottenere un funzionamento stabile senza compromettere le caratteristiche richieste e mantenendo la stabilità. A tal fine può essere introdotto uno zero ulteriore nel guadagno d'anello in modo da migliorare il margine di fase. Per fare questo è sufficiente inserire una capacità di compensazione fra l'uscita e l'ingresso invertente dell'operazionale, come mostrato in figura.



Posizionando lo zero, dato dalla capacità C_c, alla frequenza f_{A2} in cui c'è l'attraversamento dell'asse a 0dB sul diagramma di Bode della FdT del guadagno d'anello, si ottiene un margine di fase di circa 45°.

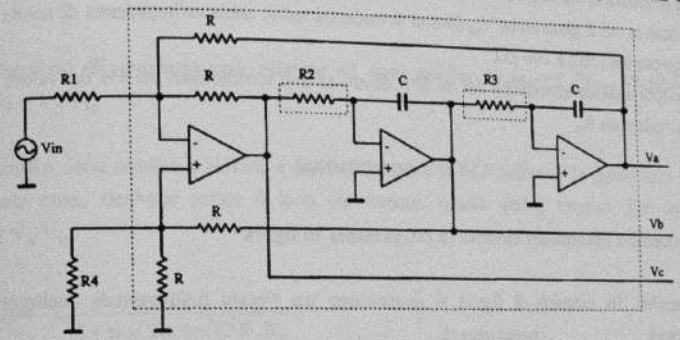
Sviluppando i calcoli relativi al nuovo circuito (la via più conveniente è di scomporre la rete R_2, R_3, Z_4 con la trasformazione stella-triangolo) si trova $C_c = 27.7$ pF.

Di seguito sono riportati i diagrammi di Bode calcolati nelle varie situazioni. Il maggior guadagno, in bassa frequenza, del secondo amplificatore operazionale assicura una maggior precisione fino a frequenze prossime ad 1kHz. Oltre a questa frequenza la banda degli amplificatori operazionali non è comunque sufficiente per garantire un valore adeguato della FdT a catena chiusa. In ogni caso il secondo aplificatore mantiene l'effetto derivativo richiesto su una banda maggiore.



TEMA 4

Si vuole realizzare un filtro a variabili di stato del secondo ordine che consenta di ottenere le tre funzioni di passa basso (V_a), passa banda (V_b) e passa alto (V_c). Per la realizzazione del progetto si è scelto il circuito integrato UAF42 della Burr-Brown che dispone di quasi tutti i componenti necessari alla realizzazione di tale filtro. La struttura interna del circuito integrato e dei componenti esterni (R_1, R_2, R_3, R_4) costituenti il filtro è mostrata in figura (R = 50 kΩ ±0.5%, C = 1 nF ±0.5%):



Occorre ora completare il progetto del circuito tenendo conto che si desidera ottenere le seguenti prestazioni:

Fattore di merito:	Q = 3 (fattore di smorzamento $\xi = 1/(2Q) = 1/6$)	
Sezione passa basso:	Guadagno in banda	$A_0 = 0$ dB
	Frequenza di taglio superiore	$f_H = 2.75$ kHz
Sezione passa alto:	Guadagno in banda	$A_0 = 0$ dB
	Frequenza di taglio inferiore	$f_L = 2.75$ kHz
Sezione passa banda:	Guadagno in banda (calcolato come valore massimo sul diagramma di Bode asintotico)	$A_0 = 0$ dB
	Frequenza di centro banda	$f_B = 2.75$ kHz

Nel progetto, oltre allo sviluppo teorico, devono essere riportati:

1. Lo schema a blocchi del circuito (a retroazione) di figura
2. Le funzioni di trasferimento relative ad ogni uscita: $W_a(s) = V_a/V_{in}$, $W_b(s) = V_b/V_{in}$, $W_c(s) = V_c/V_{in}$
3. I diagrammi di Bode dei moduli delle F.d.T. determinate al punto 2 (sono sufficienti i diagrammi asintotici)
4. I valori delle resistenze R_1, R_2, R_3 ed R_4 che assicurano le specifiche richieste

