Luca Perregrini

Esercizi svolti per il corso di Circuiti Elettrici Lineari

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica e Informatica

Dipartimento di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Università di Pavia

a.a. 2018/19

Indice

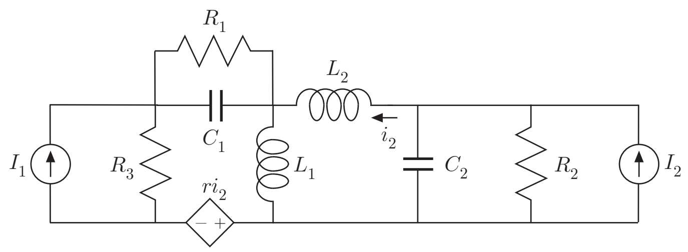
1

Circuiti in regime stazionario

Esercizio 1.1 (Soluzione a pag. 27)

Con riferimento al circuito in figura, calcolare le potenze assorbite o erogate dai generatori e dalle resistenze, e le energie immagazzinate negli induttori e nei condensatori.

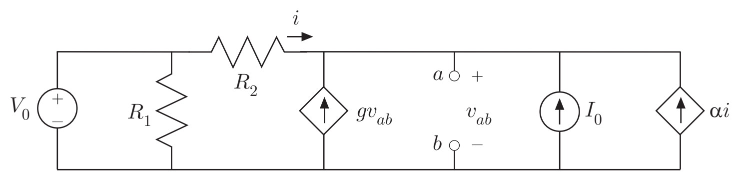
Dati: $I_1 = 0.4$ A, $I_2 = 50$ mA, $R_1 = R_2 = 50$ Ω, $R_3 = 100$ Ω, $r = 200$ Ω, $C_1 = 10$ nF, $C_2 = 50$ nF, $L_1 = L_2 = 1$ μH.



Esercizio 1.2 (Soluzione a pag. 28)

Con riferimento al circuito in figura, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Determinare quindi la potenza disponibile del generatore. Calcolare infine la potenza erogata dal generatore se un carico di valore R_L viene collegato ai morsetti ab.

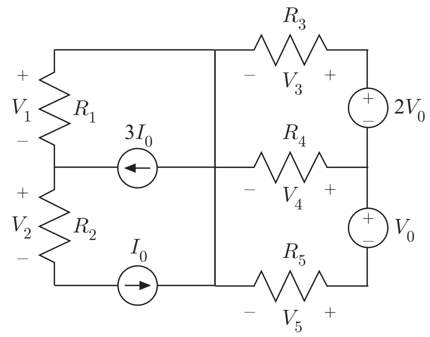
Dati: $V_0 = 50$ V, $I_0 = 2$ A, $R_1 = 50$ Ω, $R_2 = 100$ Ω, $g = 20$ mS, $\alpha = 3$, $R_L = 200$ Ω.



Esercizio 1.3 (Soluzione a pag. 29)

Tutti i generatori presenti nel circuito in figura funzionano in regime stazionario. Calcolare per tutte le resistenze il valore di tensione (con le convenzioni di segno indicate) e determinare le potenze assorbite o erogate da tutti gli elementi del circuito.

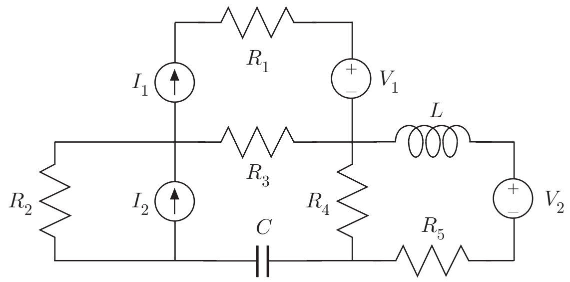
Dati: $R_1 = R_5 = 100$ Ω, $R_2 = R_4 = 50$ Ω, $R_3 = 200$ Ω, I_0 = 0.1 A, V_0 = 10 V.



Esercizio 1.4 (Soluzione a pag. 30)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori funzionano in regime stazionario, determinare la potenza assorbita o erogata da ogni elemento del circuito e le energie immagazzinate nel condensatore e nell'induttore.

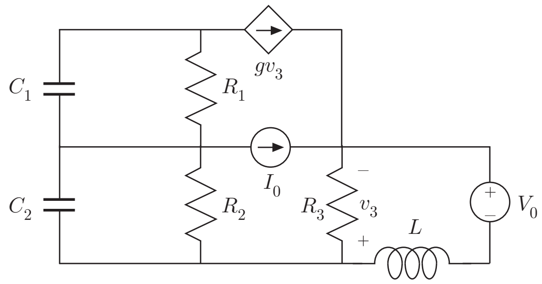
Dati: V_1 = 300 V, V_2 = 1000 V, I_1 = 2 A, I_2 = 0.5 A, $R_1 = R_5 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 500\ \Omega$, $R_4 = 400\ \Omega$, C = 10 nF; L = 2 μH.



Esercizio 1.5 (Soluzione a pag. 31)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori funzionano in regime stazionario, determinare la potenza assorbita o erogata dalle tre resistenze e dai tre generatori e le energie immagazzinate nei condensatori e nell'induttore.

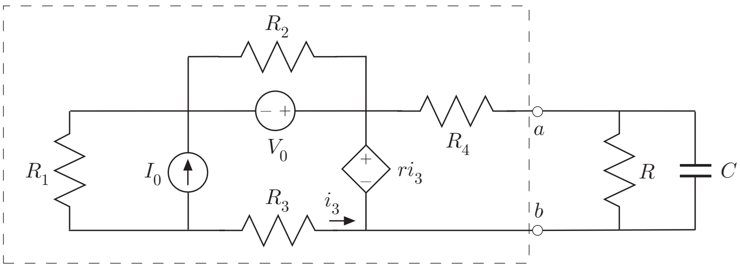
Dati: V_0 = 100 mV, I_0 = 2 mA, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $R_3 = 200\ \Omega$, g = 20 mS, C_1 = 10 nF, C_2 = 5 nF, L = 6 mH.



Esercizio 1.6 (Soluzione a pag. 33)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale tutti i generatori funzionano in regime stazionario, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab per il circuito indicato nel riquadro tratteggiato. Calcolare quindi la potenza istantanea assorbita dalla resistenza R e l'energia immagazzinata nel condensatore C.

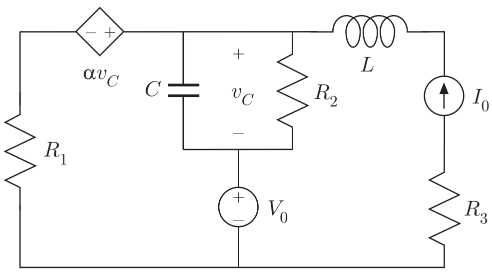
Dati: V_0 = 100 V, I_0 = 0.5 A, $R_1 = 120\ \Omega$, $R_2 = 75\ \Omega$, $R_3 = 80\ \Omega$, $R_4 = 100\ \Omega$, $r = 400\ \Omega$, $R = 50\ \Omega$, C = 10 pF.



Esercizio 1.7 (Soluzione a pag. 33)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori operano in regime stazionario, determinare l'energia immagazzinata nel condensatore e nell'induttore, e la potenza assorbita dalla resistenza R_1.

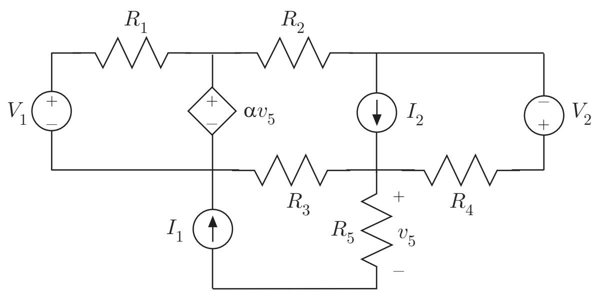
Dati: V_0 = 200 V, I_0 = 5 A, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$, α = 2, C = 20 nF, L = 10 μH.



Esercizio 1.8 (Soluzione a pag. 34)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori operano in regime stazionario, calcolare le potenze assorbite da tutte le resistenze.

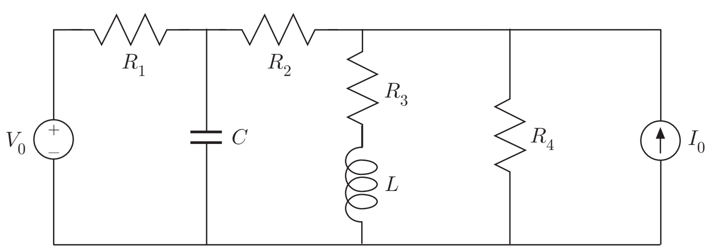
Dati: I_1 = 1 A, I_2 = 1.5 A, V_1 = 60 V, V_2 = 20 V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 50\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$, $R_5 = 100\ \Omega$, α = 0.1.



Esercizio 1.9 (Soluzione a pag. 35)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori lavorano in regime stazionario, calcolare le potenze assorbite dalle resistenze e le energie immagazzinate nel condensatore e nell'induttore.

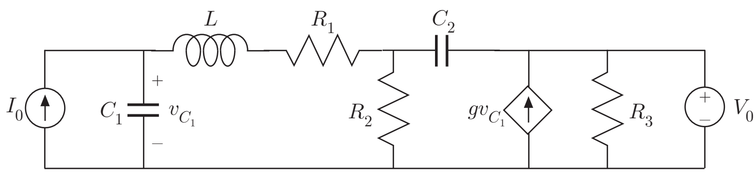
Dati: V_0 = 2 kV, I_0 = 2.5 A, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, $R_3 = 200\ \Omega$, $R_4 = 400\ \Omega$, C = 100 pF, L = 2 μH.



Esercizio 1.10 (Soluzione a pag. 36)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori lavorano in regime stazionario, calcolare le potenze istantanee sulle resistenze e sui generatori, e le energie immagazzinate nei condensatori e nell'induttore.

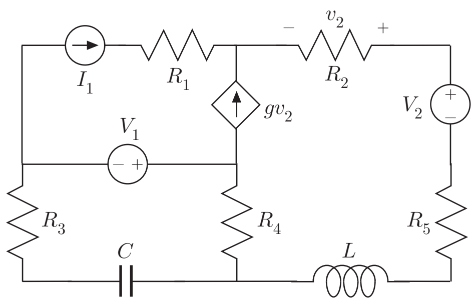
Dati: V_0 = 10 V, I_0 = 0.1 A, g = 10 mS, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$, C_1 = 200 pF, C_2 = 100 pF, L = 4 μH.



Esercizio 1.11 (Soluzione a pag. 37)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori funzionano in regime stazionario, calcolare la potenza dissipata sulla resistenza R_2 e le energie immagazzinate nel condensatore e nell'induttore.

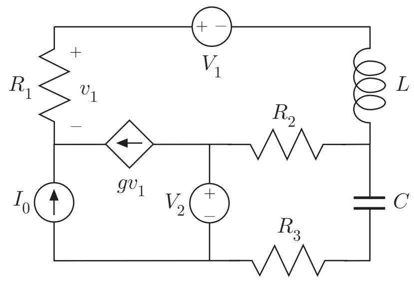
Dati: V_1 = 150 V, V_2 = 50 V, I_1 = 4 A, g = 20 mS, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$, $R_4 = 50\ \Omega$, $R_5 = 50\ \Omega$, C = 2 nF, L = 10 μH.



Esercizio 1.12 (Soluzione a pag. 38)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori funzionano in regime stazionario, calcolare la potenza dissipata sulla resistenza R_1 e le energie immagazzinate nel condensatore e nell'induttore.

Dati: I_0 = 8 A, V_1 = 100 V, V_2 = 300 V, g = 20 mS, $R_1 = 150\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$, C = 2 nF, L = 10 μH.



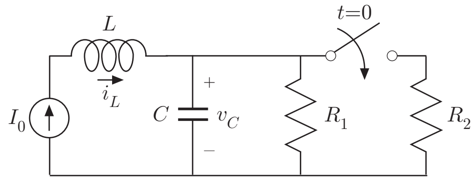
2

Circuiti in regime transitorio

Esercizio 2.1 (Soluzione a pag. 39)

Con riferimento al circuito in figura, determinare le espressioni di $i_L(t)$ e $v_C(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

Dati: I_0 = 5 A, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, L = 5 μH, C = 10 nF.

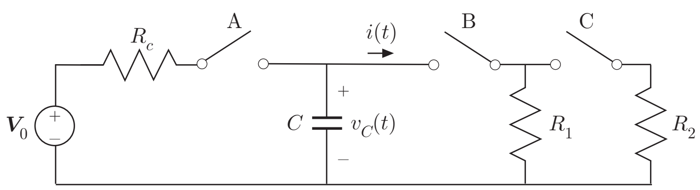


Esercizio 2.2 (Soluzione a pag. 40)

Con riferimento al circuito in figura, determinare le espressioni di $i(t)$ e $v_C(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale. La sequenza di funzionamento degli interruttori A, B e C è la seguente:

tempo	A	B	C
$t < 0$	chiuso	aperto	aperto
$0 \leq t < T$	aperto	chiuso	aperto
$t \geq T$	aperto	chiuso	chiuso

Dati: V_0 = 5 V, R_c = 1 kΩ, R_1 = 1 kΩ, $R_2 = 580\ \Omega$, C = 1 mF, T = 1 s.

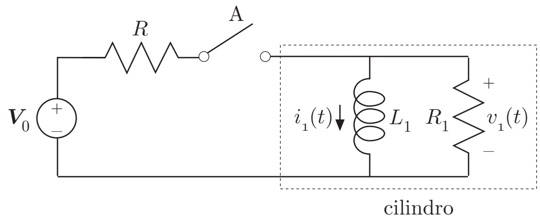


Esercizio 2.3 (Soluzione a pag. 41)

Il circuito mostrato in figura descrive il funzionamento di una candela di accensione per un motore a scoppio mono-cilindrico. Determinare le espressioni di $i_1(t)$ e $v_1(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale. Supponendo che la tensione $v_1(t)$ sia applicata ai capi di due elettrodi posti in aria e distanti tra loro d, determinare se il massimo campo elettrico tra gli elettrodi è maggiore della rigidità dielettrica E_s. La sequenza di funzionamento dell'interruttore A è riportata in tabella.

Dati: $\mathbf{V}_0$ = 24 V, R = 2.4 Ω, R_1 = 500 kΩ, L_1 = 1 mH, T = 2 ms, d = 1 mm, E_s = 2 MV/m.

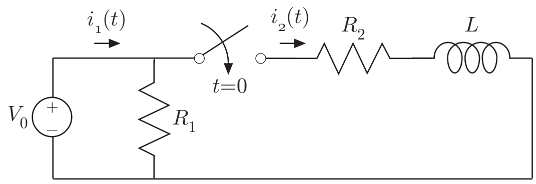
tempo	A
$t < 0$	aperto
$0 \leq t < T$	chiuso
$t \geq T$	aperto



Esercizio 2.4 (Soluzione a pag. 43)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore si chiude all'istante di tempo $t = 0$, determinare l'espressione di $i_1(t)$ e $i_2(t)$ per ogni istante di tempo t e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

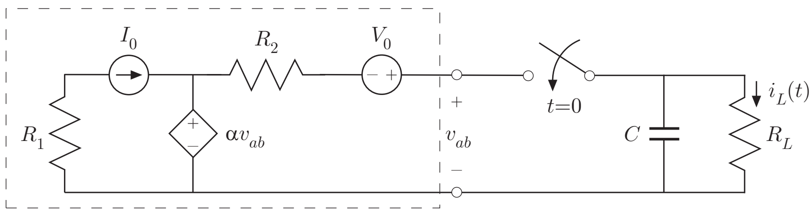
Dati: V_0 = 1 V, R_1 = 100 Ω, R_2 = 50 Ω, L = 1 mH.



Esercizio 2.5 (Soluzione a pag. 45)

Dopo aver rappresentato la parte di circuito evidenziata dal rettangolo tratteggiato con un generatore equivalente di Thevenin o di Norton, si determini, per ogni istante di tempo, l'espressione della corrente sulla resistenza R_L, sapendo che l'interruttore si chiude all'istante $t = 0$. Si tracci infine l'andamento della i_L al variare del tempo.

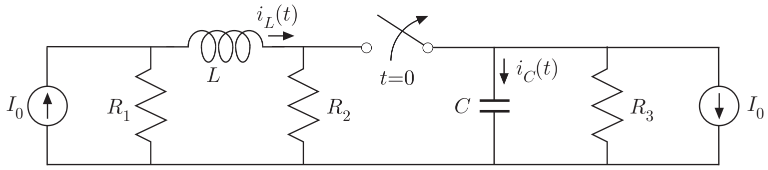
Dati: V_0 = 100 V, I_0 = 5 A, α = 0.5, R_1 = 20 Ω, R_2 = 50 Ω, R_L = 100 Ω, C = 20 nF.



Esercizio 2.6 (Soluzione a pag. 47)

Con riferimento al circuito in figura, in cui l'interruttore si apre all'istante $t = 0$, determinare l'espressione delle correnti i_L e i_C per ogni istante di tempo, e tracciarne l'andamento al variare del tempo.

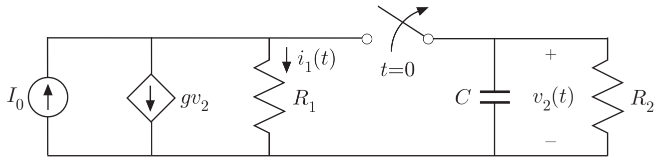
Dati: I_0 = 3 A, R_1 = 100 Ω, R_2 = 200 Ω, R_3 = 50 Ω, L = 3 μH, C = 0.4 nF.



Esercizio 2.7 (Soluzione a pag. 48)

Con riferimento al circuito in figura, in cui l'interruttore si apre all'istante $t = 0$, determinare l'espressione della corrente i_1 per ogni istante di tempo, e tracciarne l'andamento al variare del tempo.

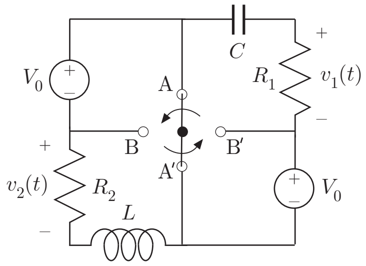
Dati: $I_0 = 10$ A, $R_1 = 100$ Ω, $R_2 = 50$ Ω, $g = 0.02$ S, $C = 10$ nF.



Esercizio 2.8 (Soluzione a pag. 49)

L'interruttore indicato nel circuito in figura commuta nell'istante $t = 0$ dalla posizione AA′ alla posizione BB′. Determinare le espressioni delle tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ per ogni istante di tempo e tracciarne il grafico dell'andamento temporale.

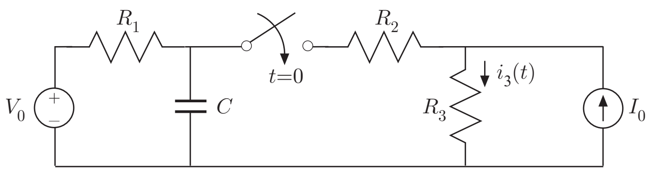
Dati: $V_0 = 10$ V, $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$, $C = 10$ nF, $L = 100\ \mu$H.



Esercizio 2.9 (Soluzione a pag. 50)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore si chiude all'istante $t = 0$, determinare l'espressione di $i_3(t)$ per ogni istante di tempo t, e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

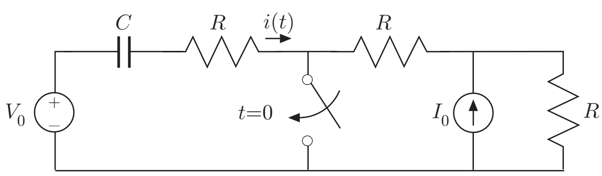
Dati: V_0 = 300 V, I_0 = 2 A, R_1 = 100 Ω, $R_2 = R_3$ = 50 Ω, C = 1 μF.



Esercizio 2.10 (Soluzione a pag. 51)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore si chiude all'istante $t = 0$, determinare l'espressione di $i(t)$ per ogni istante di tempo t, e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

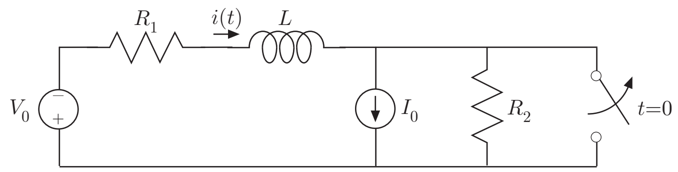
Dati: V_0 = 100 V, I_0 = 2 A, R = 100 Ω, C = 100 pF.



Esercizio 2.11 (Soluzione a pag. 52)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore si apre all'istante $t = 0$, determinare l'espressione di $i(t)$ per ogni istante di tempo t, e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

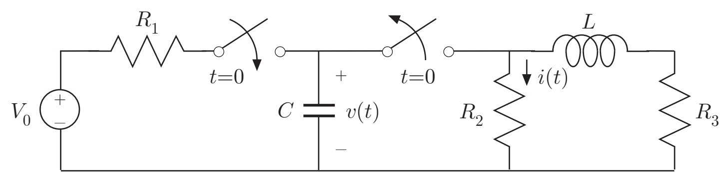
Dati: V_0 = 200 V, I_0 = 2.5 A, R_1 = 100 Ω, R_2 = 200 Ω, L = 0.5 μH.



Esercizio 2.12 (Soluzione a pag. 53)

Nell'istante $t = 0^-$ sull'armatura superiore del condensatore indicato nel circuito in figura è immagazzinata la carica $+Q$. Successivamente, nell'istante $t = 0$ i due interruttori vengono commutati istantaneamente (quello di sinistra si chiude mentre quello di destra si apre). Determinare l'espressione di $v(t)$ e $i(t)$ per ogni istante di tempo $t \geq 0$, e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

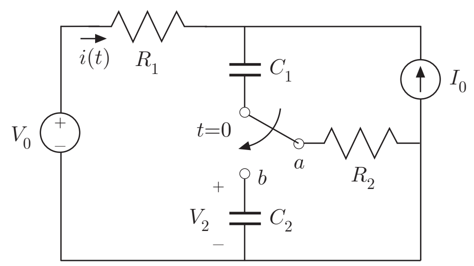
Dati: V_0 = 100 V, Q = 0.5 μC, C = 10 nF, $R_1 = R_3$ = 100 Ω, R_2 = 50 Ω, L = 75 μH.



Esercizio 2.13 (Soluzione a pag. 54)

Prima dell'istante $t = 0$ il condensatore C_2 indicato in figura ha ai suoi capi una tensione di valore V_2. All'istante $t = 0$ l'interruttore viene commutato dal morsetto a al morsetto b. Determinare l'espressione della corrente $i(t)$ per ogni istante di tempo e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

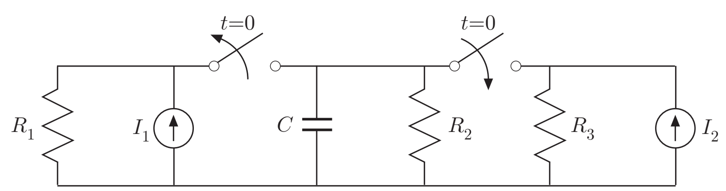
Dati: V_0 = 50 V, V_2 = 100 V, I_0 = 2 A, C_1 = 60 nF, C_2 = 120 nF, R_1 = 25 Ω, R_2 = 50 Ω.



Esercizio 2.14 (Soluzione a pag. 55)

Con riferimento al circuito in figura, determinare l'espressioni della potenza istantanea $p_3(t)$ assorbita dalla resistenza R_3 (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

Dati: I_1 = 1.5 A, I_2 = 3 A, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$, C = 15 pF.

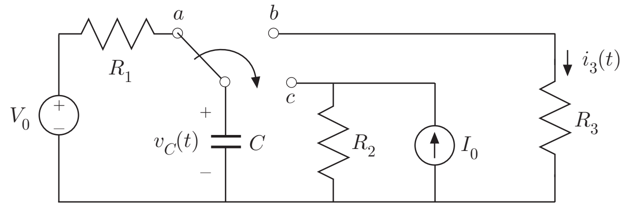


Esercizio 2.15 (Soluzione a pag. 56)

Prima dell'istante $t = 0$ l'interruttore indicato nel circuito in figura è collegato al morsetto a. All'istante $t = 0$

l'interruttore viene commutato nella posizione b, e all'istante $t = T$ esso commuta nella posizione c. Determinare le espressioni della tensione $v_C(t)$ e $i_3(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

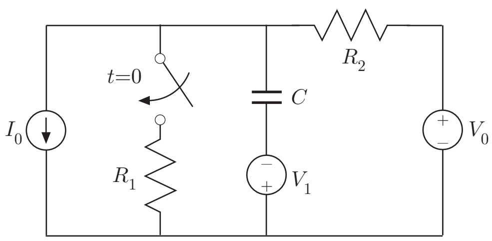
Dati: V_0 = 10 V, I_0 = 0.2 A, $R_1 = 400\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 200\ \Omega$, C = 5 nF; T = 0.5 μs.



Esercizio 2.16 (Soluzione a pag. 58)

Con riferimento al circuito in figura, determinare l'espressione dell'energia immagazzinata sul condensatore (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

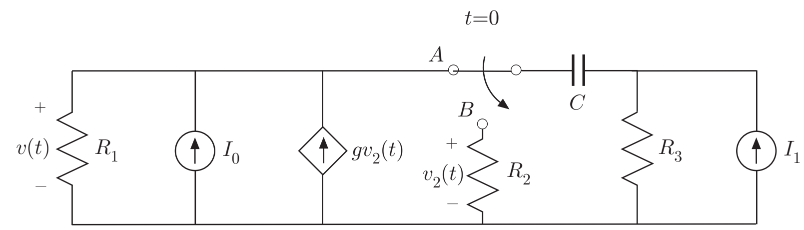
Dati: I_0 = 2 A, V_0 = 100 V, V_1 = 50 V, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, C = 10 pF.



Esercizio 2.17 (Soluzione a pag. 59)

Con riferimento al circuito in figura, determinare l'espressione di $v(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

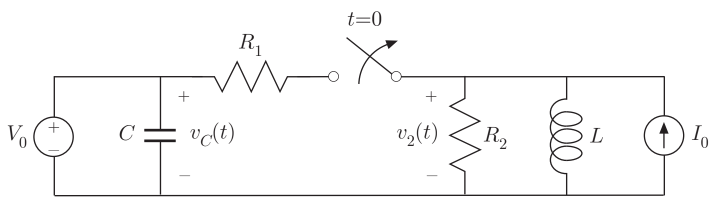
Dati: I_0 = 2 mA, I_1 = 5 mA, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$, $g = 50$ mS, C = 4 nF.



Esercizio 2.18 (Soluzione a pag. 60)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore si apre all'istante $t = 0$, determinare l'espressione di $v_C(t)$ e $v_2(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

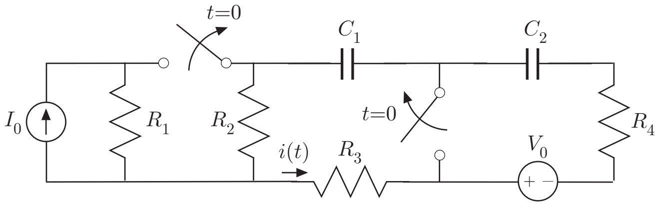
Dati: V_0 = 10 V, I_0 = 40 mA, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, L = 0.1 μH, C = 10 nF.



Esercizio 2.19 (Soluzione a pag. 61)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale entrambi gli interruttori si aprono all'istante $t = 0$, determinare l'espressione di $i(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

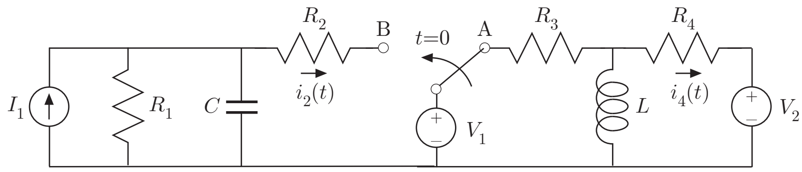
Dati: V_0 = 100 V, I_0 = 4 A, $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 50\ \Omega$, C_1 = 4 nF, C_2 = 6 nF.



Esercizio 2.20 (Soluzione a pag. 62)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore commuta dal morsetto A al morsetto B all'istante $t = 0$, determinare le espressioni di $i_2(t)$ e $i_4(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

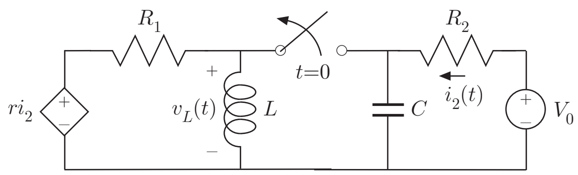
Dati: I_1 = 1 A, V_1 = 50 V, V_2 = 100 V, $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 25\ \Omega$, $R_4 = 50\ \Omega$, L = 100 μH, C = 20 nF.



Esercizio 2.21 (Soluzione a pag. 64)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore si apre all'istante $t = 0$, determinare le espressioni di $v_L(t)$ e $i_2(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

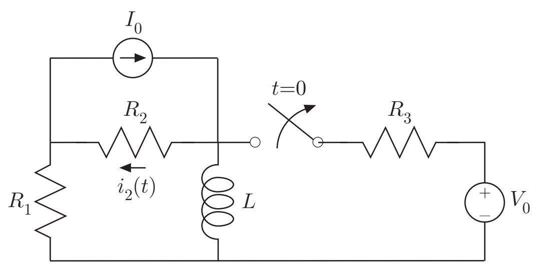
Dati: V_0 = 9 V, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $r = 300\ \Omega$, L = 5 μH, C = 0.1 nF.



Esercizio 2.22 (Soluzione a pag. 65)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore (inizialmente chiuso) si apre all'istante $t = 0$, determinare l'espressione di $i_2(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

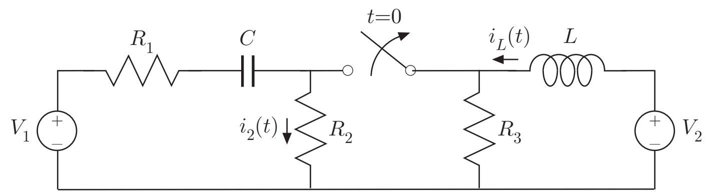
Dati: V_0 = 1.5 V, I_0 = 10 mA, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 400\ \Omega$, $R_3 = 500\ \Omega$, L = 2.5 μH.



Esercizio 2.23 (Soluzione a pag. 66)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore si apre all'istante $t = 0$, determinare l'espressione di $i_2(t)$ e di $i_L(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

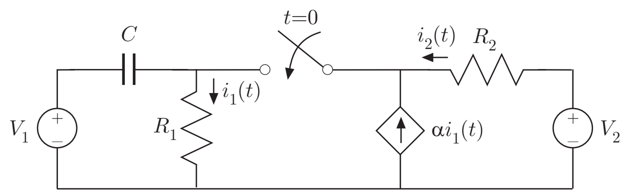
Dati: V_1 = 100 V, V_2 = 200 V, $R_1 = 300\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$, C = 10 nF, L = 200 μH.



Esercizio 2.24 (Soluzione a pag. 67)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore si chiude all'istante $t = 0$, determinare l'espressione di $i_2(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

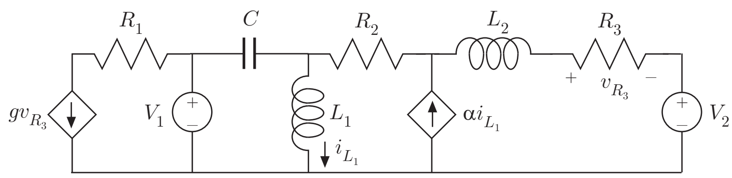
Dati: V_1 = 5 V, V_2 = 10 V, α = 2, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, C = 2 nF.



Esercizio 2.25 (Soluzione a pag. 69)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i due generatori indipendenti di tensione operano in regime stazionario, calcolare le potenze assorbite o erogate dalle resistenze e dai generatori (indipendenti e dipendenti), e le energie immagazzinate nel condensatore e negli induttori.

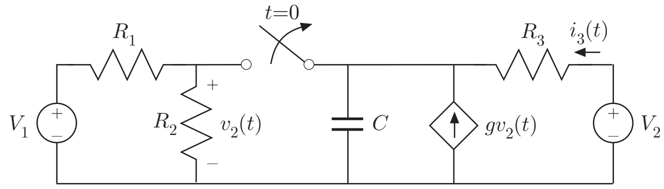
Dati: V_1 = 4 V, V_2 = 30 V, g = 2 mS, α = 3, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 400\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$, C = 1 nF, L_1 = 25 μH, L_2 = 100 μH.



Esercizio 2.26 (Soluzione a pag. 70)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore si apre all'istante $t = 0$, determinare l'espressione di $i_3(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

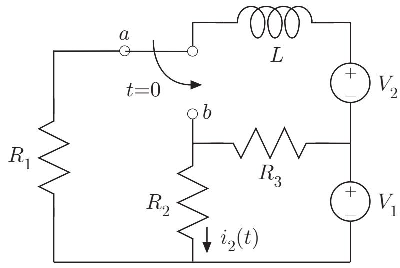
Dati: V_1 = 100 V, V_2 = 400 V, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 250\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$, g = 4 mS, C = 40 pF.



Esercizio 2.27 (Soluzione a pag. 71)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore commuta all'istante $t = 0$ dal morsetto a al morsetto b, determinare l'espressione di $i_2(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

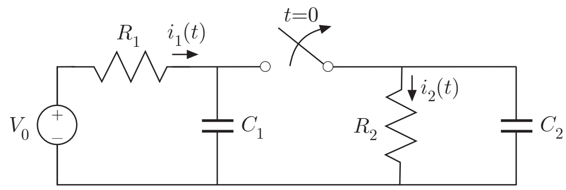
Dati: V_1 = 10 V, V_2 = 20 V, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, L = 3 μH.



Esercizio 2.28 (Soluzione a pag. 73)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore si apre all'istante $t = 0$, determinare l'espressione delle correnti $i_1(t)$ and $i_2(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

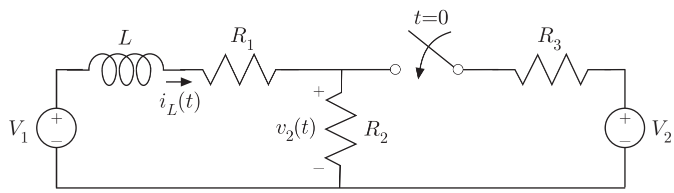
Dati: V_0 = 15 mV, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, C_1 = 10 nF, C_2 = 5 nF.



Esercizio 2.29 (Soluzione a pag. 74)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale l'interruttore si chiude all'istante $t = 0$, determinare le espressioni della correnti $i_L(t)$ e della tensione $v_2(t)$ (per ogni istante di tempo t) e rappresentarne graficamente l'andamento temporale.

Dati: V_1 = 2 mV, V_2 = 4 mV, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$, L = 400 μH.



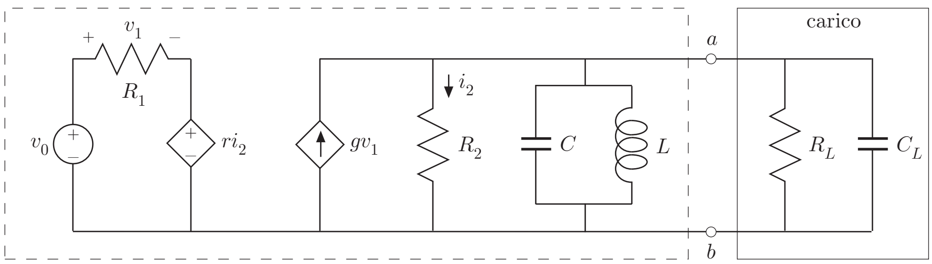
3

Circuiti in regime sinusoidale

Esercizio 3.1 (Soluzione a pag. 77)

L'espressione della tensione del generatore indipendente nel circuito in figura è $v_0(t) = V_0 \cos \omega t$. Dopo aver trasformato il circuito nel dominio dei fasori, si consideri la parte racchiusa nel rettangolo tratteggiato e se ne determini il circuito equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Si calcoli quindi la potenza complessa assorbita dal carico.

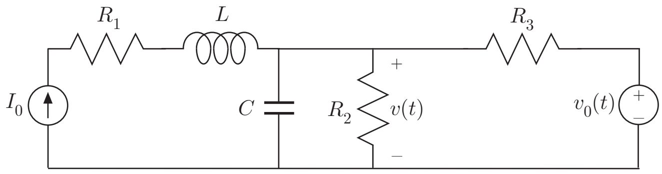
Dati: V_0 = 10 V, $\omega = 10^9$ rad/s, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, r = 1 kΩ, g = 1 mS, C = 1 pF, L = 1 μH, $R_L = 100\ \Omega$, C_L = 10 pF.



Esercizio 3.2 (Soluzione a pag. 78)

Determinare l'espressione della tensione $v(t)$ nel dominio del tempo.

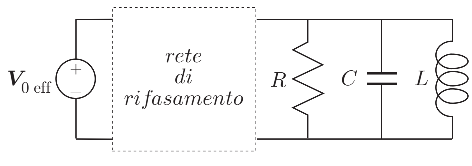
Dati: I_0 = 1 A, $v_0(t) = V_0 \cos \omega t$, V_0 = 1 V, $\omega = 10^6$ rad/s, $R_1 = R_2 = R_3 = 100\ \Omega$, C = 20 nF, L = 10 mH.



Esercizio 3.3 (Soluzione a pag. 79)

Il circuito mostrato in figura descrive una rete elettrica domestica alimentata da un generatore di tensione alternata oscillante ad una frequenza f_0. Supponendo l'assenza di qualunque rete di rifasamento, determinare il fattore di potenza pf. Proporre e dimensionare una semplice rete di rifasamento in modo da ottenere pf = 0.98.

Dati: $\mathbf{V}_{0\,\text{eff}}$ = 220 V, f_0 = 50 Hz, R = 25 Ω, C = 1.05 μF, L = 250 mH.

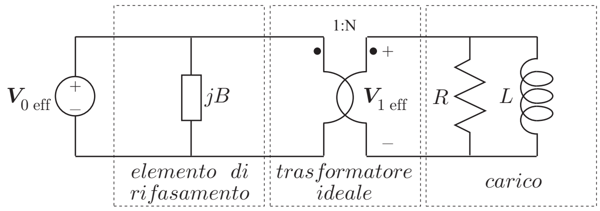


Esercizio 3.4

(Soluzione a pag. 80)

Con riferimento al circuito mostrato in figura, il quale include un trasformatore ideale, determinare il rapporto N tra il numero di spire dell'avvolgimento primario ed il numero di spire dell'avvolgimento secondario in modo che l'ampiezza della tensione $\mathbf{V}_{1\,\mathrm{eff}}$ ai capi dell'avvolgimento secondario sia pari a 220 V. Inoltre, calcolare il valore della suscettanza B, dimensionando l'elemento circuitale associato (condensatore o induttore), in modo che il fattore di potenza pf risulti unitario. Calcolare infine la potenza attiva assorbita dal carico.

Dati: $\mathbf{V}_{0\,\mathrm{eff}}$ = 10 kV, f_0 = 50 Hz, R = 1 kΩ, L = 1 mH.

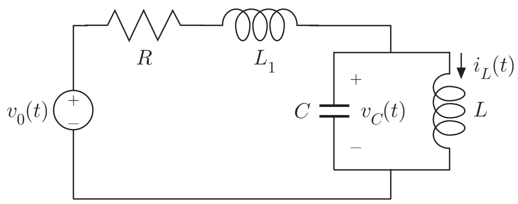


Esercizio 3.5

(Soluzione a pag. 81)

Con riferimento al circuito in figura, si calcolino i fasori corrispondenti alla tensione $v_C(t)$ e alla corrente $i_L(t)$ e, da questi, le espressioni di $v_C(t)$ e $i_L(t)$. Successivamente, si determinino le espressioni dell'energia immagazzinata nel condensatore e nell'induttore e se ne tracci il grafico dell'andamento temporale.

Dati: $v_0(t) = V_0 \cos \omega t$, V_0 = 20 V, $\omega = 10^6$ rad/s, R = 50 Ω, L_1 = 10 μH, L = 20 μH, C = 50 nF.

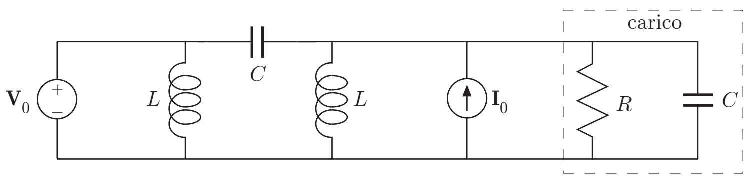


Esercizio 3.6

(Soluzione a pag. 82)

Con riferimento al circuito in figura, in cui i due generatori operano in regime sinusoidale alla pulsazione ω, determinare la potenza attiva assorbita dal carico indicato nel rettangolo tratteggiato.

Dati: $\omega = 10^6$ rad/s, $\mathbf{V}_0$ = 50 V, $\mathbf{I}_0$ = 1 A, R = 50 Ω, L = 50 μH, C = 20 nF.

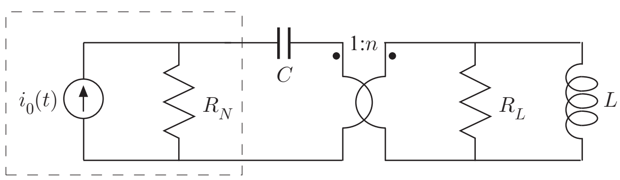


Esercizio 3.7

(Soluzione a pag. 82)

Con riferimento al circuito in figura, determinare n e C in modo tale che il generatore indicato nel rettangolo tratteggiato risulti adattato. In tale condizione, si calcolino le potenze attive e reattive su tutti gli elementi del circuito.

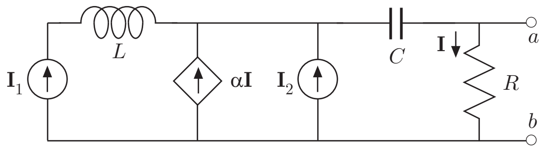
Dati: $i_0(t) = I_0 \cos \omega t$; $\omega = 10^9$ rad/s, $I_0 = 10$ mA, $R_N = 50$ Ω, $R_L = 1$ $k\Omega$, $L = 1$ μH.



Esercizio 3.8 (Soluzione a pag. 83)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori indipendenti funzionano alla pulsazione ω, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Dire quindi quale deve essere l'impedenza di carico da collegare ai morsetti ab affinché il generatore eroghi la massima potenza e calcolare tale potenza.

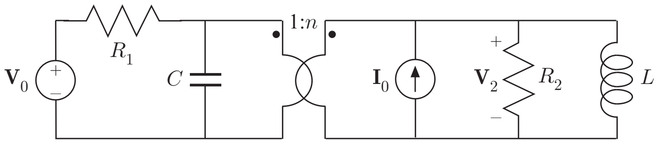
Dati: $\omega = 10^7$ rad/s, $\mathbf{I}_1 = 1$ A, $\mathbf{I}_2 = 3$ A, $\alpha = 0.2$, $R = 40\ \Omega$, $C = 3$ nF, $L = 0.8\ \mu$H.



Esercizio 3.9 (Soluzione a pag. 84)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i due generatori operano in regime sinusoidale alla pulsazione ω, calcolare la tensione $\mathbf{V}_2$ e la potenza P_2 assorbita dalla resistenza R_2.

Dati: $\omega = 10^8$ rad/s, $\mathbf{V}_0 = 1$ V, $\mathbf{I}_0 = j\,20$ mA, $n = 10$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 1$ kΩ, $C = 1$ nF, $L = 10\ \mu$H.

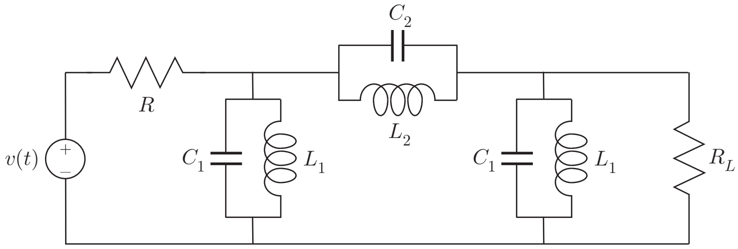


Esercizio 3.10 (Soluzione a pag. 85)

La pulsazione di lavoro del generatore sinusoidale nel circuito in figura è (idealmente) variabile da zero fino ad infinito. Determinare la potenza assorbita dalla resistenza R_L nei seguenti casi:

a) $\omega = 0$
b) $\omega = 10^9$ rad/s
c) $\omega = 4 \cdot 10^9$ rad/s
d) $\omega \to \infty$

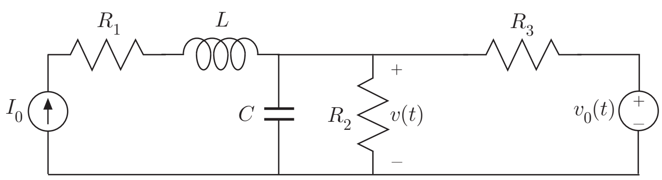
Dati: $v(t) = V_0 \cos \omega t$, $V_0 = 1$ V, $R = 100\ \Omega$, $R_L = 200\ \Omega$, $C_1 = 2.5$ pF, $L_1 = 25$ nH. $C_2 = 10$ pF, $L_2 = 100$ nH.



Esercizio 3.11 (Soluzione a pag. 86)

Determinare l'espressione della tensione $v(t)$ nel dominio del tempo.

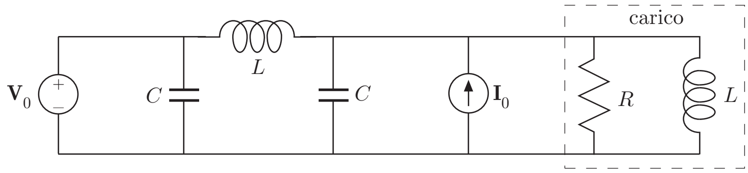
Dati: I_0 = 1 A, $v_0(t) = V_0 \cos \omega t$, V_0 = 1 V, $\omega = 10^6$ rad/s, $R_1 = R_2 = R_3 = 100\ \Omega$, C = 20 nF, L = 10 mH.



Esercizio 3.12 (Soluzione a pag. 87)

Con riferimento al circuito in figura, in cui i due generatori operano in regime sinusoidale alla pulsazione ω, determinare la potenza attiva assorbita dal carico indicato nel rettangolo tratteggiato.

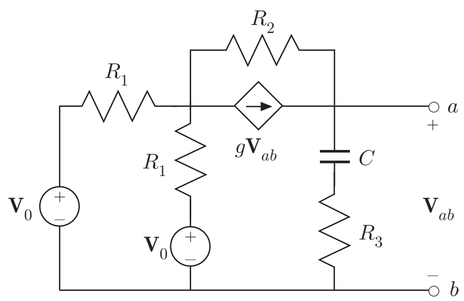
Dati: $\omega = 10^6$ rad/s, $\mathbf{V}_0$ = 100 V, $\mathbf{I}_0$ = 2 A, R = 50 Ω, L = 50 μH, C = 20 nF.



Esercizio 3.13 (Soluzione a pag. 88)

Con riferimento al circuito in figura, in cui i generatori indipendenti operano in regime sinusoidale alla pulsazione ω, determinare il circuito equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore e il valore del carico per cui tale potenza viene effettivamente erogata.

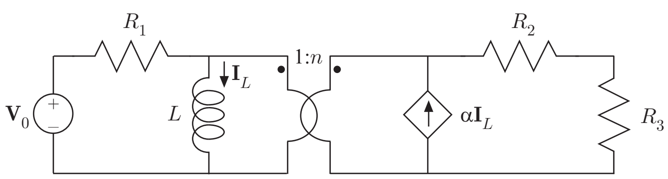
Dati: $\omega = 10^6$ rad/s, $\mathbf{V}_0$ = 10 V, g = 20 mS, $R_1 = R_3$ = 100 Ω, R_2 = 50 Ω, C = 10 nF.



Esercizio 3.14 (Soluzione a pag. 89)

Con riferimento al circuito in figura, in cui il generatore di tensione opera in regime sinusoidale alla pulsazione ω, calcolare la potenza media assorbita dalla resistenza R_3.

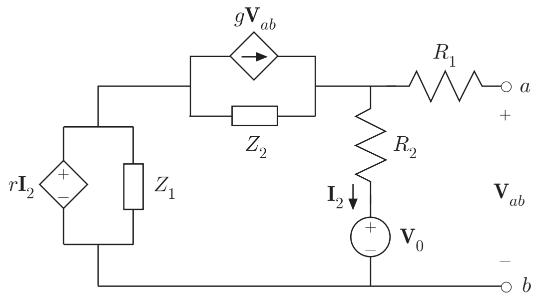
Dati: $\omega = 2 \cdot 10^9$ rad/s, $\mathbf{V}_0$ = 4 V, n = 4, α = 0.25, R_1 = 100 Ω, R_2 = 1200 Ω, R_3 = 400 Ω, L = 50 nH.



Esercizio 3.15 (Soluzione a pag. 90)

Con riferimento al circuito in figura, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab e calcolarne la potenza disponibile.

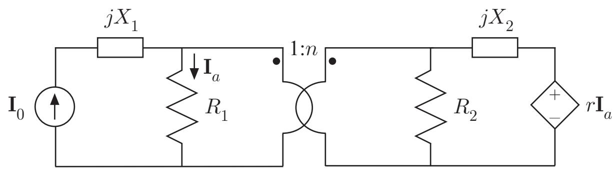
Dati: $\mathbf{V}_0 = 10 - j\,10$ V, g = 5 mS, r = 100 Ω, R_1 = 200 Ω, R_2 = 100 Ω, $Z_1 = j\,50$ Ω, $Z_2 = -j\,100$ Ω.



Esercizio 3.16 (Soluzione a pag. 91)

Con riferimento al circuito in figura, determinare le potenze attive e reattive assorbite o erogate da ciascun elemento del circuito.

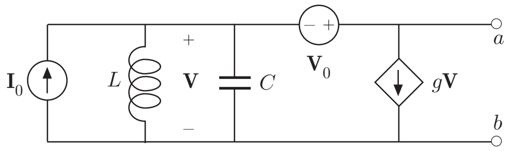
Dati: $\mathbf{I}_0$ = 2 A, n = 10, r = 100 Ω, R_1 = 10 Ω, R_2 = 1 kΩ, $X_1 = -10$ Ω, X_2 = 1 kΩ.



Esercizio 3.17 (Soluzione a pag. 92)

Nel circuito in figura i generatori operano in regime sinusoidale alla pulsazione ω. Determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab e calcolarne la potenza disponibile. Determinare infine la potenza attiva che assorbe un carico resistivo di valore $R_L = 100$ Ω collegato ai morsetti ab.

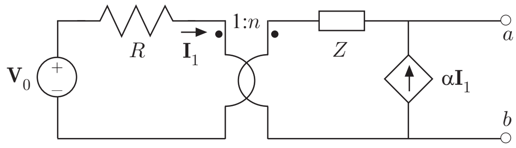
Dati: $\omega = 10^6$ rad/s, $\mathbf{I}_0$ = 0.5 A, $\mathbf{V}_0$ = 100 V, g = 5 mS, C = 10 nF, L = 0.2 mH.



Esercizio 3.18 (Soluzione a pag. 92)

Determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab per circuito in figura e calcolarne la potenza disponibile. Determinare infine la potenza attiva che assorbe un carico Z_L se viene collegato ai morsetti ab.

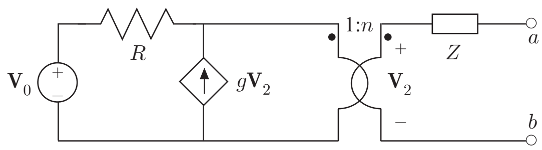
Dati: $\mathbf{V}_0$ = 5 V, R = 3 kΩ, $Z = 180 + j\,300$ Ω; n = 0.2; α = 10; $Z_L = 100 + j\,100$ Ω.



Esercizio 3.19 (Soluzione a pag. 93)

Determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab per circuito in figura e calcolarne la potenza disponibile. Determinare infine la potenza attiva che assorbe un carico Z_L se viene collegato ai morsetti ab.

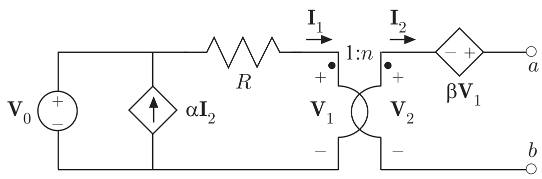
Dati: $\mathbf{V}_0$ = 5 V, R = 10 Ω, $Z = j\,500$ Ω; n = 5; g = 0.01; $Z_L = 500 - j\,500$ Ω.



Esercizio 3.20 (Soluzione a pag. 94)

Determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab per circuito in figura e calcolarne la potenza disponibile. Determinare infine la potenza attiva che assorbe un carico Z_L se viene collegato ai morsetti ab.

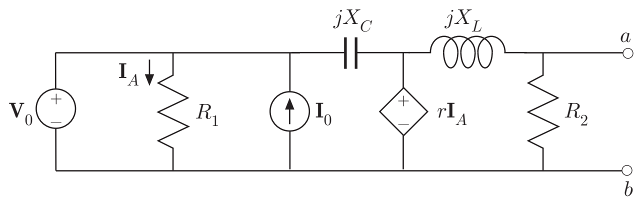
Dati: $\mathbf{V}_0$ = 10 mV, R = 5 Ω, n = 10, α = 0.5, $\beta = j\,10$, $Z_L = 500$ Ω.



Esercizio 3.21 (Soluzione a pag. 95)

Con riferimento al circuito in figura, determinare il circuito equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Dopo aver calcolato la potenza disponibile del generatore, determinare quanta potenza attiva assorbe un carico di valore Z_L quando viene collegato ai morsetti ab.

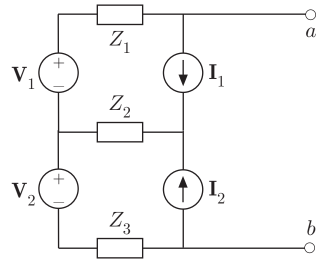
Dati: $\mathbf{V}_0 = 50$ V, $\mathbf{I}_0 = 2$ A, $R_1 = 200$ Ω, $R_2 = 50$ Ω, $r = 400$ Ω, $X_C = -100$ Ω, $X_L = 50$ Ω, $Z_L = 25$ Ω.



Esercizio 3.22 (Soluzione a pag. 96)

Con riferimento al circuito in figura, determinare il circuito equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Dopo aver calcolato la potenza disponibile del generatore, determinare quanta potenza attiva assorbe un carico di valore Z_L quando viene collegato ai morsetti ab.

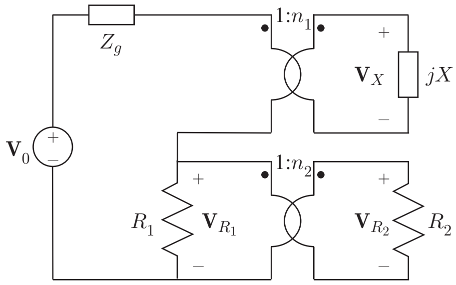
Dati: $\mathbf{V}_1$ = 30 mV, $\mathbf{V}_2$ = 50 mV, $\mathbf{I}_1$ = 0.5 mA, $\mathbf{I}_2$ = 1 mA, $Z_1 = 100 + j50$ Ω, $Z_2 = 50 - j25$ Ω, $Z_3 = 50 - j200$ Ω, $Z_L = 150 - j150$ Ω.



Esercizio 3.23 (Soluzione a pag. 97)

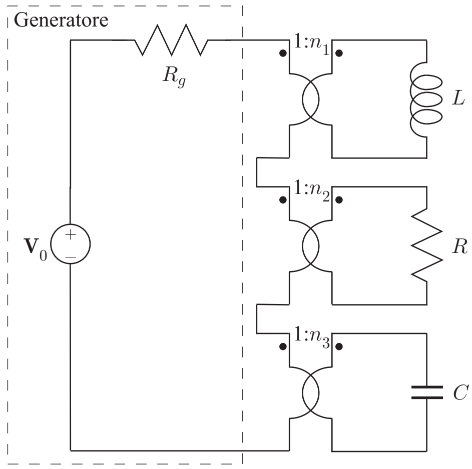
Con riferimento al circuito in figura, calcolare il valore in modulo e fase dei fasori di tensione $\mathbf{V}_{R_1}$, $\mathbf{V}_{R_2}$ e $\mathbf{V}_X$. Determinare inoltre le potenze attive P_{R_1} e P_{R_2} assorbite rispettivamente da R_1 e R_2.

Dati: $\mathbf{V}_0$ = 40 V, $Z_g = 50 + j50\ \Omega$, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 10\ k\Omega$, $X = 100\ \Omega$, n_1 = 2, n_2 = 10.



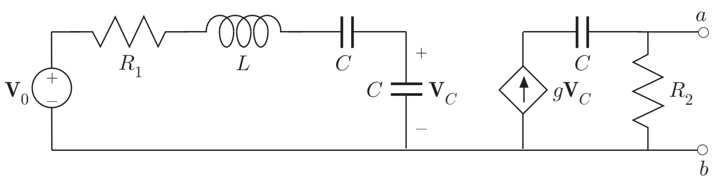
Esercizio 3.24 (Soluzione a pag. 97)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore opera alla pulsazione ω, determinare n_2 e C in modo che il generatore risulti adattato.
Calcolare quindi le potenze attive e reattive su R, L e C.
Dati: $\omega = 10^5$ rad/s, $\mathbf{V}_0$ = 300 V, $R_g = 150\ \Omega$, $R = 500\ \Omega$, L = 100 μH, n_1 = 2, n_3 = 20.



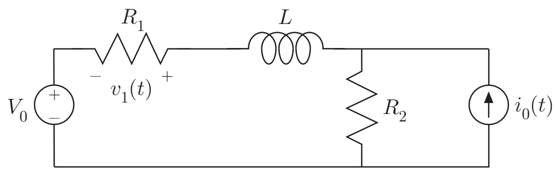
Esercizio 3.25 (Soluzione a pag. 98)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore indipendente opera alla pulsazione ω, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore equivalente e la potenza erogata ad un carico Z_L collegato ai morsetti ab.
Dati: $\omega = 10^{10}$ rad/s, $\mathbf{V}_0$ = 10 mV, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, g = 4 mS, L = 10 nH, C = 1 pF, $Z_L = 50 + j100\ \Omega$.



Esercizio 3.26 (Soluzione a pag. 99)

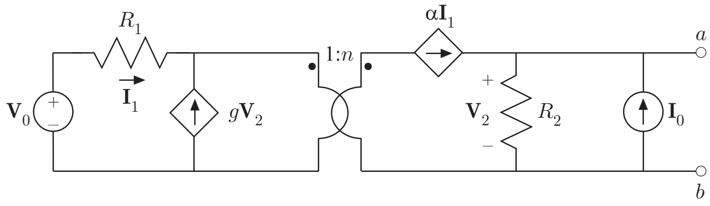
Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore di tensione opera in regime stazionario mentre il generatore di corrente opera alla pulsazione ω, calcolare l'espressione della tensione $v_1(t)$. Determinare quindi la potenza istantanea massima e minima assorbita da R_1.
Dati: $\omega = 10^8$ rad/s, V_0 = 200 V, $i_0(t) = I_0 \cos(\omega t + \pi)$, I_0 = 1 A, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, L = 1 μH.



Esercizio 3.27 (Soluzione a pag. 100)

Con riferimento al circuito in figura, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore equivalente e la potenza erogata ad un carico Z_L collegato ai morsetti ab.

Dati: $\mathbf{V}_0$ = 0.5 V, $\mathbf{I}_0$ = 10 mA, $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$, $g = 20 + j\,40$ mS, α = 0.25, n = 2, $Z_L = 100 + j100\ \Omega$.

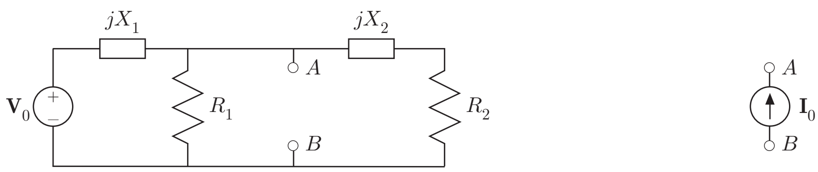


Esercizio 3.28 (Soluzione a pag. 101)

Con riferimento al circuito nella figura di sinistra, calcolare la potenza media assorbita dalla resistenza R_2. Dire quanto diventa tale potenza se ai morsetti AB viene collegato il generatore di corrente mostrato nella figura di destra.

Come cambia la potenza se il generatore di corrente viene collegato invertendo i morsetti?

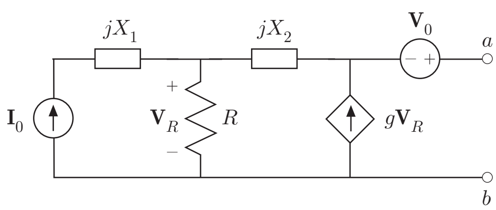
Dati: $\mathbf{V}_0$ = 260 V, $\mathbf{I}_0$ = j 1.3 A, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $X_1 = 200\ \Omega$, $X_2 = 25\ \Omega$.



Esercizio 3.29 (Soluzione a pag. 103)

Con riferimento al circuito in figura, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore equivalente e la potenza erogata ad un carico Z_L collegato ai morsetti ab.

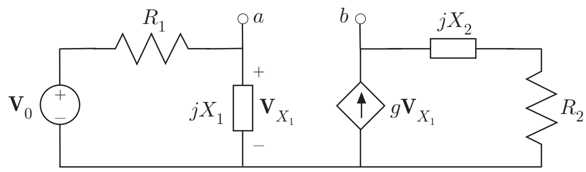
Dati: $\mathbf{V}_0$ = 100 mV, $\mathbf{I}_0$ = 1 mA, $R = 90\ \Omega$, $X_1 = 150\ \Omega$, $X_2 = 100\ \Omega$, $g = 10$ mS, $Z_L = 100\ \Omega$.



Esercizio 3.30 (Soluzione a pag. 103)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore di tensione opera in regime sinusoidale, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore equivalente e la potenza erogata ad un carico Z_L collegato ai morsetti ab.

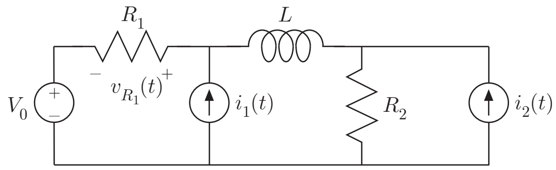
Dati: $\mathbf{V}_0$ = 10 mV, $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $X_1 = 200\ \Omega$, $X_2 = -100\ \Omega$, $g = j10$ mS, $Z_L = 50 - j50\ \Omega$.



Esercizio 3.31 (Soluzione a pag. 104)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore di tensione opera in regime stazionario mentre i due generatori di corrente operano alla pulsazione ω, calcolare l'espressione della tensione $v_{R_1}(t)$. Determinare quindi la potenza istantanea assorbita da R_1 negli istanti di tempo $t_1 = 0$ e t_2 = 31.4 ns.

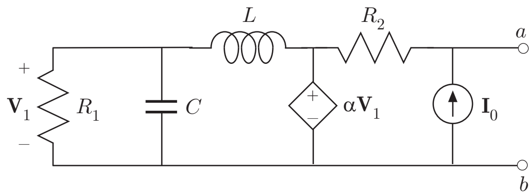
Dati: $\omega = 10^8$ rad/s, V_0 = 200 V, $i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + 3\pi/4)$, $i_2(t) = I_2 \cos(\omega t - \pi/2)$, $I_1 = \sqrt{2}$ A, I_2 = 1 A, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, L = 1 μH.



Esercizio 3.32 (Soluzione a pag. 105)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore indipendente di corrente opera alla pulsazione ω, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore equivalente e la potenza erogata ad un carico Z_L collegato ai morsetti ab.

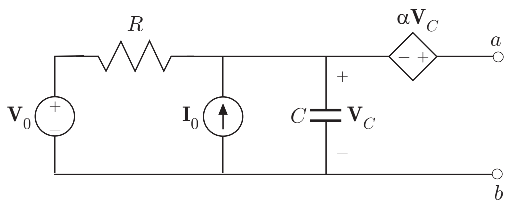
Dati: $\omega = 2 \cdot 10^7$ rad/s, $\mathbf{I}_0$ = 10 A, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, α = 10, L = 2.5 μH, C = 1 nF, $Z_L = 50 - j150\ \Omega$.



Esercizio 3.33 (Soluzione a pag. 106)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori indipendenti operano alla pulsazione ω, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore equivalente e la potenza erogata ad un carico Z_L collegato ai morsetti ab.

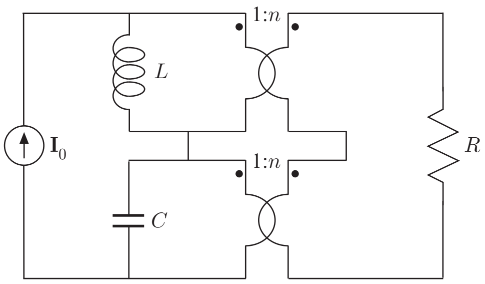
Dati: $\omega = 10^8$ rad/s, $\mathbf{V}_0$ = 5 V, $\mathbf{I}_0$ = 5 mA, $R = 200\ \Omega$, α = 4, C = 50 pF, $Z_L = 500\ \Omega$.



Esercizio 3.34 (Soluzione a pag. 107)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore di corrente opera alla pulsazione ω, determinare la potenza attiva assorbita dalla resistenza R.

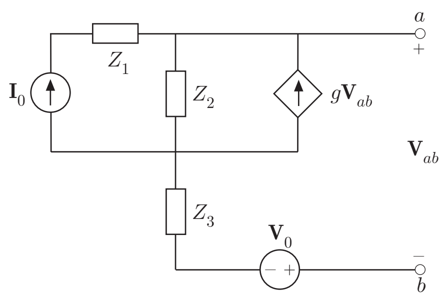
Dati: $\omega = 10^7$ rad/s, $\mathbf{I}_0$ = 50 mA, n = 10, R = 1 kΩ, L = 2 μH, C = 10 nF.



Esercizio 3.35 (Soluzione a pag. 108)

Con riferimento al circuito in figura, determinare il generatore equivalente di Thevenin ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore e dire quanta potenza viene erogata ad un carico di valore Z_L, se questo viene collegato ai morsetti ab.

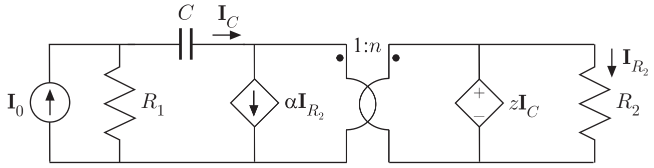
Dati: $\mathbf{I}_0$ = 100 mA, $\mathbf{V}_0 = -j10$ V, $g = -5 + j5$ mS, $Z_1 = 150 + j50\ \Omega$, $Z_2 = 100 - j100\ \Omega$, $Z_3 = 100 + j100\ \Omega$, $Z_L = 50 + j50\ \Omega$.



Esercizio 3.36 (Soluzione a pag. 109)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore indipendente di corrente opera alla pulsazione ω, determinare le potenze attive assorbite dalle resistenze R_1 e R_2.

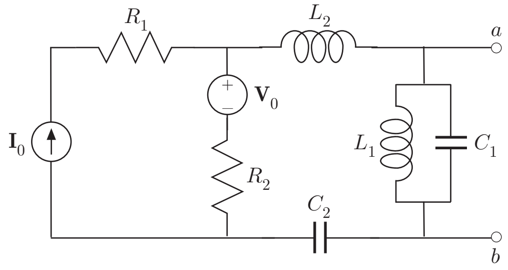
Dati: $\omega = 2 \cdot 10^9$ rad/s, $\mathbf{I}_0$ = 2 A, n = 4, R_1 = 100 Ω, R_2 = 800 Ω, $z = j\,200\ \Omega$, α = 2, C = 5 pF.



Esercizio 3.37 (Soluzione a pag. 110)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale i generatori indipendente operano alla pulsazione ω, determinare il generatore equivalente di Thevenin visto ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore, e la potenza attiva assorbita da un carico Z_L, se esso viene collegato ai morsetti ab.

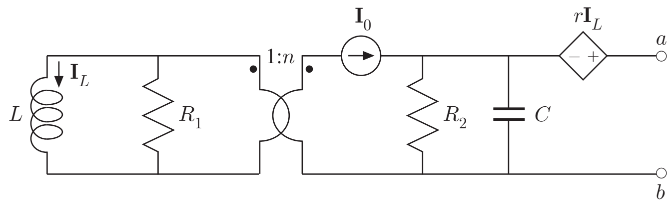
Dati: $\omega = 5 \cdot 10^9$ rad/s, $\mathbf{I}_0$ = 10 mA, $\mathbf{V}_0 = 5 + j\,5$ V, C_1 = 1 pF, C_2 = 20 pF, L_1 = 40 nH, L_2 = 2 nH, R_1 = 100 Ω, R_2 = 200 Ω, $Z_L = 200 + j\,200\ \Omega$.



Esercizio 3.38 (Soluzione a pag. 111)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore indipendente di corrente opera alla pulsazione ω, determinare il generatore equivalente di Thevenin visto ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore, e la potenza attiva assorbita da un carico Z_L, se esso viene collegato ai morsetti ab.

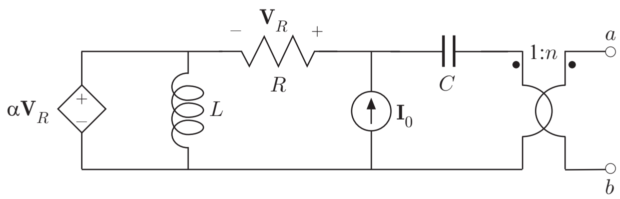
Dati: $\omega = 10^8$ rad/s, $\mathbf{I}_0$ = 2 mA, R_1 = 50 Ω, R_2 = 200 Ω, C = 50 pF, L = 1.5 μH, r = 40 Ω, n = 5, Z_L = 50 Ω.



Esercizio 3.39 (Soluzione a pag. 112)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore indipendente di corrente opera alla pulsazione ω, determinare il generatore equivalente di Thevenin visto ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore, e la potenza attiva assorbita da un carico Z_L, se esso viene collegato ai morsetti ab.

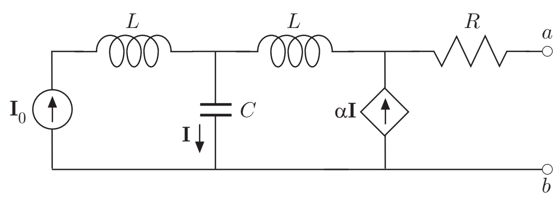
Dati: $\omega = 10^8$ rad/s, $\mathbf{I}_0$ = 2 mA, α = 3, R = 100 Ω, C = 50 pF, L = 10 μH, n = 5, $Z_L = 30 + j5$ kΩ.



Esercizio 3.40 (Soluzione a pag. 113)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore indipendente di corrente opera alla pulsazione ω, determinare il generatore equivalente di Thevenin visto ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore, e la potenza attiva assorbita da un carico Z_L, se esso viene collegato ai morsetti ab.

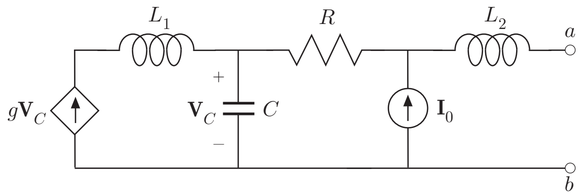
Dati: $\omega = 10^8$ rad/s, $\mathbf{I}_0 = 200$ μA, α = 3, R = 100 Ω, C = 100 pF, L = 1 μH, $Z_L = 100 + j100$ Ω.



Esercizio 3.41 (Soluzione a pag. 113)

Con riferimento al circuito in figura, nel quale il generatore indipendente di corrente opera alla pulsazione ω, determinare il generatore equivalente di Thevenin visto ai morsetti ab. Calcolare quindi la potenza disponibile del generatore, e la potenza attiva assorbita da un carico Z_L, se esso viene collegato ai morsetti ab.

Dati: $\omega = 10^{10}$ rad/s, $\mathbf{I}_0$ = 10 mA, g = 0.01 S, R = 150 Ω, C = 1 pF, L_1 = 10 nH, L_2 = 5 nH, $Z_L = 200 - j200$ Ω.

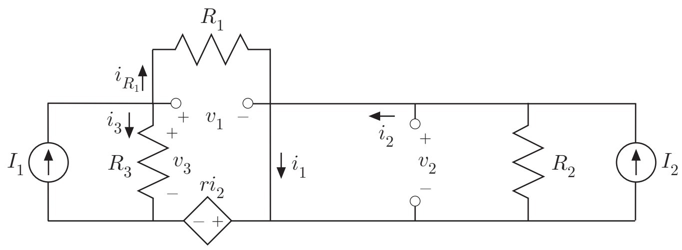


4

Soluzione dei circuiti in regime stazionario

Soluzione dell'esercizio 1.1 (testo a pag. 3)

Poiché i generatori operano in regime stazionario, i condensatori si comportano come circuiti aperti e gli induttori come cortocircuiti. Il circuito da analizzare è quindi il seguente:



Si vede immediatamente che

$$v_2 = 0$$

poiché coincide con la tensione su un cortocircuito (i rami precedentemente occupati da L_1 e L_2). Di conseguenza, sulla resistenza R_2 non scorre corrente e quindi si ha

$$i_2 = I_2 = 50 \text{ mA}$$

Applicando la KVL alla maglia formata da R_1, R_3 e dal generatore comandato di tensione, e la KCL al nodo positivo di v_1 si ha:

$$\begin{cases} ri_2 + v_1 - R_3 i_3 = 0 \\ I_1 = i_3 + i_{R_1} \end{cases}$$

Ricavando i_3 dalla seconda equazione e sostituendola nella prima, tenendo conto che $v_1 = R_1 i_{R_1}$, si ottiene

$$i_{R_1} = \frac{R_3 I_1 - r I_2}{R_1 + R_3} = \frac{100 \cdot 0.4 - 200 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{50 + 100} = 0.2 \text{ A}$$

da cui

$$i_1 = i_2 + i_{R_1} = 0.25 \text{ A} \qquad v_1 = R_1 i_{R_1} = 50 \cdot 0.2 = 10 \text{ V}$$

$$i_3 = I_1 - i_{R_1} = 0.2 \text{ A} \qquad v_3 = R_3 i_3 = 100 \cdot 0.2 = 20 \text{ V}$$

Adottando la convenzione degli utilizzatori, le potenze assorbite dai diversi elementi sono:

$$\begin{aligned} P_{I_1} &= -v_3 I_1 = -8 \text{ W} \\ P_{I_2} &= -v_2 I_2 = 0 \\ P_{ri_2} &= ri_2(I_1 - i_3) = 2 \text{ W} \\ P_{R_1} &= R_1 i_{R_1}^2 = 2 \text{ W} \\ P_{R_2} &= R_2 i_2^2 = 0 \\ P_{R_3} &= R_3 i_3^2 = 4 \text{ W} \end{aligned}$$

Tenendo conto che induttori e condensatori non assorbono potenza in regime stazionario, si nota che il bilancio di potenze è soddisfatto e che l'unico elemento che eroga potenza al circuito è il generatore di corrente I_1.
Le energie immagazzinate negli induttori e nei condensatori risultano:

$$\begin{aligned} W_{L_1} &= \frac{1}{2}\, L_1 i_1^2 = 31.25 \text{ nJ} \\ W_{L_2} &= \frac{1}{2}\, L_2 i_2^2 = 1.25 \text{ nJ} \\ W_{C_1} &= \frac{1}{2}\, C_1 v_1^2 = 0.5\ \mu\text{J} \\ W_{C_2} &= \frac{1}{2}\, C_2 v_2^2 = 0 \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 1.2 (testo a pag. 3)

Applicando la KVL alla maglia che include il generatore di tensione, la resistenza R_2 e la tensione v_{ab} si ottiene:

$$v_{Th} = v_{ab} = V_0 - R_2 i$$

Inoltre, applicando la KCL al nodo che collega i generatori di corrente e la resistenza R_2 si ha

$$i = -g v_{Th} - I_0 - \alpha i \qquad \Rightarrow \qquad i = -\frac{g v_{Th} + I_0}{1+\alpha}$$

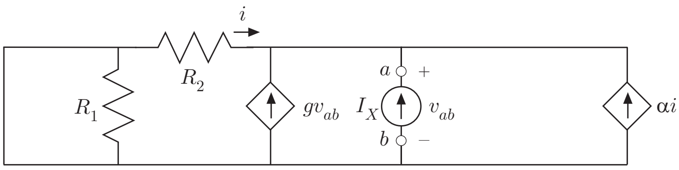
Sostituendo nella prima equazione di ottiene

$$v_{Th} = V_0 + \frac{gR_2}{1+\alpha}\, v_{Th} + \frac{R_2}{1+\alpha}\, I_0$$

da cui

$$v_{Th} = \frac{V_0 + \dfrac{R_2}{1+\alpha}\, I_0}{1 - \dfrac{gR_2}{1+\alpha}} = \frac{50 + \dfrac{100}{1+3} \cdot 2}{1 - \dfrac{0.02 \cdot 100}{1+3}} = \frac{50 + 25 \cdot 2}{1 - \dfrac{1}{2}} = 200 \text{ V}$$

Per il calcolo della resistenza equivalente si spengono i generatori indipendenti e, data la presenza di generatori dipendenti, si eccita il circuito ai morsetti ab con un generatore esterno (ad esempio di corrente). Il circuito da analizzare risulta quindi quello mostrato nella seguente figura:



Poiché nella resistenza R_1 non scorre corrente a causa del cortocircuito posto in parallelo ad essa, si vede immediatamente che

$$v_{ab} = -R_2 i$$

D'altra parte, applicando la KCL al nodo che collega i generatori di corrente e la resistenza R_2 si ha

$$i = -g v_{ab} - I_X - \alpha i \qquad \Rightarrow \qquad i = -\frac{g v_{ab} + I_X}{1+\alpha}$$

Sostituendo nella prima equazione di ottiene

$$v_{ab} = \frac{gR_2}{1+\alpha}\, v_{ab} + \frac{R_2}{1+\alpha}\, I_X$$

da cui

$$R_{Th} = \frac{v_{ab}}{I_X} = \frac{\dfrac{R_2}{1+\alpha}}{1 - \dfrac{gR_2}{1+\alpha}} = \frac{25}{1 - \dfrac{1}{2}} = 50\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore risulta quindi:

$$P_d = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}} = \frac{200^2}{4 \cdot 50} = 200 \text{ W}$$

Se al generatore equivalente di Thevenin si collega la resistenza R_L, la tensione su di essa sarà:

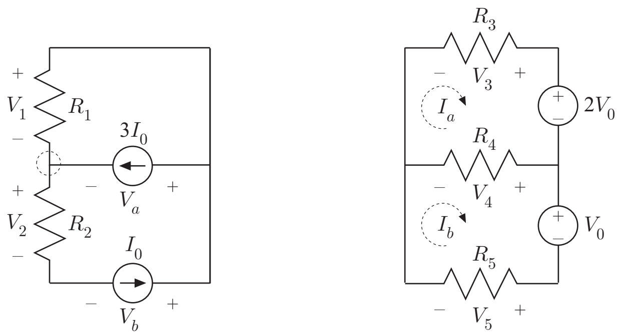
$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_{Th}} V_{Th} = \frac{200}{200+50} V_{Th} = \frac{4}{5} 200 = 160 \text{ V}$$

e la potenza assorbita da R_L sarà quindi:

$$P_L = \frac{V_L^2}{R_L} = \frac{160^2}{200} = 128 \text{ W}$$

Soluzione dell'esercizio 1.3 (testo a pag. 3)

Il circuito può essere separato in due parti che agiscono autonomamente, come mostrato nella seguente figura:



Applicando la KCL al nodo evidenziato nel circuito di sinistra si vede che sulla resistenza R_1 scorre una corrente pari a $2I_0$, entrante dal morsetto negativo della tensione. Si ha quindi:

$$V_1 = -R_1(2I_0) = -100 \cdot 2 \cdot 0.1 = -20 \text{ V}$$

Sulla resistenza R_2 scorre la corrente I_0 entrando dal morsetto positivo della tensione e quindi:

$$V_2 = R_2 I_0 = 50 \cdot 0.1 = 5 \text{ V}$$

Inoltre si ha che

$$V_a = V_1 = -20 \text{ V} \qquad V_b = V_2 + V_a = -15 \text{ V}$$

Applicando il metodo alle maglie al circuito di destra si ottiene:

$$\begin{cases} R_3 I_a + 2V_0 + R_4(I_a - I_b) = 0 \\ R_4(I_b - I_a) + V_0 + R_5 I_b = 0 \end{cases}$$

Tenendo conto del fatto che $R_3 = 4R_4$ e $R_5 = 2R_4$, risolvendo di ottiene

$$I_a = I_b = -\frac{V_0}{2R_4} = -\frac{10}{2 \cdot 50} = -0.1 \text{ mA}$$

Le tensioni sulle resistenze risultano quindi:

$$V_3 = -R_3 I_a = -200 \cdot (-0.1) = 20 \text{ V}$$

$$V_4 = R_4(I_a - I_b) = 50 \cdot (-0.1 + 0.1) = 0$$

$$V_5 = R_5 I_b = 100 \cdot (-0.1) = -10 \text{ V}$$

Le potenze assorbite o erogate dagli elementi del circuito sono quindi:

$$
\begin{aligned}
P_{R_1} &= \frac{V_1^2}{R_1} = \frac{(-20)^2}{100} = 4 \text{ W} \qquad \text{(assorbita)} \\
P_{R_2} &= \frac{V_2^2}{R_2} = \frac{5^2}{50} = 0.5 \text{ W} \qquad \text{(assorbita)} \\
P_{R_3} &= \frac{V_3^2}{R_3} = \frac{20^2}{200} = 2 \text{ W} \qquad \text{(assorbita)} \\
P_{R_4} &= \frac{V_4^2}{R_4} = \frac{0^2}{50} = 0 \\
P_{R_5} &= \frac{V_5^2}{R_5} = \frac{(-10)^2}{100} = 1 \text{ W} \qquad \text{(assorbita)} \\
P_{3I_0} &= V_a 3I_0 = -20 \cdot 0.3 = -6 \text{ W} \qquad \text{(erogata)} \\
P_{I_0} &= -V_b I_0 = 15 \cdot 0.1 = 1.5 \text{ W} \qquad \text{(assorbita)} \\
P_{2V_0} &= 2V_0 I_a = 20 \cdot (-0.1) = -2 \text{ W} \qquad \text{(erogata)} \\
P_{V_0} &= V_0 I_b = 10 \cdot (-0.1) = -1 \text{ W} \qquad \text{(erogata)}
\end{aligned}
$$

Il bilancio di potenza complessivo risulta verificato:

$$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5} + P_{3I_0} + P_{I_0} + P_{2V_0} + P_{V_0} = 0$$

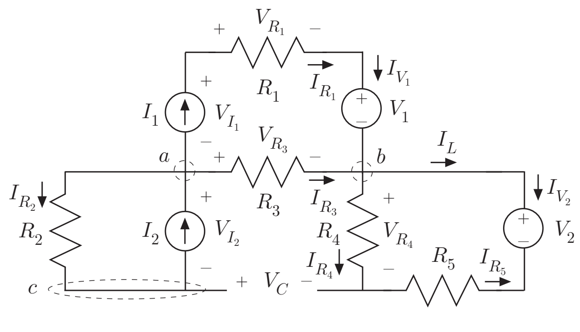
Si noti che, essendo il circuito separato in due sottocircuiti, anche i bilanci parziali di questi ultimi sono verificati:

$$P_{R_1} + P_{R_2} + +P_{3I_0} + P_{I_0} = 0$$

$$P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5} + P_{2V_0} + P_{V_0} = 0$$

Soluzione dell'esercizio 1.4 (testo a pag. 4)

Poiché il circuito funziona in regime stazionario, l'induttore ed il condensatore possono essere rispettivamente sostituiti con un cortocircuito e con un circuito aperto, come mostrato nella seguente figura:



Applicando la KCL al nodo c si vede che

$$I_{R_2} = I_2 = 0.5 \text{ A}$$

Applicando la KVL alla maglia che include I_2 e R_2 si ottiene:

$$V_{I_2} = R_2 I_{R_2} = 200 \cdot 0.5 = 100 \text{ V}$$

Applicando ora la KCL al nodo a si ottiene:

$$I_1 + I_{R_2} + I_{R_3} = I_2 \qquad \Rightarrow \qquad I_{R_3} = -I_1 = -2 \text{ A}$$

Inoltre si vede inoltre immediatamente che

$$I_{R_1} = I_{V_1} = I_1 = 2 \text{ A}$$

Applicando la KVL alla maglia superiore si ha:

$$V_{I_1} = V_{R_1} + V_1 - V_{R_3} = R_1 I_{R_1} + V_1 - R_3 I_{R_3} = 100 \cdot 2 + 300 - 500 \cdot (-2) = 1500 \text{ V}$$

Nella maglia che include il generatore V_2 si vede per ispezione che

$$I_{R_4} = I_{R_5} = -I_{V_2} = -I_L$$

Inoltre, le resistenze R_4 ed R_5 sono collegate in serie ai morsetti del generatore di tensione V_2. Si ha quindi

$$I_{R_4} = I_{R_5} = V_2/(R_4 + R_5) = 1000/500 = 2 \text{ A}$$

e

$$I_{V_2} = I_L = -I_{R_4} = -2 \text{ A}$$

La tensione ai capi del condensatore si ottiene applicando la KVL:

$$V_C = -V_{I_2} + V_{R_3} + V_{R_4} = -V_{I_2} + R_3 I_{R_3} + R_4 I_{R_4} = -100 + 500 \cdot (-2) + 400 \cdot 2 = -300 \text{ V}$$

Pertanto, tenendo conto della convenzione degli utilizzatori, le potenze che competono agli elementi del circuito risultano:

$$\begin{aligned}
P_{R_1} &= R_1 I_{R_1}^2 = 100 \cdot 2^2 = 400 \text{ W} && \text{(assorbita)}\\
P_{R_2} &= R_2 I_{R_2}^2 = 200 \cdot 0.5^2 = 50 \text{ W} && \text{(assorbita)}\\
P_{R_3} &= R_3 I_{R_3}^2 = 500 \cdot (-2)^2 = 2000 \text{ W} && \text{(assorbita)}\\
P_{R_4} &= R_4 I_{R_4}^2 = 400 \cdot 2^2 = 1600 \text{ W} && \text{(assorbita)}\\
P_{R_5} &= R_5 I_{R_5}^2 = 100 \cdot 2^2 = 400 \text{ W} && \text{(assorbita)}\\
P_{I_1} &= -V_{I_1} I_1 = -1500 \cdot 2 = -3000 \text{ W} && \text{(erogata)}\\
P_{I_2} &= -V_{I_2} I_2 = -100 \cdot 0.5 = -50 \text{ W} && \text{(erogata)}\\
P_{V_1} &= V_1 I_{V_1} = 300 \cdot 2 = 600 \text{ W} && \text{(assorbita)}\\
P_{V_2} &= V_2 I_{V_2} = 1000 \cdot (-2) = -2000 \text{ W} && \text{(erogata)}
\end{aligned}$$

Come verifica si può fare il bilancio delle potenze:

$$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5} + P_{I_1} + P_{I_2} + P_{V_1} + P_{V_2} = 0$$

È interessante notare come le tre maglie del circuito unite nei nodi a e b funzionino in maniera completamente disgiunta, come dimostrato anche dal fatto che il bilancio di potenze è soddisfatto per ogni singola maglia:

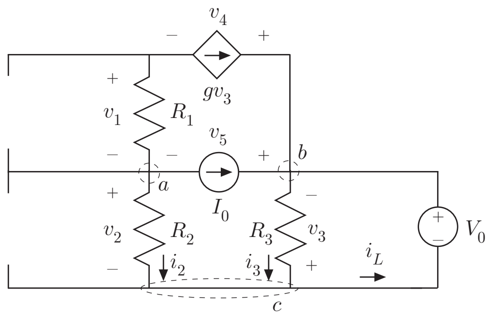
$$P_{R_1} + P_{R_3} + P_{I_1} + P_{V_1} = 0 \qquad P_{R_2} + P_{I_2} = 0 \qquad P_{R_4} + P_{R_5} + P_{V_2} = 0$$

Infine, le energie immagazzinate nel condensatore e nell'induttore sono date da:

$$\begin{aligned}
W_C &= \frac{1}{2}\, C V_C^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot (-300)^2 = 450 \ \mu\text{J}\\
W_L &= \frac{1}{2}\, L I_L^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot (-2)^2 = 4 \ \mu\text{J}
\end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 1.5 (testo a pag. 4)

Poiché il circuito funziona in regime stazionario, l'induttore ed il condensatore possono essere rispettivamente sostituiti con un cortocircuito e con un circuito aperto, come mostrato nella seguente figura:



Si vede immediatamente che

$$v_3 = -V_0 = -100 \text{ mV}$$

La tensione sulla resistenza R_1 è data da

$$v_1 = R_1(-gv_3) = gR_1V_0 = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 200 \text{ mV}$$

Utilizzando la KCL a nodo a si ottiene:

$$v_2 = R_2(-I_0 - gv_3) = -R_2I_0 + gR_2V_0 = -50 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + 20 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 0$$

Applicando la KCL al nodo c si ricava

$$i_L = i_2 + i_3 = \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} = 0 + \frac{100 \cdot 10^{-3}}{200} = 0.5 \text{ mA}$$

L'applicazione della KVL alla maglia contenente R_2, R_3 e I_0 permette di calcolare v_5:

$$v_5 = -v_2 - v_3 = 0 + V_0 = V_0 = 100 \text{ mV}$$

e, infine, l'applicazione della KVL alla maglia superiore fornisce v_4:

$$v_4 = v_5 - v_1 = 100 \cdot 10^{-3} - 200 \cdot 10^{-3} = -100 \text{ mV}$$

Tenendo conto della convenzione degli utilizzatori, le potenze che competono agli elementi del circuito risultano:

$$\begin{aligned}
P_{R_1} &= \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{0.2^2}{100} = 0.4 \text{ mW} && \text{(assorbita)}\\
P_{R_2} &= \frac{v_2^2}{R_2} = \frac{0^2}{50} = 0\\
P_{R_3} &= \frac{v_3^2}{R_3} = \frac{(-0.1)^2}{200} = 0.05 \text{ mW} && \text{(assorbita)}\\
P_{I_0} &= -v_5I_0 = -0.1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = -0.2 \text{ mW} && \text{(erogata)}\\
P_{V_0} &= -V_0i_L = -0.1 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = -0.05 \text{ mW} && \text{(assorbita)}\\
P_{gv_3} &= -v_4gv_3 = 0.1 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot (-0.1) = -0.2 \text{ mW} && \text{(erogata)}
\end{aligned}$$

Come verifica si può fare il bilancio delle potenze:

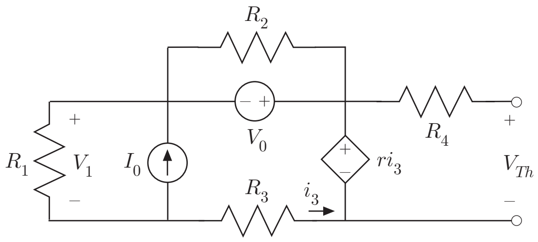
$$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{I_0} + P_{V_0} + P_{gv_3} = 0$$

Infine, le energie immagazzinate nei condensatori e nell'induttore sono date da:

$$\begin{aligned}
W_{C_1} &= \frac{1}{2}\,C_1v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 0.2^2 = 0.2 \text{ nJ}\\
W_{C_2} &= \frac{1}{2}\,C_2v_2^2 = 0\\
W_L &= \frac{1}{2}\,Li_L^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot (0.5 \cdot 10^{-3})^2 = 0.75 \text{ nJ}
\end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 1.6 (testo a pag. 4)

Per il calcolo della tensione di Thevenin si deve considerare il circuito in figura:



Poiché su R_4 non può fluire corrente, si ha che:

$$V_{Th} = ri_3 \qquad \Rightarrow \qquad i_3 = \frac{V_{Th}}{r}$$

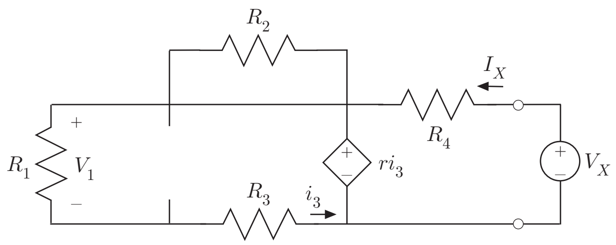
Dal bilancio di corrente al nodo che collega R_1 e R_3, tenendo conto che $V_1 = V_{Th} - V_0 - R_3 i_3$, si ottiene

$$\frac{V_{Th}}{r} = i_3 = -I_0 + \frac{V_1}{R_1} = -I_0 + \frac{V_{Th}}{R_1} - \frac{V_0}{R_1} - \frac{R_3 V_{Th}}{rR_1}$$

da cui si ricava

$$V_{Th} = \frac{V_0 + R_1 I_0}{1 - \frac{R_3 + R_1}{r}} = \frac{100 + 120 \cdot 0.5}{1 - \frac{80+120}{400}} = \frac{160}{0.5} = 320 \text{ V}$$

Per il calcolo della resistenza di Thevenin si considera il seguente circuito:



Si ha:

$$I_X = \frac{V_X - ri_3}{R_4}$$

ma anche

$$i_3 = \frac{ri_3}{R_1 + R_3} \qquad \Rightarrow \qquad i_3 = 0$$

e quindi risulta

$$R_{Th} = \frac{V_X}{I_X} = R_4 = 100\ \Omega$$

La tensione V_R ai capi di R e di C si ottiene con un partitore fra le resistenze R e R_{Th} (si noti che C è ininfluente perché in regime stazionario si comporta come un circuito aperto):

$$V_R = \frac{R}{R + R_{Th}}\, V_{Th} = \frac{50}{50 + 100}\, 320 = 106.7 \text{ V}$$

La potenza istantanea assorbita da R è quindi:

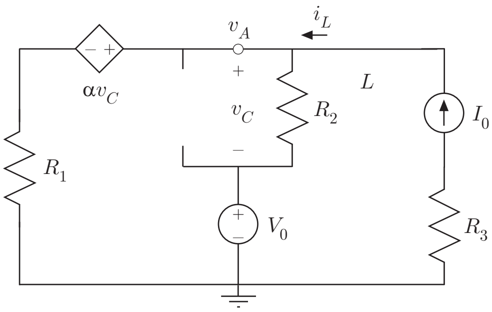
$$P_R = \frac{V_R^2}{R} = \frac{106.7^2}{50} = 227.6 \text{ W}$$

mentre l'energia immagazzinata nel condensatore è

$$W_C = \frac{1}{2}\, CV_R^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-12} \cdot 106.7^2 = 56.9 \text{ nJ}$$

Soluzione dell'esercizio 1.7 (testo a pag. 5)

In regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un cortocircuito (v. figura).