5. Il valore massimo del segnale di ingresso che assicura un comportamento lineare (non provoca la saturazione degli stadi ad operazionale). Si consideri che ogni operazionale può erogare al massimo una tensione simmetrica di 20 V picco-picco
6. Una valutazione dell'effetto complessivo sull'uscita (caso peggiore) delle tensioni di offset e delle correnti di bias degli operazionali (si assumano i valori tipici: $|V_{offset}| \le 5$ mV, $I_{bias} \le 50$ pA, $|I_{offset}| \le 5$ pA)
7. Una proposta di modifica del circuito che garantisca il mantenimento delle caratteristiche del filtro nel caso in cui il generatore V_{in} (finora considerata nulla) abbia un'impedenza di uscita di valore compreso fra 1 kΩ e 100 kΩ
8. Gli effetti sulle caratteristiche dei tre filtri dovuti ad uno scostamento del 5% dal valore nominale della resistenza R_4

SOLUZIONE

1. Lo schema a blocchi del circuito (a retroazione) di figura

Dall'analisi del circuito di figura si riconoscono tre blocchi fondamentali, realizzati dai tre operazionali:

- un sommatore con ingressi pesati
- due integratori

I tre blocchi sono in cascata e ci sono due anelli di retroazione. Le tensioni di uscita coincidono con le tensioni di uscita di ogni singolo blocco.

Per quanto riguarda il sommatore, si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti per determinare l'andamento di V_c in funzione degli ingressi V_{in}, V_b e V_a.

Dall'analisi del circuito si ricava:

$$V_c = -\frac{R}{R_1}V_{in} - \frac{R}{R}V_a + \frac{R//R_4}{R+R//R_4}\left(1+\frac{R}{R//R_1}\right)V_b$$

che si può anche scrivere nella forma:

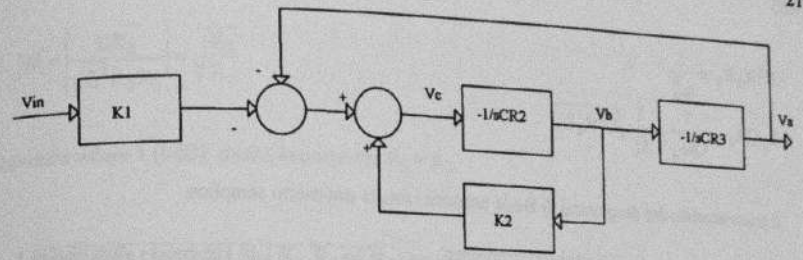
$$V_c = -k_1 \cdot V_{in} - 1 \cdot V_a + k_2 \cdot V_b$$

con ovvia definizione dei coefficienti k_1 e k_2.

Le funzioni di trasferimento dei due blocchi integratori sono date da:

$$V_b = -\frac{1}{sCR_2}V_c \qquad V_a = -\frac{1}{sCR_3}V_b$$

Ora è possibile disegnare lo schema a blocchi di figura:



2. Le funzioni di trasferimento relative ad ogni uscita: $W_a(s) = V_a/V_{in}$, $W_b(s) = V_b/V_{in}$, $W_c(s) = V_c/V_{in}$

Dall'analisi dello schema a blocchi si possono ricavare le FdT richieste. In particolare conviene, per prima cosa, risolvere prima il loop più interno, quindi quello esterno, per determinare $W_a(s) = V_a/V_{in}$.

$$W_a(s) = -k_1 \frac{1}{1+sk_2CR_3+s^2C^2R_2R_3} \qquad \text{(passa basso)}$$

da questa, osservando sullo schema a blocchi che $W_b(s)$ e $W_c(s)$ coincidono con le derivate rispettivamente di $W_a(s)$ e $W_b(s)$, si trova:

$$W_b(s) = k_1 \frac{sCR_3}{1+sk_2CR_3+s^2C^2R_2R_3} \qquad \text{(passa banda)}$$

$$W_c(s) = -k_1 \frac{s^2C^2R_2R_3}{1+sk_2CR_3+s^2C^2R_2R_3} \qquad \text{(passa alto)}$$

La specifica di avere guadagno unitario (0 dB) in banda per il filtro passa basso, impone che $k_1=1$ e quindi $R_1=R$. La stessa posizione vale anche per il filtro passa alto che mantiene il guadagno unitario.