Definendo il potenziale di riferimento sul nodo inferiore e applicano la KCL al nodo superiore (al potenziale v_A) si ha:

$$\frac{v_A - \alpha v_C}{R_1} + \frac{v_A - V_0}{R_2} - I_0 = 0$$

Inoltre si ha

$$v_A = V_0 + v_C$$

sostituendo nella prima equazione e tenendo conto che $R_1 = 2R_2$, si ottiene

$$V_0 + v_C - \alpha v_C + 2(V_0 + v_C - V_0) - 2R_2 I_0 = 0$$

da cui

$$v_C = \frac{2R_2 I_0 - V_0}{1 - \alpha + 2} = 2R_2 I_0 - V_0 = 2 \cdot 50 \cdot 5 - 200 = 300 \text{ V}$$

La corrente che fluisce sull'induttore è

$$i_L = I_0 = 5 \text{ A}$$

mentre quella che scorre sulla resistenza R_1 è

$$i_{R_1} = \frac{v_A - \alpha v_C}{R_1} = \frac{V_0 + v_C - \alpha v_C}{R_1} = \frac{V_0 - v_C}{R_1} = \frac{200 - 300}{100} = -1 \text{ A}$$

Le energie immagazzinate nell'induttore e nel condensatore risultano

$$w_L = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 5^2 = 125 \ \mu\text{J}$$

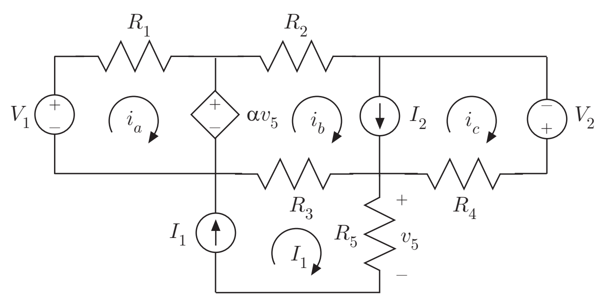
$$w_C = \frac{1}{2} C v_C^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 10^{-9} \cdot 300^2 = 900 \ \mu\text{J}$$

e la potenza assorbita da R_1 è

$$p_{R_1} = R_1 i_{R_1}^2 = 100 \text{ W}$$

Soluzione dell'esercizio 1.8 (testo a pag. 5)

Per il calcolo delle potenze su tutte le resistenze conviene applicare l'analisi agli anelli, considerando come incognite le correnti i_a, i_b e i_c indicate nella seguente figura:



L'equazione alla maglia relativa a i_a fornisce

$$-V_1 + R_1 i_a + \alpha R_5 I_1 = 0$$

da cui

$$i_a = \frac{V_1 - \alpha R_5 I_1}{R_1} = \frac{60 - 0.1 \cdot 100 \cdot 1}{10} = 5 \text{ A}$$

Per le maglie b e c bisogna considerare il superanello e aggiungere un'equazione che collega i_b e i_c a I_2:

$$\begin{cases} -\alpha R_5 I_1 + R_2 i_b - V_2 + R_4 i_c + R_3(i_b - I_1) = 0 \\ i_b - i_c = I_2 \end{cases}$$

Ricavando i_c dalla seconda equazione e sostituendo nella prima si ha:

$$-\alpha R_5 I_1 + R_2 i_b - V_2 + R_4 i_b - R_4 I_2 + R_3 i_b - R_3 I_1 = 0$$

da cui

$$i_b = \frac{\alpha R_5 I_1 + V_2 + R_4 I_2 + R_3 I_1}{R_2 + R_4 + R_3} = \frac{0.1 \cdot 100 \cdot 1 + 20 + 40 \cdot 1.5 + 50 \cdot 1}{50 + 40 + 50} = 1 \text{ A}$$

e quindi

$$i_c = -0.5 \text{ A}$$

Le potenze assorbite dalle resistenze risultano quindi:

$$P_{R_1} = R_1 i_a^2 = 10 \cdot 5^2 = 250 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = R_2 i_b^2 = 50 \cdot 1^2 = 50 \text{ W}$$

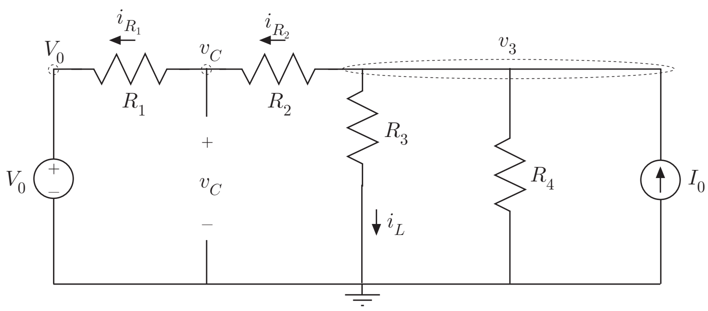
$$P_{R_3} = R_3 (i_b - I_1)^2 = 50 \cdot (1 - 1)^2 = 0$$

$$P_{R_4} = R_4 i_c^2 = 40 \cdot (-0.5)^2 = 10 \text{ W}$$

$$P_{R_5} = R_5 I_1^2 = 100 \cdot 1^2 = 100 \text{ W}$$

Soluzione dell'esercizio 1.9 (testo a pag. 5)

In regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto, e l'induttore come un cortocircuito. Pertanto, il circuito da analizzare risulta quello mostrato in figura:



Definendo il nodo inferiore come riferimento e applicando la KCL al nodo di tensione v_3 si ottiene

$$\frac{v_3 - V_0}{R_1 + R_2} + \frac{v_3}{R_3} + \frac{v_3}{R_4} - I_0 = 0$$

Osservando che $R_2 = 3R_1$, $R_3 = 4R_1$ e $R_4 = 8R_1$, sostituendo nella precedente equazione ed esplicitando rispetto a v_3 si ricava

$$v_3 = \frac{2V_0 + 8R_1 I_0}{5} = \frac{2 \cdot 2000 + 8 \cdot 50 \cdot 2.5}{5} = 1000 \text{ V}$$

Le correnti che scorrono su R_1 e R_2 sono date da

$$i_{R_1} = i_{R_2} = \frac{v_3 - V_0}{R_1 + R_2} = \frac{1000 - 2000}{50 + 150} = -5 \text{ A}$$

La tensione sul condensatore risulta quindi

$$v_C = V_0 + R_1 i_{R_1} = 2000 + 50 \cdot (-5) = 1750 \text{ V}$$

Infine, la corrente sull'induttore è

$$i_L = \frac{V_3}{R_3} = 5 \text{ A}$$

Le energie immagazzinate nell'induttore e nel condensatore sono

$$W_L = \frac{1}{2}\, L i_L^2 = \frac{1}{2}\, 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5^2 = 25\ \mu\text{J}$$

$$W_C = \frac{1}{2}\, C v_C^2 = \frac{1}{2}\, 100 \cdot 10^{-12} \cdot 1750^2 = 153\ \mu\text{J}$$

e le potenze assorbite dalle resistenze risultano

$$P_{R_1} = R_1 i_{R_1}^2 = 50 \cdot (-5)^2 = 1250 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = R_2 i_{R_1}^2 = 150 \cdot (-5)^2 = 3750 \text{ W}$$

$$P_{R_3} = R_3 i_L^2 = 200 \cdot 5^2 = 5000 \text{ W}$$

$$P_{R_4} = \frac{v_3^2}{R_4} = \frac{1000^2}{400} = 2500 \text{ W}$$

Per verificare la correttezza dei risultati si possono calcolare le potenze dei due generatori

$$P_{V_0} = V_0 i_{R_1}^2 = 2000 \cdot -5 = -10000 \text{ W} \qquad \text{(erogata)}$$

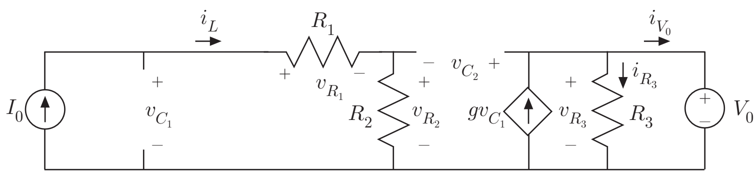
$$P_{I_0} = -v_3 I_0 = -1000 \cdot 2.5 = -2500 \text{ W} \qquad \text{(erogata)}$$

Entrambi i generatori erogano potenza, e si verifica facilmente che il bilancio energetico è soddisfatto, cioè

$$P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{V_0} + P_{I_0} = 0$$

Soluzione dell'esercizio 1.10 (testo a pag. 6)

In regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto, e l'induttore come un cortocircuito. Pertanto, il circuito da analizzare risulta quello mostrato in figura:



Per ispezione si vede che

$$i_L = I_0 = 0.1 \text{ A}$$

da cui

$$v_{R_1} = R_1 i_L = 5 \text{ V} \qquad v_{R_2} = R_2 i_L = 15 \text{ V} \qquad v_{C_1} = v_{R_1} + v_{R_2} = 20 \text{ V}$$

Si osserva inoltre che $v_{R_3} = V_0 = 10$ V, da cui

$$i_{R_3} = \frac{v_{R_3}}{R_3} = 0.1 \text{ A} \qquad i_{V_0} = g v_{C_1} - i_{R_3} = 0.1 \text{ A}$$

Si ha infine

$$v_{C_2} = v_{R_3} - v_{R_2} = -5 \text{ V}$$

Le energie immagazzinate nell'induttore e nei condensatori sono

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} 4 \cdot 10^{-6} \cdot 0.1^2 = 20 \text{ nJ}$$
$$W_{C_1} = \frac{1}{2} C_1 v_{C_1}^2 = \frac{1}{2} 200 \cdot 10^{-12} \cdot 20^2 = 40 \text{ nJ}$$
$$W_{C_2} = \frac{1}{2} C_2 v_{C_2}^2 = \frac{1}{2} 100 \cdot 10^{-12} \cdot (-5)^2 = 1.25 \text{ nJ}$$

le potenze assorbite dalle resistenze risultano

$$P_{R_1} = R_1 i_L^2 = 50 \cdot 0.1^2 = 0.5 \text{ W}$$
$$P_{R_2} = R_2 i_L^2 = 150 \cdot 0.1^2 = 1.5 \text{ W}$$
$$P_{R_3} = R_3 i_{R_3}^2 = 100 \cdot 0.1^2 = 1 \text{ W}$$

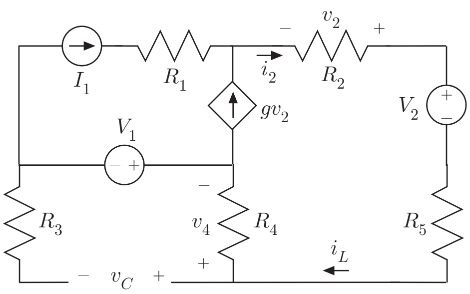
e le potenze che competono ai generatori risultano

$$P_{I_0} = -v_{C_1} I_0 = -20 \cdot 0.1 = -2 \text{ W} \qquad \text{(erogata)}$$
$$P_{V_0} = V_0 i_{V_0} = 10 \cdot 0.1 = 1 \text{ W} \qquad \text{(assorbita)}$$
$$P_{gV_{C_1}} = -v_{R_3} g v_{C_1} = -10 \cdot 0.01 \cdot 20 = -2 \text{ W} \qquad \text{(erogata)}$$

Si verifica facilmente che il bilancio energetico $P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{I_0} + P_{V_0} + P_{gV_{C_1}} = 0$ è soddisfatto.

Soluzione dell'esercizio 1.11 (testo a pag. 6)

In regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto, e l'induttore come un cortocircuito. Pertanto, il circuito da analizzare risulta quello mostrato in figura:



Applicando la KCL al nodo superiore si ha

$$i_2 = I_1 + g v_2 = I_1 - g R_2 i_2$$

da cui si ricava

$$i_2 = \frac{I_1}{1 + gR_2} = \frac{4}{1 + 20 \cdot 10^{-3} \cdot 150} = 1 \text{ A}$$

La potenza assorbita da R_2 risulta quindi

$$p_{R_2} = R_2 i_2^2 = 150 \cdot 1^2 = 150 \text{ W}$$

Risulta evidente che $i_L = i_2$, e quindi l'energia immagazzinata sull'induttore è

$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 10^{-6} \cdot 1^2 = 5 \ \mu\text{J}$$

Poiché su R_3 non fluisce corrente, la caduta di potenziale è nulla. Si ha quindi

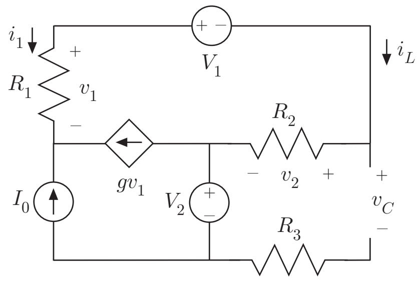
$$v_C = V_1 + v_4 = V_1 + R_4 i_L = 150 + 50 \cdot 1 = 200 \text{ V}$$

L'energia immagazzinata nel condensatore è quindi

$$W_C = \frac{1}{2}\, C v_C^2 = \frac{1}{2}\, 2 \cdot 10^{-9} \cdot 200^2 = 40\ \mu\text{J}$$

Soluzione dell'esercizio 1.12 (testo a pag. 6)

In regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto, e l'induttore come un cortocircuito. Pertanto, il circuito da analizzare risulta quello mostrato in figura:



Applicando la KCL al nodo a sinistra che collega I_0, R_1 e il generatore comandato di corrente si ottiene

$$i_1 + I_0 + g v_1 = 0$$

e sostituendo $v_1 = R_1 i_1$, si ricava

$$i_1 = -\frac{I_0}{1 + gR_1} = -\frac{8}{1 + 20 \cdot 10^{-3} \cdot 150} = -2 \text{ A}$$

La potenza assorbita da R_1 risulta quindi

$$p_{R_1} = R_1 i_1^2 = 150 \cdot (-2)^2 = 600 \text{ W}$$

Per ispezione si vede che $i_L = -i_1 = 2$ A, e quindi l'energia immagazzinata sull'induttore è

$$W_L = \frac{1}{2}\, L i_L^2 = \frac{1}{2}\, 10 \cdot 10^{-6} \cdot 2^2 = 20\ \mu\text{J}$$

Poiché su R_3 non fluisce corrente, la caduta di potenziale è nulla. Si ha quindi

$$v_C = V_2 + v_2 = V_2 + R_2 i_L = 300 + 50 \cdot 2 = 400 \text{ V}$$

L'energia immagazzinata nel condensatore è quindi

$$W_C = \frac{1}{2}\, C v_C^2 = \frac{1}{2}\, 2 \cdot 10^{-9} \cdot 400^2 = 160\ \mu\text{J}$$

5

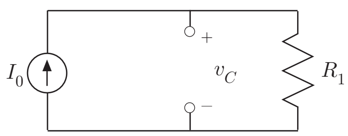
Soluzione dei circuiti in regime transitorio

Soluzione dell'esercizio 2.1 (testo a pag. 7)

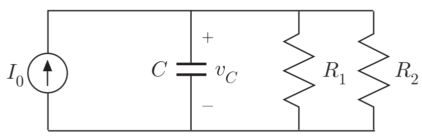
Da una prima analisi del circuito si nota che la corrente i_L che fluisce nell'induttore coincide sempre con la corrente del generatore indipendente. Pertanto si ha

$$i_L(t) = I_0 = 5\ \text{A} \qquad \forall t$$

Quindi, pur includendo due elementi reattivi, il circuito in esame si comporta come un circuito del I ordine poiché l'induttore è ininfluente e può essere sostituito da un semplice filo durante l'analisi del circuito.
Prima dell'istante $t = 0$ il circuito è in regime stazionario e quindi il condensatore C si comporta come un circuito aperto. La tensione ai suoi capi si calcola considerando il circuito a nella seguente figura:



a



b

Si ha:

$$v_C(0^-) = R_1 I_0 = 500\ \text{V}$$

Nell'istante immediatamente successivo alla commutazione dell'interruttore da aa' a bb' il valore della tensione su C non può cambiare istantaneamente e quindi si ha:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 500\ \text{V}$$

Dopo la commutazione dell'interruttore si deve considerare il circuito b in figura. Per $t \to \infty$ il circuito ritorna a funzionare in regime stazionario e quindi nel condensatore non fluisce corrente. Si ha quindi:

$$v_C(\infty) = (R_1//R_2)I_0 = \frac{100 \cdot 100}{100 + 100}\ 5 = 250\ \text{V}$$

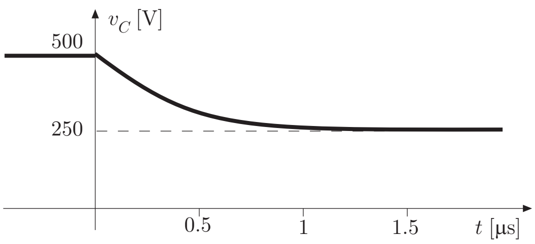
La resistenza equivalente vista ai morsetti del condensatore è $R_{eq} = (R_1//R_2) = 50\ \Omega$, da cui

$$\tau = R_{eq}\, C = 50 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 0.5\ \mu\text{s}$$

L'andamento della tensione per $0 < t < T$ risulta quindi:

$$v_C(t) = v_C(\infty) + [v_C(0^+) - v_C(\infty)]\text{e}^{-t/\tau} = 250 \cdot (1 + \text{e}^{-2t_{[\mu s]}})\ \text{V}$$

ed è rappresentato nella seguente figura:

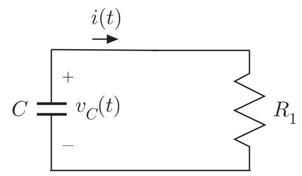


Soluzione dell'esercizio 2.2 (testo a pag. 7)

Per $t < 0$ il circuito è in regime stazionario e quindi nel condensatore C non fluisce corrente. Inoltre, la parte di circuito a destra del condensatore C risulta separata dalla parte a sinistra. Conseguentemente, si ricava per ispezione che:

$$v_C(0^-) = V_0 = 5 \text{ V} \qquad\qquad i(0^-) = 0$$

Dall'istante $t = 0^+$ in avanti la parte di circuito a sinistra del condensatore C risulta separata dal resto del circuito e non ha più alcuna influenza. L'energia accumulata dal condensatore C inizia a scaricarsi sulla sola resistenza R_1, come mostrato nel seguente circuito:



Quindi, dal momento che la tensione ai capi del condensatore C non può cambiare istantaneamente, si ottiene:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_0 = 5 \text{ V}$$

Da cui segue che:

$$i(0^+) = \frac{V_0}{R_1} = 5 \text{ mA}$$

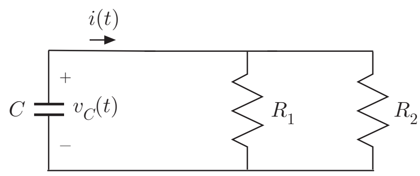
La scarica avviene con una costante di tempo $\tau_1 = R_1 C = 1$ s. Se tale scarica avvenisse senza ulteriori perturbazioni, essa porterebbe ad avere:

$$v_C(\infty) = 0 \qquad\qquad i(\infty) = 0$$

Quindi, per $0 \leq t < T$, l'andamento della tensione v_C e della corrente i risulta essere:

$$v_C(t) = V_0 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau_1} = 5 \cdot \mathrm{e}^{-t_{[\mathrm{s}]}} \text{ V} \qquad\qquad i(t) = \frac{V_0}{R_1} \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau_1} = 5 \cdot \mathrm{e}^{-t_{[\mathrm{s}]}} \text{ mA}$$

Dall'istante $t = T^+$ inizia un nuovo transitorio. Infatti, il circuito diventa quello mostrato nella figura seguente ed il condensatore C continua a scaricarsi sul carico composto dal parallelo della resistenza R_1 con la resistenza R_2:



Quindi, dal momento che la tensione ai capi del condensatore C non può cambiare istantaneamente, si ottiene:

$$v_C(T^+) = v_C(T^-) = V_0 \cdot \mathrm{e}^{-T/\tau_1} \simeq 1.84 \text{ V}$$

Inoltre, il valore raggiunto dalla corrente all'instante $t = T^-$ è:

$$i(T^-) = \frac{v_C(T^-)}{R_1} \simeq 1.84 \text{ mA}$$

mentre il valore all'istante successivo $t = T^+$ è:

$$i(T^+) = \frac{v_C(T^+)}{R_{eq}} \simeq 5 \text{ mA}$$

dove:

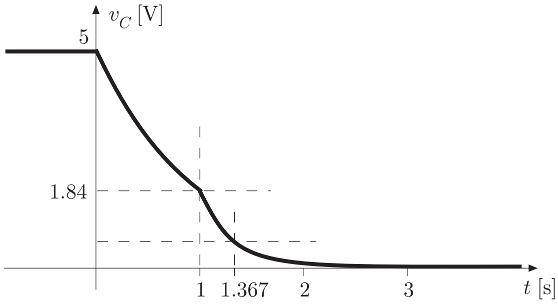
$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \simeq 367 \ \Omega$$

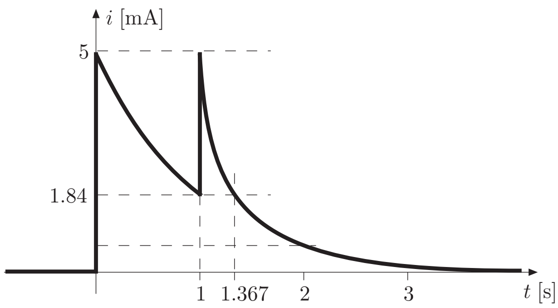
La scarica continua quindi con una costante di tempo $\tau_2 = R_{eq}C = 0.367$ s. Quindi, per $t > T$, l'andamento della tensione v_C e della corrente i risulta essere:

$$v_C(t) = v_C(T^+) \cdot \mathrm{e}^{-(t-T)/\tau_2} \simeq 1.84 \cdot \mathrm{e}^{-2.7\cdot(t-T)_{[s]}} \text{ V}$$

$$i(t) = \frac{v_C(T^+)}{R_{eq}} \cdot \mathrm{e}^{-(t-T)/\tau_2} \simeq 5 \cdot \mathrm{e}^{-2.7\cdot(t-T)_{[s]}} \text{ mA}$$

L'andamento complessivo è quindi graficamente rappresentato nella figura seguente:





Soluzione dell'esercizio 2.3 (testo a pag. 7)

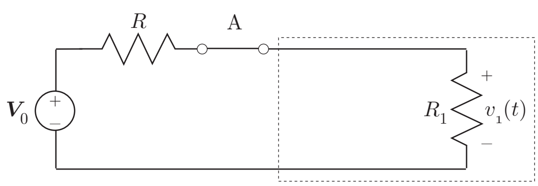
Per $t < 0$ il circuito è in regime stazionario e quindi ai capi dell'induttore L_1 non vi è nessuna differenza di potenziale. Inoltre, essendo l'interruttore aperto da tempo indefinito, anche la corrente che fluisce nell'induttore si può considerare nulla. Conseguentemente:

$$v_1(0^-) = 0 \qquad\qquad i_1(0^-) = 0$$

Dall'istante $t = 0^+$ in avanti la corrente può cominciare a fluire nell'induttore. In particolare, dal momento che la corrente attraverso l'induttore non può cambiare istantaneamente, si ottiene:

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$$

Ne consegue che ai fini del calcolo della tensione v_1 è possibile considerare il seguente circuito:



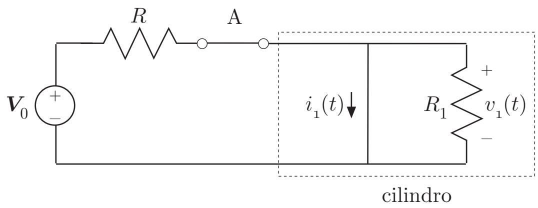
E quindi:

$$v_1(0^+) = V_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R} \simeq V_0 \cdot \frac{R_1}{R_1} \simeq V_0 \simeq 24 \text{ V}$$

Successivamente, la corrente all'interno dell'induttore aumenta con una costante di tempo $\tau = L_1/(R_1//R) \simeq L_1/R \simeq 0.4$ ms. A regime la differenza di potenziale ai capi dell'induttore sarà nulla. E quindi:

$$v_1(\infty) = 0$$

Ne consegue che ai fini del calcolo della corrente di regime $i_1(\infty)$ è possibile considerare il seguente circuito:



Quindi:

$$i_1(\infty) = \frac{V_0}{R} = 10 \text{ A}$$

Durante la fase di transitorio la tensione v_1 e la corrente i_1 possono essere quindi descritte dalle seguenti equazioni:

$$v_1(t) = V_0 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} = 24 \cdot \mathrm{e}^{-2.5t_{[\mathrm{ms}]}} \text{ V} \qquad i_1(t) = \frac{V_0}{R} \cdot \{1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\} = 10 \cdot \{1 - \mathrm{e}^{-2.5t_{[\mathrm{ms}]}}\} \text{ A}$$

Dall'istante $t = T^+$ inizia un nuovo transitorio. In particolare, dato che $T \simeq 5\tau$, è possibile supporre che il transitorio precedente abbia raggiunto i valori di regime sia per la corrente che per la tensione. Dopo l'apertura dell'interruttore, la corrente che fluisce nell'induttore si dissipa sul resistore con una costante di tempo $\tau_1 = L_1/R_1 = 2$ ns. Inoltre, dal momento che la corrente attraverso l'induttore non può cambiare istantaneamente, si ottiene:

$$i_1(T^+) = i_1(T^-) = 10 \text{ A}$$

Conseguentemente:

$$v_1(T^+) = -i_1(T^+)R_1 = -5 \text{ MV}$$

Alla fine di questo secondo transitorio, sia la tensione v_1 e la corrente i_1 saranno nulli. Inoltre, durante la fase di transitorio esse possono essere descritte dalle seguenti equazioni:

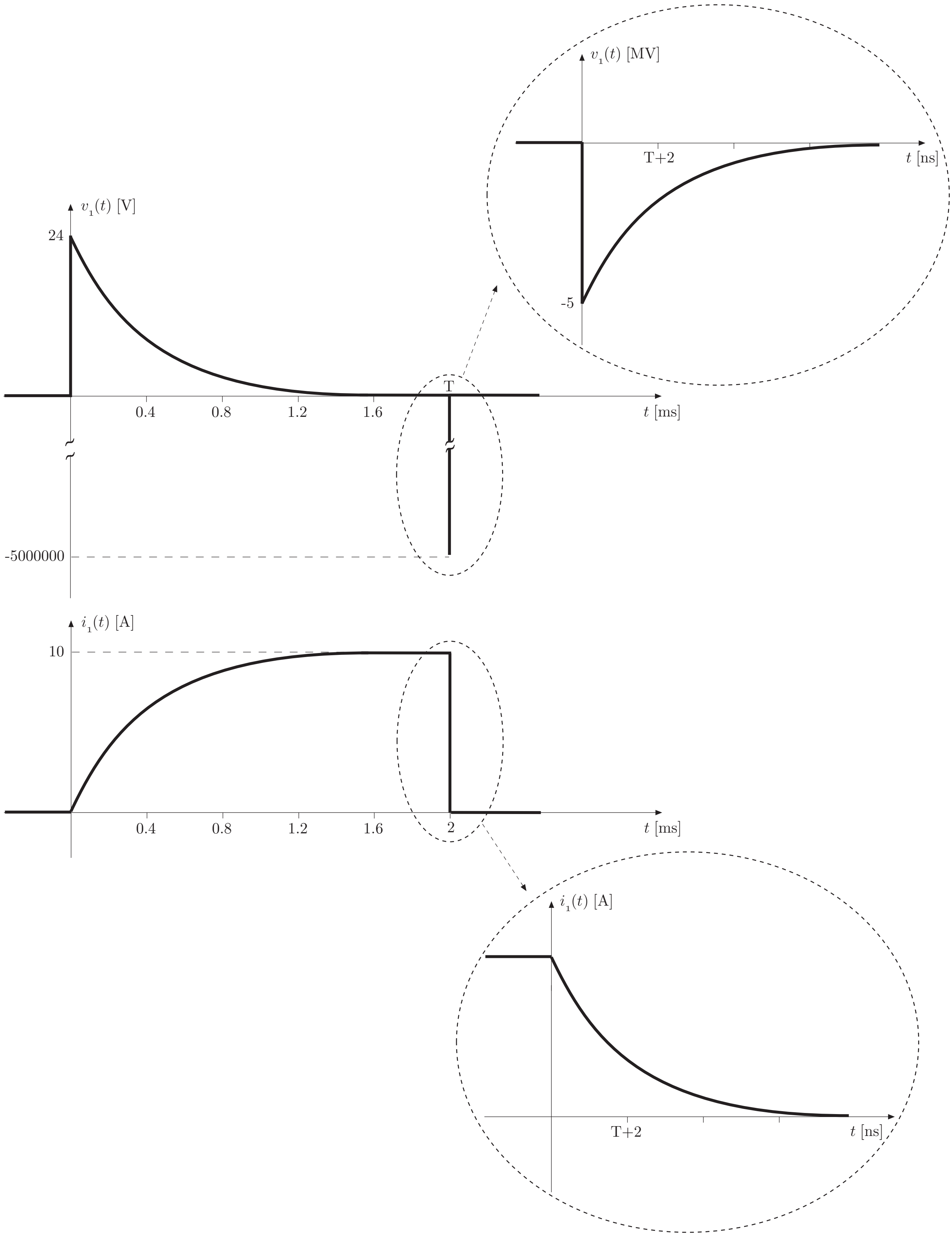
$$v_1(t) = -v_1(T^+) \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau_1} = -5 \cdot \mathrm{e}^{-0.5(t-T)_{[\mathrm{ns}]}} \text{ MV} \qquad i_1(t) = i_1(T^+) \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau_1} = 10 \cdot \mathrm{e}^{-0.5(t-T)_{[\mathrm{ns}]}} \text{ A}$$

La tensione massima raggiunta ai capi degli elettrodi è quindi 5 MV. Essa genera un campo elettrico massimo pari a:

$$E_{max} = \frac{v_1(T^+)}{d} = 5 \text{ GV/m}$$

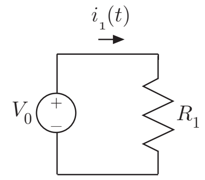
ben al di sopra della rigiditè dielettrica E_s.

L'andamento complessivo è graficamente rappresentato nella figura seguente:



Soluzione dell'esercizio 2.4 (testo a pag. 8)

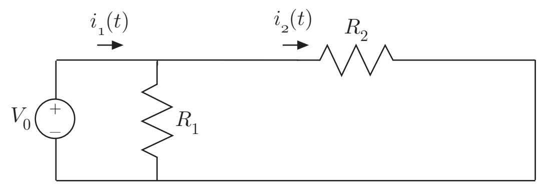
Per $t < 0$ il circuito è in regime stazionario ed è in pratica composto dalla sola parte a sinistra dell'interruttore. In particolare, è possibile considerare il seguente circuito:



E quindi:

$$i_1(0^-) = \frac{V_0}{R_1} = 10 \text{ mA} \qquad\qquad i_2(0^-) = 0$$

Analogamente, per t tendente all'infinito, il circuito torna ad essere in regime stazionario ed, in particolare, l'induttore L non presenta cadute di tensione ai suoi capi. Conseguentemente, è possibile considerare il seguente circuito:



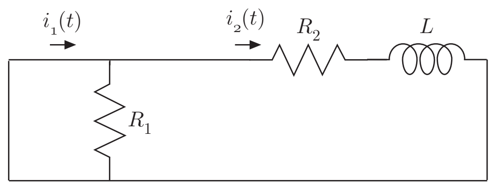
dal quale si ricava che:

$$i_1(\infty) = \frac{V_0}{R_1} + \frac{V_0}{R_2} = 30 \text{ mA} \qquad\qquad i_2(\infty) = \frac{V_0}{R_2} = 20 \text{ mA}$$

Per quanto concerne la fase di transitorio, dal momento che la corrente attraverso l'induttore L non può cambiare istantaneamente, si ricava che::

$$i_1(0^+) = \frac{V_0}{R_1} = 10 \text{ mA} \qquad\qquad i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$$

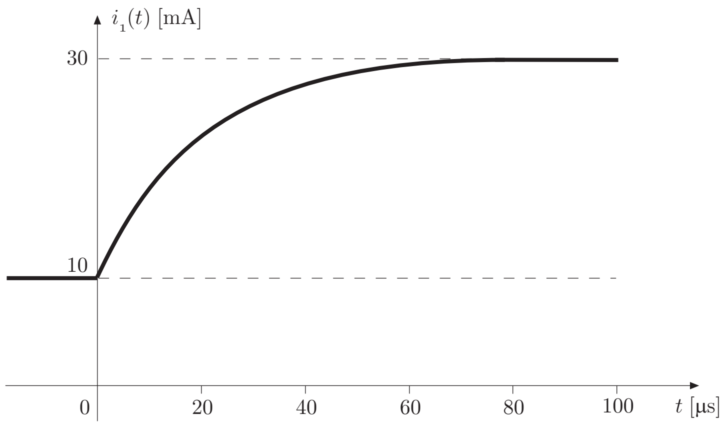
Infine, per calcolare la costante di tempo τ si utilizza il seguente circuito:

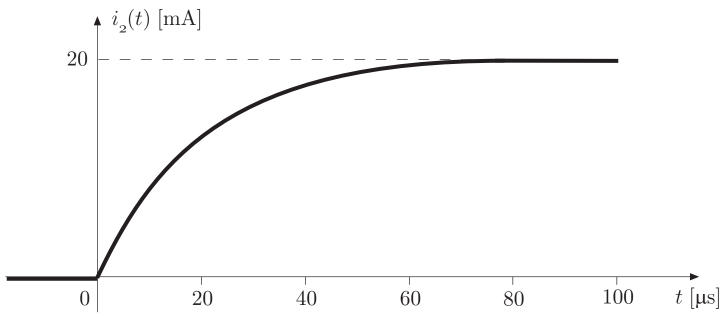


dal quale risulta che:

$$\tau = \frac{L}{R_2} = 20 \ \mu\text{s}$$

L'andamento complessivo è graficamente rappresentato nella figura seguente:



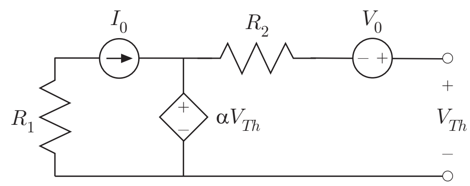


e, per $t \geq 0$, descritto dalle seguenti equazioni:

$$i_1(t) = 10 + 20 \cdot \{1 - \mathrm{e}^{-0.05 t_{[\mu s]}}\}\ \mathrm{mA} \qquad\qquad i_1(t) = 20 \cdot \{1 - \mathrm{e}^{-0.05 t_{[\mu s]}}\}\ \mathrm{mA}$$

Soluzione dell'esercizio 2.5 (testo a pag. 8)

In circuito da considerare per il calcolo della tensione equivalente di Thevenin è il seguente:



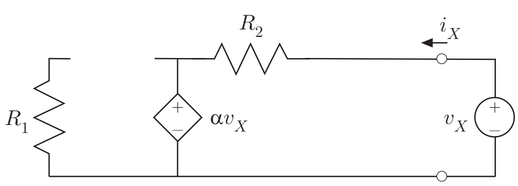
La caduta di potenziale sulla resistenza R_2 è nulla, poiché il morsetto a è aperto. Pertanto, applicando la KVL alla maglia che include il generatore comandato si ha:

$$V_{Th} = V_0 + \alpha V_{Th}$$

da cui

$$V_{Th} = \frac{V_0}{1-\alpha} = 2V_0 = 200\ \mathrm{V}$$

Per il calcolo della resistenza equivalente di Thevenin si devono spegnere i generatori indipendenti. Inoltre, poiché nel circuito è presente un generatore dipendente, per il calcolo di R_{Th} è necessario collegare un generatore di prova ai morsetti ab, ad esempio di tensione, come mostrato nella seguente figura:



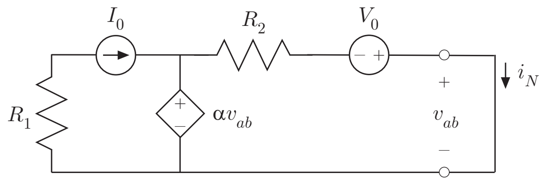
Applicando la KVL all'unica maglia del circuito, si ha

$$-\alpha v_X - R_2 i_X + v_X = 0$$

da cui

$$R_{Th} = \frac{v_X}{i_X} = \frac{R_2}{1-\alpha} = 2R_2 = 100\ \Omega$$

Se si volesse ottenere il generatore equivalente di Norton, il circuito da considerare per il calcolo della corrente di corto circuito è il seguente:



Poiché $v_{ab} = 0$, applicando la KVL alla maglia di destra si ottiene

$$R_2 I_N - V_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I_N = \frac{V_0}{R_2} = 2\ \text{A}$$

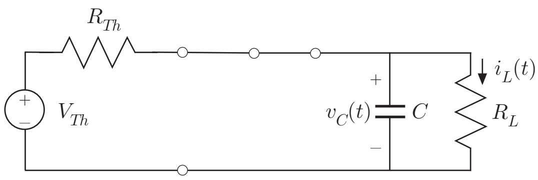
La resistenza del generatore di Norton coincide con quella del generatore di Thevenin:

$$R_N = R_{Th} = 100\ \Omega$$

e, inoltre, vale la relazione

$$V_{Th} = R_N I_N$$

Quando si chiude l'interruttore, si innesca un transitorio che può essere studiato considerando il seguente circuito:



Prima della chiusura dell'interruttore ($t = 0^-$) si ha

$$i_L(0^-) = 0 \qquad\qquad v_C(0^-) = 0$$

Immediatamente dopo la chiusura dell'interruttore, la tensione sul condensatore non può cambiare repentinamente e quindi si ha

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad i_L(0^+) = \frac{v_C(0^+)}{R_L} = 0$$

Trascorso un tempo sufficientemente lungo ($t \to \infty$), il circuito ritorna in regime stazionario e il condensatore si comporta come un circuito aperto. Pertanto il generatore indipendente vede come carico le due resistenze poste in serie, e la corrente diventa:

$$i_L(\infty) = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{200}{100 + 100} = 1\ \text{A}$$

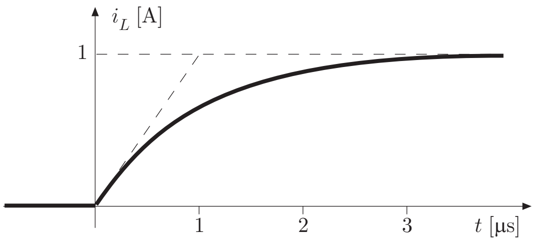
Per il calcolo della costante di tempo del circuito si spegne il generatore di tensione (sostituendolo con un corto circuito) e si determina la resistenza equivalente vista ai morsetti del condensatore che, per il circuito dato, coincide con il parallelo fra R_{Th} e R_L. Si ha quindi

$$\tau = R_{eq}C = \frac{R_{Th}R_L}{R_{Th} + R_L}\, C = \frac{100 \cdot 100}{100 + 100}\, 20 \cdot 10^{-9} = 1\ \mu\text{s}$$

L'espressione della corrente risulta quindi:

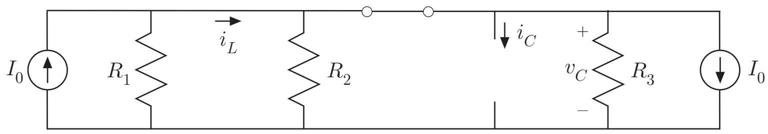
$$i_L(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}}\ \text{A} & t > 0 \end{cases}$$

e il grafico del suo andamento è mostrato nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.6 (testo a pag. 8)

Per $t < 0$ il circuito da considerare è il seguente:



Si nota che le tre resistenze sono in parallelo e ai loro capi c'è la tensione $v_C(0^-)$. Applicando la KCL al nodo superiore si ha

$$-I_0 + \frac{v_C(0^-)}{R_1} + \frac{v_C(0^-)}{R_2} + \frac{v_C(0^-)}{R_3} + I_0 = 0$$