3. I diagrammi di Bode dei moduli delle F.d.T. determinate al punto 2 (sono sufficienti i diagrammi asintotici)

Il denominatore delle tre FdT è sempre lo stesso e quindi i due poli sono gli stessi per ogni FdT. Esso assume un'espressione classica se scritto nella forma:

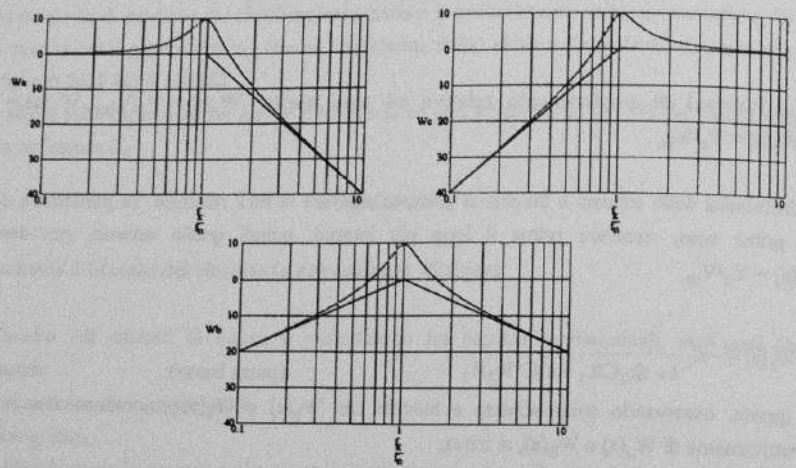
$$W(s) = \frac{N(s)}{1+\frac{s}{Q\omega_n}+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

Potendo così definire i parametri

$$C^2R_2R_3 = \frac{1}{\omega_n^2}$$

$$k_2CR_3 = \frac{1}{Q\omega_n} = \frac{1}{Q}\sqrt{C^2R_2R_3}$$

Il tracciamento dei diagrammi di Bode asintotici risulta ora molto semplice:



$W_a(s)$ ha un guadagno unitario in banda ed un polo doppio alla pulsazione ω_n e quindi il diagramma scende con una pendenza di -40 dB/decade

$W_c(s)$ ha un doppio zero nell'origine ed un polo doppio alla pulsazione ω_n. Il diagramma, quindi, cresce con una pendenza di 40dB/decade fino alla pulsazione ω_n dove poi continua con guadagno unitario in banda.

$W_b(s)$ ha uno zero nell'origine ed un polo doppio alla pulsazione ω_n. Il diagramma, quindi, cresce con una pendenza di 20 dB/decade fino alla pulsazione ω_n dove poi scende con una pendenza di -20 dB/decade. Il punto di spezzamento, che è ovviamente per $\omega = \omega_n$, deve avere un guadagno massimo pari ad 0dB. Tale punto di spezzamento è all'intersezione fra l'asintoto in bassa frequenza e quello in alta frequenza. L'asintoto in bassa frequenza, che si ottiene come limite per $\omega \to 0$, è descritto dall'equazione:

$$|W| = |sCR_3|_{s=j\omega}$$

mentre quello in alta frequenza, che si ottiene come limite per $\omega \to \infty$, è dato da:

$$|W| = \left|\frac{1}{sCR_2}\right|_{s=j\omega}$$

e, ovviamente, l'intersezione avviene ad $\omega = \omega_n$. A tale frequenza, il modulo assume il valore

$$|W| = \left|\frac{CR_3}{\sqrt{C^2R_2R_3}}\right| = \sqrt{\frac{R_3}{R_2}}$$

Dovendo valere 1 (0dB), risulta imposto che $R_2 = R_3$.

4. I valori delle resistenze R_1, R_2, R_3 ed R_4 che assicurano le specifiche richieste

I valore di R_1 è già stato determinato($R_1 = R$), ed inoltre $R_2 = R_3$.

Osservando le specifiche date ($F_H = F_B = F_L$) si deve porre $F_H = F_B = F_L = F_n$ cioè le frequenze di taglio sono definite dai punti di spezzamento sul diagramma asintotico di Bode.