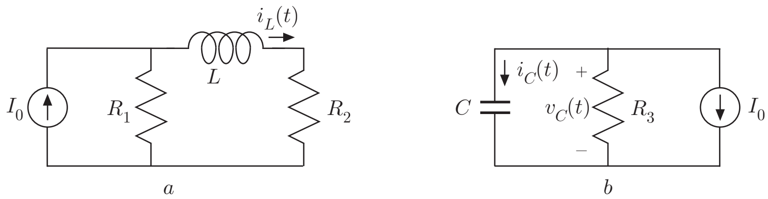
da cui

$$v_C(0^-) = 0$$

Quindi nelle resistenze non passa corrente e si ha

$$i_L(0^-) = I_0 = 3 \text{ A}$$

Quando si apre l'interruttore il circuito si separa in due circuiti del primo ordine, come mostrato nella figura seguente



e per entrambi i sottocircuiti si innesca un transitorio.
Consideriamo dapprima il circuito a. All'istante $t = 0^+$ la corrente sull'induttore non può cambiare istantaneamente, e quindi si ha:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 3 \text{ A}$$

Per $t \to \infty$ il circuito torna in regime stazionario e la corrente $i_L(\infty)$ coincide con la corrente che fluisce in R_2:

$$i_L(\infty) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, I_0 = \frac{100}{100 + 200}\, 3 = 1 \text{ A}$$

Per il calcolo della costante di tempo si deve spegnere il generatore di corrente (sostituendolo con un circuito aperto) e si vede che la resistenza equivalente collegata ai morsetti dell'induttore coincide con la serie di R_1 e R_2. Si ha quindi

$$\tau_L = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{100 + 200} = 10 \text{ ns}$$

L'espressione della corrente i_L risulta quindi:

$$i_L(t) = \begin{cases} 3 \text{ A} & t < 0 \\ 1 + 2\, \mathrm{e}^{-0.1\, t_{[\mathrm{ns}]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora il circuito b. All'istante $t = 0^+$ la tensione sull condensatore non può cambiare istantaneamente e, pertanto, la corrente che fluisce nella resistenza R_3 è nulla. Applicando la KCL al nodo superiore si ottiene

$$i_C(0^+) = -I_0 = -3 \text{ A}$$

Per $t \to \infty$ il circuito torna in regime stazionario e la corrente che fluisce nel condensatore si annulla:

$$i_C(\infty) = 0$$

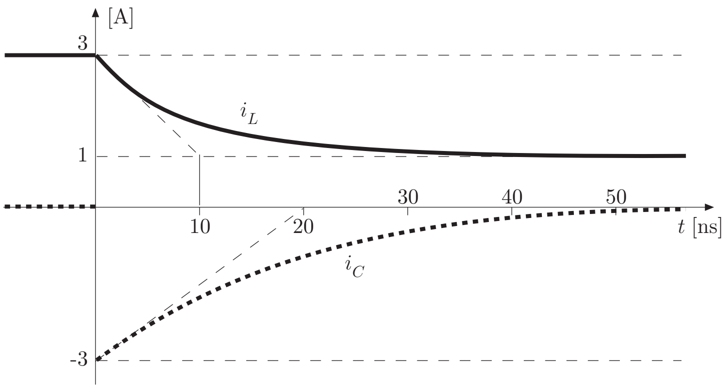
Per il calcolo della costante di tempo si deve spegnere il generatore di corrente (sostituendolo con un circuito aperto) e si vede che la resistenza collegata ai morsetti del condensatore è R_3. Si ha quindi

$$\tau_C = R_3 C = 50 \cdot 0.4 \cdot 10^{-9} = 20 \text{ ns}$$

L'espressione della corrente i_C risulta quindi:

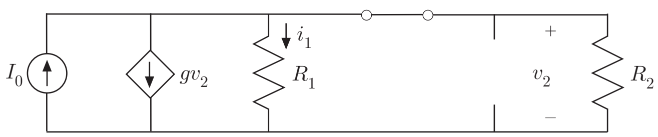
$$i_C(t) = \begin{cases} 0 \text{ A} & t < 0 \\ -3 \text{ e}^{-0.05\, t_{[\text{ns}]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

Il grafico dell'andamento delle correnti i_L e i_C è mostrato nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.7 (testo a pag. 8)

Per $t < 0$ il circuito da considerare è il seguente:



Applicando la KCL al nodo superiore si ottiene l'equazione:

$$-I_0 + gv_2(0^-) + \frac{v_2(0^-)}{R_1} + \frac{v_2(0^-)}{R_2} = 0$$

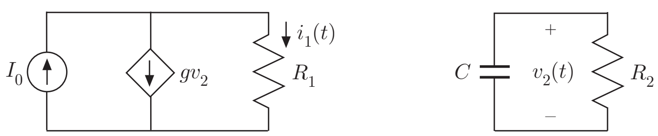
da cui

$$v_2(0^-) = \frac{I_0}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + g} = \frac{10}{\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{50} + 0.02} = 200 \text{ V}$$

Si ha inoltre

$$i_1(0^-) = \frac{v_2(0^-)}{R_1} = 2 \text{ A}$$

Quando si apre l'interruttore il circuito si separa in due circuiti, come mostrato nella figura seguente



che tuttavia non operano separatamente a causa della presenza nel circuito di sinistra del generatore dipendente dalla tensione v_2 del circuito di destra.
Si vede immediatamente che

$$i_1(t) = I_0 - g v_2(t)$$

dove v_2 avrà un andamento esponenziale decrescente poiché il circuito di destra è un circuito autonomo del primo ordine. Si ha infatti che

$$v_2(\infty) = 0$$

Inoltre, v_2 è la tensione ai capi del condensatore e quindi non può variare bruscamente quando l'interruttore viene commutato. Si ha pertanto

$$v_2(0^+) = v_2(0^-) = 200 \text{ V}$$

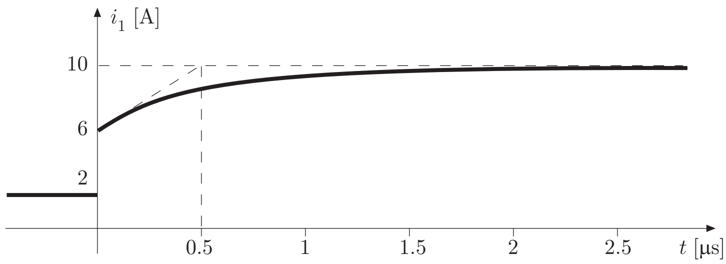
La costante di tempo con cui si scarica il condensatore è

$$\tau = R_2 C = 50 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 0.5\ \mu\text{s}$$

L'espressione della corrente i_1 risulta quindi:

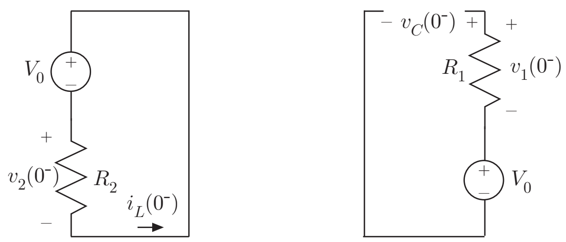
$$i_1(t) = \begin{cases} i_1(0^-) & t < 0 \\ I_0 - g v_2(0^+)\, \mathrm{e}^{-t/\tau} = 10 - 4\, \mathrm{e}^{-2\, t_{[\mu s]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

e la sua rappresentazione grafica è mostrata nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.8 (testo a pag. 9)

Prima dell'istante $t = 0$ il circuito può essere diviso in due sottocircuiti che operano autonomamente in regime stazionario, in cui il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un cortocircuito, come mostrato nella seguente figura:



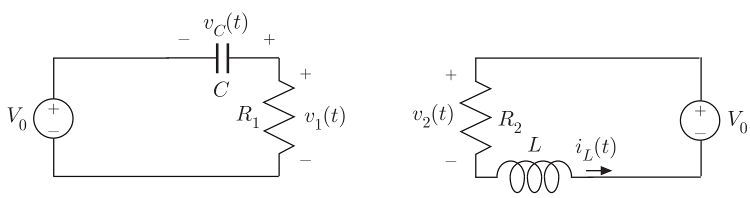
Considerando il circuito di destra, poiché sulla resistenza R_1 non scorre corrente, si ha

$$v_1(0^-) = 0 \qquad\qquad v_C(0^-) = V_0 = 10 \text{ V}$$

Applicando la KVL e la legge di Ohm al circuito di sinistra si ottiene

$$v_2(0^-) = -V_0 = -10 \text{ V} \qquad\qquad i_L(0^-) = v_2(0^-)/R_2 = -10/100 = -0.1 \text{ A}$$

Quando l'interruttore commuta nella posizione BB$'$ il circuito può ancora essere diviso in due sottocircuiti che funzionano separatamente:



Per $t \to \infty$ i sottocircuiti operano in condizioni stazionarie e si ottiene facilmente

$$v_1(\infty) = 0 \qquad\qquad v_2(\infty) = V_0 = 10 \text{ V}$$

Nell'istante $t = 0^+$ si ha:

$$v_1(0^+) = V_0 + v_C(0^+) = V_0 + v_C(0^-) = 2V_0 = 20 \text{ V}$$

e

$$v_2(0^+) = R_2 i_L(0^+) = R_2 i_L(0^-) = v_2(0^-) = -V_0 = -10 \text{ V}$$

Per il calcolo della costante di tempo si ottiene facilmente

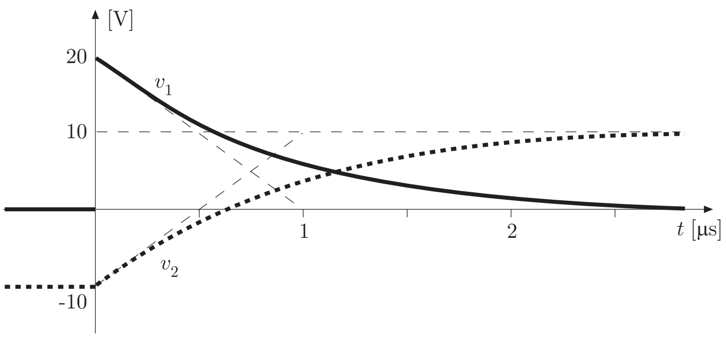
$$\tau_C = R_1 C = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 1\ \mu\text{s} \qquad\qquad \tau_L = \frac{L}{R_2} = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{100} = 1\ \mu\text{s}$$

Le espressioni delle due tensioni risultano quindi

$$v_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 20\ \mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}}\ \text{V} & t > 0 \end{cases}$$

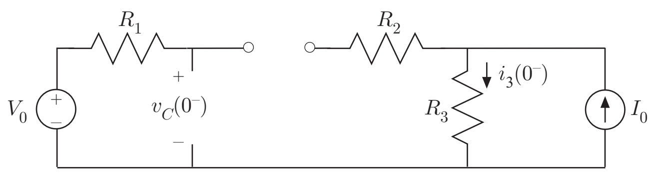
$$v_2(t) = \begin{cases} -10\ \text{V} & t < 0 \\ 10 - 20\ \mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}}\ \text{V} & t > 0 \end{cases}$$

Il grafico dell'andamento delle tensioni è mostrato nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.9 (testo a pag. 9)

Prima dell'istante $t = 0$ il circuito può essere diviso in due sottocircuiti che operano autonomamente in regime stazionario, in cui il condensatore si comporta come un circuito aperto, come mostrato nella seguente figura:



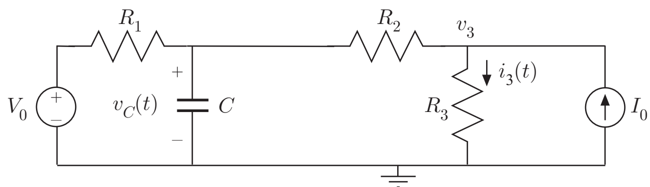
Considerando il circuito di destra, poiché sulla resistenza R_2 non scorre corrente, si ha

$$i_3(0^-) = I_0 = 2 \text{ A}$$

Inoltre si osserva che

$$v_C(0^-) = V_0 = 300 \text{ V}$$

Quando l'interruttore si chiude, il circuito diventa:



Per $t \to \infty$ il circuito opera in condizioni stazionarie. Sostituendo il condensatore con un circuito aperto e applicando il metodo dell'analisi nodale si ha:

$$\frac{v_3 - V_0}{R_1 + R_2} + \frac{v_3}{R_3} - I_0 = 0$$

Sostituendo $v_3 = R_3 i_3(\infty)$ e risolvendo si ottiene:

$$i_3(\infty) = \frac{(R_1 + R_2)I_0 + V_0}{R_1 + R_2 + R_3} = 3 \text{ A}$$

Nell'istante $t = 0^+$, applicando il metodo dell'analisi nodale, si ottiene:

$$\frac{v_3 - v_C(0^+)}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} - I_0 = 0$$

Sostituendo $v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_0$ e $v_3 = R_3 i_3(0^+)$, ossevando che $R_2 = R_3$, si ottiene:

$$i_3(0^+) = \frac{V_0}{2R_3} + \frac{I_0}{2} = 4 \text{ A}$$

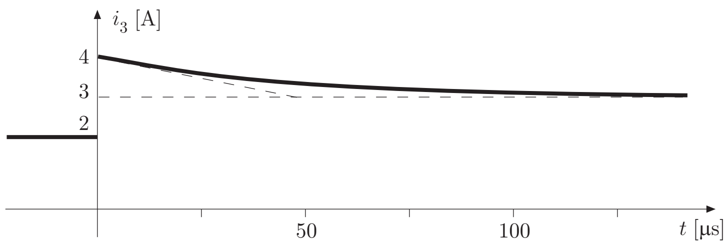
Per il calcolo della costante di tempo si spengono i generatori e si vede facilmente che la resistenza equivalente vista ai capi del condensatore risulta $R_{eq} = R_1//(R_2 + R_3) = 50\ \Omega$, da cui

$$\tau = R_{eq}C = 50 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 50\ \mu\text{s}$$

L'espressioni della corrente risulta quindi

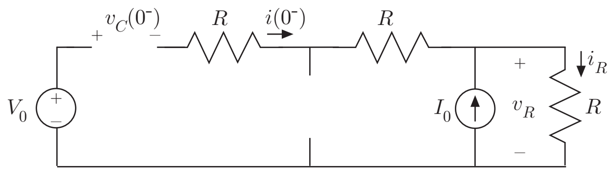
$$i_3(t) = \begin{cases} 2 \text{ A} & t < 0 \\ 3 + \mathrm{e}^{-0.02 t_{[\mu s]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

Il grafico dell'andamento della corrente è mostrato nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.10 (testo a pag. 9)

Prima dell'istante $t = 0$ il circuito opera in regime stazionario e il condensatore si comporta come un circuito aperto, come mostrato nella seguente figura:



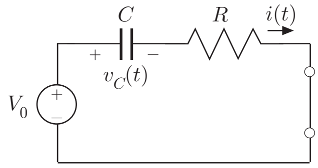
Risulta evidente che

$$i(0^-) = 0$$

Inoltre, poiché $i_R = I_0 + i(0^-) = I_0$, si osserva che

$$v_C(0^-) = V_0 - v_R = V_0 - RI_0$$

Quando l'interruttore si chiude la parte di destra del circuito non influisce sul comportamento della corrente $i(t)$, e il circuito diventa:



Per $t \to \infty$ il condensatore torna a comportarsi come un circuito circuito aperto e si ha quindi

$$i(\infty) = 0$$

Nell'istante $t = 0^+$, si ha

$$i(0^+) = \frac{V_0 - v(0^+)}{R} = \frac{V_0 - v(0^-)}{R} = \frac{V_0 - V_0 + RI_0}{R} = I_0 = 2 \text{ A}$$

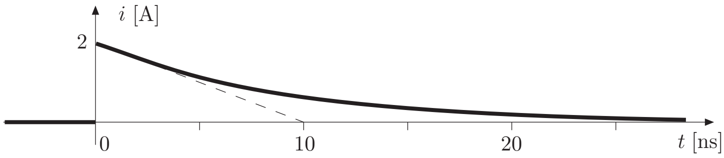
La costante di tempo risulta

$$\tau = RC = 100 \cdot 100 \cdot 10^{-12} = 10 \text{ ns}$$

L'espressioni della corrente risulta quindi

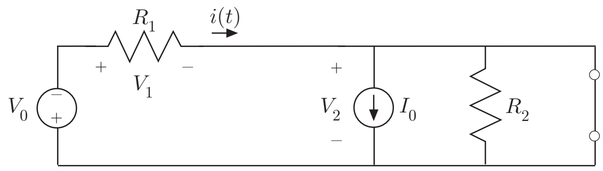
$$i(t) = \begin{cases} 0 \text{ A} & t < 0 \\ 2\,\mathrm{e}^{-0.1 t_{[\mathrm{ns}]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

Il grafico dell'andamento della corrente è mostrato nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.11 (testo a pag. 9)

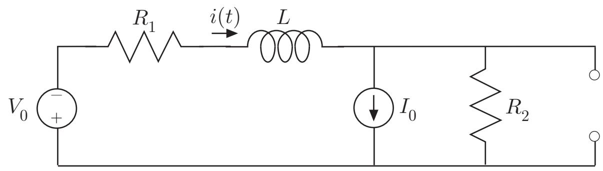
Prima dell'istante $t = 0$ il circuito opera in regime stazionario e l'induttore si comporta come un corto circuito, come mostrato nella seguente figura:



Poiché R_2 è cortocircuitata si ha $V_2 = 0$ e quindi $V_1 = -V_0$, da cui si ottiene

$$i(0^-) = \frac{V_1}{R_1} = -\frac{V_0}{R_1} = -2 \text{ A}$$

Per $t > 0$ l'interruttore si apre e il circuito diventa:



Nell'istante $t = 0^+$, si ha

$$i(0^+) = i(0^-) = -2 \text{ A}$$

Per $t \to \infty$ l'induttore torna a comportarsi come un cortocircuito. Risolvendo il circuito, ad esempio applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ottiene la corrente

$$i(\infty) = \frac{-V_0}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0 = \frac{R_2 I_0 - V_0}{R_1 + R_2} = \frac{200 \cdot 2.5 - 200}{100 + 200} = 1 \text{ A}$$

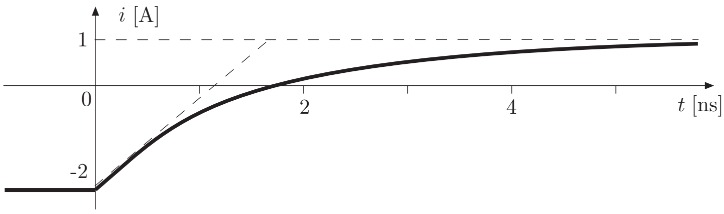
Spegnere i generatori indipendenti si vede che la resistenza equivalente ai capi dell'induttore risulta pari alla serie di R_1 e R_2. Si ottiene quindi

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{0.5 \cdot 10^{-6}}{300} = \frac{5}{3}\ \text{ns}$$

L'espressioni della corrente risulta quindi

$$i(t) = \begin{cases} -2\ \text{A} & t < 0 \\ 1 - 3\,\text{e}^{-0.6 t_{[\text{ns}]}}\ \text{A} & t > 0 \end{cases}$$

Il grafico dell'andamento della corrente è mostrato nella seguente figura:

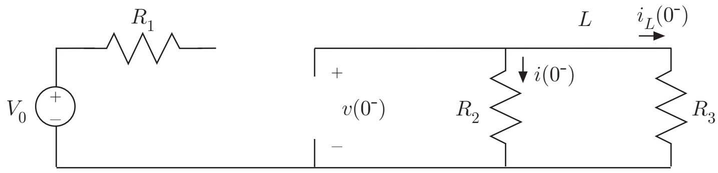


Soluzione dell'esercizio 2.12 (testo a pag. 10)

Prima dell'istante $t = 0$ il circuito opera in regime stazionario e l'induttore si comporta come un corto circuito. Inoltre, poiché sul condensatore c'è immagazzinata la carica Q si ha:

$$v(0^-) = Q/C = 0.5 \cdot 10^{-6}/10^{-8} = 50\ \text{V}$$

Quindi il circuito da considerare è il seguente:



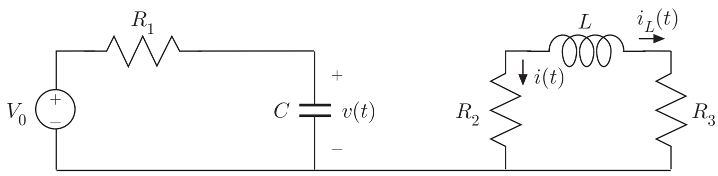
Si ha quindi

$$i(0^-) = v(0^-)/R_2 = 50/50 = 1\ \text{A}$$

E' anche opportuno osservare che

$$i_L(0^-) = v(0^-)/R_3 = 50/100 = 0.5\ \text{A}$$

Quando commutano gli interruttori ($t > 0$) il circuito diventa:



Le due parti del circuito agiscono autonomamente come un RC forzato e un RL autonomo.
Nell'istante $t = 0^+$, si ha

$$v(0^+) = v(0^-) = 50\ \text{V}$$

e

$$i(0^+) = -i_L(0^+) = -i_L(0^-) = -0.5\ \text{A}$$

Per $t \to \infty$ la tensione sul condensatore coincide con quella del generatore

$$v(\infty) = V_0 = 100\ \text{V}$$

mentre la corrente sul circuito di destra si annulla

$$i(\infty) = 0$$

Le costanti di tempo dei due circuiti sono

$$\tau_C = R_1 C = 100 \cdot 10^{-8} = 1\ \mu\text{s}$$

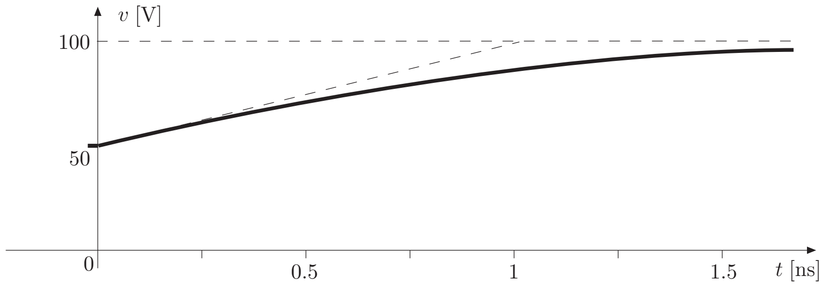
$$\tau_L = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{L}{R_2 + R_3} = \frac{75 \cdot 10^{-6}}{150} = 0.5\ \mu\text{s}$$

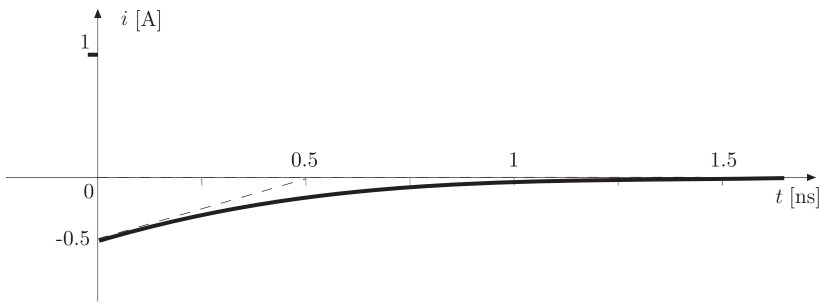
Le espressioni della tensione e della corrente risultano quindi

$$v(t) = \begin{cases} 50\ \text{V} & t = 0^- \\ 100 - 50\,\text{e}^{-\,t_{[\mu s]}}\ \text{V} & t > 0 \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 1\ \text{A} & t = 0^- \\ -0.5\,\text{e}^{-\,2t_{[\mu s]}}\ \text{A} & t > 0 \end{cases}$$

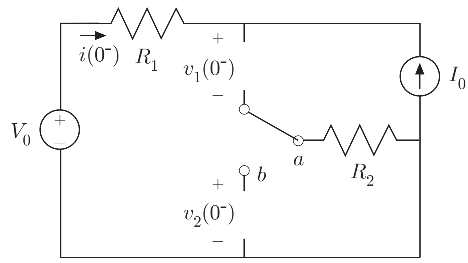
I grafici degli andamenti della tensione e della corrente sono mostrati nelle seguenti figure:





Soluzione dell'esercizio 2.13 (testo a pag. 10)

Prima dell'istante $t = 0$ il circuito opera in regime stazionario e il circuito da considerare è il seguente:



Per ispezione si vede che

$$i(0^-) = -I_0 = -2\ \text{A}$$

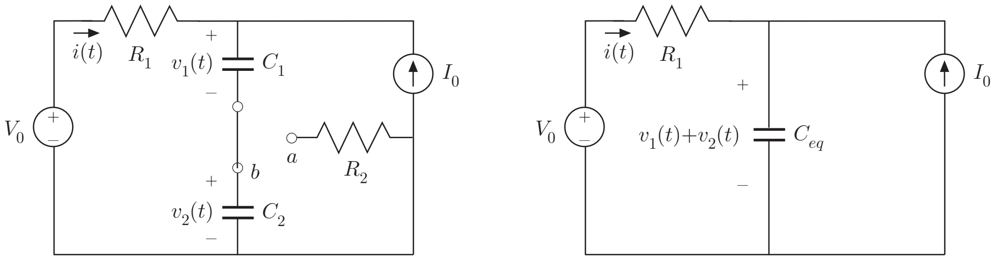
Inoltre, poiché su R_2 non scorre corrente, si ha

$$v_1(0^-) = V_0 + R_1 I_0 = 100\ \text{V}$$

Infine si osserva che

$$v_2(0^-) = V_2 = 100 \text{ V}$$

Quando commuta l'interruttore ($t > 0$) il circuito diventa quello di sinistra nella seguente figura:



che è equivalente a quello di destra con

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 40 \text{ nF}$$

All'istante $t = 0^+$ la corrente è data da

$$i(0^+) = \frac{V_0 - (v_1(0^+) + v_2(0^+))}{R_1}$$

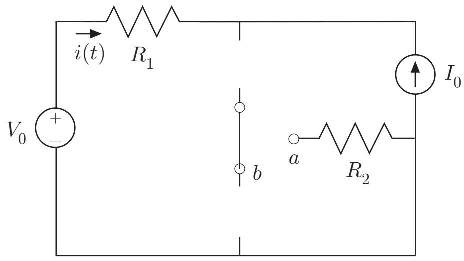
che tenendo conto della continuità della tensione sui condensatori diventa

$$i(0^+) = \frac{V_0 - v_1(0^-) - v_2(0^-)}{R_1} = \frac{V_0 - V_0 - R_1 I_0 - V_2}{R_1} = -I_0 - \frac{V_2}{R_1} = -6 \text{ A}$$

Poiché la resistenza vista dal condensatore equivalente quando si spengono i generatori coincide con R_1, la costante di tempo del circuito risulta

$$\tau = R_1 C_{eq} = 25 \cdot 40 \cdot 10^{-9} = 1\ \mu\text{s}$$

Per $t \to \infty$ il circuito da considerare è il seguente



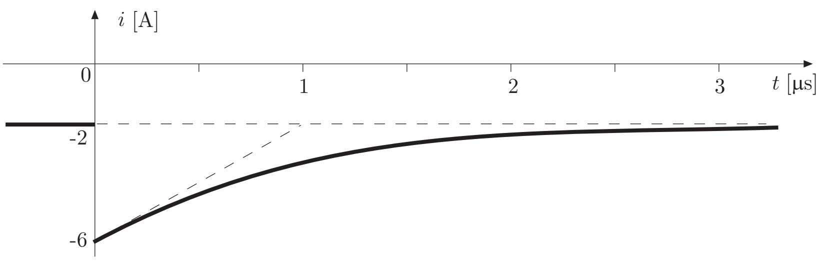
e si vede immediatamente che

$$i(\infty) = -I_0 = -2 \text{ A}$$

L'espressione della corrente risulta quindi

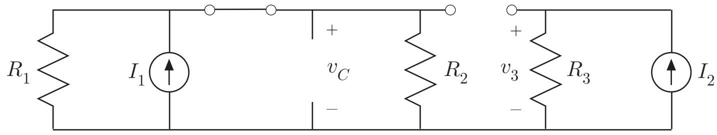
$$v(t) = \begin{cases} -2 \text{ A} & t < 0 \\ -2 - 4\,\mathrm{e}^{-\,t_{[\mu s]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

Il grafici dell'andamento della corrente è mostrato nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.14 (testo a pag. 10)

Prima dell'istante $t = 0$ il circuito opera in regime stazionario e il circuito da considerare è il seguente:



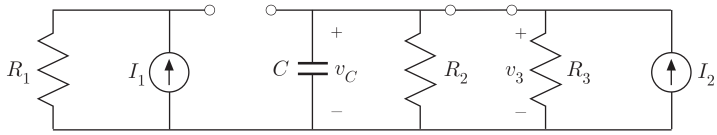
Per ispezione si vede che

$$v_3(0^-) = R_3 I_2 = 300 \text{ V}$$

Inoltre

$$v_C(0^-) = (R_1||R_2)I_1 = \frac{100 \cdot 200}{100 + 200} \cdot 1.5 = 100 \text{ V}$$

Quando gli interruttori commutano ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



All'istante $t = 0^+$ si ha

$$v_3(0^+) = v_C(0^+) = v_C(0^-) = 100 \text{ V}$$

La resistenza vista dal condensatore quando si spegne ii generatore I_2 coincide con $R_{eq} = R_2||R_3$, la costante di tempo del circuito risulta

$$\tau = (R_2||R_3)C = \frac{200 \cdot 100}{200 + 100} \cdot 15 \cdot 10^{-12} = 1 \text{ ns}$$

Per $t \to \infty$ il condensatore torna a comportarsi come un circuito aperto e si ha

$$v_3(\infty) = (R_2||R_3)I_2 = \frac{200 \cdot 100}{200 + 100} \cdot 3 = 200 \text{ V}$$

Poiché la potenza istantanea è data da $p_3(t) = v_3^2(t)/R_3$, l'espressione richiesta è:

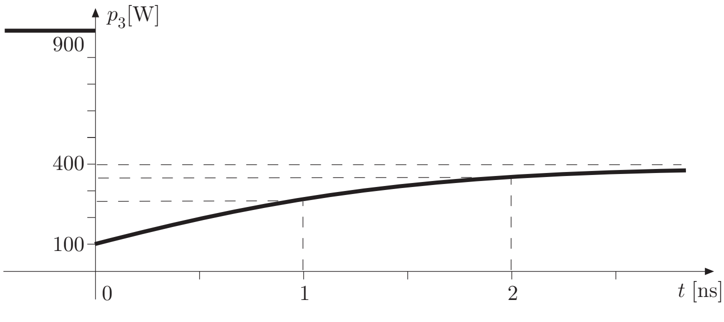
$$p_3(t) = \begin{cases} \dfrac{300^2}{100} = 900 \text{ W} & t < 0 \\ \dfrac{\left[200 + (100 - 200)\, \mathrm{e}^{-\,t_{[\mathrm{ns}]}}\right]^2}{100} = 100\left[2 - \mathrm{e}^{-\,t_{[\mathrm{ns}]}}\right]^2 \text{ W} & t > 0 \end{cases}$$

Poiché si ha:

$$p_3(\tau = 1 \text{ ns}) = 100\left[2 - \mathrm{e}^{-1}\right]^2 \approx 266 \text{ W}$$

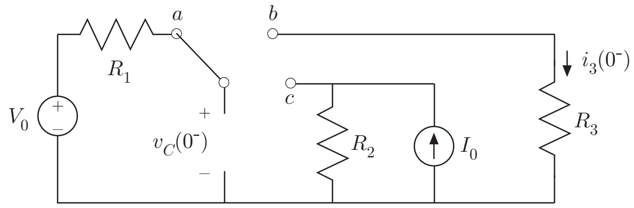
$$p_3(2\tau = 2 \text{ ns}) = 100\left[2 - \mathrm{e}^{-2}\right]^2 \approx 350 \text{ W}$$

il grafico dell'andamento della potenza risulta quello mostrato nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.15 (testo a pag. 10)

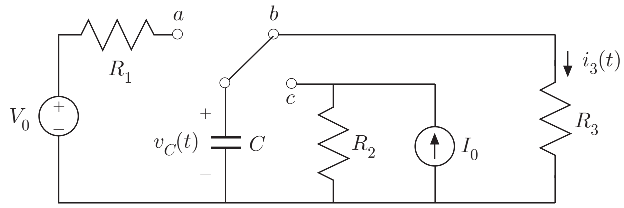
Prima dell'istante $t = 0$ il circuito opera in regime stazionario e il circuito da considerare è il seguente:



Per ispezione si vede che

$$v_C(0^-) = V_0 = 10 \text{ V} \qquad\qquad i_3(0^-) = 0$$

Quando l'interruttore commuta passando da a a b ($0 < t < T$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



All'istante $t = 0^+$ si ha

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 10 \text{ V} \qquad\qquad i_3(0^+) = v_C(0^+)/R_3 = 50 \text{ mA}$$

Il condensatore si scarica con la costante di tempo

$$\tau_1 = R_3 C = 200 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = 1 \ \mu\text{s}$$

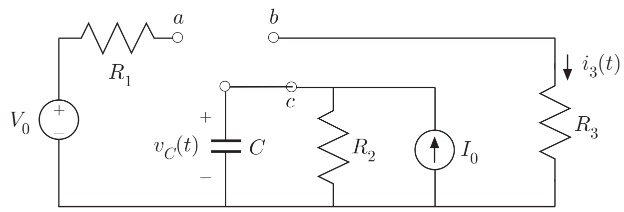
Se la situazione non cambiasse, sia la tensione v_C che la corrente i_3 tenderebbero a 0 per $t \to \infty$. Pertanto, nel periodo $0 < t < T$ il loro andamento è:

$$v_C(t) = v_C(0^+)\,\mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}} \qquad\qquad i_3(t) = i_3(0^+)\,\mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}} \qquad\qquad 0 < t < T$$

Appena prima della successiva commutazione si ha:

$$v_C(T^-) = 10\,\mathrm{e}^{-0.5} \approx 6 \text{ V} \qquad\qquad i_3(T^-) = 50\,\mathrm{e}^{-0.5} \approx 30 \text{ mA}$$

All'istante $t = T$ l'interruttore commuta nella posizione c e il circuito diventa:



È evidente che la corrente i_3 si annulla istantaneamente e rimane tale per ogni istante di tempo successivo. La tensione sul condensatore si mantiene continua e quindi si ha:

$$v_C(T^+) = v_C(T^-) = 6 \text{ V}$$

Per $t \to \infty$ il condensatore torna a comportarsi come un circuito aperto e la tensione ai suoi capi diventa:

$$v_C(\infty) = R_2 I_0 = 20 \text{ V}$$

La costante di tempo per questo transitorio è:

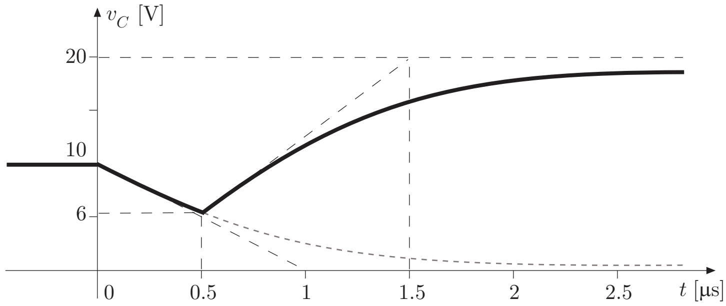
$$\tau_2 = R_2 C = 100 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = 0.5 \ \mu\text{s}$$

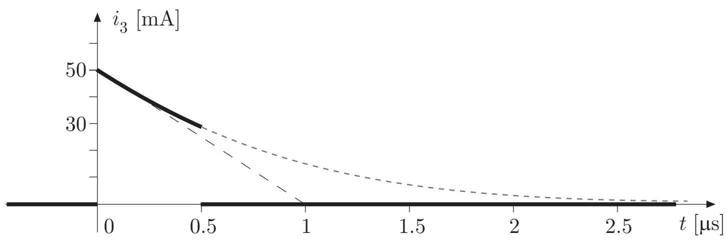
Riassumendo, le espressioni della tensione v_C e della corrente i_3 risultano

$$v_C(t) = \begin{cases} 10 \text{ V} & t < 0 \\ 10\,\mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}} \text{ V} & 0 < t < T \\ v_C(\infty) + [v_C(T^+) - v_C(\infty)]\,\mathrm{e}^{-(t-T)/\tau_2} = 20 - 14\,\mathrm{e}^{-2(t_{[\mu s]} - 0.5)} \text{ V} & t > T \end{cases}$$

$$i_3(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 50\,\mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}}\ \mathrm{mA} & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

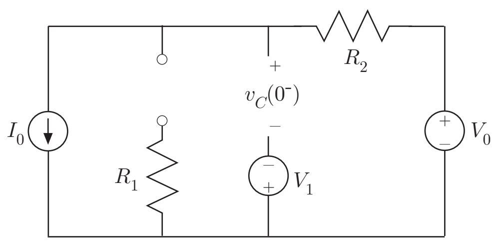
e i loro andamenti sono rappresentati nei seguenti grafici:





Soluzione dell'esercizio 2.16 (testo a pag. 11)

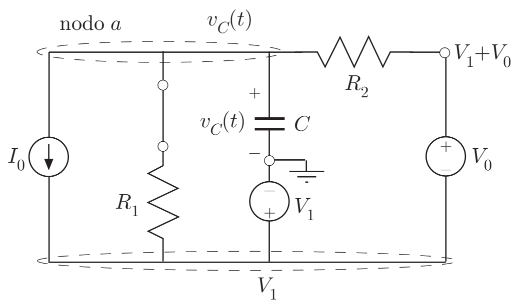
Prima dell'istante $t = 0$ il circuito opera in regime stazionario e il circuito da considerare è il seguente:



Applicando la KVL alla maglia che include $v_C(0^-)$ si ottiene:

$$v_C(0^-) = V_1 - R_2 I_0 + V_0 = 50 - 100 \cdot 2 + 100 = -50\ \mathrm{V}$$

Quando l'interruttore commuta il circuito diventa quello nella seguente figura:



All'istante $t = 0^+$ si ha

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = -50\ \mathrm{V}$$

Immaginando di spegnere i generatori indipendenti (sostituendo un corto circuito ai generatori di tensione ed un circuito aperto al posto del generatore di corrente), si vede che la resistenza equivalente ai capi del condensatore è data da

$$R_{eq} = R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{50 \cdot 100}{50 + 100} = 33.3\ \Omega$$

e la costante di tempo risulta

$$\tau = R_{eq}C = 33.3 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 0.333\ \mu\text{s}$$

Per calcolare $v_C(\infty)$ si può applicare la KCL al nodo a nella precedente figura, considerando il condensatore come un circuito aperto. Si ha:

$$I_0 + \frac{v_C(\infty)}{R_1} + \frac{v_C(\infty) - (V_1 + V_0)}{R_2} = 0$$

da cui

$$v_C(\infty) = \frac{R_1(V_1 + V_0) - R_1R_2I_0}{R_1 + R_2} = \frac{50 \cdot (100 + 50) - 50 \cdot 100 \cdot 2}{50 + 100} = -16.7\ \text{V}$$

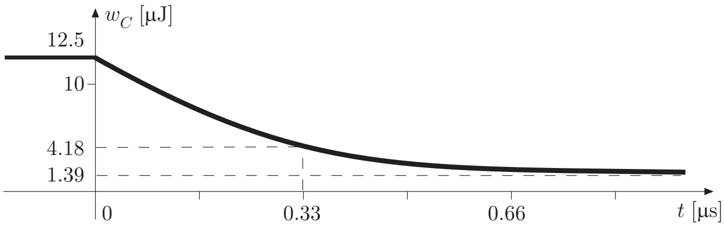
Pertanto, l'espressione della tensione v_C risulta

$$v_C(t) = \begin{cases} -50\ \text{V} & t < 0 \\ -16.7 + (-50 + 16.7)\,\mathrm{e}^{-3t_{[\mu s]}}\ \text{V} & t > 0 \end{cases}$$

Di conseguenza, l'energia immagazzinata nel condensatore è

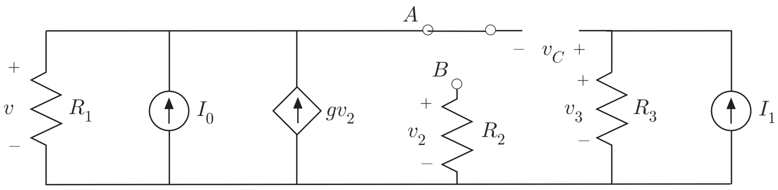
$$w_C(t) = \frac{1}{2}\,Cv_C^2(t) = \begin{cases} 12.5\ \mu\text{J} & t < 0 \\ 1.39 + 5.56\,\mathrm{e}^{-3t_{[\mu s]}} + 5.56\,\mathrm{e}^{-6t_{[\mu s]}}\ \mu\text{J} & t > 0 \end{cases}$$

e il suo andamento è rappresentato nel seguente grafico:



Soluzione dell'esercizio 2.17 (testo a pag. 11)

Prima dell'istante $t = 0$ il circuito opera in regime stazionario e il circuito da considerare è il seguente:



È evidente che su R_2 non può scorrere corrente, e quindi si ha

$$v_2(0^-) = 0$$

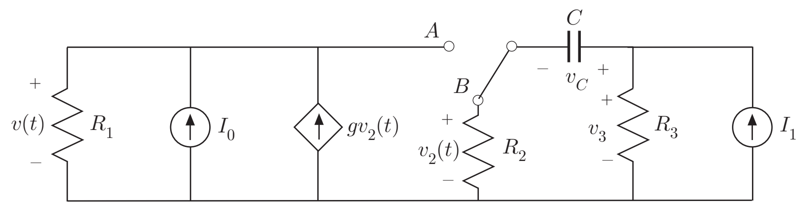
Si ottiene quindi

$$v(0^-) = R_1\left(I_0 + gv_2(0^-)\right) = R_1I_0 = 100\ \text{mV}$$

È anche utile osservare che

$$v_C(0^-) = v_3(0^-) - v(0^-) = R_3I_1 - R_1I_0 = 400\ \text{mV}$$

Quando l'interruttore commuta ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



All'istante $t = 0^+$ la somma delle correnti che scorrono in R_2 e R_3 deve coincidere con I_1. Poiché $v_3(0^+) = v_2(0^+) + v_C(0^+)$, ricordando che su un condensatore $v_C(0^+) = v_C(0^-)$, si ha:

$$I_1 = \frac{v_2(0^+)}{R_2} + \frac{v_3(0^+)}{R_3} = v_2(0^+)\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + \frac{v_C(0^-)}{R_3}$$

da cui

$$v_2(0^+) = \left(I_1 - \frac{v_C(0^-)}{R_3}\right)\frac{R_2R_3}{R_2+R_3} = \left(I_1 - \frac{R_3I_1 - R_1I_0}{R_3}\right)\frac{R_2R_3}{R_2+R_3} = \frac{R_1R_2I_0}{R_2+R_3} = 60 \text{ mV}$$

Si ottiene quindi

$$v(0^+) = R_1\left(I_0 + gv_2(0^+)\right) = R_1I_0 + R_1gv_2(0^+) = 100 + 50 \cdot 0.05 \cdot 60 \text{ mV} = 250 \text{ mV}$$

La resistenza vista dal condensatore quando si spengono i generatore I_0 e I_1 è costituita dalla serie delle resistenze R_2 ed R_3, e la costante di tempo del circuito risulta

$$\tau = (R_2 + R_3)C = (150 + 100) \cdot 4 \cdot 10^{-9} = 1\ \mu\text{s}$$

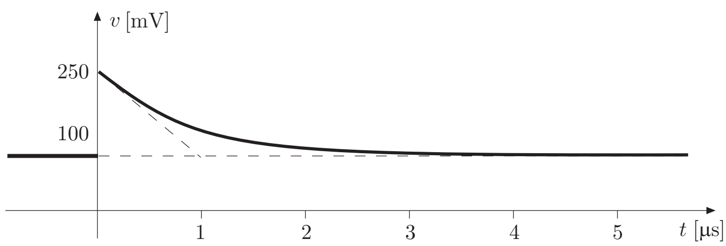
Per $t \to \infty$ il condensatore torna a comportarsi come un circuito aperto. Su R_2 non può passare corrente e si ha $v_2(\infty) = 0$, da cui

$$v(\infty) = R_1\left(I_0 + gv_2(\infty)\right) = 100 \text{ mV}$$

L'espressione della tensione v al variare del tempo è:

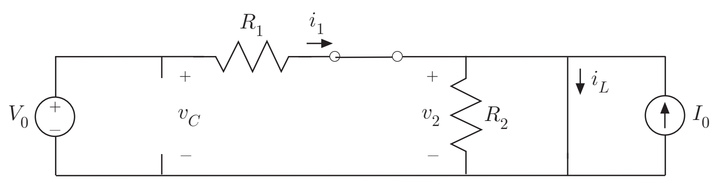
$$v(t) = \begin{cases} 100 \text{ mV} & t < 0 \\ 100 + 150\,\mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}} \text{ mV} & t > 0 \end{cases}$$

e la sua rappresentazione grafica è mostrata nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.18 (testo a pag. 11)

Prima dell'istante $t = 0$ il circuito opera in regime stazionario e il circuito da considerare è il seguente:



È evidente che

$$v_C(0^-) = V_0 = 10 \text{ V}$$

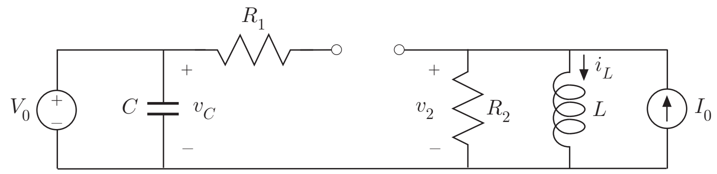
Inoltre R_2 è cortocircuitata e quindi si ha

$$v_2(0^-) = 0$$

Per il calcolo dei valori dopo l'apertura dell'interruttore è utile osservare che

$$i_L(0^-) = I_0 + i_1 = I_0 + \frac{V_0 - v_2(0^-)}{R_1} = I_0 + \frac{V_0}{R_1} = 0.04 + \frac{10}{50} = 0.24 \text{ A}$$

Quando l'interruttore si apre ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



I due circuiti di sinistra e di destra agiscono separatamente. Si vede facilmente che i valori all'istante $t = 0^+$ risultano

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = V_0 = 10 \text{ V}$$

$$v_2(0^+) = R_2(I_0 - i_L(0^+)) = R_2(I_0 - i_L(0^-)) = R_2\left(I_0 - I_0 - \frac{V_0}{R_1}\right) = -\frac{R_2}{R_1}\, V_0 = -20 \text{ V}$$

Osservando il circuito di sinistra si vede che la tensione sul condensatore non può mai cambiare, essendo C in parallelo ad un generatore indipendente di tensione. Si ha pertanto

$$v_C(t) = V_0 = 10 \text{ V} \qquad \forall t$$

Poiché nel circuito di destra la resistenza vista dall'induttore è R_2, la costante di tempo risulta

$$\tau_L = \frac{L}{R_2} = \frac{0.1 \cdot 10^{-6}}{100} = 1 \text{ ns}$$

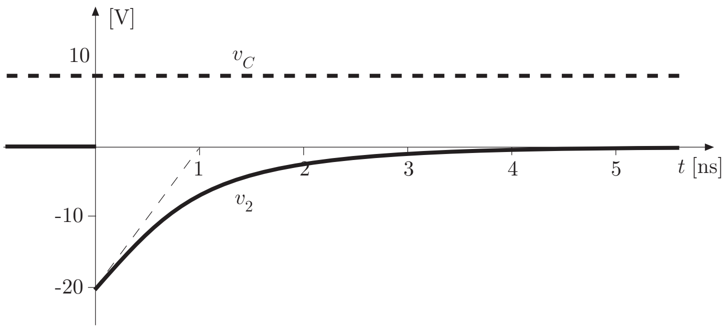
Per $t \to \infty$ l'induttore torna a comportarsi come un cortocircuito e si ha

$$v_2(\infty) = 0$$

L'espressione della tensione v_2 al variare del tempo è:

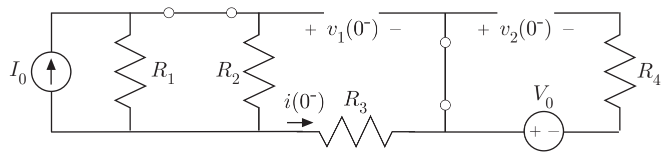
$$v_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -20\, \mathrm{e}^{-\,t_{[\text{ns}]}} \text{ V} & t > 0 \end{cases}$$

La rappresentazione grafica delle tensioni v_C e v_2 è mostrata nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.19 (testo a pag. 12)

Prima dell'istante $t = 0$ i generatori operano in regime stazionario e il circuito da considerare è il seguente:



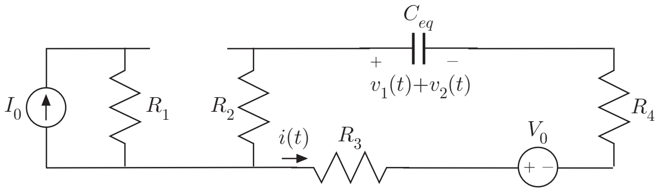
È evidente che

$$i(0^-) = 0$$

È inoltre utile osservare che:

$$v_1(0^-) = (R_1||R_2)\, I_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\, I_0 = 50 \cdot 4 = 200 \text{ V} \qquad\qquad v_2(0^-) = V_0 = 100 \text{ V}$$

Quando gli interruttori si aprono ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



dove i due condensatori risultano in serie e sono rimpiazzati da un condensatore equivalente di valore

$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4 \cdot 6}{4 + 6}\ \text{nF} = 2.4\ \text{nF}$$

Scrivendo la KVL alla maglia, all'istante $t = 0^+$ si ha

$$v_1(0^+) + v_2(0^+) - R_4 i(0^+) - V_0 - R_3 i(0^+) - R_2 i(0^+) = 0$$

Poiché $v_1(0^+) = v_1(0^-)$ e $v_2(0^+) = v_2(0^-)$, ricavando $i(0^+)$ si ottiene

$$i(0^+) = \frac{v_1(0^-) + v_2(0^-) - V_0}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{200 + 100 - 100}{100 + 50 + 50} = 1\ \text{A}$$

Poiché la resistenza vista dal condensatore equivalente è $R_2 + R_3 + R_4$, la costante di tempo risulta

$$\tau_L = (R_2 + R_3 + R_4) C_{eq} = 200 \cdot 2.4^{-9} = 0.48\ \mu\text{s}$$

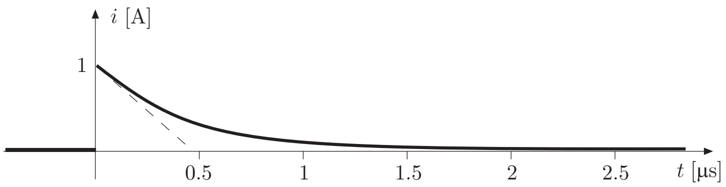
Per $t \to \infty$ il condensatore torna a comportarsi come un circuito aperto e si ha

$$i(\infty) = 0$$

L'espressione della corrente i al variare del tempo è:

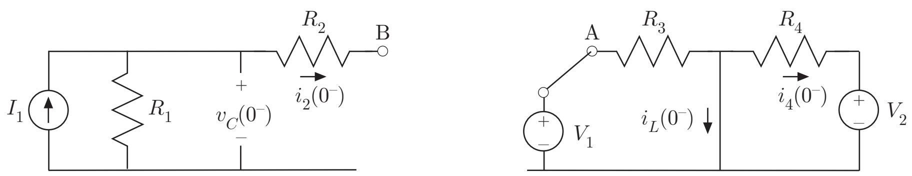
$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1\, \text{e}^{-\,2.08 t_{[\mu s]}}\ \text{A} & t > 0 \end{cases}$$

La rappresentazione grafica della corrente è mostrata nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.20 (testo a pag. 12)

Prima dell'istante $t = 0$ i generatori operano in regime stazionario e il circuito da considerare è il seguente:



Si nota che le due porzioni del circuito operano in maniera indipendente.
Poiché il morsetto B è aperto, risulta evidente che

$$i_2(0^-) = 0$$

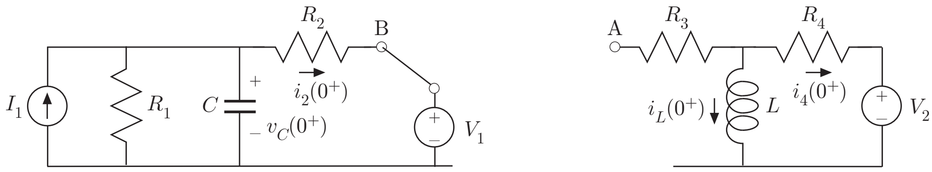
Inoltre, la resistenza R_4 vede ai suoi morsetti la tensione V_2, ma la corrente i_4 fluisce dal morsetto negativo verso quello positivo. Si ha quindi

$$i_4(0^-) = -\frac{V_2}{R_4} = -2 \text{ A}$$

È inoltre utile osservare che:

$$v_C(0^-) = R_1 I_1 = 100 \text{ V} \qquad\qquad i_L(0^-) = \frac{V_1}{R_3} + \frac{V_2}{R_4} = 4 \text{ A}$$

Quando l'interruttore commuta ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



Si ha che

$$i_2(0^+) = \frac{v_C(0^+) - V_1}{R_2} = \frac{v_C(0^-) - V_1}{R_2} = \frac{100 - 50}{100} = 0.5 \text{ A}$$

e

$$i_4(0^+) = -i_L(0^+) = -i_L(0^-) = -4 \text{ A}$$

Immaginando di spegnere i generatori indipendenti, la resistenza equivalente vista dal condensatore è il parallelo fra R_1 e R_2, mentre quella vista dall'induttore è R_4. Le costanti di tempo risultano quindi

$$\tau_C = (R_1 || R_2)C = 50 \cdot 20 \cdot 10^{-9} = 1 \ \mu\text{s}$$

e

$$\tau_L = L/R_4 = 100 \cdot 10^{-6}/50 = 2 \ \mu\text{s}$$

Per $t \to \infty$ il condensatore torna a comportarsi come un circuito aperto e l'induttore come un cortocircuito. Applicando la sovrapposizione degli effetti al circuito di sinistra nella precedente figura si ottiene

$$i_2(\infty) = -\frac{V_1}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 I_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 I_1 - V_1}{R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 1 - 50}{100 + 100} = 0.25 \text{ A}$$

Considerando il circuito di destra nella precedente figura, per ispezione si ottiene:

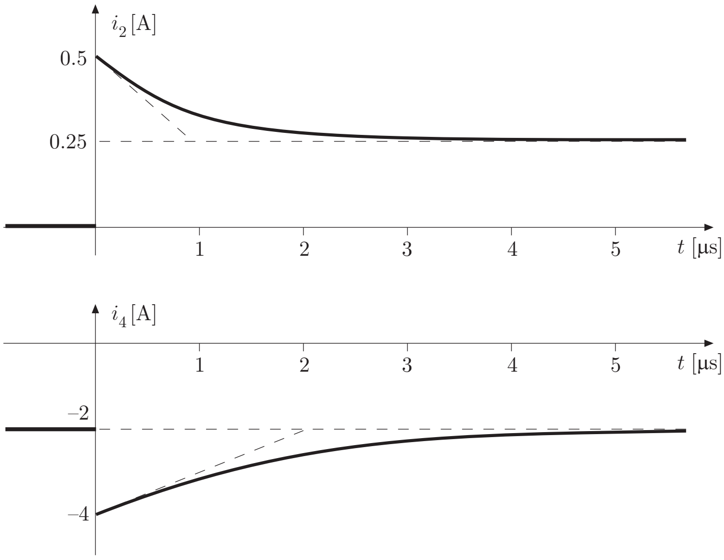
$$i_4(\infty) = -\frac{V_2}{R_4} = -2 \text{ A}$$

Le espressioni delle due correnti risultano quindi

$$i_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.25 + 0.25\,\mathrm{e}^{-t_{[\mu s]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

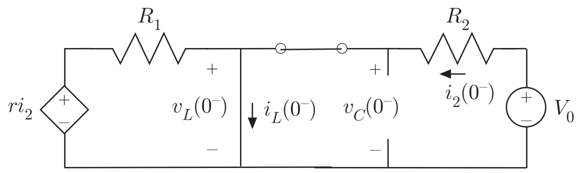
$$i_4(t) = \begin{cases} -2 \text{ A} & t < 0 \\ -2 - 2\,\mathrm{e}^{-0.5 t_{[\mu s]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

e la loro rappresentazione grafica è mostrata nelle seguente figure:



Soluzione dell'esercizio 2.21 (testo a pag. 12)

Prima dell'istante $t = 0$ il generatore opera in regime stazionario e il circuito da considerare è il seguente:



Si vede immediatamente che:

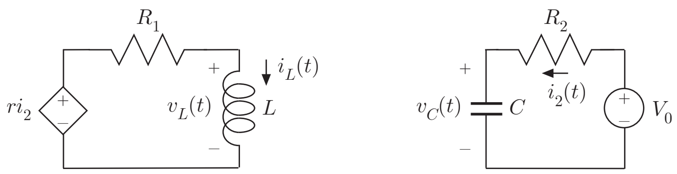
$$v_L(0^-) = 0 \qquad\qquad i_2(0^-) = \frac{V_0}{R_2} = \frac{9}{300} = 30 \text{ mA}$$

E' inoltre utile osservare che

$$v_C(0^-) = v_L(0^-) = 0$$

$$i_L(0^-) = i_2(0^-) + \frac{ri_2(0^-)}{R_1} = \left(1 + \frac{r}{R_1}\right) i_2(0^-) = \left(1 + \frac{300}{100}\right) i_2(0^-) = 120 \text{ mA}$$

Quando l'interruttore commuta ($t > 0$) il circuito si separa nei due sottocircuiti mostrati nella seguente figura:



Si ha che

$$i_2(0^+) = \frac{V_0 - v_C(0^+)}{R_2} = \frac{V_0 - v_C(0^-)}{R_2} = \frac{V_0 - 0)}{R_2} = i_2(0^-) = 30 \text{ mA}$$

$$v_L(0^+) = ri_2(0^+) - R_1 i_L(0^+) = ri_2(0^+) - R_1 i_L(0^-) = 300 \cdot 0.03 - 100 \cdot 0.12 = -3 \text{ V}$$

Immaginando di spegnere il generatore indipendente di tensione, la resistenza equivalente vista dal condensatore è R_2, da cui

$$\tau_C = R_2 C = 300 \cdot 0.1 \cdot 10^{-9} = 30 \text{ ns}$$

Poiché spegnendo V_0 si annulla i_2, il generatore dipendente avrà tensione $ri_2 = 0$ e quindi si comporterà come un cortocircuito. Pertanto la resistenza vista dall'induttore coincide con R_1. Si ha quindi

$$\tau_L = L/R_1 = 5 \cdot 10^{-6}/100 = 50 \text{ ns}$$

Per $t \to \infty$ il condensatore torna a comportarsi come un circuito aperto e l'induttore come un cortocircuito. Per ispezione si vede che

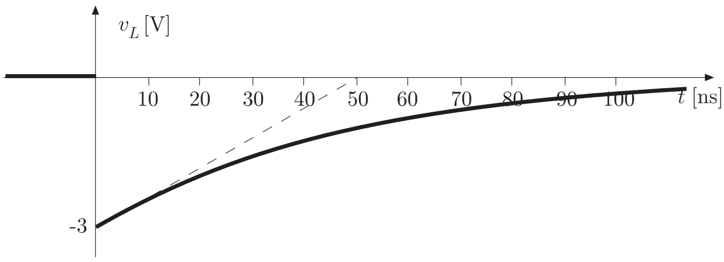
$$v_L(\infty) = 0 \qquad\qquad i_2(\infty) = 0$$

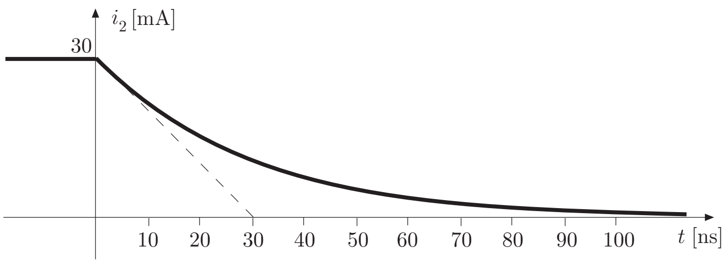
Le espressioni di i_2 e v_L risultano quindi

$$v_L(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -3\,\mathrm{e}^{-t_{[\mathrm{ns}]}/50}\ \mathrm{V} & t > 0 \end{cases}$$

$$i_2(t) = \begin{cases} 30\ \mathrm{mA} & t < 0 \\ 30\,\mathrm{e}^{-t_{[\mathrm{ns}]}/30}\ \mathrm{mA} & t > 0 \end{cases}$$

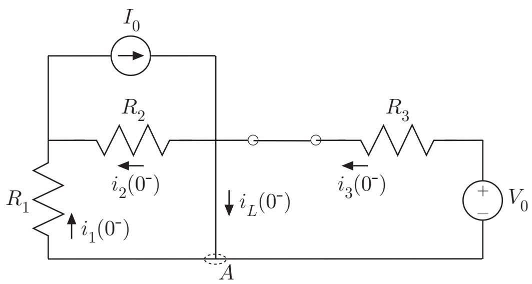
e la loro rappresentazione grafica è mostrata nelle seguente figure:





Soluzione dell'esercizio 2.22 (testo a pag. 12)

Prima dell'istante $t = 0$ i generatori operano in regime stazionario e il circuito da considerare è il seguente:



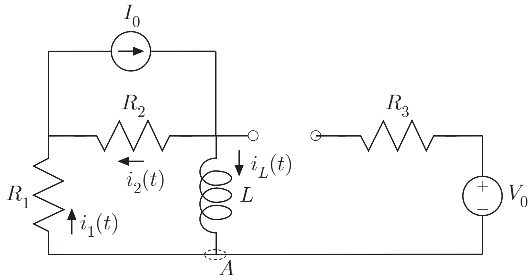
Risulta evidente che R_1 e R_2 sono in parallelo e si ripartiscono la corrente del generatore I_0. Tenendo conto dei versi delle correnti si ha

$$i_2(0^-) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, I_0 = \frac{100}{100 + 400}\, 10 \cdot 10^{-3} = 2\ \mathrm{mA}$$

Poiché la corrente sull'induttore non cambia quando scatta l'interruttore, è utile calcolare $i_L(0^-)$. Applicando la KCL al nodo A si ottiene

$$i_L(0^-) = i_1(0^-) + i_3(0^-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, I_0 + \frac{V_0}{R_3} = \frac{400}{100 + 400}\, 10 \cdot 10^{-3} + \frac{1.5}{500} = 11\ \mathrm{mA}$$

Quando l'interruttore si apre ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



Osservando che $i_1(t) = i_L(t)$, all'istante $t = 0^+$ si ha

$$i_2(0^+) = I_0 - i_1(0^+) = I_0 - i_L(0^+) = I_0 - i_L(0^-) = -1 \text{ mA}$$

Immaginando di spegnere il generatore di corrente (sostituito da un circuito aperto), l'induttore vede ai suoi morsetti le resistenze R_1 e R_2 in serie. La costante di tempo risulta quindi

$$\tau_L = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{2.5 \cdot 10^{-6}}{100 + 400} = 5 \text{ ns}$$

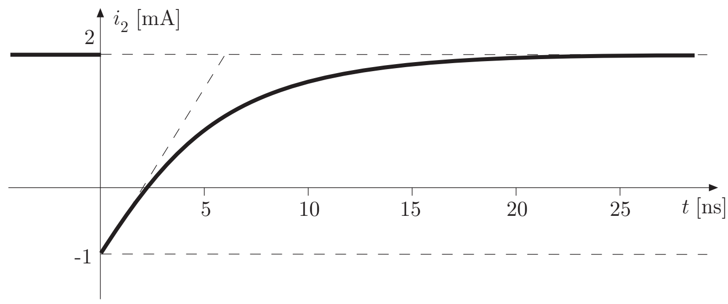
Per $t \to \infty$ l'induttore torna a comportarsi come un corto circuito. Le due resistenze R_1 e R_2 tornano ad essere in parallelo e a ripartirsi la corrente I_0, come nel caso $t = 0^-$. Si ha pertanto

$$i_2(\infty) = i_2(0^-) = 2 \text{ mA}$$

L'espressione della corrente i al variare del tempo è:

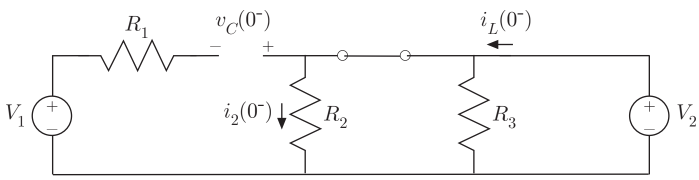
$$i_2(t) = \begin{cases} 2 \text{ mA} & t < 0 \\ 2 - 3\,\mathrm{e}^{-0.2 t_{[\mathrm{ns}]}} \text{ mA} & t > 0 \end{cases}$$

La rappresentazione grafica della corrente è mostrata nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.23 (testo a pag. 13)

Prima dell'istante $t = 0$ i generatori operano in regime stazionario e il circuito da considerare è il seguente:



Risulta evidente che

$$i_2(0^-) = \frac{V_2}{R_2} = \frac{200}{100} = 2 \text{ A}$$

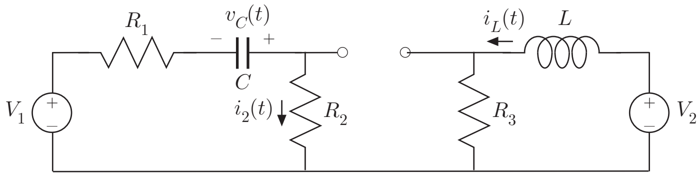
e

$$i_L(0^-) = \frac{V_2}{R_2 || R_3} = \frac{200}{100||100} = \frac{200}{50} = 4 \text{ A}$$

È anche utile osservare che

$$v_C(0^-) = V_2 - V_1 = 200 - 100 = 100 \text{ V}$$

Quando l'interruttore si apre ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



All'istante $t = 0^+$ si ha

$$-V_1 + R_1 i_2(0^+) - v_C(0^+) + R_2 i_2(0^+) = 0$$

da cui, tenendo conto del fatto che $v_C(0^+) = v_C(0^-)$, si ottiene

$$i_2(0^+) = \frac{V_1 + v_C(0^-)}{R_1 + R_2} = \frac{100 + 100}{300 + 100} = 0.5 \text{ A}$$

Inoltre per le proprietà degli induttori, si ha

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 4 \text{ A}$$

Per $t \to \infty$ l'induttore torna a comportarsi come un corto circuito e il condensatore come un corto circuito, e si ha

$$i_2(\infty) = 0$$

$$i_L(\infty) = \frac{V_2}{R_3} = \frac{200}{100} = 2 \text{ A}$$

Immaginando di spegnere i generatori, il condensatore vede ai suoi morsetti le resistenze R_1 e R_2 in serie, mentre l'induttore vede la resistenza R_3. Le costante di tempo per le correnti i_2 e i_L risultano quindi

$$\tau_2 = (R_1 + R_2)C = (300 + 100) \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 4 \ \mu\text{s}$$

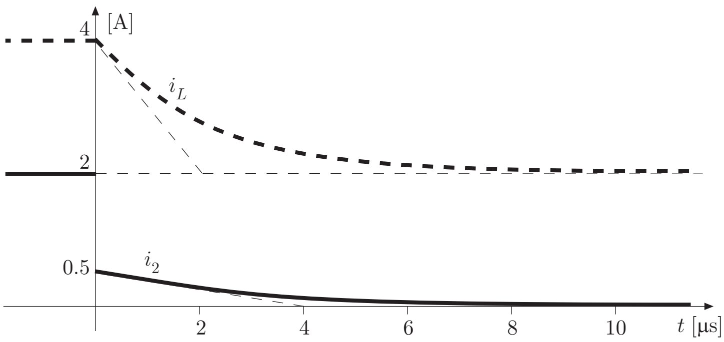
$$\tau_L = \frac{L}{R_3} = \frac{200 \cdot 10^{-6}}{100} = 2 \ \mu\text{s}$$

Le espressioni delle correnti al variare del tempo sono:

$$i_2(t) = \begin{cases} 2 \text{ A} & t < 0 \\ 0.5 \text{ e}^{-0.25 t_{[\mu s]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

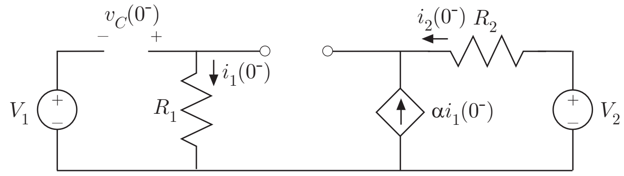
$$i_L(t) = \begin{cases} 4 \text{ A} & t < 0 \\ 2 + 2 \text{ e}^{-0.5 t_{[\mu s]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

La rappresentazione grafica delle correnti è mostrata nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.24 (testo a pag. 13)

Prima dell'istante $t = 0$ i generatori operano in regime stazionario e il condensatore si comporta come un circuito aperto. Pertanto, il circuito da considerare è il seguente:



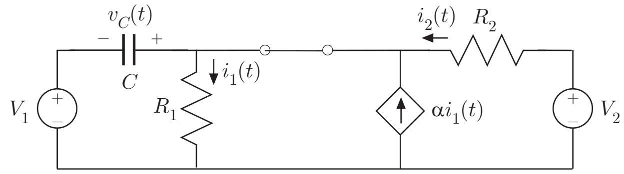
Risulta evidente che $i_1(0^-) = 0$, da cui

$$i_2(0^-) = -\alpha i_1(0^-) = 0$$

È inoltre utile osservare che

$$v_C(0^-) = -V_1 = -5 \text{ V}$$

Quando l'interruttore si chiude ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



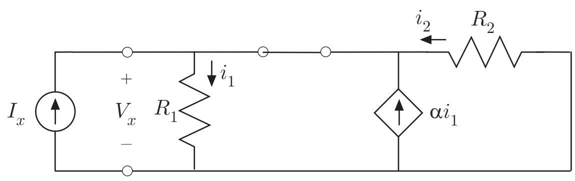
Considerando l'istante $t = 0^+$ e applicando la KVL alla maglia esterna si ottiene

$$-V_1 - v_C(0^+) - R_2 i_2(0^+) + V_2 = 0$$

e ricordando che sul condensatore la tensione non può cambiare istantaneamente ($v_C(0^+) = v_C(0^-)$), si ricava

$$i_2(0^+) = \frac{-V_1 - v_C(0^-) + V_2}{R_2} = \frac{V_2}{R_2} = \frac{10}{50} = 0.2 \text{ A}$$

Immaginando di spegnere i generatori indipendenti di tensione (sostituendoli con due corto circuiti), il condensatore vede ai suoi morsetti una resistenza equivalente (R_{eq}) che si deve calcolare aggiungendo un generatore di prova, a causa della presenza di un generatore dipendente. Il circuito da considerare è il seguente:



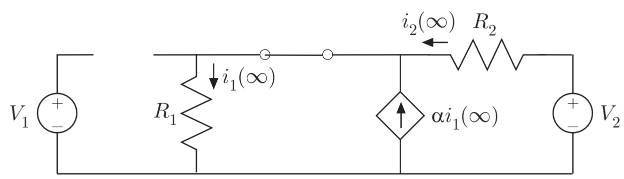
e si ha

$$\begin{aligned} R_{eq} &= \frac{V_x}{I_x} = \frac{V_x}{i_1 - \alpha i_1 - i_2} = \frac{V_x}{(1-\alpha)i_1 - i_2} = \frac{V_x}{(1-\alpha)\frac{V_x}{R_1} + \frac{V_x}{R_2}} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{-\frac{1}{100} + \frac{1}{50}} = 100\ \Omega \end{aligned}$$

La costante di tempo risulta quindi

$$\tau = R_{eq} C = 100 \cdot 2 \cdot 10^{-9} = 0.2\ \mu\text{s}$$

Per $t \to \infty$ il condensatore torna a comportarsi come un circuito aperto e il circuito da considerare è il seguente:



Applicando la KVL alla maglia che comprende R_1, R_2 e V_2 e la KCL al nodo inferiore si ottiene

$$\begin{aligned} -R_1 i_1(\infty) - R_2 i_2(\infty) + V_2 &= 0 \\ -i_1(\infty) + \alpha i_1(\infty) + i_2(\infty) &= 0 \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione si ottiene

$$i_1(\infty) = \frac{i_2(\infty)}{1-\alpha} = -i_2(\infty)$$

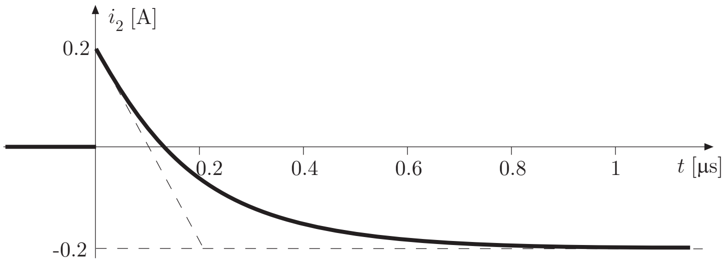
che sostituita nella prima fornisce

$$i_2(\infty) = \frac{V_2}{R_2 - R_1} = \frac{10}{50-100} = \frac{10}{-50} = -0.2 \text{ A}$$

L'espressione della corrente i_2 al variare del tempo è:

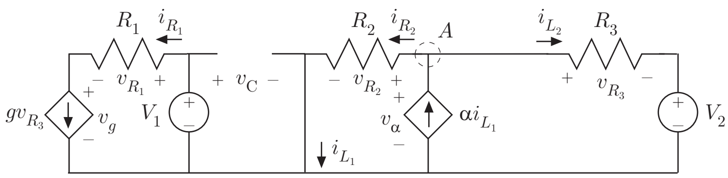
$$i_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -0.2 + 0.4\,\mathrm{e}^{-5\,t_{[\mu s]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

La rappresentazione grafica della corrente è mostrata nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.25 (testo a pag. 13)

In regime stazionario il condensatore si comporta come un circuito aperto e gli induttori come corto circuiti. Pertanto il circuito da analizzare risulta il seguente:



Applicando la KVL al nodo A si ottiene

$$i_{L_1} - \alpha i_{L_1} + i_{L_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad i_{L_2} = (\alpha - 1) i_{L_1} = 2 i_{L_1}$$

Inoltre, applicando la KVL alla maglia più esterna del sottocircuito di destra si ha

$$-R_2 i_{R_2} + R_3 i_{L_2} + V_2 = 0$$

Osservando che $i_{R_2} = i_{L_1}$ e tenendo conto della relazione tra i_{L_2} e i_{L_1}, si ricava

$$i_{L_1} = \frac{V_2}{R_2 - 2R_3} = \frac{30}{400 - 2\cdot 50} = 0.1 \text{ A}$$

Si possono quindi ottenere tutte le quantità necessarie per calcolare le potenze e le energie:

$$i_{L_2} = 2 i_{L_1} = 0.2 \text{ A} \qquad v_{R_3} = R_3 i_{L_2} = 10 \text{ V} \qquad v_\alpha = v_{R_2} = R_2 i_{L_1} = 40 \text{ V}$$

$$i_{R_1} = g v_{R_3} = 0.02 \text{ A} \qquad v_g = V_1 - v_{R_1} = V_1 - R_1 i_{R_1} = 2 \text{ V} \qquad v_C = V_1 = 4 \text{ V}$$

Tenendo conto della convenzione degli utilizzatori, le potenze risultano

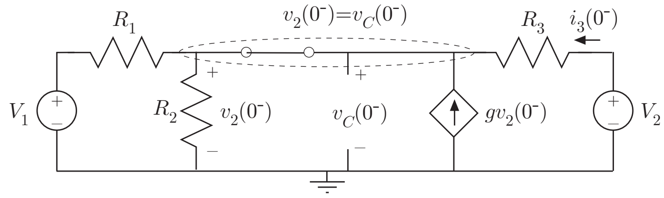
$$\begin{array}{ll} P_{gv_{R_3}} = v_g i_{R_1} = 2 \cdot 0.02 = 0.04 \text{ W} & \text{(assorbita)} \\ P_{R_1} = R_1 i_{R_1}^2 = 100 \cdot 0.02^2 = 0.04 \text{ W} & \text{(assorbita)} \\ P_{V_1} = -V_1 i_{R_1} = -4 \cdot 0.02 = -0.08 \text{ W} & \text{(erogata)} \\ P_{R_2} = R_2 i_{L_1}^2 = 400 \cdot 0.1^2 = 4 \text{ W} & \text{(assorbita)} \\ P_{\alpha i_{L_1}} = -v_\alpha \alpha i_{L_1} = -40 \cdot 3 \cdot 0.1 = -12 \text{ W} & \text{(erogata)} \\ P_{R_3} = R_3 i_{L_2}^2 = 50 \cdot 0.2^2 = 2 \text{ W} & \text{(assorbita)} \\ P_{V_2} = V_2 \cdot i_{L_2} = 30 \cdot 0.2 = 6 \text{ W} & \text{(assorbita)} \end{array}$$

Le energie immagazzinate nel condensatore e negli induttori sono

$$\begin{aligned} W_C &= \frac{1}{2} C v_C^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-9} \cdot 4^2 = 8 \text{ nJ} \\ W_{L_1} &= \frac{1}{2} L_1 i_{L_1}^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 0.1^2 = 125 \text{ nJ} \\ W_{L_2} &= \frac{1}{2} L_1 i_{L_2}^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 0.2^2 = 2\ \mu\text{J} \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 2.26 (testo a pag. 13)

Prima dell'istante $t = 0$ il circuito è in regime stazionario e il condensatore si comporta come un circuito aperto. Pertanto, il circuito da considerare è il seguente:



Se si applica l'analisi nodale, l'unica incognita è la tensione sul nodo superiore indicato in figura e la KCL fornisce la seguente equazione

$$\frac{v_C(0^-) - V_1}{R_1} + \frac{v_C(0^-)}{R_2} + \frac{v_C(0^-) - V_2}{R_3} - g v_C(0^-) = 0$$

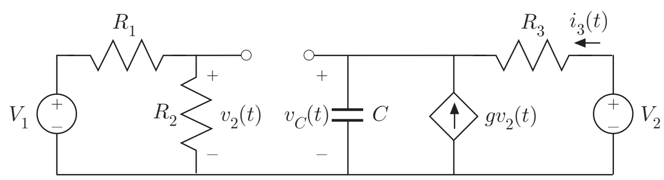
da cui

$$v_C(0^-) = \frac{\dfrac{V_1}{R_1} + \dfrac{V_2}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_3} - g} = \frac{\dfrac{100}{50} + \dfrac{400}{50}}{\dfrac{1}{50} + \dfrac{1}{250} + \dfrac{1}{50} - 4 \cdot 10^{-3}} = 250 \text{ V}$$

e quindi

$$i_3(0^-) = \frac{V_2 - v_C(0^-)}{R_3} = \frac{400 - 250}{50} = 3 \text{ A}$$

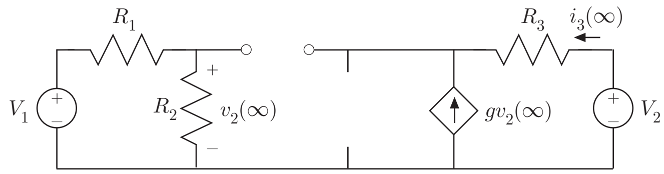
Quando l'interruttore si chiude ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



Ricordando che sul condensatore la tensione non può cambiare istantaneamente ($v_C(0^+) = v_C(0^-)$), si ricava

$$i_3(0^+) = \frac{V_2 - v_C(0^-)}{R_3} = \frac{V_2 - v_C(0^+)}{R_3} = i_3(0^-) = 3 \text{ A}$$

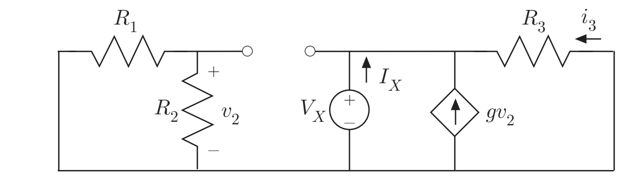
Per $t \to \infty$ il condensatore torna a comportarsi come un circuito aperto e il circuito da considerare è il seguente:



Per ispezione si vede che

$$i_3(\infty) = -gv_2(\infty) = -g\frac{R_2}{R_1 + R_2}V_1 = -4 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{250}{50 + 250} \cdot 100 = -0.33 \text{ A}$$

Per il calcolo della costante di tempo si devono spegnere i generatori indipendenti di tensione (sostituiti da un corto circuito). Inoltre, poiché è presente un generatore dipendente, bisogna aggiungere un generatore di prova ai morsetti del condensatore, come mostrato nella seguente figura:



Osservando che $v_2 = 0$, si ottiene e si ha

$$R_{eq} = \frac{V_X}{I_X} = \frac{V_X}{-gv_2 - i_3} = \frac{V_X}{-i_3} = \frac{V_X}{V_X/R_3} = R_3 = 50 \ \Omega$$

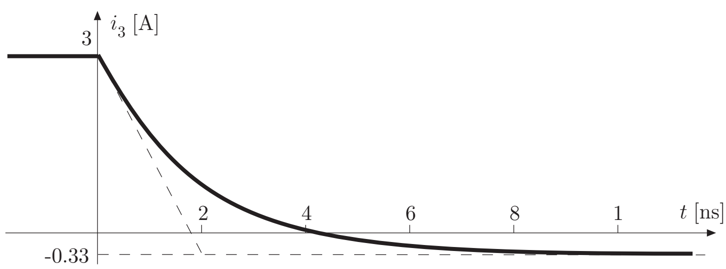
Si noti che allo stesso risultato si poteva giungere immediatamente osservando che $v_2 = 0$ implica che il generatore comandato è spento (quindi a circuito aperto), e che l'unica resistenza presente ai morsetti del condensatore è proprio R_3.
La costante di tempo risulta quindi

$$\tau = R_{eq}C = 50 \cdot 40 \cdot 10^{-12} = 2 \text{ ns}$$

L'espressione della corrente i_3 al variare del tempo è:

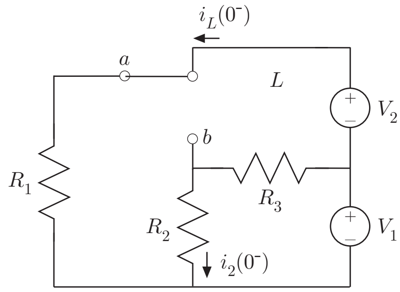
$$i_3(t) = \begin{cases} 3 \text{ A} & t < 0 \\ \\ -0.33 + 3.33 \text{ e}^{-0.5\, t_{[\text{ns}]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

La rappresentazione grafica della corrente è mostrata nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.27 (testo a pag. 14)

Prima dell'istante $t = 0$ i generatori operano in regime stazionario e l'induttore si comporta come un corto circuito. Pertanto, il circuito da considerare è il seguente:



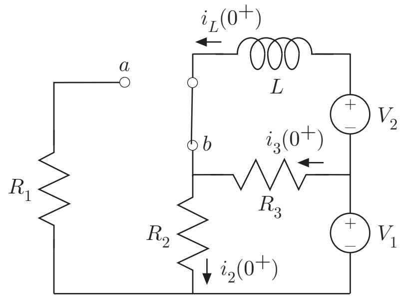
Si verifica facilmente che

$$i_2(0^-) = \frac{V_1}{R_2 + R_3} = \frac{10}{30 + 10} = 0.25 \text{ A}$$

È inoltre utile osservare che

$$i_L(0^-) = \frac{V_1 + V_2}{R_1} = \frac{10 + 20}{100} = 0.3 \text{ A}$$

Quando l'interruttore si chiude ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



Considerando l'istante $t = 0^+$ e applicando la KVL alla maglia che include R_2, R_3 e V_1 si ottiene

$$R_2 i_2(0^+) + R_3 i_3(0^+) = V_1 \qquad \Rightarrow \qquad i_3(0^+) = \frac{V_1}{R_3} - \frac{R_2}{R_3} i_2(0^+) = \frac{V_1}{R_3} - 3 i_2(0^+)$$

Applicando quindi la KCL al nodo b e ricordando che sull'induttore la corrente non può cambiare istantaneamente ($i_L(0^+) = i_L(0^-)$), si ricava

$$i_2(0^+) = i_3(0^+) + i_L(0^+) = \frac{V_1}{R_3} - 3 i_2(0^+) + i_L(0^-)$$

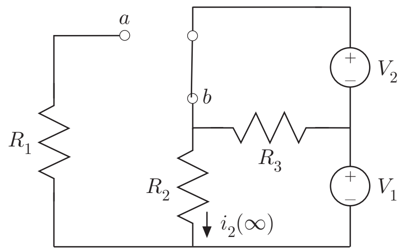
da cui

$$i_2(0^+) = \frac{1}{4}\left(\frac{V_1}{R_3} + i_L(0^-)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{10}{10} + 0.3\right) = 0.325 \text{ A}$$

Immaginando di spegnere i generatori indipendenti di tensione (sostituendoli con due corto circuiti), l'induttore vede ai suoi capi le resistenze R_2 e R_3 in parallelo. La costante di tempo risulta quindi

$$\tau = \frac{L}{R_2||R_3} = \frac{L(R_2 + R_3)}{R_2 R_3} = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot (30 + 10)}{30 \cdot 10} = 0.4\ \mu\text{s}$$

Per $t \to \infty$ il condensatore torna a comportarsi come un circuito aperto e il circuito da considerare è il seguente:



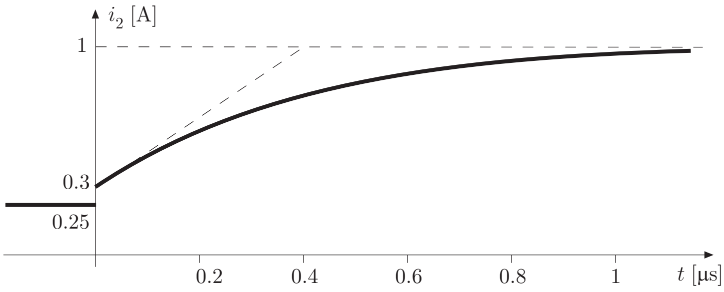
Si osserva che la resistenza R_2 è sottoposta alla tensione $V_1 + V_2$ e quindi si ha

$$i_2(\infty) = \frac{V_1 + V_2}{R_2} = \frac{10 + 20}{30} = 1 \text{ A}$$

L'espressione della corrente i_2 al variare del tempo è:

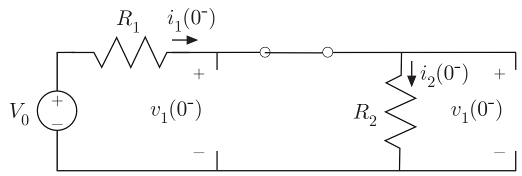
$$i_2(t) = \begin{cases} 0.25 \text{ A} & t < 0 \\ 1 - 0.675 \, \mathrm{e}^{-2.5\, t_{[\mu s]}} \text{ A} & t > 0 \end{cases}$$

La rappresentazione grafica della corrente è mostrata nella seguente figura:



Soluzione dell'esercizio 2.28 (testo a pag. 14)

Prima dell'istante $t = 0$ i generatori operano in regime stazionario e il condensatore si comporta come un circuito aperto. Pertanto, il circuito da considerare è il seguente:



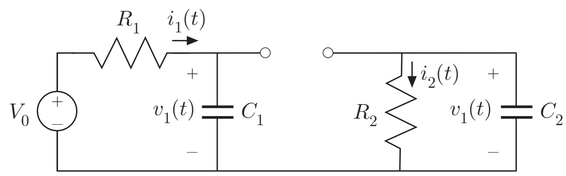
Risulta evidente che

$$i_1(0^-) = i_2(0^-) = \frac{V_0}{R_1 + R_2} = \frac{15 \cdot 10^{-3}}{100 + 50} = 0.1 \text{ mA}$$

È inoltre utile osservare che

$$v_1(0^-) = v_2(0^-) = R_2 i_2(0^-) = 50 \cdot 0.1 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ mV}$$

Quando l'interruttore si apre ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



Il circuito è quindi costituito da due circuiti del primo ordine completamente indipendenti, la cui evoluzione temporale può essere studiata separatamente.
Considerando l'istante $t = 0^+$, ricordando che sul condensatore la tensione non può cambiare istantaneamente ($v_1(0^+) = v_1(0^-)$ e $v_2(0^+) = v_2(0^-)$), si ha

$$i_1(0^+) = \frac{V_0 - v_1(0^+)}{R_1} = \frac{V_0 - v_1(0^-)}{R_1} = \frac{15 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}}{100} = 0.1 \text{ mA}$$

$$i_2(0^+) = \frac{v_2(0^+)}{R_2} = \frac{v_2(0^-)}{R_2} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{50} = 0.1 \text{ mA}$$

La costante di tempo per il circuito di sinistra si ottiene spegnendo il generatore di tensione. Risulta evidente che la resistenza vista ai capi di C_1 è R_1, e si ha quindi

$$\tau_1 = R_1 C_1 = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-9} = 1\ \mu\text{s}$$

Il circuito di destra è autonomo, e la costante di tempo è

$$\tau_2 = R_2 C_2 = 50 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = 0.25\ \mu\text{s}$$

Per $t \to \infty$ i condensatori tornano a comportarsi come circuiti aperti e, per ispezione, si vede che:

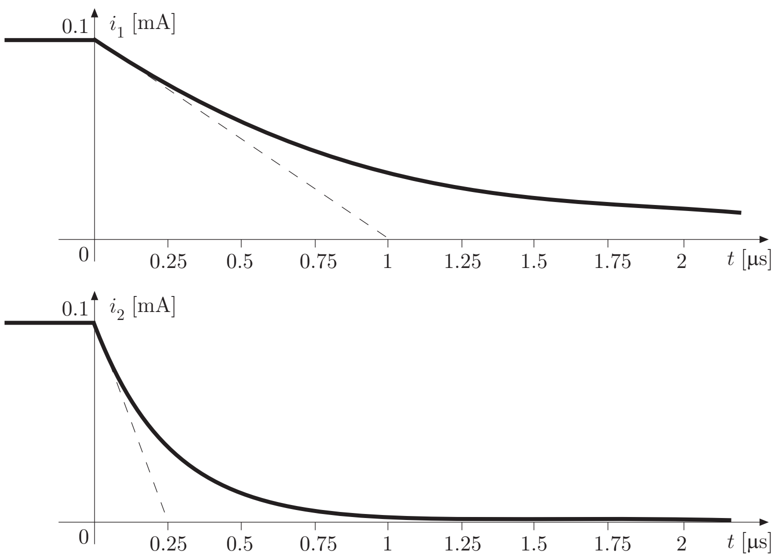
$$i_1(\infty) = i_2(\infty) = 0$$

L'espressione delle correnti al variare del tempo è

$$i_1(t) = \begin{cases} 0.1\ \text{mA} & t < 0 \\ 0.1\ \text{e}^{-t_{[\mu s]}}\ \text{mA} & t > 0 \end{cases}$$