Dall'equazione di ω_n si ricava ora il valore di R_2 ed R_3. Risulta:

$$C^2R_2R_3 = \frac{1}{\omega_n^2}$$

$$R_2 = R_3 = \frac{1}{\omega_n C} = 57.87\,k\Omega$$

Il fattore di merito Q del filtro, rientra nell'espressione

$$k_2CR_3 = \frac{1}{Q\omega_n}$$

da cui si può ricavare

$$k_2 = \frac{1}{Q\omega_n CR_3} = \frac{1}{Q} = \frac{1}{3}$$

Confrontando ora questa espressione con la definizione di k_2 di osserva che rimane determinato il valore dell'ultima resistenza R_4

$$k_2 = \frac{R//R_4}{R + R//R_4}\left(1 + \frac{R}{R//R_1}\right)$$

da cui

$$R_4 = \frac{R}{3Q-2} = \frac{R}{7} = 7.143k\Omega$$

5. Il valore massimo del segnale di ingresso che assicura un comportamento lineare (non provoca la saturazione degli stadi ad operazionale). Si consideri che ogni operazionale può erogare al massimo una tensione simmetrica di 20 V picco-picco

Per determinare l'ampiezza massima del segnale di ingresso che evita la saturazione delle uscite dei singoli stadi, occorre calcolare il valore massimo del guadagno (in modulo) delle tre FdT

Si considera dapprima $W_a(j\omega)$ il cui modulo è dato da:

$$|W_a(j\omega)| = \frac{1}{\left|1+\frac{j\omega}{Q\omega_n}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right|} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2+\frac{x}{Q^2}}}$$

avendo posto

$$x = \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

Tale funzione raggiunge il valore massimo quando $D = (1-x)^2 + \frac{x}{Q^2}$ assume il valore minimo.

Derivando tale espressione ed annullando il risultato si determina $x = 1 - \frac{1}{2Q^2} = \frac{17}{18}$. Il valore massimo di W_a si ha alla pulsazione $\omega = \omega_n\sqrt{x} = \omega_n\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ e vale $|W_a|_{MAX} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}} = 3.04$

Per la FdT passa alto W_c, si può scrivere la seguente espressione

$$|W_c(s)| = \frac{\left|\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right|}{\left|1+\frac{j\omega}{Q\omega_n}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right|} = \frac{x}{\sqrt{(1-x)^2+\frac{x}{Q^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\frac{1}{Q^2}\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-y)^2+\frac{y}{Q^2}}}$$

avendo posto $y = 1/x$. Questa equazione si dimostra analoga a quella della FdT passa basso. Il valore massimo si ha ora per $y = 1 - \frac{1}{2Q^2} = \frac{17}{18}$ e vale $|W_c|_{MAX} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}} = 3.04$

Per la FdT passa banda $W_b(s)$ si procede in modo analogo anche se considerazioni di simmetria porterebbero già a dire che il massimo si trova alla pulsazione di risonanza.
Si può scrivere la seguente equazione:

$$|W_b(j\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_n}}{\left|1+\frac{j\omega}{Q\omega_n}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2}\right|} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)^2+\frac{x}{Q^2}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{(1-x)^2}{x}+\frac{1}{Q^2}}}$$

che assume il valore massimo per quando il primo dei due addendi si annulla e cioè per x=1 ($\omega=\omega_n$).
Quindi vale $|W_b|_{MAX} = Q = 3$

Complessivamente il massimo guadagno del circuito vale 3.04 e si ha sulle uscite passa basso e passa alto. Di conseguenza il valore massimo di tensione applicabile in ingresso senza distorsione risulta:

$$V_{in(max)} = \frac{V_{out(max)}}{|W_a|_{MAX}} = \frac{20}{3.04} = 6.58 V_{picco-picco}$$

6. Una valutazione dell'effetto complessivo sull'uscita (caso peggiore) delle tensioni di offset e delle correnti di bias degli operazionali (si assumano i valori tipici: $|V_{offset}| \le 5$ mV, $I_{bias} \le 50$ pA, $|I_{offset}| \le 5$ pA)

Per valutare l'effetto complessivo delle tensioni di offset e delle correnti di bias sulla tensione di uscita, si può applicare il principio di sovrapposizione degli effetti e valutare gli effetti di ogni singolo generatore equivalente preso singolarmente, mentre si tiene spento il generatore di ingresso V_{in}.

Nelle equazioni che seguono si suppone che V_{OS}, I_{OS} possano assumere valori positivi o negativi e verrà scelto il valore che determina il caso peggiore.

Per quanto riguarda il terzo stadio ad amplificatore operazionale (A3), esso richiede una tensione di ingresso opportuna per bilanciare la tensione di offset e la caduta della corrente di bias su R_3. Tale tensione è fornita da A2 (secondo stadio della catena) che però richiede un ingresso nullo (è un integratore). Risulta perciò (nel caso peggiore):

$$|V_c| = 0, \quad |V_b| = R_3(I_{bias}+I_{OS}) + V_{OS} = 5 \text{ mV} \quad \text{e} \quad |V_a| = |V_b|/3 = 1.7 \text{ mV}$$

dove il valore di $|V_a|$ si ottiene dall'espressione ricavata per V_c sostituendo i valore di R_1, R_2, R_3 e ponendo: $V_c = 0$, $V_{in} = 0$.

Per quanto riguarda il secondo stadio ad amplificatore operazionale (A2), anche questo richiede una tensione di ingresso opportuna per bilanciare la tensione di offset e la caduta della corrente di bias su R_2. Tale tensione è fornita da A1 (primo stadio della catena) che quindi richiede un ingresso non nullo (è un sommatore). La tensione di uscita di A2, invece, deve essere nulla perchè A3 è un integratore. Risulta perciò (nel caso peggiore):

$$|V_b| = 0, \; |V_c| = R_2(I_{bias}+I_{OS}) + V_{OS} = 5 \text{ mV} \text{ e } |V_c| = |V_a| = 5 \text{ mV}$$

dove l'ultima uguaglianza vale perchè il guadagno del primo stadio per l'ingresso V_a è pari a 1 (cfr. espressione di V_c).

Per quanto riguarda il primo stadio (A1), anche questo richiede una tensione di ingresso opportuna per bilanciare la tensione di offset e la caduta della corrente di bias sulle resistenze collegate agli ingressi invertente (INV) e non invertente (NI). Tale tensione è fornita da A3, attraverso la retroazione. Essendo A2 ed A3 degli integratori, devono avere ingressi nulli. Risulta perciò (nel caso peggiore):

$$|V_c| = |V_b| = 0$$

mentre V_a deve assumere un valore tale da portare V_c a zero tenuto conto della tensione di offset e della corrente di bias di A1.

Dall'analisi del circuito si ottiene:

$$V_{NI} = -(R_4 // R // R)(I_{bias} + I_{OS}) = -\frac{R}{9}(I_{bias} + I_{OS})$$

$$V_{INV} = -(R_1 // R // R)(I_{bias} - I_{OS}) + V_a \frac{R_1 // R}{R + R_1 // R}$$

$$V_{INV} = V_{NI} + V_{OS}$$

da cui si ricava (caso peggiore):

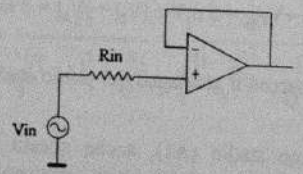
$$|V_a| = 3V_{OS} + \frac{2}{3}RI_{bias} - \frac{4}{3}RI_{OS} = 15mV$$

Riassumendo, nel caso peggiore, si può ottenere:

$$|V_a| = 15 + 5 + 1.7 = \pm 21.7mV$$
$$|V_b| = \pm 5mV$$
$$|V_c| = \pm 5mV$$

7. Una proposta di modifica del circuito che garantisca il mantenimento delle caratteristiche del filtro nel caso in cui il generatore V_{in} (finora considerata nulla) abbia un'impedenza di uscita di valore compreso fra 1 kΩ e 100 kΩ

La modifica da fare sul circuito per farlo diventare indipendente dalla resistenza di sorgente è quella di anteporre al filtro uno stadio buffer a guadagno unitario realizzato con un amplificatore operazionale in configurazione non invertente.



8. Gli effetti sulle caratteristiche dei tre filtri dovuti ad uno scostamento del 5% dal valore nominale della resistenza R_4

Una volta fissati i valori di R_1, R_2 ed R_3 si vede che R_4 modifica solo il valore del fattore di merito Q di tutti i filtri. Essendo

$$Q = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{3\dfrac{R // R_4}{R + R // R_4}}$$

si trova

$$Q = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{R}{R_4}\right) = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{7}{1 + \dfrac{\Delta R_4}{R_4}}\right)$$

da cui, con alcuni passaggi, si ricava

$$\frac{\Delta Q}{Q} = -\frac{7}{9}\left(\frac{\dfrac{\Delta R_4}{R_4}}{1 + \dfrac{\Delta R_4}{R_4}}\right)$$

da cui:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = +4.1\% \quad \text{per} \quad \frac{\Delta R_4}{R_4} = -5\%$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = -3.7\% \quad \text{per} \quad \frac{\Delta R_4}{R_4} = +5\%$$

ISBN 88-87331-24-3