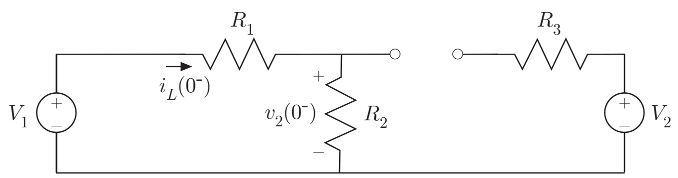
$$i_1(t) = \begin{cases} 0.1\ \text{mA} & t < 0 \\ 0.1\ \text{e}^{-4\,t_{[\mu s]}}\ \text{mA} & t > 0 \end{cases}$$

e la loro rappresentazione grafica è mostrata nella seguente figura



Soluzione dell'esercizio 2.29 (testo a pag. 14)

Prima dell'istante $t = 0$ i generatori operano in regime stazionario e l'induttore si comporta come un corto circuito. Pertanto, il circuito da considerare è il seguente:



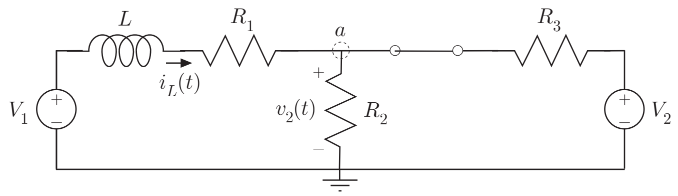
Risulta evidente che il circuito di destra è ininfluente per determinare i valori a $t = 0^-$. Poiché R_1 e R_2 risultano in serie e sottoposte alla tensione V_1, si ha

$$i_L(0^-) = \frac{V_1}{R_1 + R_2} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{100 + 100} = 10\ \mu\text{A}$$

Inoltre

$$v_2(0^-) = R_2 i_L(0^-) = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 1\ \text{mV}$$

Quando l'interruttore si chiude ($t > 0$) il circuito diventa quello nella seguente figura:



Per calcolare i valori a $t = 0^+$ si applica l'analisi nodale al nodo a:

$$-i_L(0^+) + \frac{v_2(0^+)}{R_2} + \frac{v_2(0^+) - V_2}{R_3} = 0$$

Ricordando che per l'induttore vale

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 10\ \mu\text{A}$$

si ricava

$$v_2(0^+) = \frac{i_L(0^+) + \dfrac{V_2}{R_3}}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{R_2 R_3 i_L(0^-) + R_2 V_2}{R_2 + R_3} = \frac{100 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 10^{-6} + 100 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{150} = 3\ \text{mV}$$

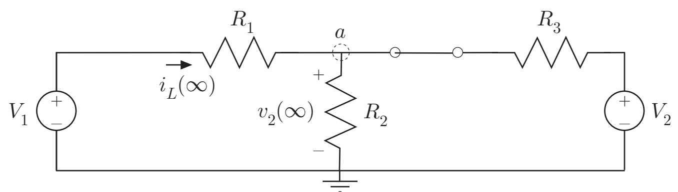
La costante di tempo si ottiene spegnendo il generatore di tensione e calcolando la resistenza in parallelo all'induttanza. R_2 ed R_3 risultano in parallelo, e quindi in serie a R_1. Si ha quindi

$$R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 100 + \frac{100 \cdot 50}{100 + 50} = \frac{400}{3}\ \Omega$$

da cui

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 400 \cdot 10^{-6} \frac{3}{400} = 3\ \mu\text{s}$$

Per $t \to \infty$ l'induttore torna a comportarsi come un corto circuito, come mostrato nella seguente figura:



Applicando l'analisi nodale al nodo a si ottiene:

$$\frac{v_2(\infty) - V_1}{R_1} + \frac{v_2(\infty)}{R_2} + \frac{v_2(\infty) - V_2}{R_3} = 0$$

da cui

$$v_2(\infty) = \frac{\dfrac{V_1}{R_1} + \dfrac{V_2}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{\dfrac{2 \cdot 10^{-3}}{100} + \dfrac{4 \cdot 10^{-3}}{50}}{\dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{50}} = 2.5\ \text{mV}$$

e infine

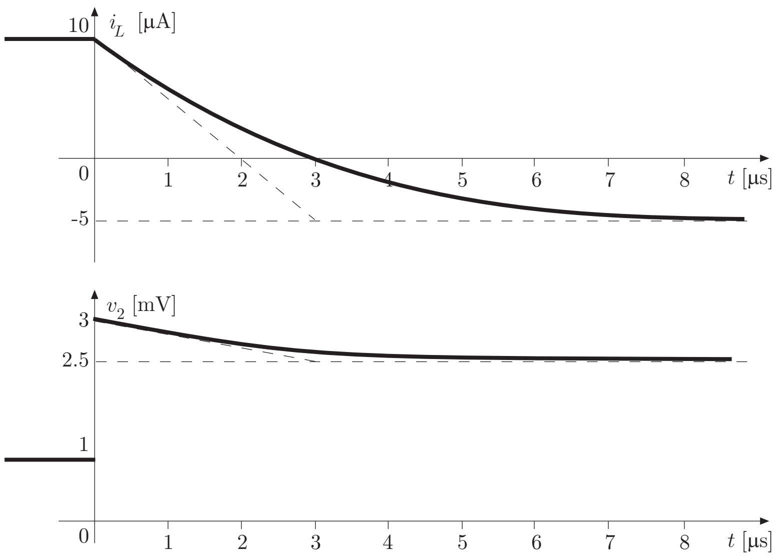
$$i_L(\infty) = \frac{V_1 - v_2(\infty)}{R_1} = \frac{2 \cdot 10^{-3} - 2.5 \cdot 10^{-3}}{100} = -5\ \mu\text{A}$$

Le espressioni della corrente e della tensione al variare del tempo sono

$$i_L(t) = \begin{cases} 10\ \mu\text{A} & t < 0 \\ \\ -5 + 15\ \text{e}^{-t_{[\mu s]}/3}\ \mu\text{A} & t > 0 \end{cases}$$

$$v_2(t) = \begin{cases} 1 \text{ mV} & t < 0 \\ 2.5 + 0.5 \text{ e}^{-t_{[\mu s]}/3} \text{ mV} & t > 0 \end{cases}$$

e la loro rappresentazione grafica è mostrata nella seguente figura



6

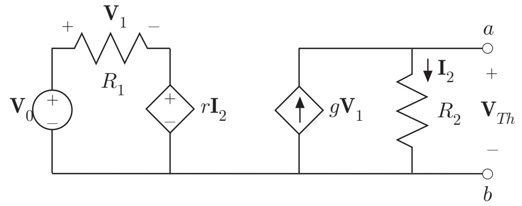
Soluzione dei circuiti in regime sinusoidale

Soluzione dell'esercizio 3.1 (testo a pag. 15)

Il fasore di tensione del generatore indipendente è semplicemente $\mathbf{V}_0 = V_0$. L'ammettenza del parallelo fra l'induttore L e il condensatore C risulta:

$$Y_{LC} = j\omega C - j\frac{1}{\omega L} = j10^9 \cdot 10^{-12} - j\frac{1}{10^9 \cdot 10^{-6}} = 0$$

Si nota che i due elementi risuonano alla pulsazione data e il loro parallelo è equivalente ad un circuito aperto. Pertanto, nella discussione che segue questi due elementi non verranno considerati e il circuito per la determinazione del generatore equivalente di Thevenin sarà il seguente:



Per quanto riguarda il carico, la sua ammettenza risulta:

$$Y_L = \frac{1}{R_L} + j\omega C_L = \frac{1}{100} + j10^9 \cdot 10^{-11} = 10 + j10 \text{ mS}$$

Dall'esame della parte a destra del circuito si vede che

$$\mathbf{V}_{Th} = R_2\mathbf{I}_2 = R_2 g\mathbf{V}_1$$

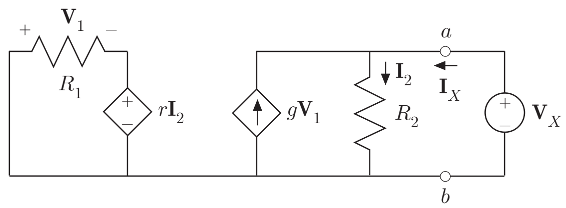
D'altra parte, considerando il sottocircuito di sinistra si ha anche

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0 - r\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_0 - r\mathbf{V}_{Th}/R_2$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima e ricavando $\mathbf{V}_{Th}$ si ottiene:

$$\mathbf{V}_{Th} = \frac{gR_2}{1+gr}\mathbf{V}_0 = \frac{10^{-3} \cdot 200}{1 + 10^{-3} \cdot 10^3} \cdot 10 = 1 \text{ V}$$

Poiché nel circuito sono presenti generatori dipendenti, per determinare l'impedenza del generatore equivalente si spegne il generatore indipendente di tensione (sostituendolo con un corto circuito) e si collega ai morsetti ab un generatore indipendente (ad esempio di tensione), come nella seguente figura:



Applicando la KCL al nodo superiore del sottocircuito di destra e tenendo conto del fatto che $\mathbf{V}_1 = -r\mathbf{I}_2$ e che $\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_X/R_2$ si ha:

$$\mathbf{I}_X - \mathbf{I}_2 + g\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_X - \frac{\mathbf{V}_X}{R_2} - gr\frac{\mathbf{V}_X}{R_2} = 0$$

Poiché $Z_{Th} = \mathbf{V}_X/\mathbf{I}_X$, dalla precedente equazione si ricava:

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_X}{\mathbf{I}_X} = \frac{R_2}{1+gr} = \frac{R_2}{2} = 100\ \Omega$$

La tensione $\mathbf{V}_L$ ai capi del carico si ottiene ripartendo la $\mathbf{V}_{Th}$ tra l'impedenza interna Z_{Th} e l'impedenza di carico $Z_L = 1/Y_L$:

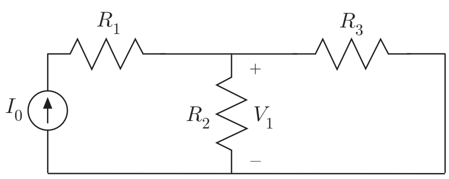
$$\mathbf{V}_L = \frac{1/Y_L}{Z_{Th} + 1/Y_L}\mathbf{V}_{Th} = \frac{1}{Y_L Z_{Th} + 1}\mathbf{V}_{Th} = \frac{1}{(0.01 + j0.01)\cdot 100 + 1}\mathbf{V}_{Th} = \frac{1}{2+j}\mathbf{V}_{Th} = \frac{1}{2+j}\ \mathrm{V}$$

La potenza complessa assorbita dal carico Y_L è data da:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{V}_L\mathbf{I}_L^*}{2} = \frac{\mathbf{V}_L Y_L^* \mathbf{V}_L^*}{2} = \frac{1}{2}|\mathbf{V}_L|^2 Y_L^* = \frac{1}{2}\frac{1}{|2+j|^2}(10 - j10)\cdot 10^{-3} = 1 - j1\ \mathrm{mW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.2 (testo a pag. 15)

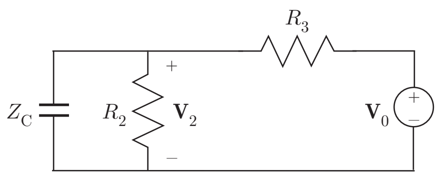
Il circuito è alimentato da due generatori indipendenti. In particolare, il generatore di corrente I_0 lavora in regime stazionario ($\omega = 0$) mentre il generatore di tensione v_0 lavora in regime sinusoidale ($\omega = 10^6$ rad/s). Quindi, per calcolare $v(t)$, è necessario trattare i due contributi separatamente. Per quanto concerne il contributo dato dal generatore di corrente I_0, il circuito equivalente è il seguente:



Si ricava quindi che:

$$V_1 = I_0 \cdot (R_2||R_3) = I_0\frac{R_2R_3}{R_2+R_3} = 50\ \mathrm{V}$$

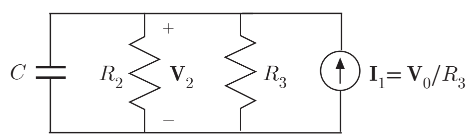
Per quanto concerne il contributo dato dal generatore di tensione v_0, il circuito equivalente nel dominio dei fasori è il seguente:



dove:

$$\mathbf{V}_0 = V_0 \qquad\qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j50\ \Omega$$

Si nota inoltre che è possibile modificare il circuito sostituendo al generatore di tensione $\mathbf{V}_0$ ed alla resistenza R_3 il relativo equivalente di Norton:



L'ammettenza totale composta dal parallelo di C, R_2 e R_3 risulta pari a:

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = j\omega C + \frac{2}{R_2}$$

La tensione $\mathbf{V}_2$ risulta quindi pari a:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{Y} = \mathbf{V}_0 \cdot \frac{2R_2^2 - j\omega C R_2^3}{(2R_2)^2 + (\omega C R_2^2)^2} = 0.25 - j0.25 \text{ V} \simeq 0.35 \cdot \mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}} \text{ V}$$

A questo punto, per calcolare $v(t)$, è necessario esprimere entrambi i contributi nel dominio del tempo al fine di poterli sommare:

$$v_1(t) = 50 \text{ V} \qquad\qquad v_2(t) = 0.35 \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \text{ V}$$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = 50 + 0.35 \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \text{ V}$$

Soluzione dell'esercizio 3.3 (testo a pag. 15)

Il carico è composto da un resistore R, da un condensatore C e da un induttore L posti in parallelo. È quindi possibile scrivere la potenza attiva assorbita dal resistore R come:

$$P_R = \frac{V_{0eff}^2}{R} = 1936 \text{ W}$$

La potenza reattiva a carico del condensatore C e dell'induttore L risulta invece pari a:

$$Q_C = \Im\{\frac{V_{0eff}^2}{Z_C^*}\} = \Im\{-j\omega C V_{0eff}^2\} \simeq -16 \text{ VAR}$$

$$Q_L = \Im\{\frac{V_{0eff}^2}{Z_L^*}\} = \Im\{\frac{jV_{0eff}^2}{\omega L}\} \simeq 616 \text{ VAR}$$

È quindi possibile calcolare il fattore di potenza pf come:

$$pf = \cos(\arctan\frac{Q_C + Q_L}{P_R}) \simeq 0.955 \text{ VAR}$$

Per aumentare il fattore di potenza pf è necessario ridurre il contributo della quantità di potenza reattiva. In particolare, dal momento che la potenza reattiva associata al carico risulta essere di tipo induttivo, il circuito di rifasamento più semplice prevede la connessione in parallelo al carico di una capacità C_r tale per cui:

$$pf = \cos(\arctan\frac{Q_C + Q_L + Q_{C_r}}{P_R}) \simeq 0.98 \text{ VAR}$$

Si ricava quindi:

$$Q_{C_r} \simeq -207 \text{ VAR} \qquad\qquad C_r \simeq 13.6\ \mu\text{F}$$

n.b. Il fattore di potenza pf può essere portato ad un valore pari a 0.98 anche aumentando il contributo della potenza attiva, invece di ridurre il contributo della potenza reattiva. Così facendo si richiede però una maggiore erogazione di potenza reale al generatore, fenomeno tipicamente indesiderato.

n.b. Lo stesso problema può anche essere risolto utilizzando la seguente equazione:

$$pf = \frac{P_r}{|\mathbf{S}|} = \frac{P_r}{|P_r + j(Q_C + Q_L)|} = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2(\frac{1}{\omega L} - \omega C)^2}}$$

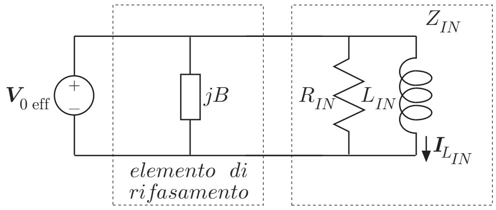
dalla quale è evidente come il fattore di potenza pf del carico sia indipendente dal generatore con il quale esso viene alimentato.

Soluzione dell'esercizio 3.4 (testo a pag. 16)

Il calcolo del rapporto N tra il numero di spire dell'avvolgimento primario ed il numero di spire dell'avvolgimento secondario si ottiene come:

$$\mathrm{N} = \frac{\mathbf{V}_{1\,\mathrm{eff}}}{\mathbf{V}_{0\,\mathrm{eff}}} = 0.022$$

A questo punto è possibile calcolare il carico equivalente visto ai capi dell'avvolgimento primario, come mostrato nella figura seguente:



dove, sfruttando le proprietà di trasformazione d'impedenza associate ai trasformatori ideali:

$$Z_{IN} = \frac{Z_{carico}}{\mathrm{N}^2}$$

da cui si ricava che:

$$Y_{IN} = \frac{1}{Z_{IN}} = \mathrm{N}^2 Y_{carico} = \mathrm{N}^2 (\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}) \approx 0.484 - j1541\ \mu\mathrm{S}$$

La potenza reattiva associata alla parte immaginaria del carico Y_{IN} si calcola come:

$$Q_{IN} = \Im\{\mathbf{V}_{0\,\mathrm{eff}} \cdot \mathbf{I}_{L_{IN}}{}^*\} = \Im\{\frac{\mathbf{V}^2_{0\,\mathrm{eff}}}{Z_{L_{IN}}{}^*}\} = \Im\{\mathbf{V}^2_{0\,\mathrm{eff}} Y_{L_{IN}}{}^*\} = \Im\{\mathbf{V}^2_{0\,\mathrm{eff}} Y_{IN}{}^*\} = 154.1\ \mathrm{kVAR}$$

Per bilanciare Q_{IN}, ed ottenere quindi un fattore di potenza pf pari ad uno, è necessario che all'elemento di rifasamento sia associata una energia reattiva:

$$Q_{rif} = \Im\{\mathbf{V}^2_{0\,\mathrm{eff}} Y_{rif}{}^*\} = -Q_{IN} = -154.1\ \mathrm{kVAR}$$

da cui si ottiene::

$$Y_{rif}{}^* = -j1.541\ \mathrm{mS}$$

È quindi possibile ricavare il valore della suscettanza B come:

$$B = -jY_{rif} = 1.541\ \mathrm{mS}$$

Dal momento che la suscettanza assume valore positivo, l'elemento di rifasamento è del tipo condensatore. Il suo dimensionamento si ottiene come:

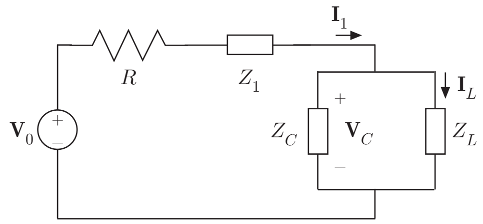
$$C = \frac{B}{\omega} \approx 4.9\ \mu\mathrm{F}$$

Infine, la potenza attiva assorbita dal carico risulta essere:

$$P = \Re\{\mathbf{V}^2_{1\,\mathrm{eff}} Y_{carico}{}^*\} = \Re\{\mathbf{V}^2_{0\,\mathrm{eff}} Y_{IN}{}^*\} = 48.4\ \mathrm{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.5 (testo a pag. 16)

Passando al dominio dei fasori il circuito diventa:



dove

$$\mathbf{V}_0 = V_0 = 20 \text{ V}$$

$$Z_1 = j\omega L_1 = j\,10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = j10\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j\,10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = j20\ \Omega$$

$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-9}} = -j20\ \Omega$$

L'impedenza del parallelo fra il condensatore C e l'induttore L è

$$Z_{LC} = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = \frac{-j20j20}{-j20 + j20} = \infty$$

e quindi i due elementi risuonano e si comportano come un corto circuito. Pertanto la corrente $\mathbf{I}_1$ è nulla e, poiché non c'è caduta di potenziale su R e su Z_1, si ha

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_0 = 20 \text{ V}$$

Poiché tale tensione è la stessa che c'è ai capi dell'induttore, si ha anche

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_C}{Z_L} = \frac{20}{j20} = -j \text{ A} = 1\ \mathrm{e}^{-\pi/2} \text{ A}$$

Dalle espressioni precedenti si deduce

$$v_C(t) = 20\cos\omega t \ \ \text{V}$$

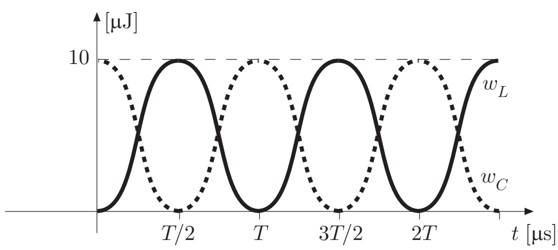
$$i_L(t) = \cos(\omega t - \pi/2) \ \ \text{A} = \sin\omega t \ \ \text{A}$$

Le espressioni delle energie immagazzinate dal condensatore e dall'induttore risultano

$$w_C = \frac{1}{2}\,C\,v_C^2(t) = \frac{1}{2}\,50 \cdot 10^{-9}\,20^2\cos^2\omega t = 10\cos^2\omega t \ \ \mu\text{J}$$

$$w_L = \frac{1}{2}\,L\,i_L^2(t) = \frac{1}{2}\,20 \cdot 10^{-6}\ \sin^2\omega t = 10\sin^2\omega t \ \ \mu\text{J}$$

e il loro andamento temporale è indicato nella figura seguente:



dove

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 6.28\ \mu\text{s}$$

È interessante osservare come negli elementi L e C fluisca corrente, anche se, complessivamente, la corrente che entra dall'esterno nell'elemento LC è nulla. La corrente i_L fa sì che l'energia immagazzinata nel circuito risonante si trasferisca dal condensatore C all'induttore L (e viceversa) ogni mezzo periodo, come risulta evidente dal grafico delle energie.

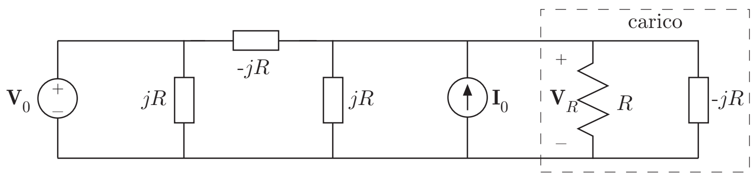
Soluzione dell'esercizio 3.6 (testo a pag. 16)

Le impedenze associate alle induttanze e alle capacità sono:

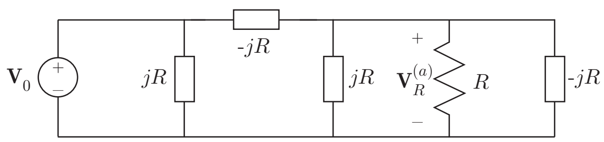
$$Z_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-9}} = -j50\ \Omega = -jR$$

$$Z_L = jX_L = j\omega L = j10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = j50\ \Omega = jR$$

Pertanto il circuito da considerare è il seguente:



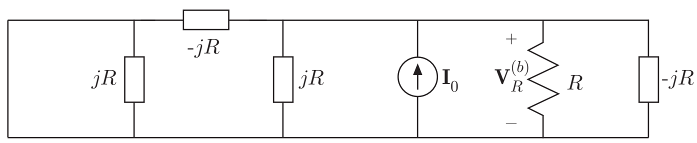
È evidente che la potenza attiva assorbita dal carico coincide con la potenza assorbita dalla resistenza R, per il cui calcolo è sufficiente calcolare la tensione $\mathbf{V}_R$.
Può convenire applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.
Consideriamo il circuito in cui viene spento il generatore di corrente (sostituito da un circuito aperto):



I due elementi reattivi ai lati di R sono in parallelo e di valore opposto e quindi si cancellano. L'elemento $-jR$ nel ramo superiore e la resistenza R sono quindi in serie e sottoposte alla tensione $\mathbf{V}_0$. Si ha quindi:

$$\mathbf{V}_R^{(a)} = \frac{R}{R - jR}\,\mathbf{V}_0 = \frac{1+j}{2}\,\mathbf{V}_0 = (1+j)\,25\ \mathrm{V}$$

Consideriamo ora il circuito in cui viene spento il generatore di tensione (sostituito da un corto circuito):



In questo caso gli elementi alla sinistra del generatore di corrente hanno un'impedenza equivalente infinita. Infatti, l'elemento jR in parallelo al cortocircuito è ininfluente e gli altri due risultano in parallelo. Pertanto, il contributo alla tensione risulta:

$$\mathbf{V}_R^{(b)} = \frac{R(-jR)}{R - jR}\,\mathbf{I}_0 = -j\,\frac{1+j}{2}\,R\mathbf{I}_0 = (1-j)\,25\ \mathrm{V}$$

Si ottiene infine

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_R^{(a)} + \mathbf{V}_R^{(b)} = (1+j)\,25 + (1-j)\,25 = 50\ \mathrm{V}$$

da cui

$$P_R = \frac{|\mathbf{V}_R|^2}{2R} = \frac{50^2}{2 \cdot 50} = 25\ \mathrm{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.7 (testo a pag. 16)

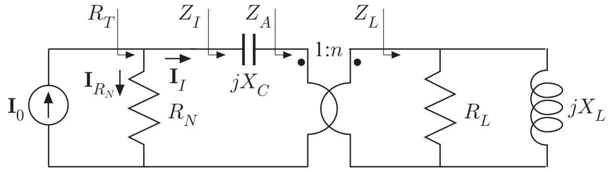
Alla frequenza di lavoro l'impedenza associata all'induttanza è:

$$Z_L = jX_L = j\omega L = j10^9 \cdot 10^{-6} = j1\ k\Omega = jR_L$$

e il fasore di corrente del generatore è:

$$\mathbf{I}_0 = I_0 = 10 \text{ mA}$$

Il circuito nel dominio dei fasori risulta quindi il seguente:



L'impedenza Z_A è data da

$$Z_A = \frac{Z_L}{n^2} = \frac{1}{n^2 Y_L} = \frac{1}{n^2\left(\dfrac{1}{R_L} + \dfrac{1}{jR_L}\right)} = \frac{(1+j)R_L}{2n^2}$$

Affinché il generatore risulti adattato deve essere verificata la condizione

$$Z_I = Z_A + jX_C = Z_N^* = R_N$$

da cui, separando parte reale e parte immaginaria, si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{R_L}{2n^2} = R_N \\ \dfrac{R_L}{2n^2} + X_C = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} n = \sqrt{\dfrac{R_L}{2R_N}} = \sqrt{10} \\ X_C = -\dfrac{R_L}{2n^2} = -50\ \Omega \end{cases}$$

Poiché $X_C = -1/\omega C$, si ha

$$C = -\frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^9 \cdot 50} = 20 \text{ pF}$$

Il generatore ideale di corrente eroga solo potenza attiva poiché ai suoi capi vede un carico puramente resistivo di valore $R_T = R_N||Z_I = R_N/2$. Il valore di tale potenza risulta

$$P_{gen} = \frac{1}{2} R_T |\mathbf{I}_0|^2 = \frac{R_N |\mathbf{I}_0|^2}{4} = \frac{50 \cdot 0.01^2}{4} = 1.25 \text{ mW}$$

Metà della potenza attiva erogata dal generatore viene assorbita dalla resistenza R_N. L'altra metà viene assorbita dal carico equivalente Z_I, in cui l'unico elemento in grado di assorbire potenza attiva è la resistenza R_L. Pertanto risulta

$$P_{R_N} = P_{R_L} = \frac{P_{gen}}{2} = 0.625 \text{ mW}$$

Inoltre, poiché $Z_I = R_N$ si ha

$$\mathbf{I}_I = \mathbf{I}_{R_N} = \mathbf{I}_0/2 = 5 \text{ mA}$$

e quindi la potenza reattiva sul condensatore risulta:

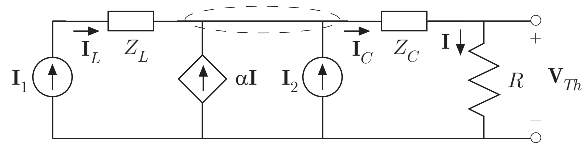
$$Q_{X_C} = \text{Im}\left\{\mathbf{S}_{X_C}\right\} = \text{Im}\left\{\frac{jX_C|\mathbf{I}_I|^2}{2}\right\} = \frac{X_C|\mathbf{I}_I|^2}{2} = \frac{-50 \cdot 0.005^2}{2} = -0.625 \text{ mVAR}$$

Dato che nel circuito in esame solo il condensatore e l'induttore sono in grado di immagazzinare energia, affinché sia verificato il bilancio della potenza reattiva deve essere

$$Q_{X_L} = -Q_{X_C} = 0.625 \text{ mVAR}$$

Soluzione dell'esercizio 3.8 (testo a pag. 17)

Introducendo le impedenze associate al condensatore e all'induttore, per il calcolo della tensione del generatore equivalente il circuito da considerare è il seguente:



Poiché $\mathbf{I}_L = \mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_C = \mathbf{I}$, applicando la KCL al nodo indicato dal tratteggio si ottiene

$$\mathbf{I}_1 + \alpha\mathbf{I} + \mathbf{I}_2 - \mathbf{I} = 0$$

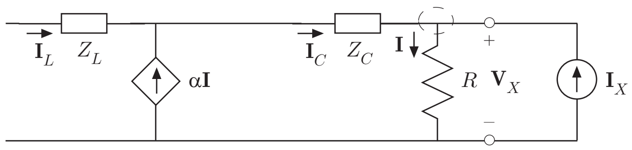
da cui

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2}{1-\alpha}$$

e quindi

$$\mathbf{V}_{Th} = R\mathbf{I} = R\,\frac{\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2}{1-\alpha} = 40\,\frac{1+3}{1-0.2} = 200 \text{ V}$$

Per il calcolo dell'impedenza equivalente si spengono i generatori indipendenti di corrente (sostituiti da circuiti aperti) e, a causa della presenza di un generatore comandato, è necessario introdurre un generatore esterno di prova, come mostrato nella seguente figura:



Applicando la KCL al nodo evidenziato in figura, osservando che $\mathbf{I}_L = 0$ e quindi $\mathbf{I}_C = \alpha\mathbf{I}$, si ha

$$\alpha\mathbf{I} + \mathbf{I}_X = \mathbf{I}$$

da cui

$$\mathbf{I}_X = (1-\alpha)\mathbf{I} = (1-\alpha)\,\frac{\mathbf{V}_X}{R}$$

e quindi

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_X}{\mathbf{I_X}} = \frac{R}{1-\alpha} = \frac{40}{1-0.2} = 50\ \Omega$$

La potenza massima viene erogata quando ai morsetti ab viene collegato un carico d'impedenza

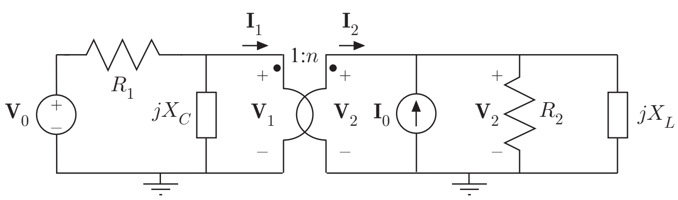
$$Z_L = Z_{Th}^* = 50\ \Omega$$

e tale potenza vale

$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = 100 \text{ W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.9 (testo a pag. 17)

Introducendo le impedenze associate al condensatore e all'induttore, il circuito da considerare è il seguente:



dove

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^8 \cdot 10^{-9}} = -10\ \Omega$$

$$X_L = \omega L = 10^8 \cdot 10^{-5} = 1000\ \Omega$$

Applicando il metodo di analisi nodale alle due parti del circuito si ottengono le seguenti equazioni:

$$\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0}{R_1} + \frac{\mathbf{V}_1}{jX_C} + \mathbf{I}_1 = 0 \qquad\qquad -\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{V}_2}{R_2} + \frac{\mathbf{V}_2}{jX_L} = 0$$

Sostituendole nella prima equazione le relazioni fra tensioni e correnti sulle porte del trasformatore ($\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2/n$, $\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2$), ricavando $\mathbf{I}_2$ e sostituendola nella seconda equazione si ottiene

$$\frac{\mathbf{V}_2}{n^2R_1} - \frac{\mathbf{V}_0}{nR_1} + \frac{\mathbf{V}_2}{jn^2X_C} - \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{V}_2}{R_2} + \frac{\mathbf{V}_2}{jX_L} = 0$$

da cui si ricava

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\dfrac{\mathbf{V}_0}{nR_1} + \mathbf{I}_0}{\dfrac{1}{n^2R_1} + \dfrac{1}{jn^2X_C} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{jX_L}}$$

Poiché

$$n^2R_1 = 100 \cdot 10 = R_2 \qquad\qquad n^2X_C = -\frac{n^2}{\omega C} = -\frac{100}{10^8 \cdot 10^{-9}} = -1000\ \Omega = -X_L$$

si ottiene

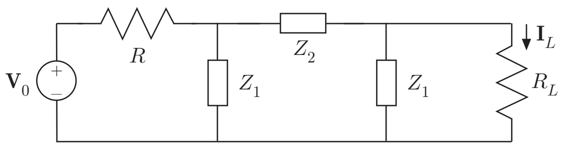
$$\mathbf{V}_2 = \frac{R_2}{2}\left(\frac{\mathbf{V}_0}{nR_1} + \mathbf{I}_0\right) = \frac{1000}{2} \cdot \left(\frac{1}{10 \cdot 10} + j0.02\right) = 5 + j10\ \text{V}$$

La potenza assorbita dalla resistenza R_2 risulta:

$$P_2 = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{2R_2} = \frac{25 + 100}{2 \cdot 1000} = 62.5\ \text{mW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.10 (testo a pag. 17)

Passando al dominio dei fasori il circuito diventa



dove

$$\mathbf{V}_0 = V_0 = 1\ \text{V}$$

e le impedenze Z_1 e Z_2 sono date entrambe dalla formula seguente (ponendo $n = 1$ o $n = 2$):

$$Z_n = \frac{j\omega L_n \cdot \dfrac{1}{j\omega C_n}}{j\omega L_n + \dfrac{1}{j\omega C_n}} = \frac{j\omega L_n}{1 - \omega^2 L_n C_n} = j\sqrt{\frac{L_n}{C_n}}\,\frac{\omega\sqrt{L_nC_n}}{1 - \omega^2 L_n C_n} = jX_n\,\frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

avendo introdotto le quantità

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{25 \cdot 10^{-9} \cdot 2.5 \cdot 10^{-12}}} = 4 \cdot 10^9\ \text{rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-12}}} = 10^9\ \text{rad/s}$$

$$X_1 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-9}}{2.5 \cdot 10^{-12}}} = 100\ \Omega$$

$$X_2 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-12}}} = 100\ \Omega$$

Caso a: $\omega = 0$

Poiché $Z_1 = Z_2 = 0$, tutti i rami si comportano come dei cortocircuiti. Di conseguenza la resistenza R_L risulta cortocircuitata e in essa non fluisce corrente. Si ha quindi:

$$P_L = 0$$

Caso b: $\omega = 10^9$ rad/s

Poiché $\omega = \omega_2$, si ha $Z_2 = \infty$ e quindi il ramo superiore si comporta come un circuito aperto, disconnettendo il carico R_L dal generatore. Si ha pertanto

$$P_L = 0$$

Caso c: $\omega = 4 \cdot 10^9$ rad/s

Poiché $\omega = \omega_1$, si ha $Z_1 = \infty$ e quindi le due impedenze in verticale sono ininfluenti. Inoltre si ha

$$Z_2 = jX_2 \, \frac{\omega/\omega_2}{1 - (\omega/\omega_2)^2} = j100 \, \frac{4}{1 - 4^2} \approx -j\,26.7\ \Omega$$

La potenza assorbita è quindi data da:

$$P_L = \frac{R_L |\mathbf{I}_L|^2}{2} = \frac{R_L |\mathbf{V}_0|^2}{2|R + R_L + Z_2|^2} = \frac{200 \cdot 1}{2|100 + 200 - j\,26.7|^2} \approx 1.1\ \text{mW}$$

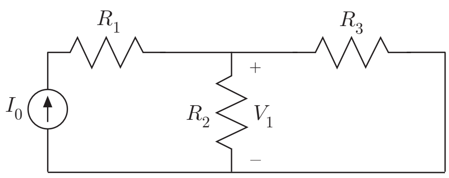
Caso d: $\omega \to \infty$

Facendo il limite si ottiene che $Z_1 = Z_2 = 0$. Pertanto il circuito si comporta come nel caso a e si ha

$$P_L = 0$$

Soluzione dell'esercizio 3.11 (testo a pag. 17)

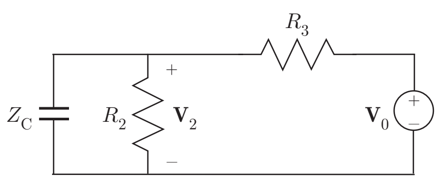
Il circuito è alimentato da due generatori indipendenti. In particolare, il generatore di corrente I_0 lavora in regime stazionario ($\omega = 0$) mentre il generatore di tensione v_0 lavora in regime sinusoidale ($\omega = 10^6$ rad/s). Quindi, per calcolare $v(t)$, è necessario trattare i due contributi separatamente. Per quanto concerne il contributo dato dal generatore di corrente I_0, il circuito equivalente è il seguente:



Si ricava quindi che:

$$V_1 = I_0 \cdot (R_2 || R_3) = I_0 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 50\ \text{V}$$

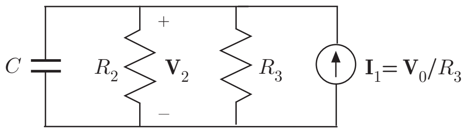
Per quanto concerne il contributo dato dal generatore di tensione v_0, il circuito equivalente nel dominio dei fasori è il seguente:



dove:

$$\mathbf{V}_0 = V_0 \qquad\qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j50\ \Omega$$

Si nota inoltre che è possibile modificare il circuito sostituendo al generatore di tensione $\mathbf{V}_0$ ed alla resistenza R_3 il relativo equivalente di Norton:



L'ammettenza totale composta dal parallelo di C, R_2 e R_3 risulta pari a:

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = j\omega C + \frac{2}{R_2}$$

La tensione $\mathbf{V}_2$ risulta quindi pari a:

$$\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{Y} = \mathbf{V}_0 \cdot \frac{2R_2^2 - j\omega C R_2^3}{(2R_2)^2 + (\omega C R_2^2)^2} = 0.25 - j0.25 \text{ V} \simeq 0.35 \cdot \mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{4}} \text{ V}$$

A questo punto, per calcolare $v(t)$, è necessario esprimere entrambi i contributi nel dominio del tempo al fine di poterli sommare:

$$v_1(t) = 50 \text{ V} \qquad\qquad v_2(t) = 0.35 \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \text{ V}$$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = 50 + 0.35 \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \text{ V}$$

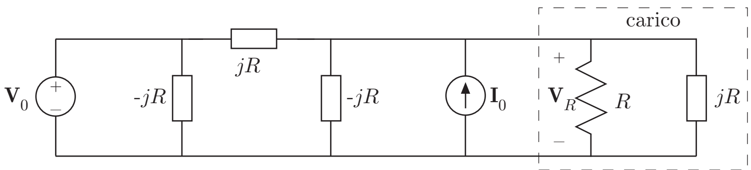
Soluzione dell'esercizio 3.12 (testo a pag. 18)

Le impedenze associate alle induttanze e alle capacità sono:

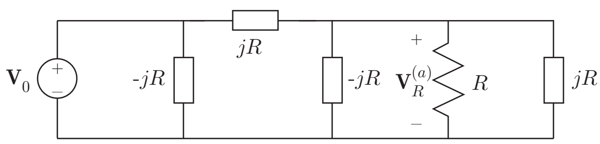
$$Z_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-9}} = -j50\ \Omega = -jR$$

$$Z_L = jX_L = j\omega L = j10^6 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = j50\ \Omega = jR$$

Pertanto il circuito da considerare è il seguente:



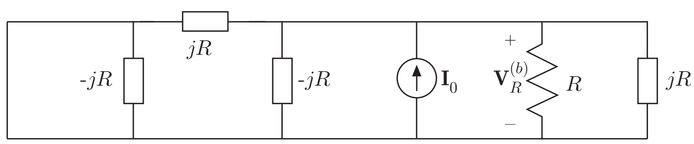
È evidente che la potenza attiva assorbita dal carico coincide con la potenza assorbita dalla resistenza R, per il cui calcolo è sufficiente calcolare la tensione $\mathbf{V}_R$.
Può convenire applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.
Consideriamo il circuito in cui viene spento il generatore di corrente (sostituito da un circuito aperto):



I due elementi reattivi ai lati di R sono in parallelo e di valore opposto e quindi si cancellano. L'elemento jR nel ramo superiore e la resistenza R sono quindi in serie e sottoposte alla tensione $\mathbf{V}_0$. Si ha quindi:

$$\mathbf{V}_R^{(a)} = \frac{R}{R + jR}\,\mathbf{V}_0 = \frac{1-j}{2}\,\mathbf{V}_0 = (1-j)\,50 \text{ V}$$

Consideriamo ora il circuito in cui viene spento il generatore di tensione (sostituito da un corto circuito):



In questo caso gli elementi alla sinistra del generatore di corrente hanno un'impedenza equivalente infinita. Infatti, l'elemento $-jR$ in parallelo al cortocircuito è ininfluente e gli altri due risultano in parallelo. Pertanto, il contributo alla tensione risulta:

$$\mathbf{V}_R^{(b)} = \frac{R(+jR)}{R+jR}\,\mathbf{I}_0 = j\,\frac{1-j}{2}\,R\,\mathbf{I}_0 = (1+j)\,50\ \mathrm{V}$$

Si ottiene infine

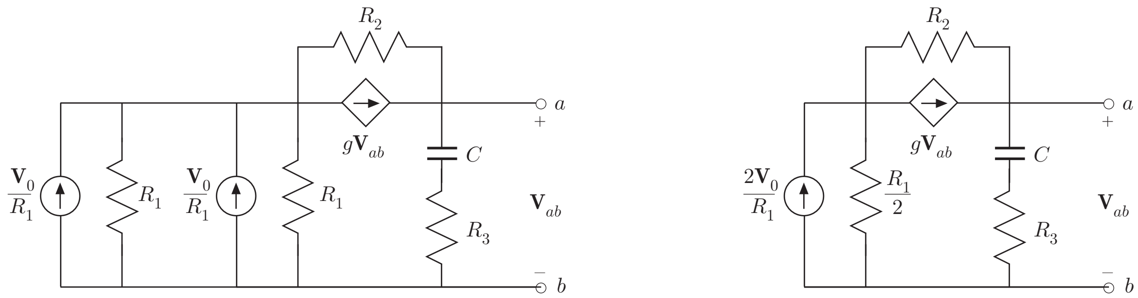
$$\mathbf{V}_R = \mathbf{V}_R^{(a)} + \mathbf{V}_R^{(b)} = (1-j)\,50 + (1+j)\,50 = 100\ \mathrm{V}$$

da cui

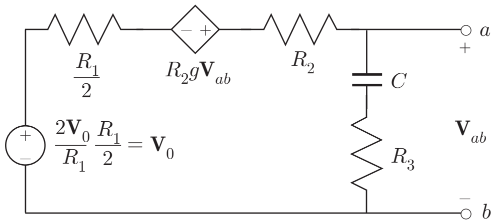
$$P_R = \frac{|\mathbf{V}_R|^2}{2R} = \frac{100^2}{2\cdot 50} = 100\ \mathrm{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.13 (testo a pag. 18)

Il modo più semplice per risolvere il circuito è quello di utilizzare l'equivalenza fra generatori di Thevenin e di Norton. Trasformando i due generatori di tensione ($\mathbf{V}_0$, R_1) in generatori di corrente, si ottiene il circuito a sinistra nella figura seguente, che, combinando i generatori di corrente e le resistenze in parallelo, coincide con il circuito di destra:



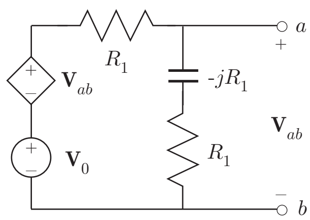
Trasformando sia il generatore di corrente indipendente ($2\mathbf{V}_0/R_1$, $R_1/2$) che quello comandato ($g\mathbf{V}_{ab}$, R_2) in generatori di tensione, si ottiene il circuito a sinistra nella figura seguente:



Combinando in serie le due resistenze di valore $R_1/2$ e R_2, tenendo conto del fatto che $R_2 g = 1$, che $R_2 + R_1/2 = R_1$, che $R_3 = R_1$ e che l'impedenza associate alla capacità è:

$$Z_C = jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^6\cdot 10\cdot 10^{-9}} = -j100\ \Omega = -jR_1$$

si vede che tale circuito coincide con il seguente:



La tensione a vuoto del generatore coincide con $\mathbf{V}_{ab}$ in quest'ultimo circuito, e si ottiene considerando il partitore di tensione:

$$\mathbf{V}_{ab} = \frac{R_1 - jR_1}{R_1 + R_1 - jR_1}\,(\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_0) = \frac{1-j}{2-j}\,(\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_0)$$

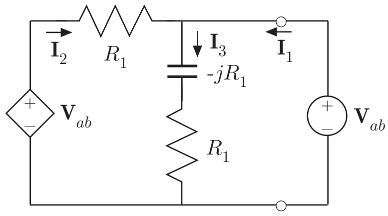
da cui:

$$(2-j)\mathbf{V}_{ab} = (1-j)(\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_0)$$

e quindi

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{ab} = (1-j)\mathbf{V}_0 = 10 - j10 \text{ V}$$

Per il calcolo dell'impedenza interna del generatore equivalente si devono spegnere i generatori indipendenti. Poiché nel circuito è presente un generatore dipendente, è necessario collegare ai morsetti ab un generatore di test, come indicato nella seguente figura:



Si ha che:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_{ab} - \mathbf{V}_{ab}}{R_1} = 0$$

e che

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{R_1 - jR_1}$$

da cui

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{\mathbf{I}_1} = R_1 - jR_1 = 100 - j100\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore equivalente è

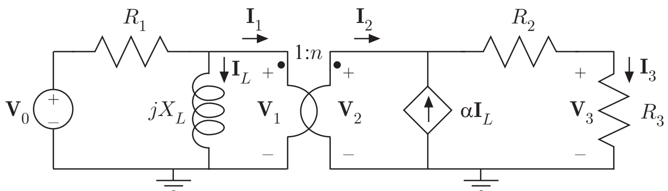
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{10^2 + 10^2}{8 \cdot 100} = 0.25 \text{ W}$$

e il carico da collegare ai morsetti ab affinché il generatore eroghi tale potenza è

$$Z_L = Z_{Th}^* = 100 + j100\ \Omega$$

Soluzione dell'esercizio 3.14 (testo a pag. 18)

Introducendo i simboli mostrati nella seguente figura



si ha che la potenza richiesta è data da:

$$P_3 = \text{Re}\left\{\frac{\mathbf{V}_3\mathbf{I}_3^*}{2}\right\} = \frac{|\mathbf{V}_3|^2}{2R_3} = \frac{\left|\dfrac{R_3}{R_2+R_3}\mathbf{V}_2\right|^2}{2R_3} = \frac{R_3|\mathbf{V}_2|^2}{2(R_2+R_3)^2}$$

Per il calcolo della tensione $\mathbf{V}_2$ conviene osservare preliminarmente che

$$X_L = \omega L = 2 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 10^{-9} = 100\ \Omega = R_1$$

$$R_2 = 12R_1 \qquad R_3 = 4R_1 \qquad \alpha = 1/n$$

e che, per le proprietà del trasformatore ideale, si ha

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2/n \qquad \mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2$$

e, infine,

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_1}{jX_L} = \frac{\mathbf{V}_2}{jnR_1}$$

Applicando il metodo di analisi nodale e scrivendo le KCL per i due nodi superiori del trasformatore, tenendo conto delle precedenti relazioni, si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{V}_2/n - \mathbf{V}_0}{R_1} + \dfrac{\mathbf{V}_2}{jnR_1} + n\mathbf{I}_2 = 0 \\ -\mathbf{I}_2 - \dfrac{1}{n}\dfrac{\mathbf{V}_2}{jnR_1} + \dfrac{\mathbf{V}_2}{12R_1 + 4R_1} = 0 \end{cases}$$

Ricavando $\mathbf{I}_2$ dalla seconda equazione e sostituendola nella prima, esplicitando si ottiene:

$$\mathbf{V}_2 = 2\mathbf{V}_0 = 8 \text{ V}$$

che sostituita nella prima equazione permette di ricavare la potenza richiesta

$$P_3 = \frac{4R_1|\mathbf{V}_2|^2}{2(16R_1)^2} = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{128R_1} = \frac{64}{128 \cdot 100} = 5 \text{ mW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.15 (testo a pag. 18)

Per il calcolo della tensione di Thevenin bisogna lasciare i morsetti ab aperti e si ha quindi che su R_1 non scorre corrente e che $\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{ab}$. Applicando la KCL al nodo comune tra R_1 ed R_2 si ha

$$\mathbf{I}_2 = g\mathbf{V}_{Th} + \frac{r\mathbf{I}_2 - \mathbf{V}_{Th}}{Z_2}$$

Inoltre, si ha

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_{Th} - \mathbf{V}_0}{R_2}$$

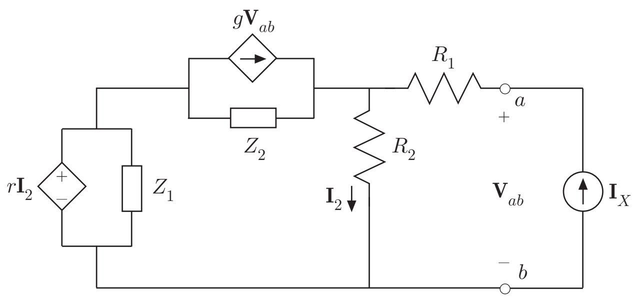
che sostituito nell'equazione precedente, tenendo conto del fatto che $r = R_2$, $g = 1/(2R_2)$ e $Z_2 = -jR_2$, fornisce:

$$\frac{\mathbf{V}_{Th} - \mathbf{V}_0}{R_2} = g\mathbf{V}_{Th} + \frac{r\frac{\mathbf{V}_{Th} - \mathbf{V}_0}{R_2} - \mathbf{V}_{Th}}{Z_2} = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{2R_2} - j\,\frac{\mathbf{V}_0}{R_2}$$

da cui si ricava

$$\mathbf{V}_{Th} = 2(1-j)\mathbf{V}_0 = 2(1-j)(1-j)10 = -j\,40\text{V}$$

Per il calcolo dell'impedenza Z_{Th} si deve spegnere il generatore indipendente di tensione e applicare ai morsetti ab una sorgente esterna (ad esempio di corrente), come mostrato nella seguente figura:



Applicando la KCL al nodo comune tra R_1 ed R_2, tenendo conto delle relazioni fra gli elementi indicate prima, si ha

$$\mathbf{I}_2 = g\mathbf{V}_{ab} + \frac{R_2\mathbf{I}_2 - r\mathbf{I}_2}{Z_2} + \mathbf{I}_X = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{2R_2} + \mathbf{I}_X$$

Inoltre

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_{ab} - R_1\mathbf{I}_X}{R_2}$$

e quindi

$$\mathbf{V}_{ab} - R_1\mathbf{I}_X = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{2} + R_2\mathbf{I}_X$$

da cui

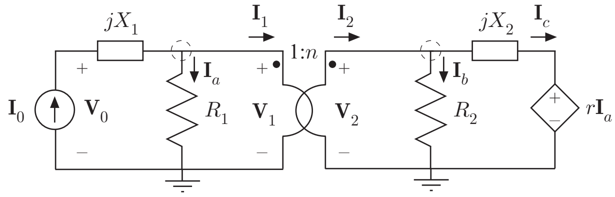
$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_{ab}}{I_X} = 2(R_1 + R_2) = 600\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore è data da

$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{|-j\,40|^2}{8 \cdot 600} = 0.33\ \text{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.16 (testo a pag. 19)

Con riferimento ai simboli introdotti nella seguente figura



applicando l'analisi nodale ai due morsetti indicati nel tratteggio si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{I}_1 + \dfrac{\mathbf{V}_1}{R_1} - \mathbf{I}_0 = 0 \\ -\mathbf{I}_2 + \dfrac{\mathbf{V}_2}{R_2} + \dfrac{\mathbf{V}_2 - r\mathbf{I}_a}{jX_2} = 0 \end{cases}$$

Ricordando le relazioni ingresso/uscita del trasformatore ideale ($\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1$, $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1/n$), osservando che $\mathbf{I}_a = \mathbf{V}_1/R_1$, sostituendo ed eliminando $\mathbf{I}_1$ si ricava

$$\frac{\mathbf{V}_1}{R_1} - \mathbf{I}_0 + \frac{n^2\mathbf{V}_1}{R_2} + \frac{n^2\mathbf{V}_1 - nr\mathbf{V}_1/R_1}{jX_2} = 0$$

È utile osservare che $r/R_1 = n$. Si nota infatti che l'ultimo termine della somma si annulla. Tenendo anche conto che $R_2 = n^2R_1$ si ricava

$$\frac{\mathbf{V}_1}{R_1} - \mathbf{I}_0 + \frac{n^2\mathbf{V}_1}{n^2R_1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{V}_1 = \frac{R_1\mathbf{I}_0}{2} = 10\ \text{V}$$

Si possono ora ricavare tutte le quantità di interesse per il calcolo delle potenze:

$$\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 = 100\ \text{V} \qquad \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 - \frac{\mathbf{V}_1}{R_1} = \mathbf{I}_0 - \frac{\mathbf{I}_0}{2} = 1\ \text{A} \qquad \mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{I}_1}{n} = 0.1\ \text{A}$$

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_1 - jX_1(-\mathbf{I}_0) = 10 - j20\ \text{V} \qquad \mathbf{I}_c = \mathbf{I}_2 - \frac{\mathbf{V}_2}{R_2} = 0.1 - \frac{100}{1000} = 0$$

Adottando la convenzione degli utilizzatori, le potenze complesse su tutti gli elementi risultano

$$\mathbf{S}_{\mathbf{I}_0} = -\frac{\mathbf{V}_0\mathbf{I}_0^*}{2} = -10 + j20\ \text{VA} \qquad \text{(attiva erogata, reattiva induttiva)}$$

$$\mathbf{S}_{jX_1} = \frac{jX_1|\mathbf{I}_0|^2}{2} = \frac{-j10 \cdot 4}{2} = -j20\ \text{VAR} \qquad \text{(reattiva capacitiva)}$$

$$\mathbf{S}_{R_1} = \frac{|\mathbf{V}_1|^2}{2R_1} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5\ \text{W} \qquad \text{(attiva assorbita)}$$

$$\mathbf{S}_{R_2} = \frac{|\mathbf{V}_2|^2}{2R_2} = \frac{10000}{2 \cdot 1000} = 5\ \text{W} \qquad \text{(attiva assorbita)}$$

$$\mathbf{S}_{jX_2} = \frac{jX_2|\mathbf{I}_c|^2}{2} = 0$$

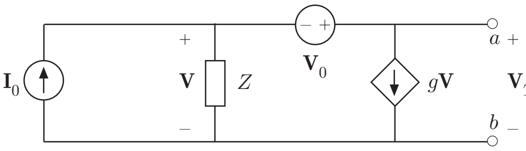
$$\mathbf{S}_{r\mathbf{I}_a} = \frac{r\mathbf{I}_a\mathbf{I}_c^*}{2} = 0$$

Soluzione dell'esercizio 3.17 (testo a pag. 19)

Innanzitutto conviene rappresentare il parallelo dell'induttore e del condensatore con un'unica impedenza equivalente Z il cui valore è dato da:

$$Z = (j\omega L)||\frac{1}{j\omega C} = \frac{j\omega L \dfrac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} = \frac{j\ 10^6 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}}{1 - 10^{12} \cdot 0.2 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = -j\,200\ \Omega$$

Per il calcolo della tensione di Thevenin bisogna lasciare i morsetti ab aperti e il circuito da cosiderare risulta:



Si ha:

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V} + \mathbf{V}_0$$

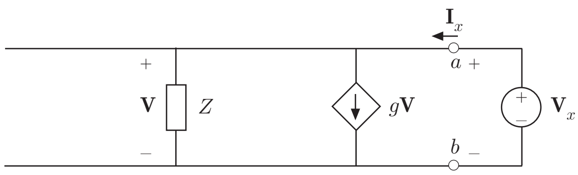
Inoltre

$$\mathbf{V} = Z(\mathbf{I}_0 - g\mathbf{V}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{V} = \frac{Z\mathbf{I}_0}{1+gZ}$$

che sostituita nella precedente permette di ricavare

$$\mathbf{V}_{Th} = \frac{Z\mathbf{I}_0}{1+gZ} + \mathbf{V}_0 = \frac{-j\,200 \cdot 0.5}{1 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot (-j\,200)} + 100 = \frac{-j\,100}{1-j} + 100 = 150 - j50\ \text{V} = 158.1\,\text{e}^{-j\,0.32}$$

Per il calcolo dell'impedenza Z_{Th} si devono spegnere i generatori indipendente e applicare ai morsetti ab una sorgente esterna (ad esempio di tensione), come mostrato nella seguente figura:



Si ha che

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V} = Z(\mathbf{I}_x - g\mathbf{V})$$

da cui

$$\mathbf{V}_x = \frac{Z\mathbf{I}_x}{1+gZ}$$

e quindi

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_x}{I_x} = \frac{Z}{1+gZ} = \frac{-j\,200}{1-j} = 100 - j\,100\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore è data da

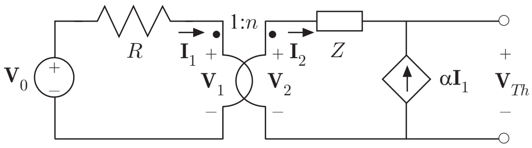
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{158.1^2}{8 \cdot 100} = 31.24\ \text{W}$$

Poiché il carico R_L risulta disadattato, esso assorbirà una potenza inferiore rispetto alla potenza disponibile. Il calcolo della potenza assorbita da R_L si può effettuare utilizzando la formula:

$$P_{R_L} = \frac{4R_{Th}R_L}{|Z_{Th}+R_L|^2}\ P_d = \frac{4 \cdot 100 \cdot 100}{|100 - j\,100 + 100|^2}\ P_d = \frac{4}{5}\ P_d = 25\ \text{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.18 (testo a pag. 19)

Per il calcolo della tensione equivalente di Thevenin si fa riferimento al circuito in figura, dove i morsetti ab vengono lasciati aperti:



Dall'analisi del circuito si vede che

$$\mathbf{I}_2 = -\alpha\mathbf{I}_1 = -\alpha n\mathbf{I}_2$$

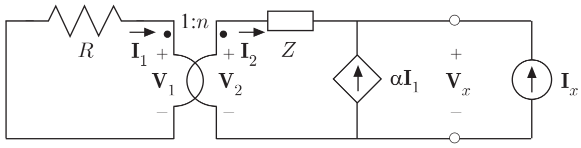
da cui

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 = 0$$

Pertanto si ha:

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_2 + Z\alpha\mathbf{I}_1 = \mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 = n\mathbf{V}_0 = 1 \text{ V}$$

Per il calcolo dell'impedenza Z_{Th} si devono spegnere i generatori indipendente e applicare ai morsetti ab una sorgente esterna (ad esempio di corrente), come mostrato nella seguente figura:



Si ha che

$$\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2 = -n(\mathbf{I}_x + \alpha\mathbf{I}_1) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{I}_1 = -\frac{n\mathbf{I}_x}{1+n\alpha} \qquad \mathbf{I}_2 = -\frac{\mathbf{I}_x}{1+n\alpha}$$

Inoltre

$$\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 = -nR\mathbf{I}_1 = \frac{n^2R\mathbf{I}_x}{1+n\alpha}$$

La tensione $\mathbf{V}_x$ è data da:

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_2 - Z\mathbf{I}_2 = \frac{n^2R\mathbf{I}_x}{1+n\alpha} + \frac{Z\mathbf{I}_x}{1+n\alpha}$$

e quindi

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_x}{I_x} = \frac{n^2R+Z}{1+n\alpha} = \frac{0.2^2 \cdot 3000 + 180 + j\,300}{1+0.2\cdot 10} = 100 + j\,100\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore è data da

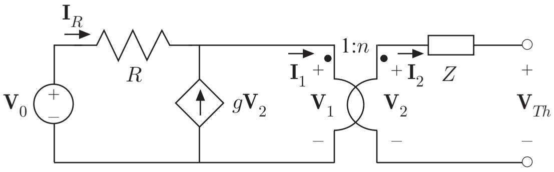
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{1^2}{8\cdot 100} = 1.25 \text{ mW}$$

Poiché il carico Z_L risulta disadattato ($Z_L \neq Z_{Th}^*$), esso assorbirà una potenza inferiore rispetto alla potenza disponibile. Il calcolo della potenza assorbita da Z_L si può effettuare utilizzando la formula:

$$P_{Z_L} = \frac{4R_{Th}R_L}{|Z_{Th}+Z_L|^2}\,P_d = \frac{4\cdot 100\cdot 100}{|100+j\,100+100+j\,100|^2}\,P_d = 0.5\,P_d = 0.625 \text{ mW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.19 (testo a pag. 19)

Per il calcolo della tensione equivalente di Thevenin si fa riferimento al circuito in figura, dove i morsetti ab vengono lasciati aperti:



Poiché i morsetti d'uscita sono aperti si ha

$$\mathbf{I}_2 = 0$$

e, di conseguenza,

$$\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2 = 0$$

Quindi

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_2$$

e la corrente che scorre sulla resistenza R è data da:

$$\mathbf{I}_R = -g\mathbf{V}_2$$

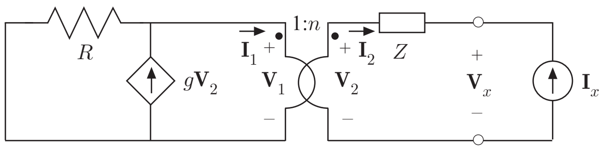
Pertanto si ha:

$$\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 = n(\mathbf{V}_0 - R\mathbf{I}_R) = n(\mathbf{V}_0 + gR\mathbf{V}_2)$$

da cui

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_2 = \frac{n\mathbf{V}_0}{1 - ngR} = \frac{5 \cdot 5}{1 - 5 \cdot 0.01 \cdot 10} = 50 \text{ V}$$

Per il calcolo dell'impedenza Z_{Th} si devono spegnere i generatori indipendente e applicare ai morsetti ab una sorgente esterna (ad esempio di corrente), come mostrato nella seguente figura:



Si ha che

$$\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2 = -n\mathbf{I}_x$$

Inoltre

$$\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 = nR(g\mathbf{V}_2 - \mathbf{I}_1) = nR(g\mathbf{V}_2 + n\mathbf{I}_x)$$

da cui

$$\mathbf{V}_2 = \frac{n^2 R\mathbf{I}_x}{1 - ngR}$$

Poiché la tensione $\mathbf{V}_x$ è data da:

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_2 - Z\mathbf{I}_2 = \frac{n^2 R\mathbf{I}_x}{1 - ngR} + Z\mathbf{I}_x$$

l'impedenza del circuito equivalente risulta:

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_x}{I_x} = \frac{n^2 R}{1 - ngR} + Z = \frac{5^2 \cdot 10}{1 - 5 \cdot 0.01 \cdot 10} + j\,500 = 500 + j\,500\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore è data da

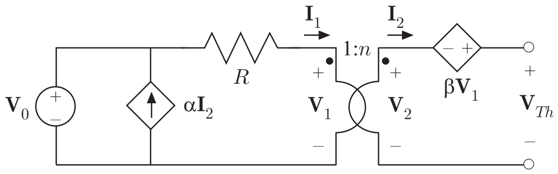
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{50^2}{8 \cdot 500} = 625 \text{ mW}$$

Poiché il carico Z_L risulta adattato ($Z_L = Z_{Th}^*$), esso assorbirà tutta la potenza disponibile:

$$P_{Z_L} = P_d = 625 \text{ mW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.20 (testo a pag. 20)

Per il calcolo della tensione equivalente di Thevenin si fa riferimento al circuito in figura, dove i morsetti ab vengono lasciati aperti:



Poiché i morsetti d'uscita sono aperti si ha

$$\mathbf{I}_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2 = 0$$

Dato che

$$\frac{\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_1}{R} = \mathbf{I}_1 = 0$$

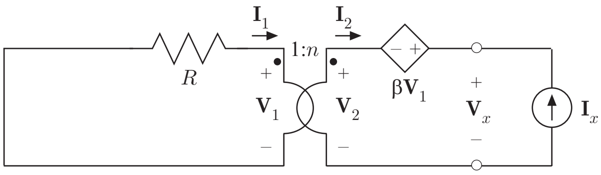
si ottiene

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0 = 10 \text{ mV}$$

da cui

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_2 + \beta\mathbf{V}_1 = (n+\beta)\mathbf{V}_1 = (n+\beta)\mathbf{V}_0 = (10 + j\,10)\mathbf{V}_0 = 100 + j\,100 \text{ mV}$$

Per il calcolo dell'impedenza Z_{Th} si devono spegnere i generatori indipendente e applicare ai morsetti ab una sorgente esterna (ad esempio di corrente), come mostrato nella seguente figura:



Si noti che il generatore comandato di corrente è stato eliminato poiché cortocircuitato e quindi ininfluente ai fini del funzionamento del circuito. Si ha che

$$\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2 = -n\mathbf{I}_x$$

$$\mathbf{V}_1 = -R\mathbf{I}_1 = nR\mathbf{I}_x$$

$$\mathbf{V}_2 = n\mathbf{V}_1 = n^2R\mathbf{I}_x$$

da cui

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_2 + \beta\mathbf{V}_1 = n^2R\mathbf{I}_x + \beta nR\mathbf{I}_x = (n+\beta)nR\mathbf{I}_x$$

l'impedenza del circuito equivalente risulta:

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_x}{I_x} = (n+\beta)nR = (10+j10)10 \cdot 5 = 500 + j\,500\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore è data da

$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{0.1^2 + 0.1^2}{8 \cdot 500} = 5\ \mu\text{W}$$

La potenza erogata al carico Z_L risulta:

$$P_{Z_L} = \frac{4R_gR_L}{|Z_g + Z_L|^2}\,P_d = \frac{4 \cdot 500 \cdot 500}{|500 + j\,500 + 500|^2}\,P_d = \frac{4}{|2+j|^2}\,P_d = \frac{4}{5}\,P_d = 4\ \mu\text{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.21 (testo a pag. 20)

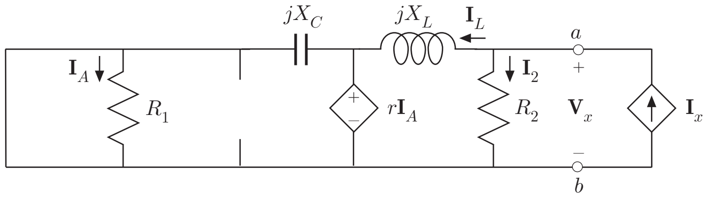
La tensione di Thevenin coincide con la tensione ai morsetti ab, quando questi vengono lasciati aperti, e quindi con la tensione su R_2.
Si osserva che la resistenza R_1 è sempre sottoposta alla tensione $\mathbf{V}_0$. Si ha quindi:

$$\mathbf{I}_A = \mathbf{V}_0/R_1$$

Inoltre, poiché R_2 e jX_L sono in serie e sono sottoposte alla tensione del generatore dipendente, la tensione su R_2 si ottiene con la formula del partitore di tensione:

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_{R_2} = \frac{R_2}{R_2 + jX_L}\, r\mathbf{I}_A = \frac{R_2}{R_2 + jX_L}\, \frac{r}{R_1}\, \mathbf{V}_0 = \frac{50}{50 + j50}\, \frac{400}{200}\, 50 = 50 - j50 \text{ V}$$

Per il calcolo dell'impedenza Z_{Th} si devono spegnere i generatori indipendenti e applicare ai morsetti ab una sorgente esterna (ad esempio di corrente), come mostrato nella seguente figura:



Si osserva che $\mathbf{I}_A = 0$ poiché la resistenza R_1 è cortocircuitata. Inoltre, la corrente $\mathbf{I}_x$ è la somma delle correnti che fluiscono in jX_L e in R_2. Si ha quindi

$$\mathbf{I}_x = \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_x}{R_2} + \frac{\mathbf{V}_x - r\mathbf{I}_A}{jX_L} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{jX_L}\right) \mathbf{V}_x$$

da cui

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_x}{I_x} = \frac{jX_L R_2}{R_2 + jX_L} = \frac{j50}{1 + j} = 25 + j\,25\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore è data da

$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{50^2 + 50^2}{8 \cdot 25} = 25 \text{ W}$$

Poiché il carico Z_L risulta disadattato, esso assorbirà una potenza inferiore rispetto alla potenza disponibile. Il calcolo della potenza assorbita da Z_L si può effettuare utilizzando la formula:

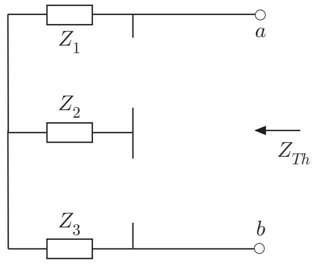
$$P_{Z_L} = \frac{4R_{Th}R_L}{|Z_{Th} + R_L|^2}\, P_d = \frac{4 \cdot 25 \cdot 25}{|25 + j25 + 25|^2}\, P_d = \frac{4}{5}\, P_d = 20 \text{ W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.22 (testo a pag. 20)

La tensione di Thevenin coincide con la tensione ai morsetti ab, quando questi vengono lasciati aperti. Si osserva che la corrente $\mathbf{I}_1$ scorre tutta sull'impedenza Z_1, mentre la corrente $\mathbf{I}_2$ scorre tutta sull'impedenza Z_3. Applicando la KVL alla maglia si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{Th} &= V_{ab} = Z_3\mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 - Z_1\mathbf{I}_1 \\
&= (50 - j200) \cdot 10^{-3} + 50 \cdot 10^{-3} + 30 \cdot 10^{-3} - (100 + j50) \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = 80 - j225 \text{ mV}
\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'impedenza Z_{Th} si devono spegnere i generatori indipendenti, come mostrato nella seguente figura:



Poiché non vi sono generatori dipendenti e osservando che Z_2 è ininfluente, per ispezione si ottiene:

$$Z_{Th} = Z_1 + Z_3 = 100 + j50 + 50 - j200 = 150 - j150\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore è data da

$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{0.08^2 + 0.225^2}{8 \cdot 150} = 48\ \mu\text{W}$$

Poiché il carico Z_L risulta disadattato ($Z_L \neq Z_{Th}^*$), esso assorbirà una potenza inferiore rispetto alla potenza disponibile. Per il calcolo della potenza assorbita si può, ad esempio, calcolare la corrente che fluisce su Z_L:

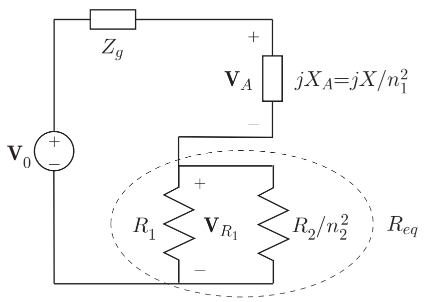
$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{V}_{Th}}{Z_L + Z_{Th}} = \frac{(80 - j225) \cdot 10^{-3}}{300 - j300}\ \text{A}$$

La potenza attiva assorbita da Z_L risulta quindi:

$$P_{Z_L} = \text{Re}\left\{\frac{\mathbf{V}_L \mathbf{I}_L^*}{2}\right\} = \text{Re}\left\{\frac{Z_L \mathbf{I}_L \mathbf{I}_L^*}{2}\right\} = \frac{|\mathbf{I}_L|^2}{2}\ \text{Re}\{Z_L\} = \frac{(80^2 + 225^2) \cdot 10^{-6}}{2 \cdot (300^2 + 300^2)} \cdot 150 = 24\ \mu\text{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.23 (testo a pag. 20)

Ricordando che all'ingresso di un trasformatore il carico riflesso è pari al carico sul secondario diviso per il quadrato del rapporto di trasformazione, il circuito si può semplificare come segue:



dove

$$X_A = \frac{X}{n_1^2} = \frac{100}{4} = 25\ \Omega \qquad\qquad R_{eq} = R_1 \parallel \frac{R_2}{n_2^2} = 100 \parallel \frac{10000}{100} = 100 \parallel 100 = 50\ \Omega$$

Poiché le resistenze R_1 e R_2/n_2^2 sono di uguale valore e collegate in parallelo, si può già anticipare che esse assorbiranno la stessa potenza e, di conseguenza, $P_{R_1} = P_{R_2}$.
Le tensioni $\mathbf{V}_A$ e $\mathbf{V}_{R_1}$ si calcolano con un partitore di tensione:

$$\mathbf{V}_A = \frac{jX_A}{R_{eq} + jX_A + Z_g}\ \mathbf{V}_0 = \frac{j25 \cdot 40}{50 + j25 + 50 + j50}\ \mathbf{V}_0 = \frac{25\ \text{e}^{90°} \cdot 40}{125\ \text{e}^{38.87°}} = 8\ \text{e}^{51.13°}\ \text{V}$$

$$\mathbf{V}_{R_1} = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + jX_A + Z_g}\ \mathbf{V}_0 = \frac{50 \cdot 40}{50 + j25 + 50 + j50}\ \mathbf{V}_0 = \frac{2000}{125\ \text{e}^{38.87°}} = 16\ \text{e}^{-38.87°}\ \text{V}$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{V}_X = n_1 \mathbf{V}_A = 16\ \text{e}^{51.13°}\ \text{V}$$

$$\mathbf{V}_{R_2} = n_2 \mathbf{V}_{R_1} = 160\ \text{e}^{-38.87°}\ \text{V}$$

Le potenze attive assorbite da R_1 e R_2 risultano:

$$P_{R_1} = P_{R_2} = \frac{|\mathbf{V}_{R_1}|^2}{2R_1} = \frac{16^2}{2 \cdot 100} = 1.28\ \text{W}$$

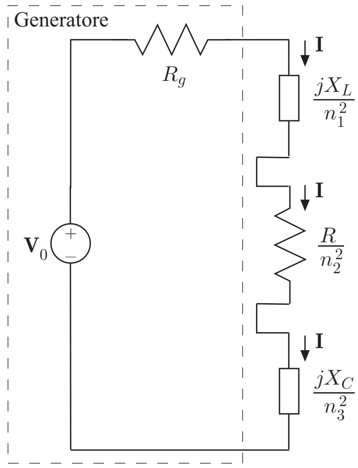
Soluzione dell'esercizio 3.24 (testo a pag. 21)

Indicando rispettivamente con

$$jX_L = j\omega L$$

$$jX_C = -j\,\frac{1}{\omega C}$$

le impedenze dell'induttore e del condensatore, dopo aver riportato i carichi sul primario dei tre trasformatori il circuito diventa quello mostrato in figura.



La condizione di adattamento è

$$\frac{jX_L}{n_1^2} + \frac{R}{n_2^2} + \frac{jX_C}{n_3^2} = Z_g^* = R_g$$

Separando la parte reale e quella immaginaria si ottiene:

$$\frac{R}{n_2^2} = R_g \qquad \Rightarrow \qquad n_2 = \sqrt{\frac{R}{R_g}} = \sqrt{\frac{500}{150}} \approx 1.826$$

$$\frac{X_L}{n_1^2} + \frac{X_C}{n_3^2} = \frac{\omega L}{n_1^2} - \frac{1}{n_3^2 \omega C} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{n_1^2}{n_3^2 \omega^2 L} = \frac{2^2}{20^2 \cdot (10^5)^2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ nF}$$

La corrente sul primario dei tre trasformatori è identica ed è data da:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_0}{2R_g} = \frac{300}{2 \cdot 150} = 1 \text{ A}$$

Le correnti che fluiscono sui tre elementi risultano:

$$\mathbf{I}_L = \frac{\mathbf{I}}{n_1} = 0.5 \text{ A} \qquad \mathbf{I}_R = \frac{\mathbf{I}}{n_2} = 0.5478 \text{ A} \qquad \mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{I}}{n_3} = 0.05 \text{ A}$$

Sulla resistenza si ha solo potenza attiva:

$$P_R = \frac{1}{2}\, R|\mathbf{I}_R|^2 = \frac{1}{2}\, 500 \cdot 0.5478^2 = 75 \text{ W}$$

Poiché il generatore è adattato, P_R deve coincide con la potenza disponibile del generatore, come si verifica facilmente:

$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_0|^2}{8R_g} = \frac{300^2}{8 \cdot 150} = 75 \text{ W} = P_R$$

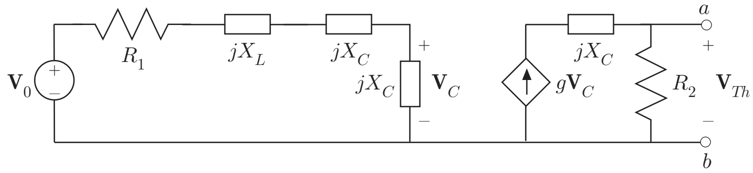
Sull'induttore e il condensatore si hanno solo potenze reattive, che devono essere uguali e opposte poiché i due carichi sul primario sono uguali e opposti e percorsi dalla stessa corrente. Si ha:

$$Q_L = \frac{1}{2}\, X_L|\mathbf{I}_L|^2 = \frac{1}{2}\, \omega L|\mathbf{I}_L|^2 = \frac{1}{2}\, 10^5 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot 0.5^2 = 1.25 \text{ VAR}$$

$$Q_C = \frac{1}{2}\, X_C|\mathbf{I}_C|^2 = -\frac{1}{2}\, \frac{|\mathbf{I}_C|^2}{\omega C} = -\frac{1}{2}\, \frac{0.05^2}{10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = -1.25 \text{ VAR}$$

Soluzione dell'esercizio 3.25 (testo a pag. 21)

Per il calcolo della tensione di Thevenin si considera il circuito in figura:



dove

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^{10} \cdot 10^{-12}} = -100\ \Omega$$

$$X_L = \omega L = 10^{10} \cdot 10^{-8} = 100\ \Omega = -X_C$$

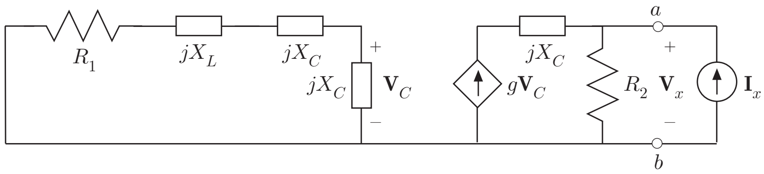
Poiché

$$\mathbf{V}_C = \frac{jX_C}{R_1 + jX_L + jX_C + jX_C}\,\mathbf{V}_0 = \frac{-j100}{100 - j100}\ 10\ \text{mV} = \frac{-j(1+j)}{2}\ 10\ \text{mV} = 5 - j5\ \text{mV}$$

si ha

$$\mathbf{V}_{Th} = R_2\, g\mathbf{V}_C = 50 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot (5 - j5)\ \text{mV} = 1 - j\ \text{mV}$$

Per il calcolo della tensione di Thevenin si spegne il generatore indipendente di tensione e si applica un generatore di prova ai morsetti ab (poiché il circuito include un generatore dipendente). Il circuito risultante è il seguente:



Poiché sulla maglia di sinistra non scorre corrente, si ha $\mathbf{V}_C = 0$. Pertanto il generatore comandato di corrente ha una corrente nulla e quindi tutta la $\mathbf{I}_x$ scorre su R_2. Si ha quindi

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_x}{\mathbf{I}_x} = \frac{R_2\mathbf{I}_x}{\mathbf{I}_x} = R_2 = 50\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore risulta

$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{|(1-j)\cdot 10^{-3}|^2}{8 \cdot 50} = \frac{2 \cdot 10^{-6}|^2}{400} = 5\ \text{nW}$$

e la potenza assorbita dal carico è

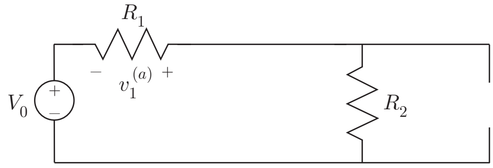
$$P_L = \frac{4R_{Th}R_L}{|Z_{Th} + Z_L|^2}\,P_d = \frac{4 \cdot 50 \cdot 50}{|50 + 50 + j100|^2}\,P_d = \frac{1}{2}\,P_d = 2.5\ \text{nW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.26 (testo a pag. 21)

Poiché nel circuito sono presenti sia generatori in regime stazionario che generatori sinusoidali alla pulsazione ω, è conveniente applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando separatamente il generatore di tensione da quelli di corrente.

Caso a: Generatore di tensione acceso e generatori di corrente spenti.

Spegnendo i generatori di corrente (che vengono rimpiazzati da circuiti aperti) e tenendo conto del fatto che l'induttore in regime stazionario si comporta come un cortocircuito, il circuito diventa:

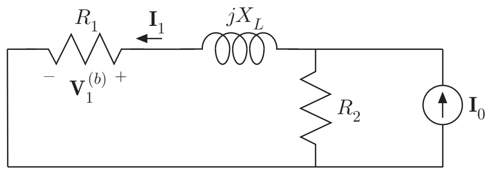


Poiché R_1 e R_2 risultano in serie e sono sottoposte alla tensione V_0, la tensione $v_{R_1}^{(a)}$ risulta:

$$v_1^{(a)} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2}\,V_0 = -\frac{V_0}{2} = -100\ \text{V}$$

Caso b: Generatore di tensione spento e generatori di corrente accesi.

In questo caso è il generatore di tensione ad essere spento e quindi sostituito da un cortocircuito. Passando al dominio dei fasori si ha il seguente circuito:



La reattanza dell'induttore risulta:

$$X_L = \omega L = 10^8 \cdot 10^{-6} = 100\ \Omega$$

e il fasore di corrente del generatore è:

$$\mathbf{I}_0 = I_0\, \mathrm{e}^{j\pi} = -1\ \mathrm{A}$$

Il fasore di tensione $\mathbf{V}_1^{(b)}$ si può calcolare considerando il partitore di corrente fra i due rami del circuito e osservando che $X_L = R_1 = R_2$:

$$\mathbf{V}_1^{(b)} = R_1\mathbf{I}_1 = R_1\, \frac{R_2}{R_2 + R_1 + jX_L}\, \mathbf{I}_0 = R_1\, \frac{1}{2+j}\, \mathbf{I}_0 = \frac{2-j}{5}\, R_1\mathbf{I}_0 = -40 + j20\ \mathrm{V} = 44.7\, \mathrm{e}^{j2.68}\ \mathrm{V}$$

Passando al dominio del tempo si ha:

$$v_1^{(b)} = 44.7\cos(\omega t + 2.68)\ \mathrm{V}$$

Combinando gli effetti si ha

$$v_1 = v_1^{(a)} + v_1^{(b)} = -100 + 44.7\cos(\omega t + 2.68)\ \mathrm{V}$$

La potenza istantanea è massima quando la tensione raggiunge il valore massimo di ampiezza

$$|v_1|_{max} = |-100 - 44.7| = 144.7\ \mathrm{V}$$

e corrisponde a

$$p_{1\,max} = \frac{|v_1|^2_{max}}{R_1} = \frac{144.7^2}{100} = 209.4\ \mathrm{W}$$

Analogamente la potenza istantanea è minima quando la tensione raggiunge il valore minimo di ampiezza

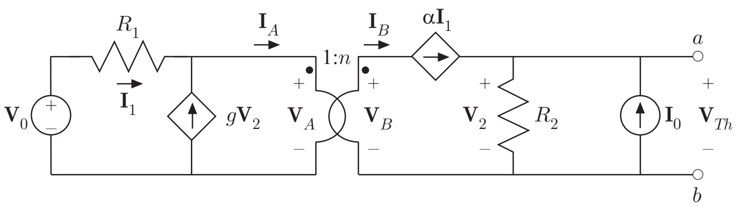
$$|v_1|_{min} = |-100 + 44.7| = 55.3\ \mathrm{V}$$

e corrisponde a

$$p_{1\,min} = \frac{|v_1|^2_{min}}{R_1} = \frac{55.3^2}{100} = 30.6\ \mathrm{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.27 (testo a pag. 22)

Per il calcolo della tensione di Thevenin si considera il circuito in figura:



Si ha

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_2 = R_2(\mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_B) = R_2(\mathbf{I}_0 + \alpha\mathbf{I}_1)$$

Per le proprietà del trasformatore ideale si ha

$$\mathbf{I}_1 + g\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_A = n\mathbf{I}_B = n\alpha\mathbf{I}_1$$

da cui

$$\mathbf{I}_1 = \frac{-g\mathbf{V}_2}{1-n\alpha} = -2g\mathbf{V}_2 = -2g\mathbf{V}_{Th}$$

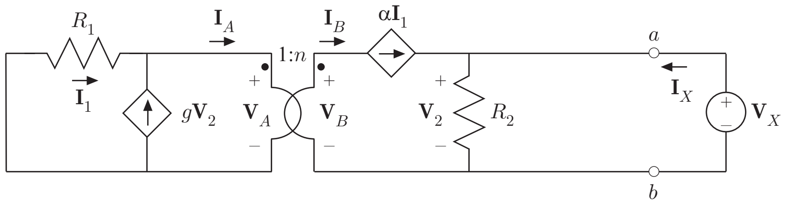
che sostituita nella prima relazione fornisce

$$\mathbf{V}_{Th} = R_2\mathbf{I}_0 - 2\alpha g R_2 \mathbf{V}_{Th}$$

da cui

$$\mathbf{V}_{Th} = \frac{R_2\mathbf{I}_0}{1+2\alpha g R_2} = \frac{1}{2+j2}\ \mathrm{V} \approx 0.354\ \mathrm{e}^{-j0.785}\ \mathrm{V}$$

Per il calcolo dell'impedenza di Thevenin si spengono i generatori indipendenti e si applica un generatore di prova ai morsetti ab (poiché il circuito include generatori dipendenti). Il circuito risultante è il seguente:



L'impedenza di Thevenin si ottiene come

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_X}{\mathbf{I}_X} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_X}$$

Per le proprietà del trasformatore si ha

$$\mathbf{I}_1 + g\mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_A = n\mathbf{I}_B = n\alpha\mathbf{I}_1$$

da cui si ricava

$$\mathbf{I}_1 = \frac{-g\mathbf{V}_2}{1-n\alpha} = -2g\mathbf{V}_2$$

Poiché

$$\mathbf{V}_2 = R_2(\mathbf{I}_X + \alpha\mathbf{I}_1) = R_2\mathbf{I}_X - 2\alpha g R_2\mathbf{V}_2$$

si ottiene

$$\mathbf{V}_2 = \frac{R_2\mathbf{I}_X}{1+2\alpha g R_2}$$

e quindi

$$Z_{Th} = \frac{R_2}{1+2\alpha g R_2} = \frac{50}{1+j}\ \Omega = 25(1-j)\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore risulta

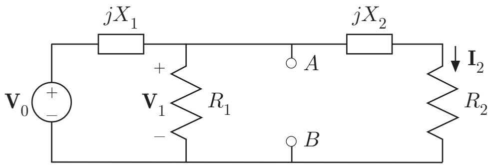
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{0.354^2}{8\cdot 25} = 0.627\ \mathrm{mW}$$

e la potenza assorbita dal carico è

$$P_L = \frac{4R_{Th}R_L}{|Z_{Th}+Z_L|^2}\,P_d = \frac{4\cdot 25\cdot 100}{|25-j25+100+j100|^2}\,P_d = \frac{10^4}{125^2+75^2}\,P_d = 0.47\,P_d = 0.295\ \mathrm{mW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.28 (testo a pag. 22)

Per il calcolo della potenza su R_2 conviene trovare la corrente che fluisce sulla resistenza. Con riferimento ai simboli definiti nella seguente figura



e osservando che $R_1 = 4X_2$, $R_2 = 2X_2$ e $X_1 = 8X_2$, si ha

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_1}{R_2 + jX_2} = \frac{\mathbf{V}_1}{X_2(2+j)}$$

Utilizzando la formula del partitore di tensione, si ha:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\dfrac{R_1(R_2+jX_2)}{R_1+R_2+jX_2}}{jX_1 + \dfrac{R_1(R_2+jX_2)}{R_1+R_2+jX_2}}\,\mathbf{V}_0 = \frac{R_1(R_2+jX_2)}{jX_1(R_1+R_2+jX_2)+R_1(R_2+jX_2)}\,\mathbf{V}_0$$

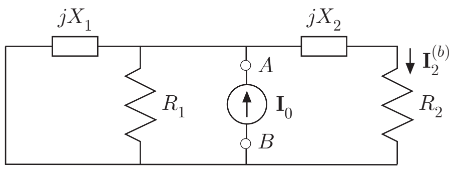
Sostituendo nella precedente e semplificando si ottiene:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{R_1}{jX_1(R_1+R_2+jX_2)+R_1(R_2+jX_2)}\,\mathbf{V}_0 = \frac{\mathbf{V}_0}{j13X_2} = -j\,\frac{260}{13\cdot 25} = -j\,0.8 \text{ A}$$

La potenza assorbita risulta quindi:

$$P = \frac{R_2|\mathbf{I}_2|^2}{2} = \frac{50\cdot 0.8^2}{2} = 16 \text{ W}$$

Nel caso in cui si colleghi ai morsetti AB il generatore di corrente, è possibile calcolare la nuova corrente su R_2 ($\mathbf{I}_2^{(b)}$) utilizzando la sovrapposizione degli effetti. Infatti, se i due generatori fossero stati inizialmente presenti nel circuito, per il calcolo della corrente dovuta al solo generatore di tensione, si sarebbe sostituito un circuito aperto ai morsetti AB. Pertanto, si considera il circuito con $\mathbf{V_0}$ spento, come mostrato nella seguente figura:



Considerando il partitore di corrente, si ha:

$$\mathbf{I}_2^{(b)} = \frac{\dfrac{R_1jX_1}{R_1+jX_1}}{R_2+jX_2+\dfrac{R_1jX_1}{R_1+jX_1}}\,\mathbf{I}_0 = \frac{R_1jX_1}{(R_2+jX_2)(R_1+jX_1)+R_1jX_1}\,\mathbf{I}_0 = \frac{8}{13}\,\mathbf{I}_0 = j\,0.8 \text{ A}$$

Poiché le due correnti $\mathbf{I}_2$ e $\mathbf{I}_2^{(b)}$ sono opposte, la loro sovrapposizione dà luogo ad una cancellazione della corrente su R_2, che quindi non assorbirà alcuna potenza, cioé:

$$P = 0$$

Se i morsetti del generatore di corrente vengono invertiti, è come se si alimentasse il circuito con corrente $-\mathbf{I}_0$. Pertanto, si ottiene una corrente su R_2 opposta alla precedente, cioé

$$\mathbf{I}_2^{(c)} = -\mathbf{I}_2^{(b)} = -j\,0.8 \text{ A}$$

In questo caso, la corrente totale che scorre su R_2 diventa

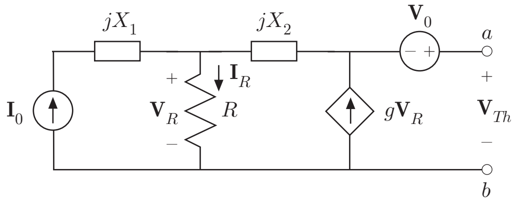
$$\mathbf{I}_2^{TOT} = \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_2^{(c)} = -j\,1.6 \text{ A}$$

e la potenza assorbita dalla resistenza diventa

$$P = \frac{R_2|\mathbf{I}_2^{TOT}|^2}{2} = \frac{50\cdot 1.6^2}{2} = 64 \text{ W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.29 (testo a pag. 22)

Per il calcolo della tensione di Thevenin si considera il circuito in figura:



Sul generatore $\mathbf{V}_0$ non scorre corrente perché il morsetto a è aperto. Pertanto, si ha

$$\mathbf{V}_R = R(\mathbf{I}_0 + g\mathbf{V}_R)$$

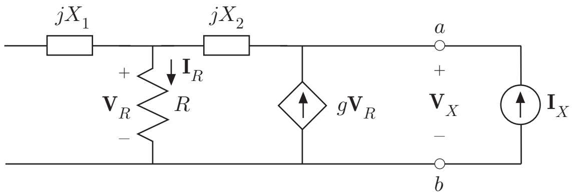
da cui

$$\mathbf{V}_R = \frac{R\mathbf{I}_0}{1 - gR} = \frac{90 \cdot 10^{-3}}{1 - 10 \cdot 10^{-3} \cdot 90} = 0.9 \text{ V}$$

La tensione di Thevenin risulta quindi

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_R + jX_2 g\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_0 = 0.9 + j100 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 0.9 + 0.1 \text{ V} = 1 + j0.9 \text{ V}$$

Per il calcolo dell'impedenza di Thevenin si spengono i generatori indipendenti e si applica un generatore di prova ai morsetti ab (poiché il circuito include generatori dipendenti). Il circuito risultante è il seguente:



L'impedenza di Thevenin si ottiene come $Z_{Th} = \mathbf{V}_X/\mathbf{I}_X$. La tensione sulla resistenza R risulta

$$\mathbf{V}_R = R(\mathbf{I}_X + g\mathbf{V}_R)$$

da cui

$$\mathbf{V}_R = \frac{R\mathbf{I}_X}{1 - gR} = 10R\mathbf{I}_X$$

Si ha quindi

$$\mathbf{V}_X = \mathbf{V}_R + jX_2(g\mathbf{V}_R + \mathbf{I}_X) = 10R\mathbf{I}_X + jX_2(10gR\mathbf{I}_X + \mathbf{I}_X)$$

e l'impedenza di Thevenin risulta

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_X}{\mathbf{I}_X} = 10R + jX_2(10gR + 1) = 900 + j1000 \ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore risulta

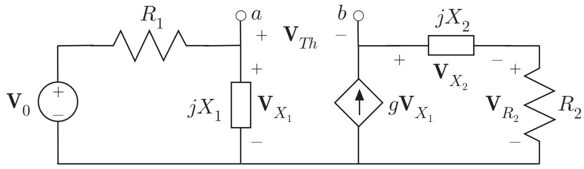
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{1^2 + 0.9^2}{8 \cdot 900} \approx 0.25 \text{ mW}$$

e la potenza assorbita dal carico è

$$P_L = \frac{4R_{Th}R_L}{|Z_{Th} + Z_L|^2}\, P_d = \frac{4 \cdot 900 \cdot 100}{|900 + j1000 + 100|^2}\, P_d = 0.18\, P_d = 45 \ \mu\text{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.30 (testo a pag. 22)

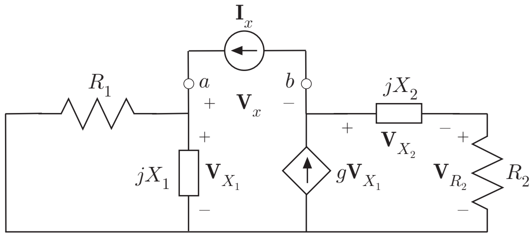
Per il calcolo della tensione di Thevenin si considera il circuito in figura:



Si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{Th} &= \mathbf{V}_{X_1} - (\mathbf{V}_{R_2} + \mathbf{V}_{X_2}) = \mathbf{V}_{X_1} - jX_2 g\mathbf{V}_{X_1} - R_2 g\mathbf{V}_{X_1} = \mathbf{V}_{X_1}(1 - jX_2 g - R_2 g) \\
&= \mathbf{V}_{X_1}(1 - j(-100)\cdot j0.01 - 50\cdot j0.01) = -j0.5\mathbf{V}_{X_1} \\
&= -j0.5\,\frac{jX_1}{R_1 + jX_1}\,\mathbf{V}_0 = -j0.5\,\frac{j200}{200 + j200}\,\mathbf{V}_0 = 0.25(1-j)\,\mathbf{V}_0 = 2.5\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-j\pi/4}\ \mathrm{mV}
\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'impedenza di Thevenin si spegne il generatore indipendente di tensione e si applica un generatore di prova ai morsetti ab (poiché il circuito include generatori dipendenti). Il circuito risultante è il seguente:



In questo caso la tensione $\mathbf{V}_x$ è data da

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_x &= \mathbf{V}_{X_1} - (\mathbf{V}_{R_2} + \mathbf{V}_{X_2}) = \mathbf{V}_{X_1} - (g\mathbf{V}_{X_1} - \mathbf{I}_x)(R_2 + jX_2) \\
&= -j0.5\mathbf{V}_{X_1} + (R_2 + jX_2)\mathbf{I}_x = \left(-j0.5\,\frac{R_1 jX_1}{R_1 + jX_1} + R_2 + jX_2\right)\mathbf{I}_x
\end{aligned}$$

e quindi

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_x}{\mathbf{I}_x} = -j0.5\,\frac{200\cdot j200}{200 + j200} + 50 - j100 = 100 - j150\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore risulta

$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{(2.5\sqrt{2}\cdot 10^{-3})^2}{8\cdot 100} = 15.625\ \mathrm{nW}$$

e la potenza assorbita dal carico è

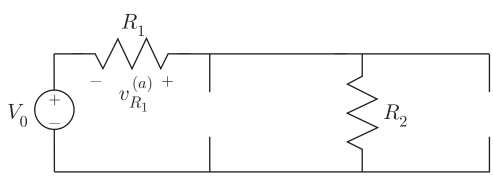
$$P_L = \frac{4R_{Th}R_L}{|Z_{Th} + Z_L|^2}\,P_d = \frac{4\cdot 50\cdot 100}{|50 - j50 + 100 - j150|^2}\,P_d = \frac{8}{|3 - j4|^2}\,P_d = 0.32\,P_d = 5\ \mathrm{nW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.31 (testo a pag. 23)

Poiché nel circuito sono presenti sia generatori in regime stazionario che generatori sinusoidali alla pulsazione ω, è conveniente applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando separatamente il generatore di tensione da quelli di corrente.

<u>Caso a</u>: Generatore di tensione acceso e generatori di corrente spenti.

Spegnendo i generatori di corrente (che vengono rimpiazzati da circuiti aperti) e tenendo conto del fatto che l'induttore in regime stazionario si comporta come un cortocircuito, il circuito diventa:

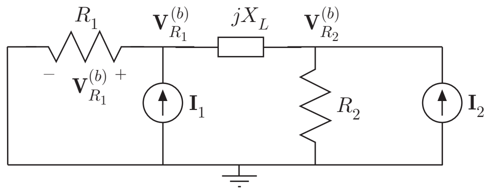


Poiché R_1 e R_2 risultano in serie e sono sottoposte alla tensione V_0, la tensione $v_{R_1}^{(a)}$ risulta:

$$v_{R_1}^{(a)} = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_0 = -\frac{V_0}{2} = -100 \text{ V}$$

<u>Caso b</u>: Generatore di tensione spento e generatori di corrente accesi.

In questo caso è il generatore di tensione ad essere spento e quindi sostituito da un cortocircuito. Poiché i due generatori di corrente operano alla stessa pulsazione, conviene passare al dominio dei fasori per risolvere il circuito:



La reattanza dell'induttore risulta:

$$X_L = \omega L = 10^8 \cdot 10^{-6} = 100\ \Omega$$

e i fasori di corrente sono:

$$\mathbf{I}_1 = I_1\, \mathrm{e}^{j3\pi/4} = -1 + j \text{ A} \qquad\qquad \mathbf{I}_2 = I_2\, \mathrm{e}^{-j\pi/2} = -j \text{ A}$$

Per il calcolo del fasore di tensione $\mathbf{V}_{R_1}^{(b)}$ si può applicare il metodo di analisi nodale. Imponendo la KCL ai due nodi superiori e osservando che $X_L = R_1 = R_2$, si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{V}_{R_1}^{(b)}}{R_1} - \mathbf{I}_1 + \dfrac{\mathbf{V}_{R_1}^{(b)} - \mathbf{V}_{R_2}^{(b)}}{jX_L} = 0 \\ \dfrac{\mathbf{V}_{R_2}^{(b)} - \mathbf{V}_{R_1}^{(b)}}{jX_L} + \dfrac{\mathbf{V}_{R_2}^{(b)}}{R_2} - \mathbf{I}_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} j\mathbf{V}_{R_1}^{(b)} - jX_L\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_{R_1}^{(b)} - \mathbf{V}_{R_2}^{(b)} = 0 \\ \mathbf{V}_{R_2}^{(b)} - \mathbf{V}_{R_1}^{(b)} + j\mathbf{V}_{R_2}^{(b)} - jX_L\mathbf{I}_2 = 0 \end{cases}$$

Ricavando $\mathbf{V}_{R_2}$ dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ha

$$\left(j\mathbf{V}_{R_1}^{(b)} - jX_L\mathbf{I}_1 + \mathbf{V}_{R_1}^{(b)}\right)(1+j) - \mathbf{V}_{R_1}^{(b)} - jX_L\mathbf{I}_2 = 0$$

da cui

$$\mathbf{V}_{R_1}^{(b)} = jX_L\,\frac{\mathbf{I}_1(1+j) + \mathbf{I}_2}{(1+j)^2 - 1} = j100\,\frac{(-1+j)(1+j) - j}{(1+j)^2 - 1} = -100 \text{ V} = 100\,\mathrm{e}^{j\pi} \text{ V}$$

Passando al dominio del tempo si ha:

$$v_{R_1}^{(b)} = 100\cos(\omega t + \pi) \text{ V} = -100\cos(\omega t) \text{ V}$$

Combinando gli effetti si ha

$$v_{R_1} = v_{R_1}^{(a)} + v_{R_1}^{(b)} = -100 - 100\cos(\omega t) \text{ V}$$

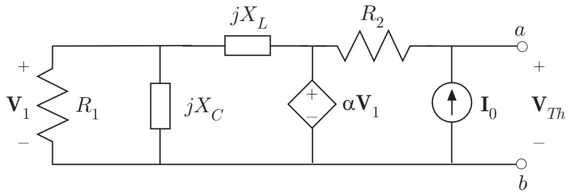
La potenza istantanea assorbita da R_1 nei due istanti di tempo risulta:

$$p_{R_1}(t_1) = \frac{v_{R_1}^2(t_1)}{R_1} = \frac{(-100 - 100\cos(10^8 \cdot 0))^2}{100} = \frac{(-100-100)^2}{100} = 400 \text{ W}$$

$$p_{R_1}(t_2) = \frac{v_{R_1}^2(t_2)}{R_1} = \frac{(-100 - 100\cos(10^8 \cdot 31.4 \cdot 10^{-9}))^2}{100} \approx \frac{(-100+100)^2}{100} = 0$$

Soluzione dell'esercizio 3.32 (testo a pag. 23)

Per il calcolo della tensione di Thevenin si considera il circuito in figura:



dove

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{2 \cdot 10^7 \cdot 10^{-9}} = -50\ \Omega \qquad\qquad X_L = \omega L = 2 \cdot 10^7 \cdot 2.5 \cdot 10^{-6} = 50\ \Omega$$

La tensione $\mathbf{V}_1$ si ottiene facendo il partitore della tensione $\alpha\mathbf{V}_1$:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\dfrac{R_1 jX_C}{R_1 + jX_C}}{\dfrac{R_1 jX_C}{R_1 + jX_C} + jX_L}\,\alpha\mathbf{V}_1 = \frac{1}{1 + jX_L \dfrac{R_1 + jX_C}{R_1 jX_C}}\,\alpha\mathbf{V}_1 = \frac{1}{1 + 50\dfrac{50 - j50}{-50^2}}\,10\mathbf{V}_1 = -j10\mathbf{V}_1$$

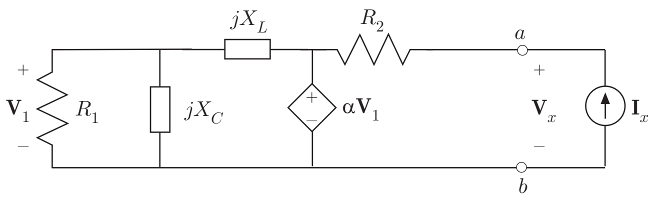
da cui

$$\mathbf{V}_1 = 0$$

e quindi

$$\mathbf{V}_{Th} = R_2 \mathbf{I}_0 = 1\ \text{kV}$$

Per il calcolo dell'impedenza di Thevenin si spegne il generatore indipendente di tensione e si applica un generatore di prova ai morsetti ab (poiché il circuito include generatori dipendenti). Il circuito risultante è il seguente:



Anche in questo caso la tensione $\mathbf{V}_1$ si calcola facendo il partitore di $\alpha\mathbf{V}_1$, ottenendo esattamente lo stesso risultato del caso precedente, cioè $\mathbf{V}_1 = 0$. Si ha pertanto

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_x}{\mathbf{I}_x} = \frac{R_2 \mathbf{I}_x}{\mathbf{I}_x} = R_2 = 100\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore risulta

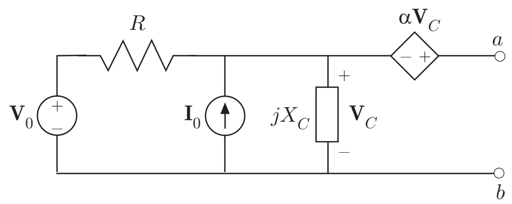
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{1000^2}{8 \cdot 100} = 1250\ \text{W}$$

e la potenza assorbita dal carico è

$$P_L = \frac{4R_{Th}R_L}{|Z_{Th} + Z_L|^2}\,P_d = \frac{4 \cdot 100 \cdot 50}{|100 + 50 - j150|^2}\,P_d = \frac{4}{9}\,P_d = 0.32\,P_d = 555.56\ \text{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.33 (testo a pag. 23)

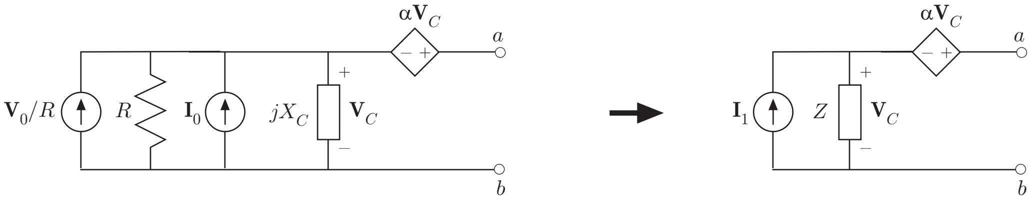
Nel dominio dei fasori, il condensatore viene sostituito dalla sua impedenza, come mostrato nel circuito in figura:



dove

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^8 \cdot 50 \cdot 10^{-12}} = -200\ \Omega$$

Per la sua particolare topologia, applicando la trasformazione dei generatori si può semplificare il circuito come segue:



dove

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{V}_0}{R} = 5 \cdot 10^{-3} + \frac{5}{200} = 30 \text{ mA}$$

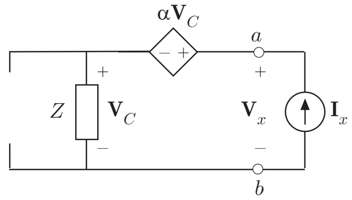
e

$$Z = \frac{R \cdot jX_C}{R + jX_C} = \frac{200 \cdot (-j200)}{200 - j200} = \frac{-j200}{1-j} = 100(1-j)\ \Omega$$

La tensione di Thevenin coincide con V_{ab} e risulta

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_C + \alpha \mathbf{V}_C = (1+\alpha) Z \mathbf{I}_1 = (1+4) \cdot 100(1-j) \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 15(1-j) \text{ V}$$

Per il calcolo dell'impedenza di Thevenin si spegne il generatore indipendente di corrente e si applica un generatore di prova ai morsetti ab (poiché il circuito include generatori dipendenti). Il circuito risultante è il seguente:



L'impedenza di Thevenin risulta

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_x}{\mathbf{I}_x} = \frac{\mathbf{V}_C + \alpha \mathbf{V}_C}{\mathbf{I}_x} = \frac{(1+\alpha) Z \mathbf{I}_x}{\mathbf{I}_x} = 5Z = 500(1-j)\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore risulta

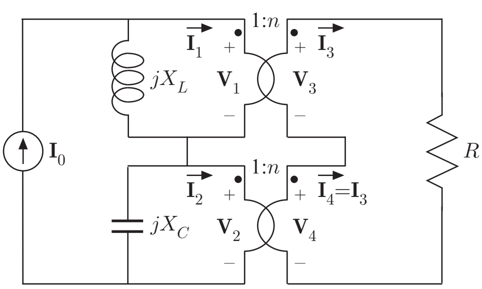
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8 R_{Th}} = \frac{|15(1-j)|^2}{8 \cdot 500} = 112.5 \text{ mW}$$

e la potenza assorbita dal carico è

$$P_L = \frac{4 R_{Th} R_L}{|Z_{Th} + Z_L|^2}\, P_d = \frac{4 \cdot 500 \cdot 500}{|500 - j500 + 500|^2}\, P_d = \frac{4}{|2-j|^2}\, P_d = \frac{4}{5}\, P_d = 90 \text{ mW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.34 (testo a pag. 23)

Con riferimento ai simboli indicati nella seguente figura



si ha

$$X_L = \omega L = 10^7 \cdot 2 \cdot 10^-6 = 20\ \Omega \qquad X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{10^7 \cdot 10 \cdot 10^-9} = -10\ \Omega$$

Per le proprietà del trasformatore ideale si ha

$$\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_3 \qquad \mathbf{I}_2 = n\mathbf{I}_4 = n\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_1$$

La corrente sulla resistenza R è $\mathbf{I}_3$, e si ottiene come

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4}{R} = \frac{n\mathbf{V}_1 + n\mathbf{V}_2}{R} = n\,\frac{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2}{R}$$

Poiché si ha

$$\mathbf{V}_1 = jX_L(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_1) = jX_L(\mathbf{I}_0 - n\mathbf{I}_3)$$

$$\mathbf{V}_2 = jX_C(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_2) = jX_C(\mathbf{I}_0 - n\mathbf{I}_3)$$

sostituendo si ottiene

$$\mathbf{I}_3 = n\,\frac{\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2}{R} = n\,\frac{jX_L(\mathbf{I}_0 - n\mathbf{I}_3) + jX_C(\mathbf{I}_0 - n\mathbf{I}_3)}{R}$$

da cui si ricava

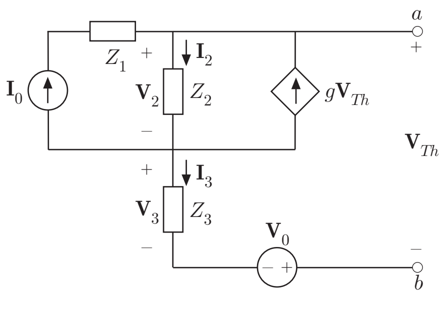
$$\mathbf{I}_3 = \frac{jn(X_L + X_C)}{R + jn^2(X_L + X_C)}\,\mathbf{I}_0 = \frac{j10(20-10)}{1000 + j10^2(20-10)}\,\mathbf{I}_0 = \frac{j}{10 + j10}\,\mathbf{I}_0 = 2.5(1+j)\ \text{mA}$$

Quindi la potenza attiva assorbita da R è

$$P_R = \frac{1}{2}\,R|\mathbf{I}_3|^2 = \frac{1}{2}\,1000\,|2.5(1+j)10^{-3}|^2 = \frac{1}{2}\,1000 \cdot 2.5^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 6.25\ \text{mW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.35 (testo a pag. 24)

Per il calcolo della tensione di Thevenin si lasciano i morsetti ab a vuoto e si calcola direttamente la tensione ai loro capi. Con riferimento ai simboli indicati nel circuito nella seguente figura



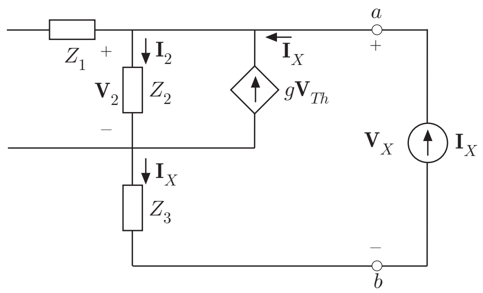
si ha

$$\mathbf{V}_{Th} = -\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_2 = -\mathbf{V}_0 + Z_3\mathbf{I}_3 + Z_2(\mathbf{I}_0 + g\mathbf{V}_{Th})$$

Osservando che $\mathbf{I}_3 = 0$ ed esplicitando rispetto a $\mathbf{V}_{Th}$ si ottiene

$$\mathbf{V}_{Th} = \frac{Z_2\mathbf{I}_0 - \mathbf{V}_0}{1 - gZ_2} = \frac{(100 - j100)\cdot 0.1 + j10}{1 + 5(1-j)10^{-3}(100 - j100)} = \frac{10}{1-j} = 5(1+j)\ \text{V} = 5\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}\ \text{V}$$

Per il calcolo dell'impedenza equivalente si spengono i generatori indipendenti $\mathbf{I}_0$ e $\mathbf{V}_0$. Inoltre, essendo presente un generatore dipendente, si collega ai morsetti ab un generatore di prova, come mostrato nella seguente figura, e si calcola l'impedenza equivalente come $Z_{Th} = \mathbf{V}_X/\mathbf{I}_X$.



Si ha che

$$\mathbf{V}_X = Z_2\mathbf{I}_2 + Z_3\mathbf{I}_3 = Z_2(\mathbf{I}_X + g\mathbf{V}_X) + Z_3\mathbf{I}_X$$

da cui si ricava

$$\mathbf{V}_X = \frac{Z_2\mathbf{I}_X + Z_3\mathbf{I}_X}{1 - gZ_2}$$

e quindi

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_X}{\mathbf{I}_X} = \frac{Z_2 + Z_3}{1 - gZ_2} = \frac{100 - j100 + 100 + j100}{1 - j} = \frac{200(1+j)}{2} = 100 + j100\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore è

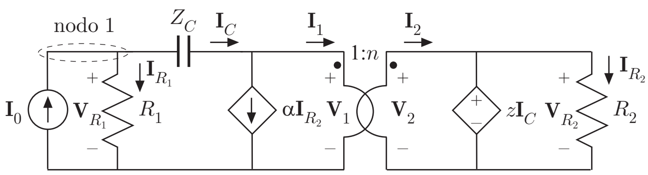
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{|5\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j\pi/4}|^2}{8 \cdot 100} = 62.5\ \mathrm{mW}$$

La potenza erogata al carico Z_L è data da

$$P_L = \frac{4R_{Th}R_L}{|Z_{Th} + Z_L|^2}\, P_d = \frac{4 \cdot 100 \cdot 50}{|100 + j100 + 50 + j50|^2}\, P_d = \frac{4}{9}\, P_d = 27.8\ \mathrm{mW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.36 (testo a pag. 24)

Nella soluzione si farà riferimento ai simboli indicati nella seguente figura:



Innanzitutto l'impedenza del condensatore è

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\,\frac{1}{2 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-12}} = -j\,100\ \Omega$$

Scrivendo la KCL al nodo 1 (vedi figura) si ha

$$-\mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_{R_1} + \mathbf{I}_C = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{I}_{R_1} = \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_C$$

Applicando la KVL alla maglia che include R_1, Z_C e $\mathbf{V}_1$, e osservando che

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{V}_2}{n} = \frac{z\mathbf{I}_C}{n}$$

si ottiene

$$-R_1\mathbf{I}_{R_1} + Z_C\mathbf{I}_C + \mathbf{V}_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -R_1(\mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_C) + Z_C\mathbf{I}_C + \frac{z\mathbf{I}_C}{n} = 0$$

da cui si ricava

$$\mathbf{I}_C = \frac{R_1\mathbf{I}_0}{R_1 + Z_C + \frac{z}{n}} = \frac{100 \cdot 2}{100 - j100 + \frac{j200}{4}} = \frac{4}{2 - j} = \frac{4}{5}\,(2 + j)\ \mathrm{A}$$

Si nota inoltre che la tensione su $\mathbf{V}_{R_2}$ coincide con quella del generatore comandato di tensione, e quindi la potenza assorbita da R_2 risulta

$$P_{R_2} = \frac{|\mathbf{V}_{R_2}|^2}{2R_2} = \frac{|z\mathbf{I}_C|^2}{2R_2} = \frac{|z|^2|\mathbf{I}_C|^2}{2R_2} = \frac{200^2 \cdot \frac{16}{25} \cdot 5}{2 \cdot 800} = 80 \text{ W}$$

La corrente su R_1 risulta

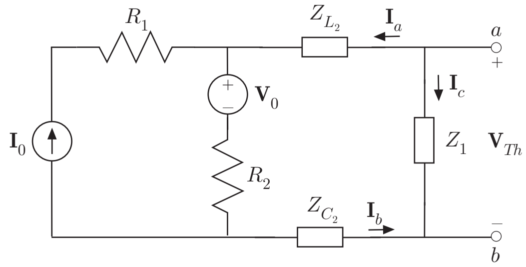
$$\mathbf{I}_{R_1} = \mathbf{I}_0 - \mathbf{I}_C = 2 - \frac{4}{5}(2+j) = \frac{2-j4}{5}$$

da cui

$$P_{R_1} = \frac{R_1|\mathbf{I}_{R_1}|^2}{2} = \frac{100 \cdot \frac{20}{25}}{2} = 40 \text{ W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.37 (testo a pag. 24)

Per il calcolo della tensione di Thevenin si considera il seguente circuito, nel quale i morsetti ab vengono lasciati a vuoto e gli elementi reattivi sono sostituiti dalle corrispondenti impedenze:



Le impedenze degli elementi reattivi sono:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left(j\omega C_1 + \frac{1}{j\omega L_1}\right)^{-1} = \left(j5 \cdot 10^9 \cdot 10^{-12} - j\,\frac{1}{5 \cdot 10^9 \cdot 40 \cdot 10^{-9}}\right)^{-1} \\ &= (j5 \cdot 10^{-3} - j5 \cdot 10^{-3})^{-1} = \infty \\ Z_{L_2} &= j\omega L_2 = j5 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-9} = j10\ \Omega \\ Z_{C_2} &= \frac{1}{j\omega C_2} = -j\frac{1}{5 \cdot 10^9 \cdot 20 \cdot 10^{-12}} = -j10\ \Omega \end{aligned}$$

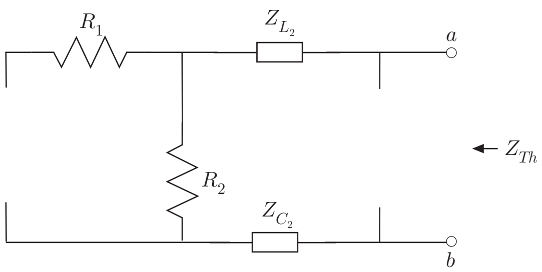
Poiché il carico Z_1 si comporta come un circuito aperto, si ha $\mathbf{I}_c = 0$. Pertanto, anche le correnti $\mathbf{I}_a$ e $\mathbf{I}_b$ che fluiscono sui carichi Z_{L2} e Z_{C_2} sono nulle (perché i morsetti a e b sono aperti). La corrente $\mathbf{I}_0$ scorre tutta attraverso la resistenza R_2, e applicando la KVL alla maglia di destra si ottiene

$$-R_2\mathbf{I}_0 - \mathbf{V}_0 - (Z_{L2} + R_2)\mathbf{I}_a + \mathbf{V}_{Th} - Z_{C_2}\mathbf{I}_b = 0$$

da cui

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_0 + R_2\mathbf{I}_0 = 7 + j\,5 \text{ V}$$

Per il calcolo dell'impedenza equivalente di Thevenin si spengono i generatori indipendenti, sostituendo con un circuito aperto il generatore di corrente e con un corto circuito quello di tensione, e il circuito risultante (tenendo conto che Z_1 può essere omessa) diventa:



Si vede immediatamente che

$$Z_{Th} = Z_{L_2} + R_2 + Z_{C_2} = j10 + 200 - j10 = 200\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore è quindi

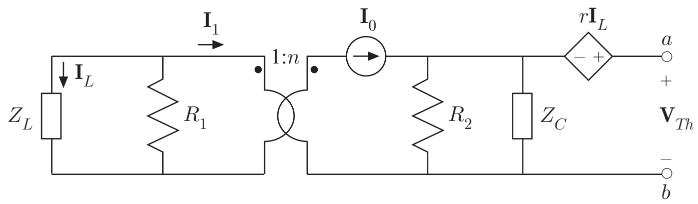
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{49+25}{8 \cdot 200} = 46.25\ \text{mW}$$

La potenza assorbita dal carico Z_L quando viene collegato ai morsetti ab risulta

$$P_{Z_L} = \frac{4R_L R_{Th}}{|Z_L + Z_{Th}|^2} P_d = \frac{4 \cdot 200 \cdot 200}{|200 + j200 + 200|^2} P_d = \frac{4}{|2+j|^2} P_d = \frac{4}{5} P_d = 37\ \text{mW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.38 (testo a pag. 25)

Per il calcolo della tensione di Thevenin si considera il seguente circuito, nel quale i morsetti ab vengono lasciati a vuoto e gli elementi reattivi sono sostituiti dalle corrispondenti impedenze:



Le impedenze degli elementi reattivi sono:

$$\begin{aligned} Z_L &= j\omega L = j10^8 \cdot 1.5 \cdot 10^{-6} = j150\ \Omega \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{10^8 \cdot 50 \cdot 10^{-12}} = -j200\ \Omega \end{aligned}$$

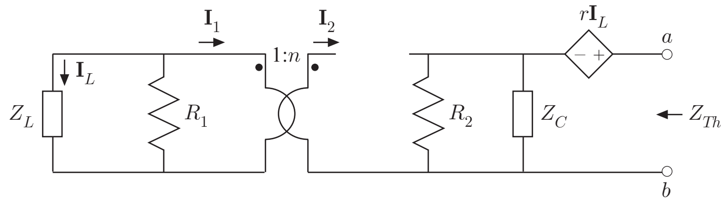
Considerando che per le proprietà del trasformatore $\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_0 = 10$ mA e applicando la formula del partitore di corrente, la corrente $\mathbf{I}_L$ risulta

$$\mathbf{I}_L = \frac{R_1}{R_1 + Z_L}(-\mathbf{I}_1) = \frac{50}{50 + j150}(-10 \cdot 10^{-3}) = \frac{1 - j3}{10}(-10 \cdot 10^{-3}) = -1 + j3\ \text{mA}$$

La tensione di Thevenin risulta quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{Th} &= \frac{R_2 Z_C}{R_2 + Z_C}\mathbf{I}_0 + r\mathbf{I}_L = \frac{200 \cdot (-j200)}{200 - j200}\, 2 \cdot 10^{-3} + 40 \cdot (-1 + j3) \cdot 10^{-3} \\ &= (-j200 + 200 - 40 + j120) \cdot 10^{-3} = 0.16 - j\,0.08\ \text{V} \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'impedenza equivalente di Thevenin si spegne il generatore indipendente di corrente, sostituendolo con un circuito aperto. Il circuito risultante diventa:



Si osserva che $\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2 = 0$ e quindi $\mathbf{I}_L = 0$. Pertanto il generatore dipendente ha tensione nulla e può essere considerato un cortocircuiti. In conclusione, guardando dai morsetti ab si vede come impedenza il parallelo fra R_2 e Z_C:

$$Z_{Th} = \frac{R_2 Z_C}{R_2 + Z_C} = \frac{200 \cdot (-j200)}{200 - j200} = \frac{-j200}{1 - j} = -j100(1 + j) = 100 - j100\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore è quindi

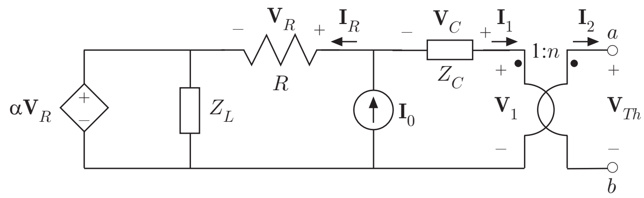
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{0.16^2 + 0.08^2}{8 \cdot 100} = 40\ \mu\text{W}$$

La potenza assorbita dal carico Z_L quando viene collegato ai morsetti ab risulta

$$P_{Z_L} = \frac{4R_L R_{Th}}{|Z_L + Z_{Th}|^2}\, P_d = \frac{4 \cdot 50 \cdot 100}{|50 + 100 - j100|^2}\, P_d = 0.6154\, P_d = 24.62\ \mu\text{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.39 (testo a pag. 25)

Per il calcolo della tensione di Thevenin si considera il seguente circuito, nel quale i morsetti ab vengono lasciati a vuoto e gli elementi reattivi sono sostituiti dalle corrispondenti impedenze:



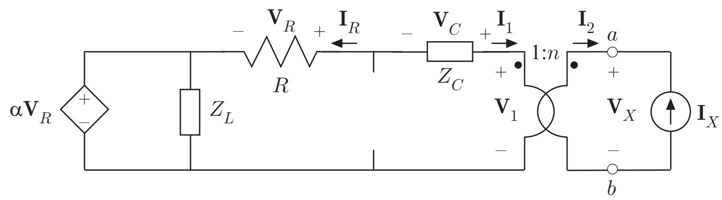
La tensione equivalente di Thevenin risulta

$$\mathbf{V}_{Th} = n\mathbf{V}_1 = n(\alpha\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_C) = n(1+\alpha)R\mathbf{I}_R - nZ_C\mathbf{I}_1$$

Osservando che $\mathbf{I}_1 = n\mathbf{I}_2 = 0$ e che quindi tutta la corrente del generatore scorre sulla resistenza ($\mathbf{I}_R = \mathbf{I}_0$) si ottiene

$$\mathbf{V}_{Th} = n(1+\alpha)R\mathbf{I}_0 = 5 \cdot (1+3) \cdot 100 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 4\ \text{V}$$

Per il calcolo dell'impedenza equivalente di Thevenin si spegne il generatore indipendente di corrente, sostituendolo con un circuito aperto. Poiché nel circuito è presente un generatore dipendente, per il calcolo dell'impedenza si aggiunge un generatore di prova, ad esempio di corrente come indicato nella seguente figura:



Per le proprietà del trasformatore e tenendo conto che $\mathbf{I}_R = -\mathbf{I}_1 = -n\mathbf{I}_2 = n\mathbf{I}_X$ si ha

$$\mathbf{V}_X = n\mathbf{V}_1 = n(\alpha\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_C) = n\left[(1+\alpha)R\, n\mathbf{I}_X + Z_C\, n\mathbf{I}_X)\right] = n^2\left[(1+\alpha)R + Z_C\right]\mathbf{I}_X$$

da cui, considerando che l'impedenza del condensatore è

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{10^8 \cdot 50 \cdot 10^{-12}} = -j200\ \Omega$$

si ha

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_X}{\mathbf{I}_X} = n^2\left[(1+\alpha)R + Z_C\right] = 100R + 25Z_C = 10 - j5\ \text{k}\Omega$$

La potenza disponibile del generatore è quindi

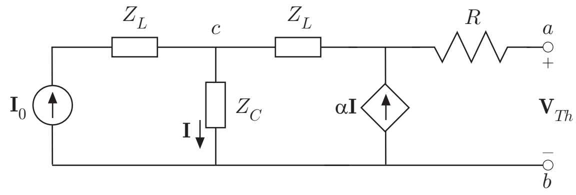
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{4^2}{8 \cdot 10000} = 0.2\ \text{mW}$$

La potenza assorbita dal carico Z_L quando viene collegato ai morsetti ab risulta

$$P_{Z_L} = \frac{4R_L R_{Th}}{|Z_L + Z_{Th}|^2}\, P_d = \frac{4 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^3}{|(30 + j5 + 10 - j5) \cdot 10^3|^2}\, P_d = \frac{1200}{1600}\, P_d = 0.75\, P_d = 0.15\ \text{mW}$$

Soluzione dell'esercizio 3.40 (testo a pag. 25)

Per il calcolo della tensione di Thevenin si considera il seguente circuito, nel quale i morsetti ab vengono lasciati a vuoto e gli elementi reattivi sono sostituiti dalle corrispondenti impedenze:



Le impedenze degli elementi reattivi sono:

$$Z_L = j\omega L = j10^8 \cdot 10^{-6} = j100\ \Omega$$
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{10^8 \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = -j100\ \Omega$$

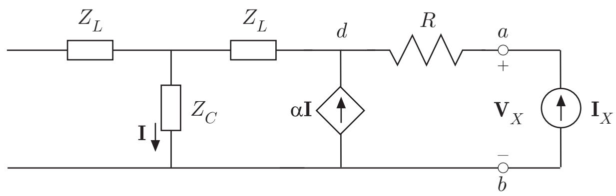
Tenendo conto del fatto che sulla resistenza non scorre corrente, applicando la KCL al nodo c si ottiene

$$\mathbf{I}_0 + \alpha\mathbf{I} = \mathbf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{I}_0}{1-\alpha} = -\frac{\mathbf{I}_0}{2} = -100\ \mu\text{A}$$

La tensione di Thevenin risulta quindi

$$\mathbf{V}_{Th} = Z_C\mathbf{I} + Z_L\alpha\mathbf{I} = (Z_C + \alpha Z_L)\mathbf{I} = (-j100 + 3 \cdot j100) \cdot (-100) \cdot 10^{-6} = -j20\ \text{mV}$$

Per il calcolo dell'impedenza equivalente di Thevenin si spegne il generatore indipendente di corrente, sostituendolo con un circuito aperto, e, poiché è presente un generatore comandato, si collega un generatore di prova ai morsetti ab. Il circuito risultante diventa



Applicando la KCL al nodo d si ottiene

$$\mathbf{I}_X + \alpha\mathbf{I} = \mathbf{I} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{I}_X}{1-\alpha} = -\frac{\mathbf{I}_X}{2}$$

e la tensione $\mathbf{V}_X$ risulta

$$\mathbf{V}_X = Z_C\mathbf{I} + Z_L\mathbf{I} + R\mathbf{I}_X = (Z_C + Z_L)\mathbf{I} + R\mathbf{I}_X = R\mathbf{I}_X$$

da cui

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_X}{\mathbf{I}_X} = R = 100\ \Omega$$

Si poteva osservare subito che l'impedenza serie di Z_L e Z_C è equivalente ad un corto circuito, evitando così di calcolare $\mathbf{I}$.
La potenza disponibile del generatore è quindi

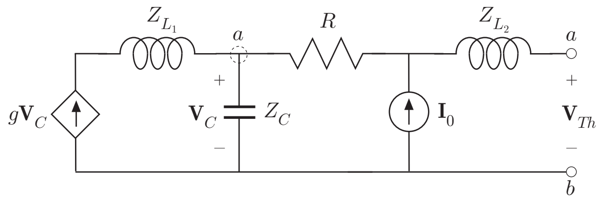
$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{|-j20 \cdot 10^{-3}|^2}{8 \cdot 100} = 0.5\ \mu\text{W}$$

La potenza assorbita dal carico Z_L quando viene collegato ai morsetti ab risulta

$$P_{Z_L} = \frac{4R_L R_{Th}}{|Z_L + Z_{Th}|^2}\,P_d = \frac{4 \cdot 100 \cdot 100}{|100 + j100 + 100|^2}\,P_d = \frac{4}{|2+j|^2}\,P_d = \frac{4}{5}\,P_d = 0.4\ \mu\text{W}$$

Soluzione dell'esercizio 3.41 (testo a pag. 26)

Per il calcolo della tensione di Thevenin si considera il seguente circuito, nel quale i morsetti ab vengono lasciati a vuoto e gli elementi reattivi sono sostituiti dalle corrispondenti impedenze:



Le impedenze degli elementi reattivi sono:

$$\begin{aligned} Z_{L_1} &= j\omega L_1 = j10^{10} \cdot 10 \cdot 10^{-9} = j100\ \Omega \\ Z_{L_2} &= j\omega L_2 = j10^{10} \cdot 5 \cdot 10^{-9} = j50\ \Omega \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{10^{10} \cdot 10^{-12}} = -j100\ \Omega \end{aligned}$$

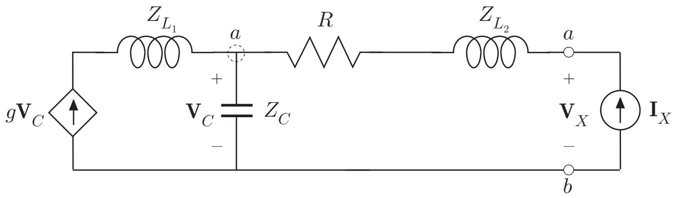
Tenendo conto del fatto che sull'impedenza Z_{L_2} non scorre corrente, applicando la KCL al nodo a si ottiene

$$\mathbf{V}_C = Z_C(g\mathbf{V}_C + \mathbf{I}_0) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{V}_C = \frac{Z_C\mathbf{I}_0}{1 - gZ_C} = \frac{Z_C\mathbf{I}_0}{1+j} = (1-j)\,\frac{Z_C\mathbf{I}_0}{2} = 0.5(-1-j)\ \mathrm{V}$$

La tensione di Thevenin risulta quindi

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_C + R\mathbf{I}_0 = -0.5 - j0.5 + 1.5 = 1 - j0.5\ \mathrm{V}$$

Per il calcolo dell'impedenza equivalente di Thevenin si spegne il generatore indipendente di corrente, sostituendolo con un circuito aperto, e, poiché è presente un generatore comandato, si collega un generatore di prova ai morsetti ab. Il circuito risultante diventa



Applicando la KCL al nodo a si ottiene

$$\mathbf{V}_C = Z_C(g\mathbf{V}_C + \mathbf{I}_X) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{V}_C = \frac{Z_C\mathbf{I}_X}{1 - gZ_C} = \frac{Z_C\mathbf{I}_X}{1+j} = (1-j)\,\frac{Z_C\mathbf{I}_X}{2}$$

La tensione di $\mathbf{V}_X$ risulta quindi

$$\mathbf{V}_X = \mathbf{V}_C + (R + Z_{L_2})\mathbf{I}_X = \left((1-j)\,\frac{Z_C}{2} + R + Z_{L_2}\right)\mathbf{I}_X$$

da cui

$$Z_{Th} = \frac{\mathbf{V}_X}{\mathbf{I}_X} = (1-j)\,\frac{Z_C}{2} + R + Z_{L_2} = -j50 - 50 + 150 + j50 = 100\ \Omega$$

La potenza disponibile del generatore è quindi

$$P_d = \frac{|\mathbf{V}_{Th}|^2}{8R_{Th}} = \frac{|1 - j0.5|^2}{8 \cdot 100} = 1.5625\ \mathrm{mW}$$

La potenza assorbita dal carico Z_L quando viene collegato ai morsetti ab risulta

$$P_{Z_L} = \frac{4R_L R_{Th}}{|Z_L + Z_{Th}|^2}\,P_d = \frac{4 \cdot 200 \cdot 100}{|200 - j200 + 100|^2}\,P_d = \frac{8}{|3 - j2|^2}\,P_d = \frac{8}{13}\,P_d = 0.9615\ \mathrm{mW}$$